

TH G C 29

THÈSES

205142

1978

présentées à

79/1

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

**Félix DARVE**

Ingénieur des Arts et Manufactures

*PREMIÈRE THÈSE*

**Une formulation incrémentale  
des lois rhéologiques  
Application aux sols**

D. 387

*DEUXIÈME THÈSE*

Propositions données par la Faculté

**Approche d'une étude des surfaces de rupture  
en tant que problème de bifurcation**

Soutenues le 26 Juin 1978 devant la Commission d'Examen

M. J.P. GERMAIN

Président

M. P. LE ROY

M. G. GUDEHUS

Rapporteurs

M. P. HABIB

M. P. ANGLÈS D'AURIAC

M. P. STUTZ

Examineurs

GRENOBLE



## S O M M A I R E

	Pages
INTRODUCTION	5
PREMIERE PARTIE : Ecriture incrémentale des lois rhéologiques	
<u>CHAPITRE I</u> - Le principe de déterminisme	11
1.1. Enoncé global et énoncé incrémental	12
1.2. Ecriture incrémentale linéarisée	16
<u>CHAPITRE II</u> - La notion de "zones tensorielles"	20
2.1. Milieux à comportement indépendant des vitesses de sollicitation	20
2.2. Exemple d'un modèle élasto-plastique mono-dimensionnel	24
2.3. Milieux à comportement dépendant des vitesses de sollicitation	27
2.4. Conclusion	29
DEUXIEME PARTIE : Application à la détermination de la loi rhéologique des sols	
<u>CHAPITRE I</u> - La partie élasto-plastique	30
1.1. Hypothèses fondamentales	30
1.2. Ecriture détaillée de la loi	35
1.3. Conclusion	38
<u>CHAPITRE II</u> - Détermination des paramètres d'un matériau granulaire donné	41
2.1. Courbes contrainte-déformation	42
2.2. Courbes de variations de l'indice des vides	43
2.3. Généralisation tridimensionnelle	50
2.4. Conclusion	53
<u>CHAPITRE III</u> - La partie visqueuse	55
3.1. Définition du fluage	55
3.2. Analyse des résultats expérimentaux	57
3.3. Ecriture détaillée de la loi	62
3.4. Conclusion	70
<u>CHAPITRE IV</u> - Détermination des paramètres d'une argile donnée	72
4.1. Partie élasto-plastique	73
4.2. Partie visqueuse	81
4.3. Conclusion	83
<u>CONCLUSION</u> - Scénario-type dans une application pratique de la loi	85

TROISIEME PARTIE : Application de la loi rhéologique sur différents chemins de sollicitation et comparaison avec l'expérience	
<u>CHAPITRE I</u> - Application de la loi rhéologique dans le cas des sables	87
1.1. Comparaison avec les résultats expérimentaux de LADE et DUNCAN	87
1.2. Comparaison avec les résultats expérimentaux de GOLDSCHIEDER et GUDEHUS	97
<u>CHAPITRE II</u> - Application de la loi rhéologique dans le cas des argiles	105
2.1. Comparaison avec les résultats expérimentaux de HENKEL et PARRY	105
2.2. Comparaison avec les résultats expérimentaux de LADE et MUSANTE	109
<u>CHAPITRE III</u> - Application de la loi rhéologique dans le cas de cycles	134
3.1. Cycles triaxiaux de révolution, isotropes, oedométriques	134
3.2. La liquéfaction des sols	141
QUATRIEME PARTIE : Application de la loi rhéologique à la détermination des surfaces de rupture	
CONCLUSION GENERALE	158
REFERENCES	160

## INTRODUCTION

Je travaille dans une équipe de recherche (l'équipe M.A.S.T.E.C. : Mécanique Appliquée aux Sols : Théorie, Expérimentation et Calculs), qui a défini ses axes scientifiques comme un tout cohérent. Cette thèse représente ainsi une étape dans l'avancée du travail du deuxième maillon de la chaîne pouvant concrétiser la démarche scientifique de l'équipe. Quelle chaîne ? Quel maillon ? Quelle étape ?

-----

Quelle chaîne ? Résoudre un problème de mécanique des sols, c'est, en général, calculer un ouvrage reposant sur du sol ou construit avec du sol. Chaque type d'ouvrages soulève des questions spécifiques qui se posent soit en termes de tassements, soit en termes de ruptures. Ainsi se sont multipliés les spécialistes et les écoles de pensées pour les différents types d'ouvrages (fondations superficielles, pieux, murs de soutènement, barrages, etc ...). Cette sectorisation s'est faite au détriment d'une vision globale de la mécanique des sols et a fait s'obscurcir l'unité profonde, liant les différents problèmes.

L'équipe MASTEC a ainsi tenté de redéfinir une démarche globalisante. Le point de départ, la base de cette démarche doit évidemment être constitué par l'étude du sol. Le premier maillon est donc l'analyse du comportement mécanique d'un sol, la caractérisation de ses propriétés mécaniques en petites comme en grandes déformations, de type élasto-plastiques comme visqueuses. Sur la base de cette étude expérimentale, il est possible de dégager des hypothèses réalistes permettant de formuler la loi rhéologique du sol : voici le deuxième maillon. Pour le calcul d'un ouvrage, dont les conditions aux limites sont complexes et dont le sol influencé est hétérogène, il faut disposer de programmes numériques puissants. Le troisième maillon s'est préoccupé de la mise au point d'algorithmes et de programmes basés sur la Méthode des Eléments Finis , bien adaptés à la

mécanique des sols et pouvant recevoir la loi rhéologique développée en amont. Et nous sommes ramenés à l'expérience par le quatrième maillon qui se propose de comparer les résultats trouvés avec des mesures réalisées sur des ouvrages in-situ ou en laboratoire et d'interpréter ces résultats pour en déduire des règles de calcul pratiques.

-----

Quel maillon ? Cette thèse s'inscrit dans le cadre du deuxième maillon, qui est donc constitué par l'étude et la détermination de la loi rhéologique des sols. Trois voies théoriques s'offrent pour l'étude des lois non-visqueuses.

La première voie peut rassembler les formulations de type élastique non-linéaire, en outre isotropes en général sur un plan incrémental (ce qui est physiquement incorrect : une histoire non-isotrope en déformations induit une forte anisotropie de comportement dans le cas des sols). On a cherché à faire dépendre le module d'Young et le coefficient de Poisson d'abord uniquement de la contrainte moyenne, puis en outre du déviateur de contraintes. Une formulation de ce type, couramment utilisée en génie civil, est celle que DUNCAN a développé à BERKELEY (21). Les limitations de ce type de lois (réversibilité et isotropie) sont maintenant bien connues et ont, entre autres, été exposées par des chercheurs de l'équipe de DUNCAN (OZAWA (43), VAGNERON et al. (61) ). A cette première voie se rattachent également les théories hypo-élastiques. OWEN et WILLIAMS (44) ont en effet montré que tout matériau hypo-élastique était non-dissipatif. Le modèle proposé par STUTZ (57) est sans doute le plus élaboré dans ce cadre-là.

La seconde voie recouvre les formulations élasto-plastiques obtenues par décomposition de l'incrément de déformation en une partie élastique et une partie plastique. Si ces lois présentent une grande rigueur formelle et ont été largement employées pour décrire le comportement des métaux, on sait qu'elles s'adaptent mal aux sols. En effet, un sol vierge ne possède pas de domaine élastique proprement dit : il existe des irréversibilités dès les plus petites déformations. Par ailleurs, le sol est un matériau non-standard. La prise en compte de variations de volume réalistes en plasticité est donc particulièrement délicate. Le critère de rupture, dépendant de la contrainte intermédiaire, pose aussi des problèmes spécifiques. GUDEHUS (27) présente un exposé d'ensemble. NAYAK et ZIENKIEWICZ (42) donnent une formulation très générale et soulèvent les difficultés que pose l'introduction de lois élasto-plastiques dans des programmes numériques utilisant la méthode des éléments finis. LADE et DUNCAN (38) exposent leur propre formulation élasto-plastique.

Un nouveau développement des formalisations élasto-plastiques pourrait apparaître avec l'introduction de doubles potentiels plastiques : nous citerons la tentative de LADE (37).

La troisième voie est constituée par les formulations incrémentales, reposant sur une décomposition du chemin de sollicitation élémentaire par application du principe de superposition des sollicitations incrémentales. L'exemple le plus connu en mécanique des sols en est donné par la loi incrémentale élasto-plastique pour matériaux argileux saturés, remaniés de ROSCOE, SCHOFIELD et WROTH (50). La méthode générale aboutit à des formulations très souples et très commodes d'emploi. Leur défaut est constitué par la difficulté d'apprécier la qualité de l'approximation réalisée au niveau de la décomposition du chemin élémentaire. C'est, fondamentalement, l'introduction de la notion de "zones tensorielles" qui nous a permis de clarifier cette question. Et c'est la définition de multiples zones tensorielles qui nous a permis d'aboutir à une loi à la fois complète (quant aux multiples caractéristiques du comportement mécanique qu'elle décrit) et générale (quant à la vaste gamme de chemins de sollicitations sur lesquels sa validité a été vérifiée).

-----

Quelle étape ? Ayant donc pour objectif de déterminer la loi rhéologique des sols sous forme incrémentale et nous étant situés dans cette troisième voie, précisons un peu notre démarche scientifique.

Le principe de déterminisme, énoncé à un niveau incrémental, permet de dégager l'existence d'une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Mais, il n'est possible d'effectuer qu'une linéarisation "par branches" de cette écriture incrémentale. A chaque zone tensorielle est ainsi associée une linéarisation différente. Rappelons qu'une linéarisation unique ne permet de décrire qu'un comportement élastique ou hypo-élastique.

La décomposition du chemin élémentaire et le "principe" de superposition n'apparaissent en fait que comme une conséquence nécessaire de deux hypothèses supplémentaires : l'orthotropie de la loi incrémentale et la définition de huit zones tensorielles. Nous pouvons en outre donner avec précision le domaine de validité du principe de superposition, qui n'apparaît plus comme un pré-supposé.

Reprenant des formulations analytiques proposées dans notre thèse de docteur-ingénieur (DARVE (17) ), nous pouvons expliciter la loi rhéologique incrémentale d'un sable. Ayant montré sur un plan théorique que la linéarisation de la loi incrémentale d'un milieu visco-élasto-plastique permettait de ramener l'étude générale de la partie visqueuse de la loi à la seule détermination de la vitesse de fluage du matériau, nous avons pu expliciter la loi complète d'une argile en donnant une expression de cette vitesse de fluage.

Une caractéristique de ce travail est constituée, par ailleurs, par notre souci constant de nous référer systématiquement à la réalité expérimentale. Ainsi, c'est à la suite d'une analyse des résultats expérimentaux caractérisant le comportement mécanique d'un sol, que nous avons tenté de dégager les hypothèses nécessaires à une formulation approchée de la loi rhéologique. Cette formulation effectuée, elle nous permet de calculer théoriquement les réponses du matériau à des sollicitations, évidemment différentes de celles ayant été utilisées pour le calcul des paramètres du matériau considéré. Un retour à l'expérience par confrontation de ces calculs avec des mesures expérimentales permet de préciser la validité de la loi, c'est-à-dire la qualité des hypothèses faites.

L'appareil permettant de suivre la plus vaste gamme de chemins de sollicitation en mécanique des sols est, à l'heure actuelle, constitué par la presse tri-dimensionnelle. Nous avons ainsi effectué de nombreuses comparaisons entre résultats théoriques et mesures expérimentales réalisées sur ce type d'appareils.

Nous avons aussi simulé des aller-retour et comparé les résultats aux expériences pour différents chemins de sollicitation.

Enfin, nous donnons une application de la loi rhéologique incrémentale proposée dans une toute autre direction : celle de la détermination des surfaces de rupture, observées en mécanique des sols dans le cas de cisaillements de matériaux denses.

Dans le cadre de la théorie des catastrophes de bifurcation (THOM (58)), la naissance d'une surface de rupture peut s'interpréter comme résultant d'une instabilité due à la loi rhéologique même du matériau. Le critère de rupture de HILL (32) et de RICE (48), appliqué à notre loi, nous a permis de déterminer la forme, le nombre et l'orientation de ces surfaces de rupture dans trois cas homogènes simples (matériau bidimensionnel, déformation plane, problème avec symétrie de révolution).

Venant d'en présenter les quelques idées-force, nous allons rapidement commenter le plan choisi pour exposer ce travail.

Dans une première partie, nous nous sommes attachés à mettre en place le cadre théorique global, dans lequel se situe l'ensemble de notre démarche. Les deux chapitres de cette première partie développent ainsi les deux concepts à la base de notre réflexion : l'écriture incrémentale de la loi rhéologique d'un matériau et la notion de "zones tensorielles".

Ces deux outils ayant été définis et analysés, nous les appliquons dans une deuxième partie à l'étude de la loi rhéologique des sols. La formulation incrémentale des lois rhéologiques nous ayant permis de séparer une déformation de type élasto-plastique d'une déformation de type visqueux, les deux premiers chapitres de cette deuxième partie ont trait à la détermination de la loi d'un sable (matériau non-visqueux), tandis que les deux suivants portent sur les argiles (visqueuses). Dans chacune de ces deux études, nous nous sommes d'abord (chapitres I et III) préoccupés de dégager les hypothèses supplémentaires nécessaires à l'explicitation de la loi puis d'en donner l'écriture détaillée, les seconds volets (les chapitres II et IV) étant constitués par la question de la détermination des paramètres respectifs non-visqueux et visqueux. Un cinquième chapitre de conclusion rassemble les différentes étapes de la démarche depuis les essais expérimentaux de détermination des paramètres jusqu'au calcul du chemin de réponse du matériau à un chemin de sollicitation quelconque donné.

Notons que si, dans cette thèse, nous nous sommes limités à une application au cas des sols, les deux notions d'écriture incrémentale et de zones tensorielles sont beaucoup plus largement applicables. Ainsi, DESRUES étudie à l'Institut de Mécanique de Grenoble une formulation incrémentale pour la loi rhéologique de la neige en collaboration avec le Centre d'Etudes de la Neige de Grenoble, tandis que ROBINET à l'Ecole Centrale Lyonnaise mène une étude incrémentale de la rhéologie des bétons en collaboration avec l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

Dans une troisième partie, nous donnons des exemples d'intégration de la loi rhéologique incrémentale, explicitée dans la deuxième partie, sur différents chemins de sollicitation et pour différents sols, les courbes théoriques obtenues étant comparées aux mesures expérimentales. Le premier chapitre est ainsi consacré au cas des sables. La comparaison théorie-expériences a été effectuée en premier lieu pour des chemins isotropes, en contraintes planes et en déformations planes avec un sable à forte et faible densité, les expériences ayant été réalisées par

LADE et DUNCAN (64) sur leur presse tri-dimensionnelle. En second lieu, la comparaison a porté sur des chemins rectilignes en déformation et rencontrant la surface de rupture plastique (expériences effectuées par GOLDSCHIEDER et GUDEHUS (26) sur leur presse triaxiale). Cette dernière comparaison a, en particulier, mis en évidence que cette loi permettait de décrire correctement le caractère non-standard de la rupture plastique d'un sol.

Le second chapitre traite du cas des argiles. Les paramètres ayant été déterminés sur des essais triaxiaux drainés, la comparaison théorie-expérience a été effectuée pour des essais de révolution non-drainés en compression-extension (essais de HENKEL (30) et PARRY (45) sur l'argile de WEALD). En second lieu, la comparaison a porté sur des essais tridimensionnels non-drainés tels que  $(\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$  reste constant (essais de LADE et MUSANTE (39) sur l'argile de GRUNDITE avec une presse triaxiale).

Enfin, un troisième chapitre présente des exemples de cycles de "charge-décharge" et apporte quelques premiers éléments d'analyse au problème fort important de la liquéfaction des sols.

La quatrième et dernière partie de ce travail est consacrée à l'application de la loi rhéologique proposée à la détermination des surfaces de rupture se développant dans les sols denses cisailés.

Le premier chapitre met en place le cadre théorique constitué par quelques éléments indispensables de la théorie des catastrophes et par un critère de rupture permettant le calcul des directions locales des surfaces de glissement.

Dans le second chapitre, nous explicitons alors les résultats obtenus en déterminant les directions des surfaces de rupture possibles dans trois cas géométriquement simples : les cas du matériau bidimensionnel, de la déformation plane et du problème axi-symétrique.

-----

Nous ferons enfin une remarque de pure forme. Si, de manière très générale, je me suis dissimulé dans tout ce travail derrière le "nous" de l'objectivité scientifique (bien que je ne sois pas dupe du fait qu'un chercheur intervienne nécessairement, même dans le domaine scientifique, avec l'ensemble de ses convictions en tête), de temps à autre j'ai employé le "je" pour insister simplement sur une certaine connivence que je souhaitais alors parvenir à établir avec le lecteur.

PREMIERE PARTIE

ECRITURE INCREMENTALE DES LOIS RHEOLOGIQUES

## CHAPITRE I

### LE PRINCIPE DE DETERMINISME

Nous allons introduire dans ce chapitre la notion de "lois rhéologiques" et montrer comment on peut en donner une formulation globale ou bien incrémentale. Puis nous dégagerons l'intérêt d'une écriture incrémentale linéarisée.

Précisons, tout d'abord, que nous ne nous intéresserons qu'à des corps vérifiant "le principe d'action locale" : seul le mouvement des points matériels situés dans un voisinage arbitrairement petit de la particule matérielle considérée intervient sur le comportement rhéologique de cette particule.

Par ailleurs, une configuration de référence ayant été choisie dans un référentiel donné, nous supposons que la connaissance des seules dérivées premières des coordonnées actuelles de la particule par rapport à ses coordonnées dans la configuration de référence suffit pour décrire la "déformation" en ce point : c'est ce qui permet de caractériser cette "déformation" par une transformation linéaire tangente  $T(t)$ , menant à la définition d'un tenseur des déformations.

Nous sommes amenés ainsi à ne considérer que des milieux "matériellement simples". La détermination de leur loi de comportement pourra être effectuée à partir de la seule considération d'échantillons homogènes.

Enfin, nous n'étudierons pas l'influence de la température sur le comportement de ces corps. Nous nous limiterons donc aux effets purement mécaniques, la température n'intervenant que pour quelques généralisations.

### 1.1 - Énoncé général et énoncé incrémental du principe de déterminisme

Considérons un échantillon homogène(1) d'un certain matériau.

Si nous lui faisons subir une certaine histoire de sollicitation (qui sera représentée par un chemin en contraintes, en déformations (2), ou encore mixte, gradué en temps), l'échantillon se comportera d'une manière déterminée unique qui lui est propre. Cette réponse du matériau sera définie par un chemin en déformations, en contraintes, ou mixte, gradué en temps.

Cette proposition, toujours vérifiée par l'expérience, ne fait que traduire un certain "principe de déterminisme" très général (3).

La notion de "chemin de sollicitation" et de "chemin de réponse" est plus délicate à préciser. Parmi les 12 variables permettant d'exprimer le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations pures dans un certain référentiel, il nous semble qu'un chemin de sollicitation peut être défini par les variations dans le temps de 6 variables quelconques, dans la mesure où n'interviennent pas une contrainte et une déformation relatives à la même direction. Le chemin de réponse est alors représenté par les variations dans le temps des 6 autres variables. Certains chemins de sollicitation sont, bien entendu, physiquement impossibles (par exemple, les chemins situés hors de la surface limite de plasticité).

Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser les notions "d'espace des sollicitations" et "d'espace des réponses". Ce sont ainsi des espaces à 6 dimensions qui sont définis à partir de la classe des chemins de sollicitation considérée. Dès lors, un chemin de sollicitation sera représenté par une certaine courbe, graduée en temps, dans l'espace des sollicitations ; de même, le chemin de réponse sera défini par une courbe, graduée en temps, dans l'espace des réponses.

Le principe de déterminisme implique ainsi, qu'à tout chemin de sollicitation physiquement admissible, est associé un chemin de réponse déterminé unique. Cela se traduit par l'existence d'une loi rhéologique globale reliant le chemin de réponse au chemin de sollicitation.

- 
- (1) Il s'agit plus précisément d'une homogénéité quant aux propriétés mécaniques.
  - (2) Dans le cas général, il faut utiliser la transformation linéaire tangente  $T(t)$  faisant passer de la configuration de référence à la configuration actuelle.
  - (3) Nous verrons cependant, dans la quatrième partie, qu'il existe des phénomènes "plus ou moins déterminés".

Si l'on veut raisonner en termes de contrainte-déformation et non plus en termes de chemin de sollicitation-chemin de réponse, il nous faut introduire une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  reliant la réponse  $r(t)$  à l'instant  $t$  actuel à toute l'histoire de la sollicitation  $s(\tau)$  de  $t_0$  à  $t$  :

$$r(t) = \mathcal{F} \left( s(\tau) \right) \quad \text{ou} \quad \sigma(t) = \mathcal{F} \left( T(\tau) \right)$$

$$t_0 \leq \tau \leq t \quad . \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

Dans le cas de lois rhéologiques simples, cette fonctionnelle dégénère : avec l'hypothèse du corps élastique, elle devient une simple fonction (par existence d'une relation biunivoque entre états de contrainte et de déformation) ; avec l'hypothèse du corps rigide - parfaitement plastique, la fonctionnelle se décompose en un critère de plasticité et une règle d'écoulement ; en viscosité pure sans effet de mémoire, vitesse de déformation et état de contrainte sont reliés par une fonction.

Dans le cas général, l'explicitation de la fonctionnelle est extrêmement difficile. En particulier, pour les matériaux non-visqueux, OWEN et WILLIAMS (44) ont démontré que la seule hypothèse de différentiabilité de  $\mathcal{F}$  impliquait le caractère élastique (non-dissipatif) du milieu. Il semble donc que cette fonctionnelle soit singulière en chacun de ses points dans le cas d'un milieu élasto-plastique. Nous aurons l'occasion de préciser cette question dans le prochain chapitre en introduisant la notion de "zones tensorielles".

Etudions maintenant l'application du principe de déterminisme au niveau incrémental.

Soit un échantillon homogène ayant subi une certaine histoire de sollicitation.

Si on lui applique une "petite" sollicitation pendant un incrément de temps  $dt$ , la "petite" réponse est déterminée unique. Cela se traduit par l'existence d'une fonction  $F$  reliant incrément de contrainte, incrément de déformation et incrément de temps.

$$F(d\varepsilon, d\sigma, dt) = 0 \quad (1)$$

Cette fonction  $F$  dépend de toute l'histoire antérieure de l'échantillon et de ses états actuels de contrainte et de déformation.

Nous avons ici la formulation incrémentale des lois de comportement.

Si, de manière tout à fait générale, on devait faire intervenir la température, le principe de déterminisme dans sa forme incrémentale s'énoncerait :

Si on applique à un échantillon homogène une "petite" sollicitation et une "petite" variation de température  $dT$  pendant l'incrément de temps  $dt$ , la "petite" réponse de l'échantillon est déterminée unique.

Il existe donc une fonction  $F$  :

$$F(d\varepsilon, d\sigma, dt, dT) = 0$$

Dans cette formulation,  $dT$  est imposé par l'expérimentateur par l'apport d'une certaine quantité élémentaire de chaleur. Si l'on voulait, par contre, déterminer la variation de température induite par un certain chemin de sollicitation, il faudrait introduire une seconde loi (loi d'état complémentaire). Par ailleurs, dans le cas d'expériences hétérogènes, la connaissance de la loi de conduction thermique du milieu est indispensable.

Avant de poursuivre, nous allons préciser les définitions des tenseurs contrainte et déformation choisis.

Pour caractériser la déformation, nous utilisons le tenseur des déformations de HENCKY :  $\varepsilon = \text{Log}(L)$

où  $L$  est la déformation pure après rotation (ou : déformation pure à gauche).

Rappelons les formules classiques de décomposition de la transformation linéaire tangente  $T$  :

$$T = R L' = L R$$

où  $R$  est une matrice orthogonale représentant la rotation et  $L$  et  $L'$  deux matrices symétriques, définies positives, représentant une déformation pure.

Si nous notons  $\tilde{T}$  la transposée de  $T$ , nous pouvons écrire :

$$T \tilde{T} = L R (\tilde{L} R) = L R \tilde{R} L = L R R^{-1} L = L^2$$

$$\text{D'où : } \varepsilon = 1/2 \text{ Log } (T \tilde{T})$$

Il se pose ici le problème de la définition du logarithme d'une matrice symétrique, définie positive. Appelons  $A$  la matrice de passage permettant de diagonaliser  $L$  et représentant une rotation :

$$ALA^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & \lambda_j \end{bmatrix} = D \quad \text{avec } \lambda_j > 0 ; i, j = 1, 2, 3$$

(sans sommation sur les indices)

$$\text{Nous posons : } \text{Log } D = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \text{ Log } \lambda_j \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } \text{Log } L = \text{Log } A^{-1} D A = A^{-1} (\text{Log } D) A$$

Par ailleurs, nous savons que les valeurs propres de  $L$  (par définition :  $LV^0 = \lambda V^0 = V$ ) représentent des dilatations relatives :

$$\lambda_j = \frac{l_j}{l_j^0}$$

En axes principaux, nous pouvons donc expliciter facilement  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & \text{Log } \frac{l_j^0}{l_j} \end{bmatrix},$$

la convention choisie pour le signe étant celle en usage en mécanique des sols (les diminutions de longueur sont notées positivement).

D'après MACVEAN (40), le tenseur des contraintes associé à ce tenseur des déformations est le tenseur (classique) de CAUCHY.

Le travail massique élémentaire est, en effet, égal à :

$$dW = 1/\rho \sigma_{ij} d\varepsilon_{ji}^{(1)},$$

où  $\rho$  est la masse volumique actuelle,  $[\sigma_{ij}]$  le tenseur des contraintes de CAUCHY, et  $[\varepsilon_{ij}]$  le tenseur des déformations de HENCKY à gauche. Les contraintes seront notées positivement, lorsqu'il s'agit de compressions.

Les incréments  $d\varepsilon$  et  $d\sigma$  sont des accroissements des états de déformation et de contrainte, pris en axes rhéologiques (ou co-rotationnels)

---

(1) Sauf mention contraire, nous utilisons la convention d'Einstein de sommation sur les indices.

(ANGLES D'AURIAC (1)). L'objectivité de la loi de comportement écrite est dès lors assurée.

L'intérêt de la définition choisie pour le tenseur des déformations  $\mathcal{E}$  réside, en particulier, dans le fait que l'accroissement  $d\mathcal{E}$  s'interprête facilement en axes principaux :

$$d\mathcal{E} = \left[ -\delta_{ij} \frac{dl_j}{l_j} \right]$$

C'est la déformation infinitésimale définie à partir de la configuration actuelle.

Nous pouvons remarquer que  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  coïncide avec la vitesse de déformation pure (définie comme la partie symétrique de la vitesse de transformation) dans deux cas. D'une part, si les déformations sont infinitésimales, nous savons que la vitesse de déformation se confond avec la dérivée du tenseur des déformations eulériennes, auquel se réduit  $\text{Log } \mathbf{L}$  quand  $\mathbf{L}$  est voisin de la matrice unité.

D'autre part, dans les axes principaux de la déformation on a :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \left[ -\delta_{ij} \frac{1}{l_j} \frac{dl_j}{dt} \right],$$

qui est bien l'expression de la vitesse de déformation dans ces axes.

## 1.2 - Ecriture incrémentale linéarisée

Nous avons vu l'écriture incrémentale générale des lois de comportement :

$$(1) \quad \mathbf{F}(d\mathcal{E}, d\sigma, dt) = 0, \quad \text{où } \mathbf{F} \text{ est une fonction dépendant de l'histoire de la sollicitation.}$$

Cette fonction  $\mathbf{F}$  relie des quantités infiniment petites. Si elle était régulière à l'origine, on pourrait en donner un développement limité au premier ordre :

$$d\mathcal{E} = \mathbf{M} d\sigma + \mathbf{C} dt \quad (2)$$

En fait, nous verrons dans le prochain chapitre que, si cette fonction  $F$  est régulière en élasticité et même en visco-élasticité, cette hypothèse de régularité ne permet pas de décrire un comportement plastique. Pour l'instant, nous nous contenterons de dire que cette linéarisation a été effectuée dans un certain domaine comprenant l'origine (qui pourrait se réduire à la limite à une simple demi-droite).

Interprétons physiquement la relation (2). La réponse instantanée à une sollicitation infiniment rapide ( $dt = 0$ ) est donnée par :  $M d\sigma$ . Or l'expérience physique montre que dans ce cas la viscosité du milieu n'intervient pas.  $M d\sigma$  représente donc la partie élasto-plastique (1) de la déformation élémentaire.

Par ailleurs, si nous effectuons des essais de fluage ( $\sigma = \text{constante}$ , soit :  $d\sigma = 0$ ), la réponse du milieu est fournie par  $C dt$ , qui s'interprète donc comme étant la partie visqueuse de la déformation. Nous pouvons même caractériser  $C$  comme une vitesse de fluage.

Lors d'une expérience de relaxation, ( $\varepsilon = \text{constante}$ , soit  $d\varepsilon = 0$ ) la réponse du matériau est telle que :  $M d\sigma + C dt = 0$ , soit :

$$d\sigma = -M^{-1} C dt$$

Notons qualitativement, que plus un matériau aura un module d'Young (quand on peut le définir) élevé, plus sa vitesse de relaxation en contrainte sera forte (en valeur absolue), résultat classique par ailleurs.

Si nous avons voulu prendre en compte l'influence de la température, nous aurions effectué une linéarisation du type :

$$d\varepsilon = M d\sigma + C dt + K dT,$$

où  $K$  est une matrice symétrique permettant de décrire les déformations instantanées du milieu, sous état de contrainte constant, quand la température varie.

Avant de clore ce chapitre, nous allons préciser la notation indicielle que nous avons choisie. La relation (2) s'écrit de manière explicite :

(1) Nous caractérisons par "élasto-plastique" un comportement indépendant des vitesses de sollicitation, en partie réversible, auquel on peut appliquer la notion de surface limite en contraintes.

$$d\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} d\sigma_{kl} + C_{ij} dt \quad (i,j,k,l = 1,2,3)$$

Cette notation est lourde, car elle ne tient pas compte des deux symétries en  $i, j$  et  $k, l$  ; elle est peu commode, puisqu'elle ne permet pas une explicitation formelle agréable du tenseur à 4 indices  $M_{ijkl}$ .

Reprenant une proposition de ANGLES D'AURIAC (2), nous associons aux bivalents symétriques  $[d\varepsilon_{ij}]$  et  $[d\sigma_{kl}]$ , définis dans un espace à 3 dimensions, les monovalents  $[d\varepsilon_\alpha]$  et  $[d\sigma_\beta]$  définis dans un espace à 6 dimensions :

$$[d\varepsilon_\alpha] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} ; \quad [d\sigma_\beta] = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2} d\sigma_{23} \\ \sqrt{2} d\sigma_{31} \\ \sqrt{2} d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $\sqrt{2}$ , qui interviennent dans l'expression des 3 derniers éléments des deux vecteurs colonnes, permettent de conserver la même métrique dans  $E_3$  et dans  $E_6$ .

Par exemple, l'expression du travail élémentaire reste inchangée :

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ji} \quad \text{dans } E_3 \\ &= \frac{1}{\rho} \sigma_\alpha d\varepsilon_\alpha \quad \text{dans } E_6 . \end{aligned}$$

Nous travaillerons donc par la suite sur une écriture incrémentale de la forme :

$$d\varepsilon_\alpha = M_{\alpha\beta} d\sigma_\beta + C_\alpha dt \quad (3) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 6)$$

$M$  et  $C$  dépendent de l'histoire de la sollicitation et des états de contrainte et de déformation actuels. Nous allons voir dans le prochain chapitre que, pour les matériaux dissipatifs non-visqueux, la formulation linéaire :  $d\varepsilon = M d\sigma$  n'est en fait valable que sur la demi-droite portant  $d\sigma$ .  $M$  dépend donc, de plus, de la direction du vecteur  $d\sigma$  : c'est précisément cette dépendance directionnelle de la matrice  $M$  (traduisant la non-linéarité incrémentale au sens de GUDEHUS, KOLYMBAS (70) ), que nous allons maintenant étudier.

---

## CHAPITRE II

### LA NOTION DE "ZONES TENSORIELLES"

Reprenant l'équation (1) du chapitre I :  $F(d\varepsilon, d\sigma, dt) = 0$ , nous allons étudier en détail dans quelle mesure une linéarisation de la fonction  $F$  permet de décrire un comportement visco-élasto-plastique. Nous distinguerons pour cela, le cas des milieux visqueux et non-visqueux.

#### 2.1 - Milieux à comportement indépendant des vitesses de sollicitation

C'est le cas des milieux non-visqueux. La "petite" réponse de ces corps est indépendante de la vitesse avec laquelle la "petite" sollicitation est effectuée. L'écriture incrémentale générale de la loi rhéologique de tels milieux ne fera donc pas intervenir l'incrément de temps, soit :  $F(d\varepsilon, d\sigma) = 0$  (1)  
Rappelons que  $F$  dépend de toute l'histoire de la sollicitation.

Une seconde conséquence de l'hypothèse d'un comportement indépendant des vitesses de sollicitation est que, quel que soit le réel  $\lambda$  positif, on a :

$$F(\lambda d\varepsilon, \lambda d\sigma) = 0$$

La fonction  $F$  est donc homogène.

Si l'on peut exprimer  $d\varepsilon$  en fonction de  $d\sigma$  :  $d\varepsilon = G(d\sigma)$ , quel que soit le réel  $\lambda$  positif, on aura  $G(\lambda d\sigma) = \lambda G(d\sigma)$ . Par conséquent, la fonction  $G$  est linéaire sur toute la demi-droite portant  $d\sigma$  :  $d\varepsilon = M d\sigma$  (2)  
Soit :

$$d\varepsilon_\alpha = M_{\alpha\beta} d\sigma_\beta$$

Nous associons ainsi à toute direction orientée de l'espace des sollicitations incrémentales une certaine valeur de la matrice  $M$ .

Considérons maintenant le vecteur opposé :  $-d\sigma$ . Il représente une certaine sollicitation incrémentale. Appliquons-la à un échantillon homogène du milieu élasto-plastique étudié. Expérimentalement, nous savons que le vecteur

représentant la "petite" réponse ne sera pas égal au vecteur réponse opposé  $-d\varepsilon$  par suite du caractère en partie irréversible des déformations (provenant du comportement plastique du matériau). La matrice  $M$  ne conserve donc pas la même valeur pour deux vecteurs de sollicitation incrémentale opposés.

La fonction  $F$  n'est donc pas strictement linéaire et la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  représentant la loi rhéologique globale est singulière en chacun de ses points.

Dans le cas des milieux purement élastiques, au contraire, contrainte et déformation sont reliées de manière biunivoque par une simple fonction. La valeur de la matrice  $M$  est donc déterminée unique par l'histoire de la sollicitation antérieure.

Nous venons de montrer que, dans le cas d'un comportement irréversible par plasticité, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  était singulière et la valeur de  $M$  non-déterminée unique par l'histoire de la sollicitation antérieure.

OWEN et WILLIAMS (44) ont, par ailleurs, démontré théoriquement la réciproque. Leurs résultats nous semblent d'une portée théorique suffisamment importante pour devoir être rappelés ici.

Une fonctionnelle est dite "équilibrée" (equilibrated), si elle est différentiable et invariante quand la sollicitation est maintenue constante dans le temps.

(Remarque : la condition d'invariance coïncide pratiquement avec la condition de non-viscosité).

Théorème 1 : Si la fonctionnelle contrainte est équilibrée, la vitesse de contrainte est une fonction linéaire de la vitesse de déformation.

L'opérateur linéaire reliant ces deux vitesses est appelé : "réponse instantanée" (instantaneous response).

Théorème 2 : Si la fonctionnelle réponse est équilibrée, le matériau considéré est non-dissipatif (no internal dissipation).

Théorème 3 : Si la fonctionnelle contrainte est "lisse" (smooth) et indépendante de la vitesse de sollicitation (rate-independent) (elle est donc équilibrée), le milieu est hypo-élastique si et seulement si la réponse instantanée n'est fonction que de la contrainte.

Le théorème 2 implique pratiquement que tout matériau non-visqueux, dont la loi rhéologique est représentée par une fonctionnelle différentiable, est un matériau élastique.

Le problème de la dépendance directionnelle de la matrice  $M$  nous paraît bien être un des problèmes-clefs à résoudre pour décrire correctement un comportement élasto-plastique. Si l'on ignore cette dépendance, on ne peut que prendre en compte un comportement élastique. C'est la critique majeure qui doit être faite à l'hypo-élasticité.

C'est à préciser encore un peu cette dépendance directionnelle de  $M$  que nous allons nous attacher maintenant.

De manière tout à fait générale, une certaine valeur de la matrice  $M$  est attachée à toute (1) demi-droite de l'espace (à six dimensions) des sollicitations incrémentales  $d\sigma$  à la suite d'une certaine histoire de la sollicitation. A tout état actuel en contrainte et en déformation, on pourrait ainsi associer une infinité de valeurs de la matrice  $M$  suivant la direction du vecteur  $d\sigma$ . La linéarisation effectuée (cf équation (2)) perd en partie son intérêt.

En fait, nous pouvons supposer que ce changement de valeur de la matrice  $M$ , qui s'effectue de manière progressive et continue avec la direction de  $d\sigma$ , est décrit de manière satisfaisante (mais approchée) par un nombre fini (suffisamment grand) de valeurs distinctes pour  $M$ .

A chaque valeur de  $M$  pourra être alors associé un certain domaine dans l'espace des vecteurs  $d\sigma$ . Ces domaines sont constitués par des ensembles de demi-droites de sommet l'origine : ce sont donc des hyper-cônes adjacents, ayant pour sommet commun l'origine et formant une partition de l'espace des vecteurs  $d\sigma$ .

Au passage de la frontière commune à deux ou plusieurs domaines, la continuité de la réponse devra être assurée pour des raisons physiques. Cela

---

(1) Tant que la rupture plastique n'a pas été atteinte.

implique, en particulier, que, sur la frontière elle-même, la réponse du matériau soit identique quelle que soit la valeur de la matrice  $M$  associée aux domaines adjacents à cette frontière que l'on considère.

Dans l'un de ces domaines, auxquels est associée une même valeur de la matrice  $M$ , la relation entre  $d\varepsilon$  et  $d\sigma$  est linéaire. Pour cette raison, nous avons appelé avec ANGLES D'AURIAC (3) ces domaines des : "zones tensorielles"

Dans le cas des milieux élastiques, nous avons vu qu'il n'existait qu'une seule zone tensorielle.

Les modèles élasto-plastiques classiques, où l'on distingue la charge et la décharge par un certain critère, possèdent deux zones. Il existe deux déterminations distinctes pour la matrice  $M$ .

Dans le cas de notre propre travail, développé dans la deuxième partie, nous verrons comment nous avons défini huit zones, associées à huit déterminations de la matrice  $M$ . Si le nombre de zones est strictement supérieur à 2, nous ne pouvons plus définir de manière générale les notions de "charge" et de "décharge", ce qui correspond bien à la réalité expérimentale dans le cas des sols.

Enfin, nous allons encore étudier dans ce paragraphe le cas particulier du corps rigide - parfaitement plastique.

Pour cela, il nous faut considérer la relation (2) sous sa forme inverse :  $d\sigma = N d\varepsilon$ , puisque la matrice  $M$  n'est plus définie.

En plasticité parfaite, l'écoulement indéfini du matériau se produit sous état de contrainte constant. Par conséquent, le vecteur  $d\sigma$  doit être identiquement nul, sans que  $d\varepsilon$  ne le soit.

Le système de six équations à six inconnues :  $N d\varepsilon = 0$  ne doit donc pas être de CRAMER.

Une condition nécessaire est que le déterminant du système soit nul :  $\det N = 0$ , équation qui est à interpréter comme étant un critère de plasticité.

Si le système  $N d\varepsilon = 0$  est de rang 5 (c'est-à-dire si l'on peut trouver un sous-déterminant du système non nul d'ordre 5), il existera une infinité

de vecteurs  $d\varepsilon$  solutions tous déterminés à un facteur multiplicatif près : c'est la direction du vecteur  $d\varepsilon$  qui sera en fait parfaitement définie.

La condition  $N d\varepsilon = 0$  avec  $\det N = 0$  doit s'interpréter comme étant une règle d'écoulement.

La forme incrémentale :  $d\sigma = N d\varepsilon$  permet donc de décrire un écoulement plastique parfait. La forme inverse :  $d\varepsilon = M d\sigma$  ne le permet en toute rigueur pas, puisque la matrice  $N$  n'est pas inversible : certains éléments de la matrice  $M$  sont infiniment grands en valeur absolue.

Dans la pratique (nous le verrons ultérieurement dans les deuxième et troisième parties), la plasticité parfaite n'est atteinte que de manière asymptotique et nous obtenons de bonnes stabilité et précision sur les résultats (si les incréments de sollicitation sont assez "petits") même en grandes déformations.

Avant d'étudier le cas des milieux visqueux, nous allons nous divertir un peu (mais aussi concrétiser les différents raisonnements faits) en jouant (1) avec un modèle élasto-plastique monodimensionnel.

## 2.2 - Exemple d'un modèle élasto-plastique monodimensionnel

Nous considérons un modèle composé d'un patin et d'un ressort et généralisant le modèle classique (PERSOZ (46) ).

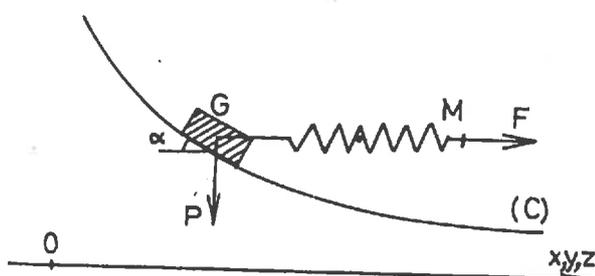


FIG.1

### Notations :

- $F$  : force horizontale exercée sur le ressort
- $K$  : rigidité du ressort
- $\operatorname{tg} \varphi$  : coefficient de frottement du poids  $P$  sur la courbe  $(C)$

Soit un poids  $P$  frottant sur une courbe  $(C)$  de pente variable  $\operatorname{tg} \alpha$  auquel est accroché un ressort horizontal (fig.1). A l'instant initial, on suppose le système en équilibre avec  $F = 0$  et  $\alpha = \varphi$ .

Si  $y$  est l'allongement du ressort, la loi rhéologique du ressort élastique est :

$$F = Ky \quad (3)$$

(1) Pourquoi oublier le côté ludique de ce travail ?

Appelons  $z$  le déplacement horizontal du poids  $P$  et supposons la courbe (C) donnée par  $\alpha(z)$ , fonction décroissante de  $z$ . La loi rhéologique du patin plastique frottant s'écrit :

$$F = P \operatorname{tg} \left[ \varphi - \alpha(z) \right] \quad (4)$$

Ressort et patin étant "montés en série", les forces exercées sur chacun d'eux sont égales et les déplacements s'ajoutent. Soit  $x$  le déplacement horizontal du point M (fig 1) :

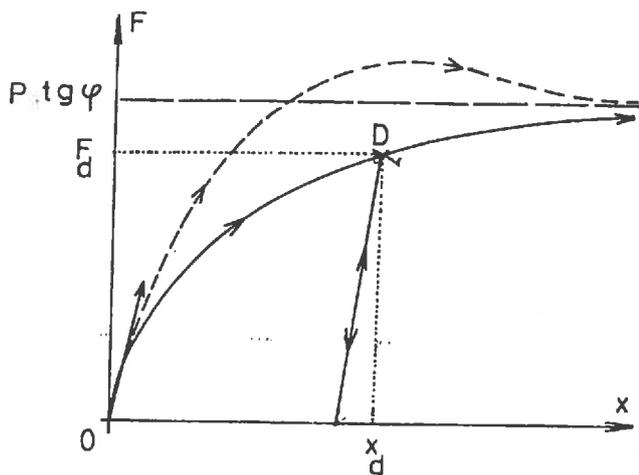
$$x = y + z \quad (5)$$

Les relations (3), (4) et (5) permettent d'écrire la loi rhéologique globale du modèle pour une charge monotone :

$$F = P \operatorname{tg} \left[ \varphi - \alpha \left( x - \frac{F}{K} \right) \right] \quad (6)$$

Si  $\alpha(z) \rightarrow 0$ , quand  $z \rightarrow +\infty$ , la courbe force-déplacement représentant le modèle aura l'une des allures données sur la figure 2.

Si l'on annule la force exercée  $F$ , le patin reste fixe et le ressort seul se détend.



La loi globale du milieu en décharge s'écrit donc :

$$F = F_d + K(x - x_d) \quad (7)$$

FIG.2

Nous avons ainsi construit un modèle élasto-plastique mono-dimensionnel, irréversible dès la plus petite charge, totalement réversible en décharge et menant à la plasticité parfaite de manière continue et progressive.

Par différentiation des équations (6) et (7), nous déduisons la loi incrémentale du modèle en charge et en décharge :

$$\begin{cases} dx = \frac{P \alpha' - K \cos^2(\varphi - \alpha)}{PK \alpha'} dF & (dx \geq 0) \\ dx = \frac{1}{K} dF & (dx \leq 0) \end{cases} \quad (8)$$

Si la fonction  $\alpha'(z)$  n'est pas monotone croissante et prend des valeurs négatives suffisamment faibles, les équations (8) montrent que la courbe  $F=F(x)$  présentera un maximum (courbe en tireté sur la figure 2). Pour assurer la stabilité, la sollicitation doit alors être appliquée en déplacement (DRUCKER (20)). Ce "pic" se rencontre expérimentalement dans le cas des sols pour des cisaillements de sables denses et d'argiles surconsolidées.

La loi incrémentale de ce modèle prend ainsi la forme suivante :

$$dx = f(F, x) dF \quad (9)$$

où la fonction  $f(F, x)$  possède deux déterminations différentes, données par les équations (8), suivant le signe de :  $f(F, x) dF$

Faisons quelques remarques .

1. La fonction  $f$  dépend du déplacement et de la force mais pas de l'histoire de la sollicitation. C'est un cas où l'histoire est rigoureusement contenue dans les valeurs actuelles du déplacement et de la force.
2. La pente à l'origine de la courbe :  $F = F(x)$  n'est pas égale au "modèle d'Young" du matériau :  $K$ , mais lui est inférieure. Ceci est dû au fait que le modèle est irréversible, dès les plus petites déformations.
3. Il est possible d'exercer sur ce modèle des forces strictement négatives. On met alors en évidence un domaine d'élasticité pure.

Retrouvons maintenant les notions que nous avons dégagées dans le paragraphe 2.1. L'espace des sollicitations incrémentales est constitué par la droite représentant  $dF$ .

Il existe deux zones tensorielles constituées par les deux demi-droites :  $f(x, F) dF > 0$  et  $f(x, F) dF < 0$ . A chacune de ces deux zones est associée une certaine détermination de la fonction  $f$ .

Il est clair que, si nous appliquons à ce modèle une histoire de sollicitation non-monotone, seule la formulation incrémentale permettra de déterminer la réponse par une intégration de la loi tout le long du chemin de sollicitation, décomposé en une suite d'incrémentes de sollicitation, dont on teste à chaque fois

le signe. La formulation globale serait d'une utilisation inextricable.

Enfin, nous pouvons ajouter un amortisseur en série avec le ressort. La loi rhéologique de l'amortisseur de viscosité  $\mu$  est :  $F = 2\mu \frac{du}{dt}$ , si  $u$  est le déplacement relatif à cet élément.

La loi incrémentale du modèle complet visco-élasto-plastique prend la forme suivante :

$$dx = f(x, F) dF + \frac{F}{2\mu} dt .$$

### 2.3 - Milieux à comportement dépendant des vitesses de sollicitation

Nous avons vu dans le chapitre précédent l'écriture incrémentale générale de la loi rhéologique de ces milieux :  $F(d\varepsilon, d\sigma, dt) = 0$  et sa linéarisation :  $d\varepsilon = M d\sigma + C dt$  (10).

Nous avons montré que cette relation représentait une décomposition de l'incrément de déformation en sa partie élasto-plastique et sa partie visqueuse. Le vecteur  $C$  a été interprété comme une vitesse de fluage. De manière tout à fait générale, il dépend des états de contrainte et de déformation actuels et de l'histoire de la sollicitation.

Dans le cas d'un corps visqueux pur, la matrice  $M$  est constamment nulle. Si un tel corps possède une vitesse de fluage, par contre sa vitesse de relaxation n'est pas définie : dès que l'on arrête de déformer le corps, les contraintes prennent une certaine valeur constante. Plus généralement, on ne peut lui imposer que des sollicitations en contrainte, la réponse étant une certaine histoire en vitesse de déformation.

Pour illustrer notre propos et dégager la généralité de la relation (10), nous présentons rapidement l'écriture incrémentale des lois rhéologiques des corps visco-élastiques classiques.

#### 1) Corps de NEWTON

$$dx = \frac{F}{2\mu} dt ,$$

où  $x$  représente un déplacement,  $F$  la force appliquée et  $\mu$  le coefficient de viscosité constant.

2) Corps de MAXWELL

Il est schématisé par un ressort et un amortisseur montés en série.

$$dx = \frac{1}{K} dF + \frac{F}{2\mu} dt ,$$

où K est la rigidité du ressort.

3) Corps de KELVIN

Il est schématisé par un ressort et un amortisseur montés en parallèle.

$$dx = \frac{F - Kx}{2\mu} dt$$

4) Corps de ZENER

Il est schématisé par un montage quelconque en parallèle et en série de ressorts et d'amortisseurs.

On peut démontrer que sa loi rhéologique est représentée par une relation linéaire entre le déplacement, la force et leurs dérivées.

Cette relation pourra toujours être écrite sous la forme incrémentale suivante :

$$dx = M dF + C dt$$

où M est une fonction des rigidités des ressorts et C dépend des rigidités, des viscosités, de certains déplacements et de la force appliquée.

5) Corps de BOLTZMANN

La loi rhéologique est constituée par une équation intégrale de la forme :

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}(0) \varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau$$

Par différentiation en axes co-rotationnels, on obtient la forme incrémentale suivante (AURIAULT (7)) :

$$d\varepsilon_{kl} = M_{klij} d\sigma_{ij} - M_{klij} \left[ K_{ijkl}(0) \dot{\varepsilon}_{kl}(t) + \int_0^t \frac{\partial K_{ijkl}(t-\tau)}{\partial t} \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau \right] dt ,$$

$$\text{où } M_{ijkl} = C_{lkji}^{-1} .$$

#### 2.4 - Conclusion

En conclusion, trois remarques nous paraissent importantes pour caractériser l'écriture incrémentale des lois rhéologiques.

Tout d'abord, il faut noter la simplicité formelle de l'écriture en :  $d\varepsilon = M d\sigma + C dt$ , qui permet de décrire un comportement très général présentant des caractéristiques visco-élasto-plastiques. Par contre, les aspects globaux disparaissent dans cette formulation. Il faut intégrer la relation le long du chemin de sollicitation pour connaître le chemin-réponse. Sous cette forme incrémentale, la loi peut être introduite dans des programmes de calcul numérique, basés sur la méthode des éléments finis, dans la mesure où des algorithmes d'utilisation ont été mis au point (BOULON (10), CHAMBON (15)) pour déterminer la zone tensorielle correcte en chaque point du domaine, éviter que des incréments de sollicitation trop importants induisent des discontinuités gênantes, et résoudre le problème des sorties à l'extérieur de la surface limite de rupture.

Ensuite, la généralité de l'écriture incrémentale est grande. Elle repose en fait sur la possibilité d'effectuer une linéarisation locale, valable dans un certain voisinage du point atteint dans l'espace contraintes-déformations. Il s'agit d'une linéarisation "par branches", puisque la matrice  $M$  dépend aussi de la direction du vecteur sollicitation incrémentale courant.

Enfin, et c'est sans doute là son intérêt essentiel, elle permet de prendre en compte des changements de sens de la sollicitation, en particulier de décrire des "charges-décharges" pour un milieu à comportement irréversible. C'est le cadre le plus adéquat pour développer la notion de "zones tensorielles"

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION A LA DETERMINATION  
DE LA LOI RHEOLOGIQUE DES SOLS

## CHAPITRE I

### LA PARTIE ELASTO-PLASTIQUE

La première partie nous a permis de dégager une écriture incrémentale très générale des lois rhéologiques :  $d\varepsilon = M d\sigma + C dt$ , où  $M$  et  $C$  sont fonctions des états de contrainte et de déformation actuels et de l'histoire de la sollicitation antérieure,  $M$  dépendant en outre de la direction du vecteur  $d\sigma$ .

C'est dans ce cadre que nous allons étudier la loi rhéologique des sols.

Le sol est un matériau polyphasique constitué par un assemblage de grains solides, entourés d'eau et de gaz. La loi rhéologique des sols que nous considérons est celle relative au squelette. Les contraintes qui doivent y intervenir sont donc des contraintes intergranulaires ou effectives. Dans toute cette deuxième partie, la notation " $\sigma$ " représentera le tenseur des contraintes effectives de CAUCHY.

Il est logique de séparer l'étude de la matrice élasto-plastique  $M$  de l'étude du vecteur de fluage  $C$ . Dans ce chapitre, nous allons précisément analyser les hypothèses supplémentaires nécessaires pour déterminer  $M$  dans le cas des sols, que ce soit des sables (le vecteur  $C$  est alors constamment nul) ou des argiles (il existe alors une partie visqueuse).

#### 1.1 - Hypothèses fondamentales

Elles sont au nombre de deux.

Un sol, même si son comportement mécanique à l'état vierge est isotrope, perd son isotropie à la suite d'une histoire non isotrope en déformations. Par conséquent, la loi incrémentale décrivant son comportement actuel, à la suite d'un chemin de sollicitation antérieur quelconque, ne sera pas isotrope. Nous n'avons donc pas fait l'hypothèse de l'isotropie de la loi incrémentale, mais pris en compte une

certaine anisotropie en supposant la loi incrémentale orthotrope. Cette hypothèse serait rigoureuse dans le cas d'un sol remanié vierge subissant une sollicitation sans rotation des directions principales. Par exemple, une presse tridimensionnelle (ou appareil vraiment triaxial) transforme un échantillon de sol initialement isotrope en un échantillon orthotrope, les axes d'orthotropie étant confondus avec les trois axes de la presse.

Dans le cas général, si les différents repères principaux (des contraintes, des déformations, des incréments de contrainte et des incréments de déformations) ont des rotations voisines au cours de la sollicitation, ce repère moyen représentera avec une bonne approximation un repère d'orthotropie pour la loi incrémentale. Il semble que, pour les ouvrages classiquement étudiés en mécanique des sols, cette approximation soit valable pour la majeure partie du domaine de sol influencé par l'ouvrage étudié.

L'orthotropie implique que la matrice  $M$  ne possède plus que 12 éléments non nuls. Si cette matrice est nécessairement symétrique en élasticité (par existence d'un potentiel élastique) notons que ce n'est pas le cas ici. Les 12 éléments non nuls de  $M$  représentent donc 12 fonctions indépendantes. Ces 12 fonctions dépendront des états actuels de contrainte et de déformation, du chemin suivi antérieurement et de la direction du vecteur sollicitation incrémentale actuelle.

La forme générale de la loi est dès lors la suivante :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{23} \\ d\varepsilon_{31} \\ d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E & 0 & 0 & 0 \\ F' & B & D & 0 & 0 & 0 \\ E' & D' & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Rappelons que, si cette loi est donc écrite dans un repère particulier : le repère d'orthotropie, le vecteur  $d\varepsilon$  et le vecteur  $d\sigma$  sont définis par rapport à un repère rhéologique (cette remarque ne devient cependant importante qu'en grandes déformations).

Notre deuxième hypothèse porte sur l'existence de 8 zones tensorielles suivant la double possibilité : compression ou extension dans chacune des trois

directions d'orthotropie (11, 22 et 33). Nous définissons compression et extension dans chaque direction d'orthotropie par le signe de :  $A d\sigma_{11}$  ,  $B d\sigma_{22}$  et  $C d\sigma_{33}$  . Les fonctions  $A$  ,  $B$  ,  $C$  interviennent ici, comme nous le préciserons ultérieurement, pour tenir compte de la présence d'un "pic" éventuel (la diminution de contrainte après un "pic" ne devant pas être interprétée comme une extension).

En fait, nous généralisons ici à trois dimensions ce qui avait été dit lors de l'étude du modèle élasto-plastique monodimensionnel dans le chapitre II de la première partie. Les 8 zones tensorielles sont ainsi constituées par les 8 huitièmes d'espace définis dans le système orthonormé d'axes :  $d\sigma_{11}$  ,  $d\sigma_{22}$  ,  $d\sigma_{33}$  (cf Fig. 1).

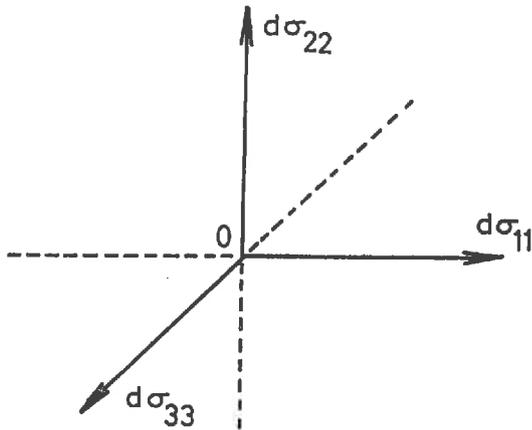


FIG. 1

Définition des 8 zones tensorielles.  $d\sigma_{11}$  ,  $d\sigma_{22}$  et  $d\sigma_{33}$  représentant des incréments de contrainte dans les directions d'orthotropie de la loi incrémentale du matériau, l'objectivité de la définition choisie pour les 8 zones est assurée.

Dans chacune de ces 8 zones, la matrice  $M$  conservera une même valeur. Nous vérifierons, le moment venu, que, dans les quarts de plan communs à deux zones et sur les demi-axes communs à quatre zones, la réponse incrémentale reste invariante quelle que soit la valeur de la matrice associée aux zones adjacentes que l'on considère (condition de continuité).

Le choix, que nous avons fait pour la définition de ces 8 zones, sera en fait validé par la vérification de la loi incrémentale sur une vaste gamme de chemins de sollicitation distincts (cf. la troisième partie). Cette hypothèse reste, bien entendu, une approximation pour décrire le phénomène très complexe qu'est la dépendance directionnelle de la matrice  $M$  .

Rappelons que la généralité de cette hypothèse implique l'impossibilité de définir de manière générale les concepts de charge et de décharge. En effet, nous nous trouvons en présence de 8 zones et non de 2. Nous pouvons par contre parler de compression-extension dans l'une des trois directions d'orthotropie. Il reste possible de séparer un trajet-aller d'un trajet-retour sur un chemin de sollicitation

-donné par le choix d'une orientation arbitraire de ce chemin.

Ces deux hypothèses (orthotropie de la loi incrémentale et définition des 8 zones tensorielles) nous permettent de décomposer le chemin élémentaire quelconque en quatre chemins élémentaires particuliers.

Nous remplaçons ainsi le vecteur  $d\sigma$  par la somme des 4 vecteurs suivants :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d\sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Cette décomposition n'est correcte que dans la mesure où l'application du principe de superposition<sup>(1)</sup> des sollicitations incrémentales est valable. Si l'on considère la forme linéaire de la loi :  $d\varepsilon = M d\sigma$  le principe de superposition au niveau incrémental ne sera justifié que si la matrice  $M$  conserve la même valeur, c'est-à-dire si les différents vecteurs issus de la décomposition de  $d\sigma$  appartiennent tous à la même zone tensorielle. Ceci est précisément vérifié pour les trois premiers vecteurs si l'on considère la définition donnée des zones tensorielles et si l'on distingue compression et extension dans les directions 11, 22 et 33 par le signe des déformations correspondantes :

$$d\varepsilon_{11}^1 = A d\sigma_{11}, \quad d\varepsilon_{22}^2 = B d\sigma_{22}, \quad d\varepsilon_{33}^3 = C d\sigma_{33}.$$

Pour concrétiser cette dernière hypothèse, nous allons raisonner dans le cas simple où les axes principaux des contraintes, des déformations et des incréments sont confondus.

La figure (2) tracée dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , montre la décomposition du chemin élémentaire réel MP en les trois chemins MA, AB, BP le long desquels une seule contrainte principale varie à la fois, les deux autres restant fixes.

(1) Le "principe" de superposition évoqué ici s'applique à une superposition dans l'espace et non dans le temps, contrairement à celui qui aboutit à l'énoncé du principe de BOLTZMANN.

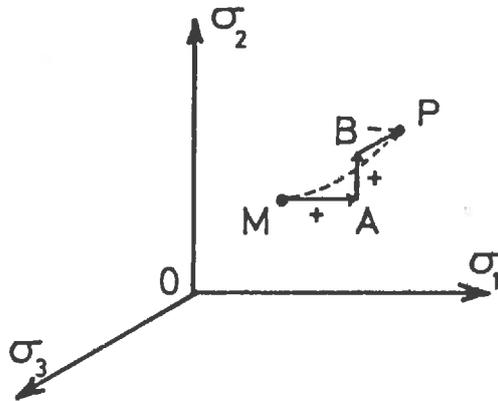


FIG. 2

Décomposition du chemin élémentaire MP en MABP.

Le choix effectué pour les 8 zones tensorielles nous fournit par ailleurs une définition précise du domaine de validité du "principe" de superposition. Il sera correct dès lors que la décomposition du vecteur  $( A d\sigma_{11} , B d\sigma_{22} , C d\sigma_{33} )$  ne fait intervenir que des vecteurs appartenant au même huitième d'espace que le vecteur-somme lui-même. Dans le cas contraire, le changement de valeur de la matrice  $M$  entraînera une certaine erreur.

Par ailleurs, il est indispensable d'appliquer la superposition à partir de l'état actuel en contrainte et en déformation, à la suite d'une même histoire de sollicitation antérieure. Par exemple, si, dans la décomposition du vecteur incrément de contrainte, on fait intervenir des vecteurs relatifs à un autre état de contrainte ou de déformation que l'état actuel, ou bien définis à partir d'une autre histoire de sollicitation, le principe de superposition mènera à des erreurs, grossières dans certains cas. Différents contre-exemples, fort significatifs, en ont été donnés par GUDEHUS (GUDEHUS et al. (28) ).

Nous verrons dans ce chapitre que notre travail échappe à cette critique dans la mesure où les vecteurs intervenant dans la décomposition (1) sont bien attachés aux états actuels de contrainte et de déformation et dépendent de l'histoire de sollicitation antérieure. C'est ainsi que les éléments de la matrice  $M$  seront

fonctions, comme nous le vérifierons, des états de contrainte et de déformation actuels et de l'histoire.

Enfin, la décomposition est d'autant meilleure que les incréments sont plus petits. Pour donner un ordre de grandeur, dans les applications que nous présenterons ultérieurement, les incréments en déformation sont en général au plus égaux à :  $2.10^{-3}$  (en valeur absolue).

Sur la base des deux hypothèses fondamentales faites, qui nous ont conduit à la décomposition (1) du chemin élémentaire, nous allons pouvoir expliciter la matrice  $M$ .

## 1.2 - Ecriture détaillée de la loi

Appliquons au matériau successivement les vecteurs sollicitation :

$$[d\sigma^1] = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [d\sigma^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ d\sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [d\sigma^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur réponse  $[d\varepsilon^1]$  à  $[d\sigma^1]$ , par suite de l'orthotropie de la loi incrémentale, s'écrit :

$$[d\varepsilon^1] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^1 \\ d\varepsilon_{22}^1 \\ d\varepsilon_{33}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

où l'on peut poser :

$$\begin{cases} d\varepsilon_{11}^1 = 1/U_1 d\sigma_{11} , \\ d\varepsilon_{22}^1 = -v_1^2 d\varepsilon_{11}^1 = -v_1^2/U_1 d\sigma_{11} , \\ d\varepsilon_{33}^1 = -v_1^3 d\varepsilon_{11}^1 = -v_1^3/U_1 d\sigma_{11} . \end{cases}$$

De même le vecteur  $[d\sigma^2]$  produira la réponse  $[d\varepsilon^2]$  et  $[d\sigma^3]$  la réponse  $[d\varepsilon^3]$ .

Par superposition des sollicitations incrémentales, le vecteur :

$$[d\sigma^1] + [d\sigma^2] + [d\sigma^3] = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

provoquera la déformation :  $[d\varepsilon^1] + [d\varepsilon^2] + [d\varepsilon^3]$ ,

$$\text{égale à : } \begin{bmatrix} 1/U_1 d\sigma_{11} \\ -v_1^2/U_1 d\sigma_{11} \\ -v_1^3/U_1 d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_2^1/U_2 d\sigma_{22} \\ 1/U_2 d\sigma_{22} \\ -v_2^3/U_2 d\sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_3^1/U_3 d\sigma_{33} \\ -v_3^2/U_3 d\sigma_{33} \\ 1/U_3 d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette égalité peut encore s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/U_1 & -v_2^1/U_2 & -v_3^1/U_3 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1^2/U_1 & 1/U_2 & -v_3^2/U_3 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1^3/U_1 & -v_2^3/U_2 & 1/U_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dans cette relation, les trois fonctions  $U_k$  et les six fonctions  $v_k^j$  représentent par définition les dérivées suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} U_k = \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \\ v_k^j = - \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} v_k^l = - \left( \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \\ (\sigma_j, \sigma_l \text{ constants}) \end{array} \right| \begin{array}{l} k, j, l = 1, 2, 3 \\ k \neq j \neq l \neq k \end{array}$$

Les fonctions  $f, g, h$  sont définies par :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_k = f(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \\ \varepsilon_j = g(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l), \quad \varepsilon_l = h(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \end{array} \right. \quad (\sigma_j, \sigma_l \text{ constants})$$

Nous avons ainsi explicité les neuf premiers éléments de la matrice  $M$  :  $A, B, C, D, E, F, D', E', F'$  en fonction de neuf coefficients  $U_k$  et  $V_k^j$ . Ces coefficients sont définis par dérivation de trois familles de fonctions  $f, g, h$  qui représentent respectivement une courbe contrainte-déformation et deux courbes de variation des déformations latérales, déterminées le long d'une classe de chemins de sollicitations particuliers notée C. Ces chemins  $C$  sont tels qu'une seule contrainte principale varie (elle est notée  $\sigma_k$ ), les deux autres étant constantes mais non nécessairement égales (elles sont notées  $\sigma_j$  et  $\sigma_l$ ) et toutes les directions principales restant fixes et confondues.

Ces chemins  $C$  sont, naturellement, exactement ceux qui apparaissent sur la figure (2) dans la décomposition du chemin élémentaire. Ce sont, pourrait-on dire, des chemins triaxiaux généralisés, les deux contraintes latérales étant constantes mais distinctes.

Les trois fonctions  $U_k$  pourraient être appelées "pseudo-module" et les six  $V_k^j$  "pseudo-coefficient de Poisson". Mais l'existence de 8 zones tensorielles et la non-symétrie de la matrice  $M$  distinguent fondamentalement cette loi de l'élasticité.

Il nous reste à déterminer les trois derniers éléments de  $M$ , soit :  $G_1, G_2, G_3$ .

Ces trois coefficients sont très difficiles à mesurer expérimentalement, car il faut réaliser une distorsion sur un échantillon qui doit rester homogène, pour que les mesures effectuées aux limites soient représentatives.

Ne pouvant nous baser sur des expériences significatives, nous avons dû donner de ces trois fonctions une explicitation purement mathématique. Cependant, nous avons utilisé un fait expérimental établi dans le cas des roches par de nombreuses recherches et mis en évidence par BOEHLER (8) pour les argiles : le module d'Young d'un corps orthotrope élastique varie suivant une loi ellipsoïdale, si l'on fait tourner la direction par rapport à laquelle on le mesure dans les trois plans d'orthotropie.

Nous avons donc fait l'hypothèse que les extrémités des trois vecteurs de longueur égale aux trois rapports  $\frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}}$ ,  $\frac{d\sigma_{22}}{d\varepsilon_{22}}$ ,  $\frac{d\sigma_{33}}{d\varepsilon_{33}}$  décrivent des courbes sensiblement confondues avec des ellipses dans les trois plans d'orthotropie du matériau, quand on fait tourner le repère de référence.

Des calculs fastidieux (DARVE (17) ) montrent que cette hypothèse permet d'exprimer  $G_1, G_2, G_3$  en fonction des neuf autres éléments de la matrice.

Le calcul a abouti aux expressions suivantes :

$$G_1 = \frac{\sqrt{(U_2)^2 + (U_3)^2}}{U_2 U_3 \sqrt{2}} + \frac{U_2 (V_3^2 - 1) + U_3 (V_2^2 - 1)}{4 U_2 U_3}$$

$G_2$  et  $G_3$  se déduisant de  $G_1$  par permutation circulaire sur les indices.

Les 12 éléments de la matrice  $M$  ont été ainsi explicités en fonction de 9 coefficients  $U_k$  et  $V_k^j$ . Remarquons que la dernière hypothèse faite sur  $G_1, G_2, G_3$  implique que nous ne sommes plus dans le cas de l'orthotropie la plus générale pour laquelle les 12 éléments de la matrice sont indépendants.

Ces neuf fonctions  $U_k$  et  $V_k^j$  sont déterminées à partir de la seule connaissance du comportement du matériau sur une classe de chemins de sollicitations particuliers  $C$ . L'objet du chapitre suivant est précisément de fournir sous une forme analytique explicite (1) la loi du matériau sur ces chemins  $C$ . Nous avons vu qu'il était nécessaire de connaître la famille des courbes contrainte-déformation et la famille des courbes de variations des déformations latérales, ceci en compression comme en extension (c'est-à-dire pour  $\varepsilon_k$  positif et négatif).

### 1.3 - Conclusion

Nous voudrions, dans cette conclusion, analyser plus en détail deux points.

Le premier nous permettra de préciser de quoi dépendent effectivement les éléments de la matrice  $M$ . Nous avons abouti à l'expression explicite (2) de la loi, dans laquelle les douze éléments de  $M$  sont exprimés en fonction de neuf coefficients  $U_k$  et  $V_k^j$ . Ces neuf coefficients sont eux-mêmes déterminés par des opérations de dérivation effectuées au point actuel en contrainte et en déformation.

---

(1) Cette forme analytique explicite n'est pas indispensable. Elle est cependant très pratique, car elle permet de réduire le volume des données expérimentales.

Ils dépendront donc des états de contrainte et de déformation actuels, mais aussi de la direction du vecteur sollicitation incrémentale puisque dans chaque direction d'orthotropie nous distinguons compression et extension par les signes de :

$d\varepsilon_{11}^1 = 1/U_1 d\sigma_{11}$  ,  $d\varepsilon_{22}^2 = 1/U_2 d\sigma_{22}$  et  $d\varepsilon_{33}^3 = 1/U_3 d\sigma_{33}$   
 qui sont aussi exactement les signes des trois  $d\varepsilon_k$  . Deux familles de 3 fonctions  $f, g, h$  sont ainsi à définir : en compression et en extension. Enfin, l'histoire de la sollicitation intervient dans le cas de sollicitations "non-monotones" (en ce sens qu'elles présentent des changements de zone tensorielle), car là-encore l'expression des fonctions  $f, g, h$  en sera modifiée.

Le deuxième point à préciser est relatif au problème des changements de zone tensorielle.

Si l'on passe d'une zone tensorielle à la zone "opposée" (aller-retour sur un chemin de sollicitation), l'ensemble des éléments de la matrice  $M$  sera changé. Il y aura une discontinuité en "dérivée" sur le chemin réponse, ce qui correspond à la réalité expérimentale. De même, si l'on passe brutalement d'une zone à une autre (fut-elle adjacente) - et il y aura une discontinuité en "dérivée" sur le chemin de sollicitation - deux colonnes (ou une colonne dans le cas de deux zones adjacentes) seront changées ce qui produira là-encore une discontinuité en "dérivée" sur le chemin-réponse.

Envisageons maintenant le cas d'un passage progressif d'une zone à une zone adjacente. Le chemin de sollicitation restera parfaitement "lisse". Au niveau de la matrice  $M$  , ce changement de zone se traduira par la modification des trois éléments d'une colonne mais précisément de la colonne qui, pour le calcul de l'incrément de réponse, est multipliée par l'élément du vecteur incrément de contrainte qui s'annule lors du changement de zone.

Le chemin de réponse qui en résultera sera, lui aussi, parfaitement "lisse", ce qui est bien en accord avec l'expérience.

Notons que, dans toute cette discussion, nous n'avons pas considéré les trois éléments  $G_1, G_2, G_3$  qui peuvent être à l'origine de discontinuités incorrectes, vu la manière dont ils sont déterminés.

Remarquons enfin que, si nous avons imposé arbitrairement à la matrice  $M$  d'être symétrique, les changements de colonnes auraient produit des changements de lignes et des discontinuités en "dérivée" pour les chemins de réponse

en auraient résulté. Ainsi, dans le cadre de ce travail, l'hypothèse de symétrie de la matrice  $M$  est en contradiction avec l'existence de plusieurs zones tensorielles. Cependant, il peut exister des zones dans lesquelles la matrice  $M$  est sensiblement symétrique. Par exemple, lors d'un retour sur un chemin de sollicitation, nous savons expérimentalement que le comportement d'un sol est sensiblement élastique (par suite de la création d'un domaine d'élasticité approchée lors du chemin aller). Or, dans le cas de l'élasticité, la matrice  $M$  est symétrique. Il semble donc que l'on puisse dire (avec RICE (48) ) que, dans la zone tensorielle opposée à la zone actuelle, la matrice  $M$  soit sensiblement symétrique.

---

## CHAPITRE II

### DETERMINATION DES PARAMETRES D'UN MATERIAU GRANULAIRE DONNE

Un matériau granulaire (sables, billes de verre, matériau de SCHNEEBELI, ...) est non visqueux. Les seuls paramètres à déterminer sont donc relatifs à la matrice élasto-plastique  $M$ .

Ce chapitre II recoupe les chapitres B, C et D de la première partie de ma thèse de docteur-ingénieur (DARVE (17)) . Par ailleurs, ce même sujet a été largement développé et précisé dans deux thèses ultérieures (AUBRY (6), TRATAPEL (60)) . Il a été abordé dans différents articles (par exemple, DARVE et al. (19), BOULON et al. (11)) . Enfin, il sera synthétisé dans la thèse d'état de LABANIEH (36).

Ce chapitre sera donc présenté très succinctement sur le plan des résultats généraux comme sur le plan des applications, qui ne comprendront pas le détail des calculs.

Nous allons proposer ici une formulation analytique explicite des trois fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_k = f(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \\ \varepsilon_j = g(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l), \quad \varepsilon_l = h(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \end{array} \right| \begin{array}{l} k, j, l = 1, 2, 3 \\ k \neq j \neq l \neq k \end{array}$$

ces fonctions étant déterminées sur les chemins de sollicitation  $C$ , le long desquels la contrainte  $\sigma_k$  seule varie,  $\sigma_j$  et  $\sigma_l$  étant constantes mais distinctes et toutes les directions principales restant fixes.

En première approximation, nous pouvons supposer que la contrainte intermédiaire n'intervient pas dans l'expression des trois familles de fonctions

f, g, h. Il nous suffit alors pour les déterminer de connaître une famille d'essais triaxiaux classiques (pour lesquels  $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{constante}$ ) réalisés pour différentes valeurs de la contrainte latérale. Ce sont ces chemins que nous allons tout d'abord étudier.

### 2.1 - Courbes contrainte-déformation

Si nous notons  $\sigma_3$  et  $\epsilon_3$  la contrainte et la déformation latérales,  $\sigma_1$  et  $\epsilon_1$  la contrainte et la déformation axiales et  $\epsilon_i$  la déformation sous la contrainte isotrope  $\sigma_3$ , nous avons proposé, pour représenter la famille des courbes contrainte-déformation en compression et en extension, la formulation suivante :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_3 C_n \frac{\epsilon_1 - \epsilon_i}{A_s + \epsilon_1 - \epsilon_i} + \sigma_3 B_s (\epsilon_1 - \epsilon_i)^m \exp[-C_s (\epsilon_1 - \epsilon_i)]$$

Elle permet de rendre compte du comportement des sables lâches et argiles remaniées normalement consolidées (absence de pic) et des sables denses et argiles surconsolidées (présence d'un pic) (1).

Les quatre coefficients  $C_n$ ,  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  sont déterminés par les quatre conditions :

- pente à l'origine :  $\left( \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} \right)_{\epsilon_1 = \epsilon_i} = U_i(\sigma_3)$
- asymptote de plasticité parfaite :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{\epsilon_1 \rightarrow \pm\infty} = \frac{\pm 2 \sin \varphi}{1 \mp \sin \varphi} \sigma_3 + \frac{2 C \cos \varphi}{1 \mp \sin \varphi}$$

- position de l'extrémum de contrainte :

$$\text{en déformation : } (\epsilon_1 - \epsilon_i)_{\text{extremum}} = P(\sigma_3)$$

en contrainte :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{\text{extremum}} = \frac{2 \sin \varphi_{\text{extr.}}}{1 - \sin \varphi_{\text{extr.}}} \sigma_3 + \frac{2 C_{\text{extr.}} \cos \varphi_{\text{extr.}}}{1 - \sin \varphi_{\text{extr.}}},$$

$$\text{où } \text{tg } \varphi_{\text{extr.}} = T(\sigma_3).$$

(1) Nous revenons sur la signification physique de ce "pic" dans le chapitre II de la quatrième partie en en donnant une interprétation par la théorie des bifurcations.

Il intervient les deux constantes  $C$ ,  $\varphi$  (cohésion et angle de frottement en plasticité parfaite) et les trois fonctions  $U_1(\sigma_3)$ ,  $P(\sigma_3)$  et  $T(\sigma_3)$  dont nous proposons la représentation empirique suivante :

$$\left| \begin{array}{l} U_1(\sigma_3) = K (\sigma_3)^n \\ P(\sigma_3) = A_1 - A_2 \exp(-A_3 \sigma_3) \\ T(\sigma_3) = \frac{A_4}{A_5 + \sigma_3} + \operatorname{tg} \varphi. \end{array} \right.$$

$K$ ,  $n$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$  sont des constantes dépendant du matériau et de sa densité initiale à déterminer à partir des résultats expérimentaux.

Enfin, l'exposant  $n$  sert à faire varier la forme du pic. On fixe sa valeur au mieux. Il est généralement voisin de 2.

Cette formulation permet de décrire le comportement en compression comme en extension ; de plus des cycles peuvent être représentés correctement.

Les figures 1, 2 et 3 montrent, tous calculs de paramètres ayant été effectués, la comparaison entre les points expérimentaux et les courbes analytiques pour trois valeurs de la contrainte latérale ( $\sigma_3 = 1.5, 2, 3$  da  $\text{N/cm}^2$ ) et trois densités différentes ( $\gamma_d = 1.65, 1.60, 1.55$   $\text{g/cm}^3$ ). Le sable considéré est celui utilisé par l'équipe de recherche du professeur GUDEHUS à l'Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik à l'Université de KARLSRUHE (R.F.A.). Les points expérimentaux sont tirés du cahier n°45 de MEISSNER (41).

Il faut noter la qualité des formulations analytiques choisies, permettant de bien décrire le comportement d'un sable dense comme celui d'un sable lâche.

## 2.2 - Courbes de variations de l'indice des vides

Sur un chemin triaxial de révolution pour lequel  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ , la donnée de la courbe  $e(\varepsilon_1)$  représentant les variations de l'indice des vides (1) avec la déformation axiale est équivalente à la donnée de :  $\varepsilon_3(\varepsilon_1)$

---

(1) Rappelons que l'indice des vides est égal au rapport du volume des vides au volume des grains solides.

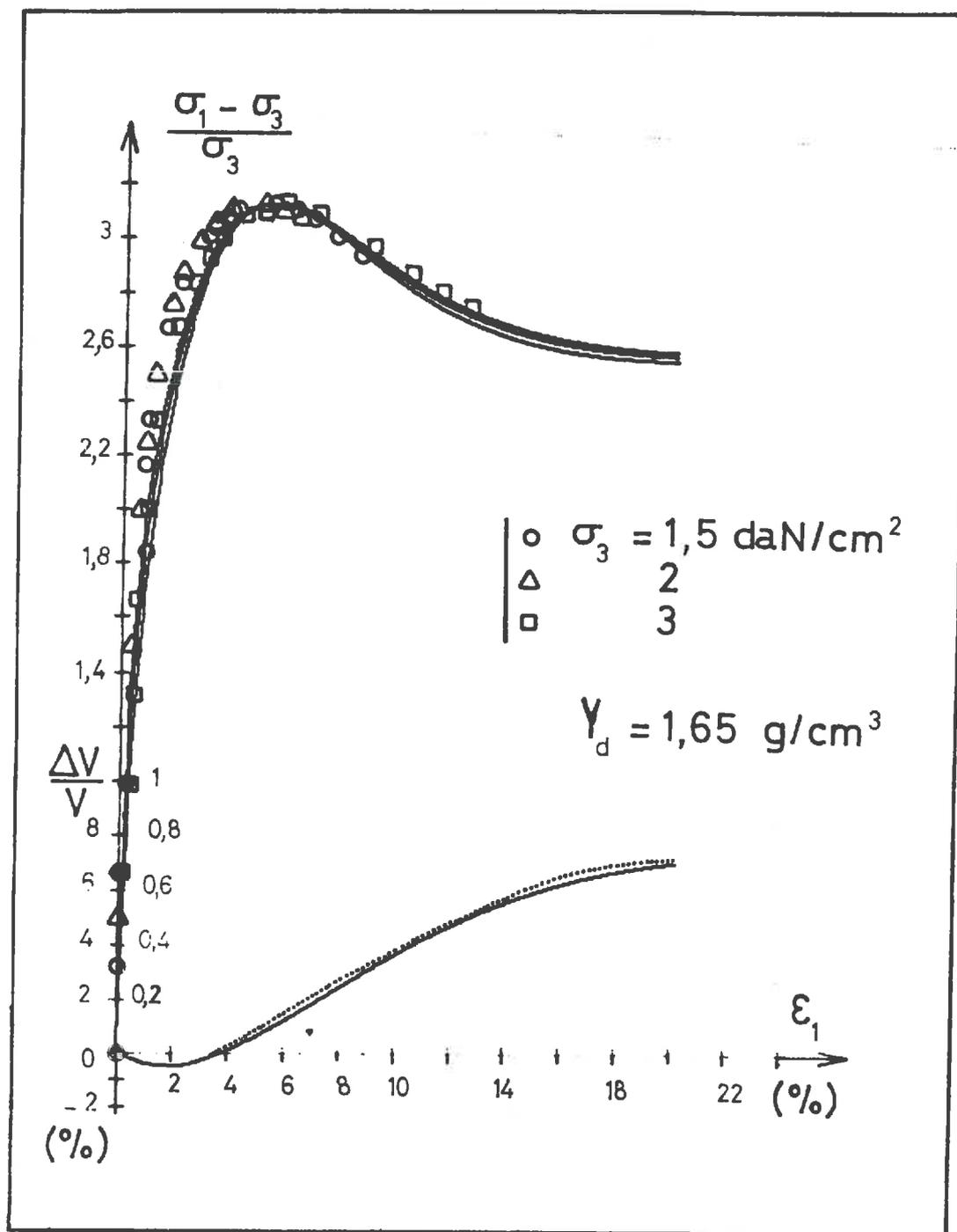


FIG. 1 : Chemins triaxiaux de révolution sur sable dense (41). Comparaisons entre mesures expérimentales (points et courbe en pointillé) et courbes analytiques ayant permis le calcul des paramètres de la loi rhéologique.

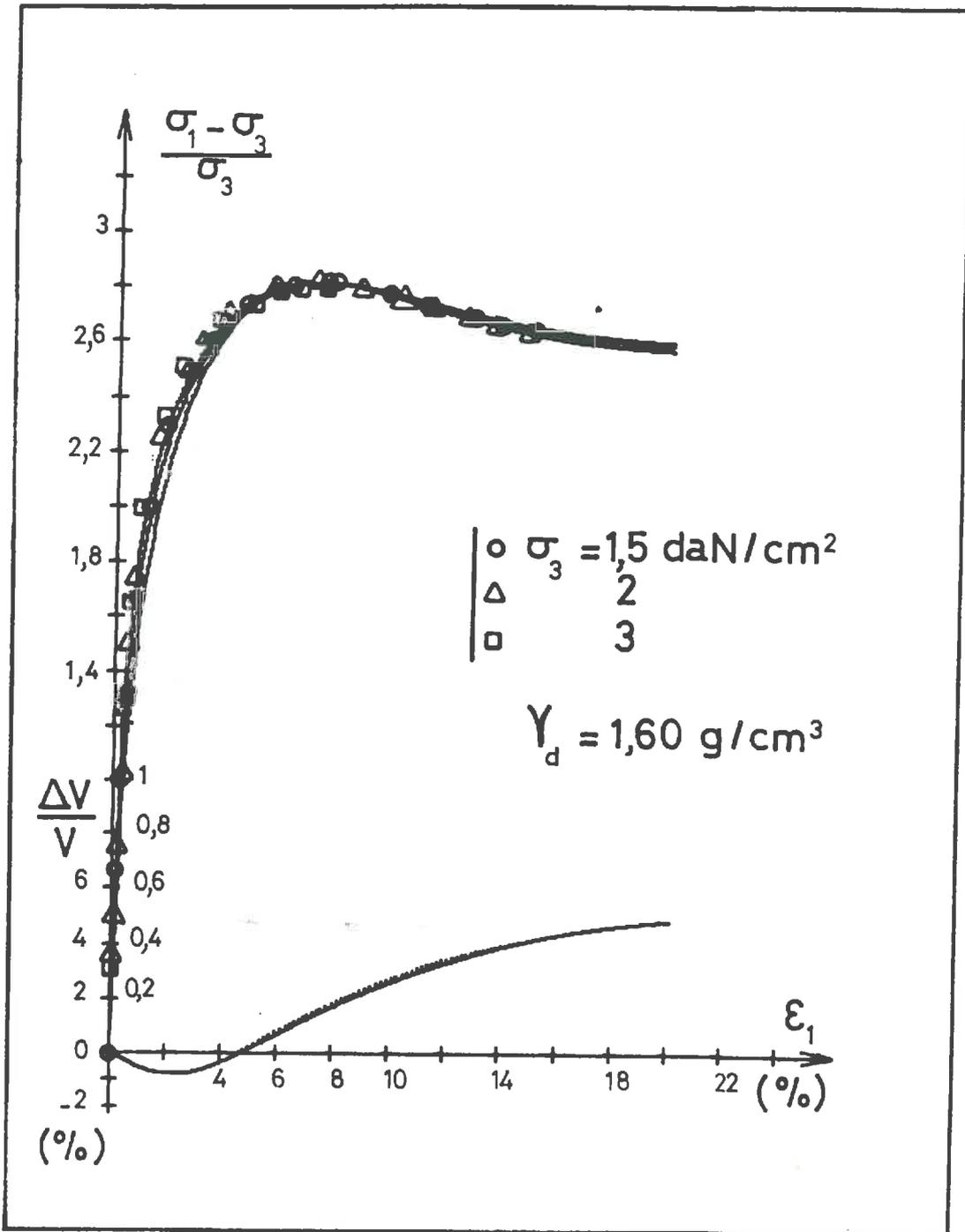


FIG. 2 : Chemins triaxiaux de révolution sur sable moyen (41). Comparaisons entre mesures expérimentales (points et courbe en pointillé) et courbes analytiques ayant permis le calcul des paramètres de la loi rhéologique.

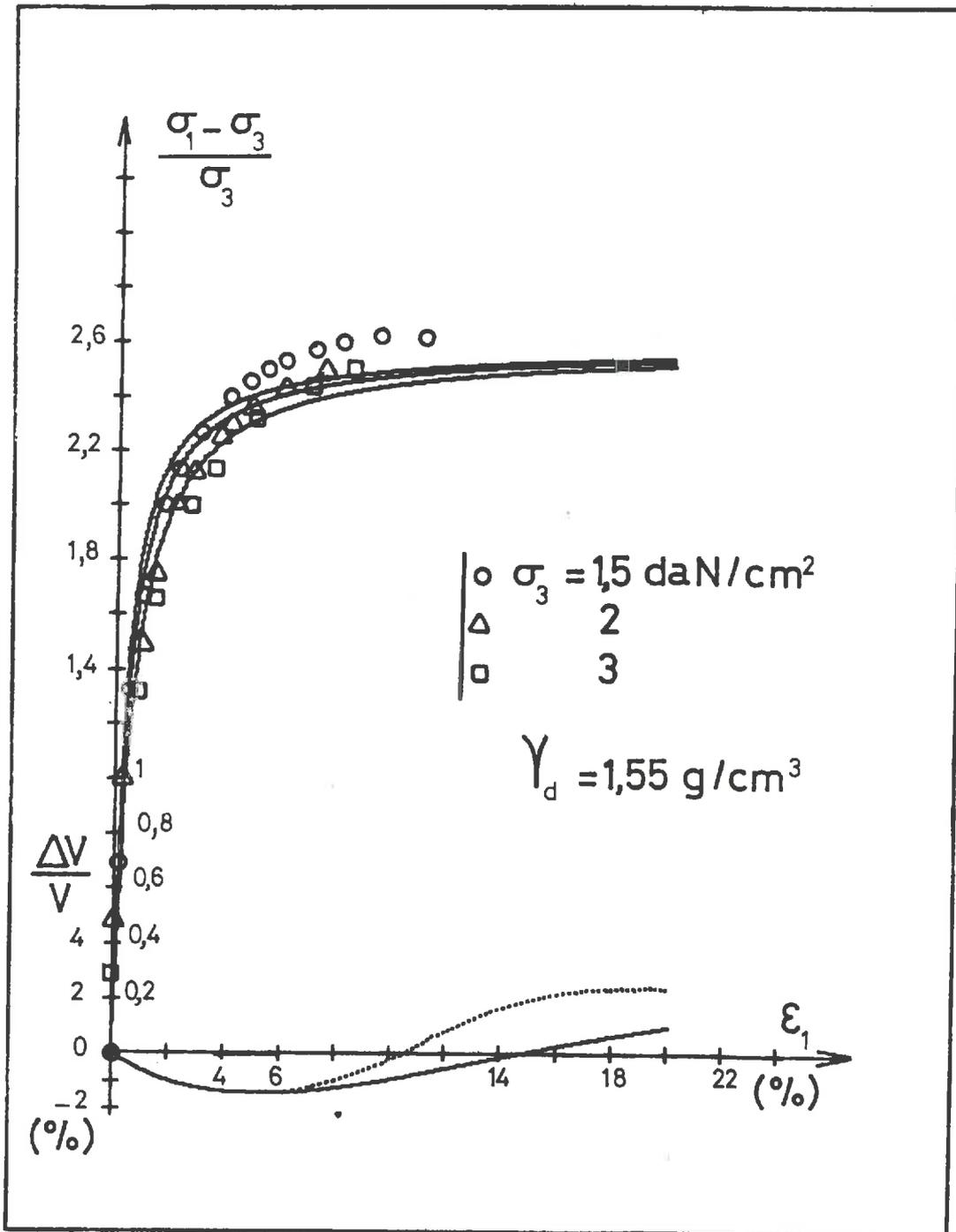


Fig. 3 : Chemins triaxiaux de révolution sur sable lâche (41). Comparaisons entre mesures expérimentales (points et courbe en pointillé) et courbes analytiques ayant permis le calcul des paramètres de la loi rhéologique.

Rappelons en effet que :  $\frac{de}{1+e} = \frac{dV}{V} = -(d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3)$

(puisque l'on note positivement les diminutions de longueur et les contractions).

Soit par intégration :  $\text{Log} \frac{1+e}{1+e_i} = -(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3)$  ,

avec :  $\varepsilon_1 = \text{Log} \frac{h_i}{h}$  ,  $\varepsilon_3 = \text{Log} \frac{D_i}{D}$  ,

( h et D hauteur et diamètre de l'échantillon cylindrique).

Pour représenter les variations de l'indice des vides, nous avons proposé l'expression analytique suivante :

$$e = e_c + (e_i - e_c) \exp \left[ N_2 A_y (\varepsilon_1 - \varepsilon_i) - Z (\varepsilon_1 - \varepsilon_i)^2 \right] - N_1 B_y (\varepsilon_1 - \varepsilon_i) \exp(-C_y |\varepsilon_1 - \varepsilon_i|^{D_y}) ,$$

où  $e_i$  est l'indice des vides initial et  $e_c$  l'indice des vides critique (1) (valeur asymptotique de l'indice des vides en plasticité parfaite).

Dans cette expression :

$$\left| \begin{array}{ll} N_1 = 1, \text{ si } e_i \leq e_c & \text{en compression} \\ N_2 = 0 \text{ ou } e_i \geq e_c & \text{en extension} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ll} N_1 = 0, \text{ si } e_i > e_c & \text{en compression} \\ N_2 = 1 \text{ ou } e_i < e_c & \text{en extension} \end{array} \right.$$

Cette formulation permet de rendre compte des deux types de variations de volume.

Si l'indice des vides initial est inférieur ou égal à l'indice des vides critique, le milieu diminue tout d'abord légèrement de volume pour gonfler ensuite jusqu'à l'écoulement plastique. Au contraire, si l'indice des vides initial est strictement supérieur à l'indice des vides critique, le matériau diminue de volume de manière continue. Tout ceci est valable en compression. En extension, nous avons des résultats symétriques.

---

(1) Nous remettons en cause la notion d'indice des vides critique pour un matériau dilatant dans le chapitre II de la quatrième partie.

Les quatre coefficients indépendants  $e_c$ ,  $A_y$  ou  $B_y$ ,  $C_y$ ,  $D_y$  sont déterminés par les quatre conditions suivantes :

- pente à l'origine :  $\left( \frac{de}{d\varepsilon_1} \right)_{\varepsilon_1=\varepsilon_i} = -(1 + e_i) [1 - 2\nu_i(\sigma_3)]$
- asymptote de plasticité parfaite :  $e_c = e_c(\sigma_m)$ ,  
où  $\sigma_m$  représente la contrainte moyenne en plasticité parfaite.
- position de l'extrémum de l'indice des vides  
en déformation :  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_i)_{\text{extrémum}} = R(\sigma_3)$   
en indice des vides :  $e_i - e_{\text{extrémum}} = S(\sigma_3)$

Nous avons donné pour les différentes fonctions :  $\nu_i(\sigma_3)$ ,  $e_c(\sigma_m)$ ,  $R(\sigma_3)$  et  $S(\sigma_3)$  les représentations empiriques suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} e_c(\sigma_m) = B_1 + B_2 \exp(-B_3 \sigma_m) \\ \nu_i(\sigma_3) = \frac{B_4}{B_5 + \sigma_3} \\ R(\sigma_3), S(\sigma_3) \text{ fonctions linéaires de } \sigma_3 \end{array} \right.$$

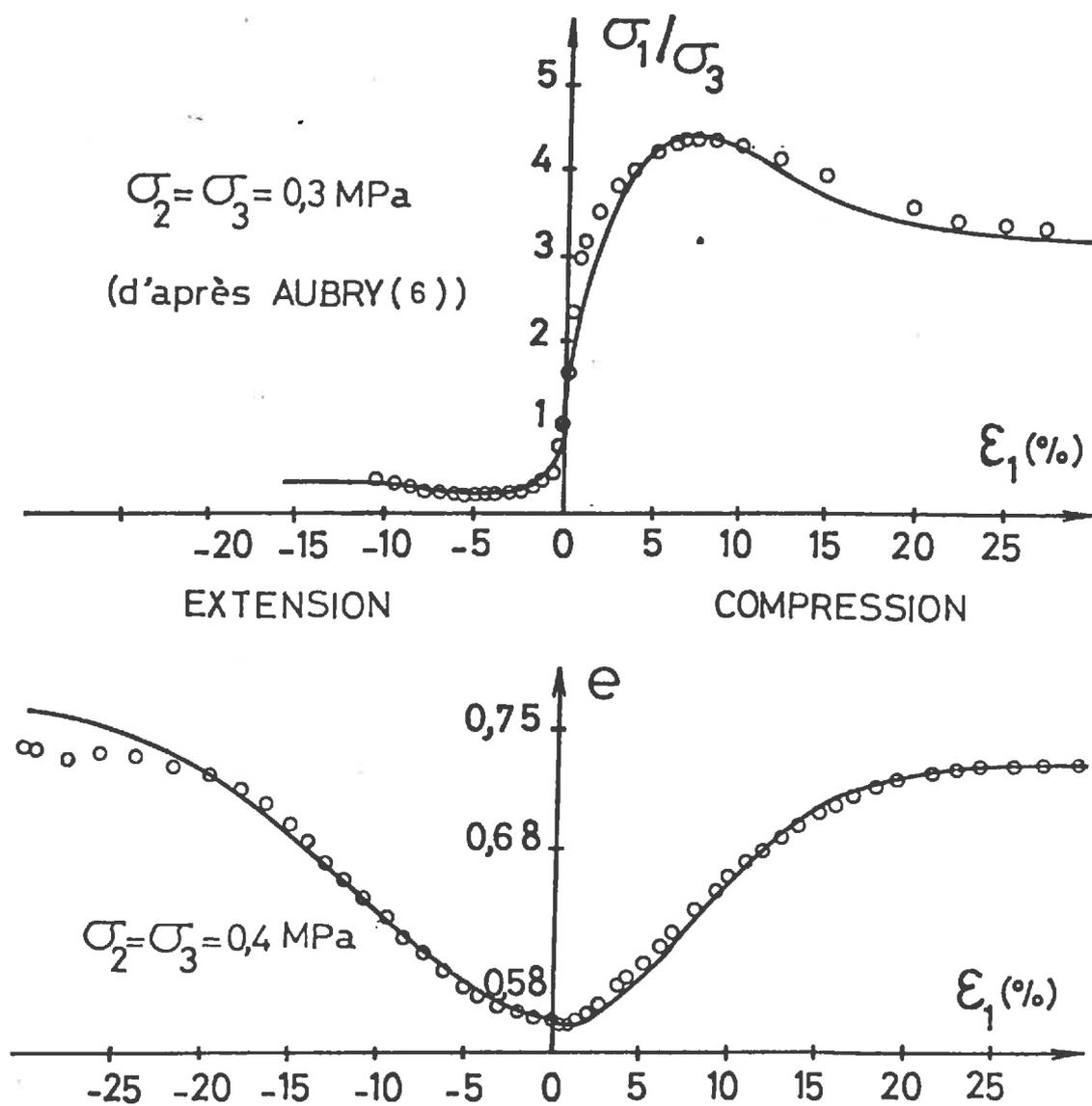
Les différentes constantes  $B_k$  dépendent du matériau et de sa densité initiale. Elles sont à déterminer à partir des mesures expérimentales.

Enfin, le coefficient  $Z$  permet de faire varier la forme générale de la courbe.

Cette représentation analytique est valable en compression comme en extension ; elle permet aussi de décrire des cycles.

Les parties inférieures des figures 1, 2, 3 donnent des exemples de comparaisons entre les courbes expérimentales (MEISSNER (41)) et analytiques de variations de volume pour des essais triaxiaux de révolution en compression.

La figure 4, tracée à partir des résultats de la thèse d'AUBRY (6), permet de mettre en parallèle, sur un exemple, le comportement en compression et en extension aussi bien pour les points expérimentaux que pour les courbes analytiques.



**FIG. 4** : Courbes contrainte-déformation et de variations de l'indice des vides en compression et en extension sur chemin triaxial de révolution. Comparaisons entre points expérimentaux et courbes analytiques, utilisées pour le calcul des paramètres de la loi rhéologique du sable considéré.

Dans le cours du texte de ce chapitre, nous avons bien précisé que les paramètres étaient relatifs à une certaine densité de référence. Cependant, sur la base d'un ensemble d'expériences suffisamment grand, on peut envisager de déterminer par des formules empiriques les variations des grandeurs physiques significatives (angles de frottement, modules d'Young, coefficients de Poisson, etc..) avec l'indice des vides de référence. On connaît, par exemple, d'ores et déjà, la formule classique :  $e_1 \operatorname{tg} \varphi_{\text{pic}} = \text{constante}$ , qui représente la diminution de l'angle de frottement de pic avec la diminution de densité (ou avec l'augmentation de l'indice des vides). LABANIEH (36) devrait être en mesure de résoudre ce problème dans le cadre de sa thèse d'état. Notons qu'il s'agit là d'une question fort importante puisque, de sa résolution correcte, dépendra la possibilité de faire varier les paramètres après de grands nombres de cycles, c'est-à-dire d'aborder la question des sollicitations cycliques sur des bases plus sérieuses.

### 2.3 - Généralisation tridimensionnelle

Il nous faut maintenant généraliser ces formulations pour décrire le comportement du matériau sur des chemins :  $\sigma_2, \sigma_3$  constants éventuellement distincts.

En ce qui concerne les courbes contrainte-déformation, nous avons ainsi introduit la contrainte intermédiaire dans l'expression du critère de rupture.

Nous allons noter, dans ce paragraphe uniquement :  $\sigma_1$  la contrainte majeure,  $\sigma_3$  la contrainte mineure,  $\sigma_2$  la contrainte intermédiaire (cette notation indicielle n'est pas tensorielle) et nous cherchons à déterminer la valeur maximale de  $\sigma_1$  en fonction de  $\sigma_2$  et de  $\sigma_3$  (constants).

Nous avons posé :

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{pic}} = \left( \frac{A_4}{A_5 + \sigma_3} + \operatorname{tg} \varphi \right) \left[ 1 + A_7 (1 - \exp(-A_8 (\sigma_2 / \sigma_3 - 1))) \right] \quad (1)$$

Avec :  $\sigma_1 = \sigma_3 \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \varphi_{\text{pic}}/2)$ .

L'angle de frottement de pic n'est plus qu'un simple intermédiaire de calcul dans cette formulation. Mais c'est un bon guide "physique" et nous l'avons conservé ! Pour  $\sigma_2 = \sigma_3$ , on retrouve évidemment la formule classique.

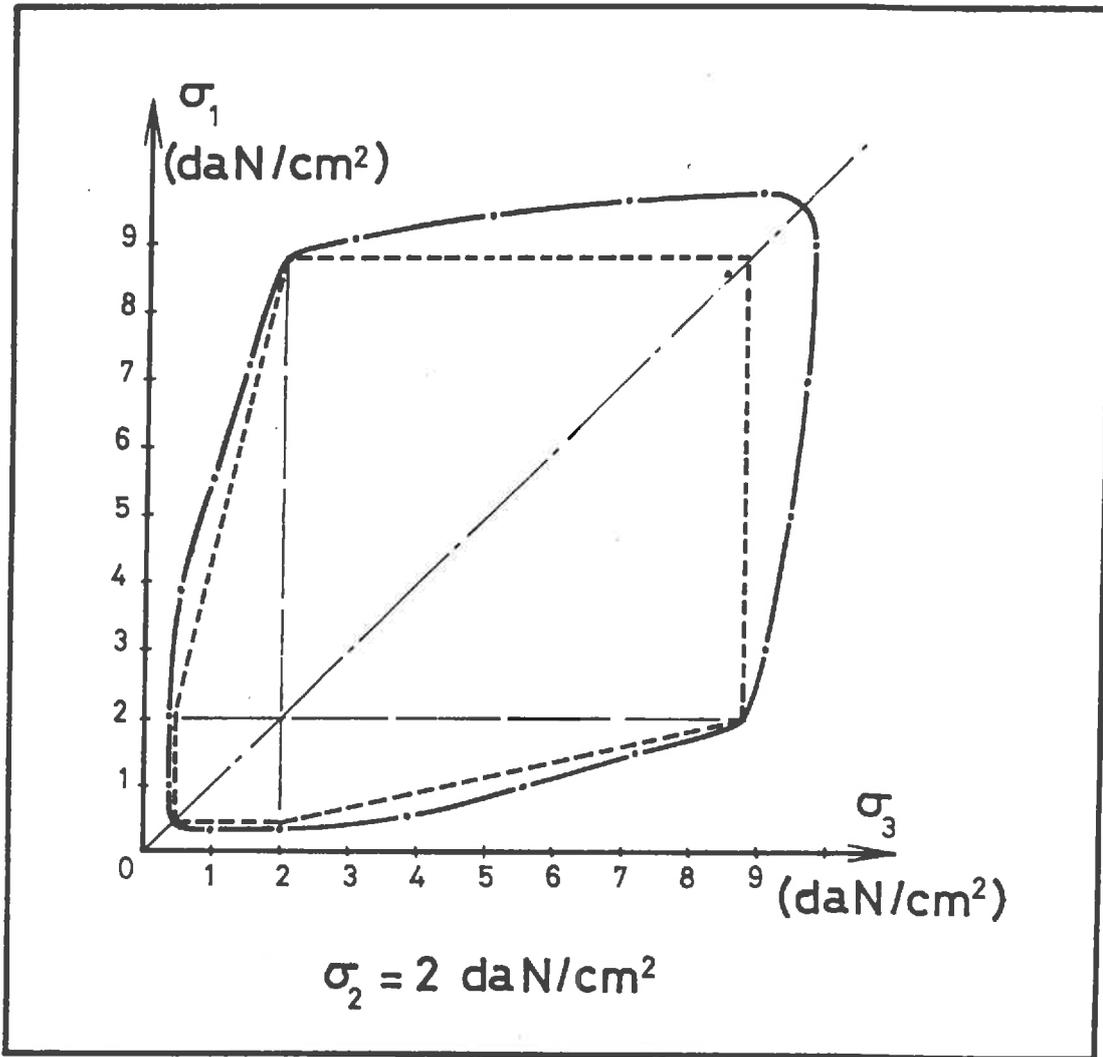


FIG. 5 : Coupe du critère de rupture par le plan :  $\sigma_2 = 2 \text{ daN/cm}^2$  dans le cas du sable dense de KARLSRUHE. Le critère de Mohr-Coulomb est représenté en tireté.

Notons que l'angle de frottement extrême en extension est alors déterminé de manière nécessaire. Et rappelons que la formule (1) ci-dessus ne représente pas un critère de rupture général, puisqu'elle n'est valable que sur la classe de chemins de sollicitation C pour lesquels les deux contraintes  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  restent constantes, éventuellement distinctes. Dans l'espace des contraintes principales, cette relation (1) fournit en fait des coupes du critère de rupture par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Elle permettrait, bien sûr, de construire point par point la surface de rupture.

Pour illustrer ces propos un peu abstraits, la figure 5 montre une coupe de la surface de rupture par le plan :  $\sigma_2 = 2 \text{ daN/cm}^2$  dans le cas du sable dense de KARLSRUHE (41).

Les différentes constantes sont ici égales à :

$$\begin{aligned} A_4 &= 0.266 \text{ daN/cm}^2 & ; & & A_5 &= 0.100 \text{ daN/cm}^2 & ; & & A_7 &= 0.09 \\ A_8 &= 0.7 & \text{et} & & \varphi &= 0.6 \text{ rd.} \end{aligned}$$

L'allure est qualitativement correcte et correspond à celle trouvée expérimentalement lors d'essais effectués sur des presses tridimensionnelles. Une coupe de cette surface de rupture par un plan déviatoire construite point par point et comparée avec des résultats expérimentaux sera par ailleurs présentée dans le chapitre II de la troisième partie.

Enfin, on peut noter que la relation (1) impose un angle de frottement extrême en extension sur chemin triaxial de révolution toujours supérieur ou égal à l'angle de frottement de pic en compression, ce qui est le cas des expériences présentées dans cette thèse mais n'est pas un résultat général.

En ce qui concerne les courbes de variations de volume, les expériences réalisées sur des presses tridimensionnelles ont montré la faible influence de la contrainte intermédiaire, si ce n'est sur l'indice des vides critique, qui doit dépendre de la contrainte moyenne. L'extrémum de l'indice des vides (quand il existe) a ainsi été laissé indépendant de la contrainte intermédiaire.

Par contre, il nous faut pouvoir distinguer les deux déformations latérales  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ .

La première hypothèse faite (dans ma thèse de docteur-ingénieur, en particulier (17) ) avait consisté à supposer la matrice de la loi incrémentale

symétrique, ce qui nous fournissait trois relations supplémentaires entre les éléments non-diagonaux de la matrice  $M$  et nous permettait de résoudre le problème. Nous avons vu dans le paragraphe 3 du chapitre I de la deuxième partie que cette hypothèse de symétrie était physiquement incorrecte.

Nous l'avons donc remplacé par une hypothèse portant sur une relation supplémentaire reliant  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sur la classe de chemins  $C$ . Des mesures effectuées sur des presses tridimensionnelles (en particulier, RAMAMURTHY et RAWAT (47)) nous ont permis de formuler la relation approchée suivante ( $\sigma_2, \sigma_3$  constants et distincts) :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right)^2 \quad (2)$$

D'où nous pouvons tirer :

$$\left| \begin{array}{l} v_k^l = \left[ 1 + \frac{1}{1+e} \left( \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \right] / \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_j}{\sigma_l} \right)^2 \right] \\ v_k^j = v_k^l \left( \frac{\sigma_j}{\sigma_l} \right)^2 \end{array} \right.$$

La connaissance de  $e(\varepsilon_k)$  (cf § 2.2) permet dès lors le calcul des six valeurs de  $v_k^l$ .

#### 2.4 - Conclusion

En somme, quels essais sont nécessaires pour déterminer les paramètres d'un matériau pulvérulent donné ? La réponse à cette question dépend de la précision recherchée.

Pour le calcul par des méthodes numériques du comportement d'un ouvrage in-situ, où une bonne précision est illusoire et superflue, on pourra se contenter d'une série de trois essais triaxiaux conventionnels drainés, réalisés en compression sur les différents types de sols situés dans la zone d'influence de l'ouvrage. Les trois valeurs de la contrainte latérale à choisir pour les essais doivent couvrir la plage des contraintes mises en jeu lors de la construction et de la charge de l'ouvrage. Il est préférable de les prendre en progression géométrique ( $\sigma_3, 2\sigma_3, 4\sigma_3$ ).

L'expérience, acquise dans la détermination des paramètres d'un sable, nous permet de déduire des valeurs approchées des paramètres en extension à partir des valeurs calculées en compression d'après les mesures expérimentales effectuées. La densité de l'échantillon à la mise en place dans l'appareil triaxial sera telle que, si l'on appliquait à l'échantillon une charge oedométrique, égale au poids des terres en place, la densité obtenue soit voisine de la densité réelle in-situ. Le calcul ultérieur de l'ouvrage par la méthode des éléments finis, avec une application par incréments successifs des forces ou déplacements imposés aux limites, ne se fera qu'après une initialisation de l'ensemble du massif de sol par une charge oedométrique en chaque noeud du maillage égale au poids des terres. Enfin, la réalisation d'un cycle de compression isotrope est souhaitable, car ce chemin permet une vérification facile de la validité de la loi rhéologique.

Si l'on veut améliorer la qualité de la description du comportement du sable étudié, à ces trois essais triaxiaux en compression on doit ajouter trois essais en extension effectués pour les mêmes valeurs de la contrainte latérale. L'appareillage utilisé doit chercher à préserver l'homogénéité de l'échantillon (présence de dispositifs d'anti-fretage et mise en place de rotules en tête et en pied des échantillons). Les solutions apportées à ces différents problèmes, très importants pour la qualité des mesures, ne seront pas présentées ici. Je renvoie le lecteur aux thèses d'AUBRY (6), de LABANIEH (36), de ROBINET (49) et de TRATAPEL (60).

En troisième lieu, dans le cas d'études d'ouvrages de petites dimensions en laboratoire ou si l'on veut particulièrement bien connaître la loi rhéologique d'un sable donné, 3 à 5 séries doubles d'essais triaxiaux en compression-extension seront effectuées avec un grand soin. Ainsi, les mesures de variations de volume, toujours très délicates, ont fait l'objet d'études particulières. Les quatre auteurs cités ci-dessus ont testé diverses solutions : mesures par variations du volume global sur échantillons saturés d'eau avec des burettes (AUBRY (6)), mesures de la densité sur des droites coupant l'échantillon par gammamétrie (LABANIEH (36)), mesures des déformations latérales par des capteurs de déplacement (ROBINET (49)) ou des comparateurs (TRATAPEL (60)) montés sur des colliers articulés entourant l'échantillon. La phase des petites déformations est importante à mesurer (pour une bonne détermination des pentes à l'origine des courbes). Elle a fait l'objet d'une réflexion aboutissant à des développements technologiques chez ces quatre auteurs, auxquels nous renvoyons, là encore, le lecteur intéressé par cet aspect fort important de cette étude.

---

### CHAPITRE III

#### LA PARTIE VISQUEUSE

L'étude des matériaux argileux, dont le comportement est visco-élastoplastique, doit se faire dans le cadre général d'une loi rhéologique de la forme :  $d\varepsilon = M d\sigma + C dt$  (cf première partie). La détermination de la matrice élastoplastique  $M$  a été détaillée dans le chapitre I de la deuxième partie. Ces résultats généraux sont valables pour les sables comme pour les argiles. Par contre, la formulation des expressions analytiques des trois familles de fonctions  $f, g, h$  fait apparaître quelques différences entre les sables et les argiles. Le premier paragraphe du prochain chapitre traitera de cette question.

Dans ce chapitre 3, nous nous restreignons donc à l'étude de la partie visqueuse de la déformation :  $C dt$ , et plus exactement du vecteur vitesse de fluage  $C$  (cf le chapitre II de la première partie).

#### 3.1 - Définition du fluage

Le fluage se définit a priori comme étant une déformation sous état de contrainte constant. Dans le cadre de cette étude, cette définition trop vague mène à quelques ambiguïtés, que nous allons évoquer.

Que se passe-t-il en effet quand on charge un échantillon argileux, essentiellement polyphasique ? On assiste tout d'abord à un tassement dû à un départ d'eau (consolidation dite "primaire", ou "hydraulique", ou "hydrodynamique"), puis le tassement se poursuit à pression interstitielle sensiblement fixe (consolidation "secondaire"). Ces deux phases, qui s'entremêlent généralement dans la pratique, correspondent à deux types de problèmes différents et doivent être étudiées dans deux cadres théoriques spécifiques.

La résolution d'un problème de consolidation hydraulique nécessite la connaissance :

1. de la loi rhéologique du squelette argileux (et en première approximation, la partie élasto-plastique de la loi peut suffire, quand le phénomène n'est pas trop étalé dans le temps)
2. de la loi rhéologique des fluides interstitiels (si le milieu est saturé, seul le comportement rhéologique de l'eau est à caractériser ; l'hypothèse d'un comportement visqueux newtonien aboutit à la loi de DARCY bien connue, qui permet de décrire l'écoulement de l'eau dans un milieu poreux)
3. de lois d'interaction : (loi de DARCY; loi de HENRY, si le milieu n'est pas saturé; ...)
4. des conditions aux limites.

En fait, ce problème n'est pas, à proprement parler, un problème de rhéologie puisque la connaissance des conditions aux limites est indispensable à sa solution. Ce problème est, par essence, hétérogène. Il faudra faire appel à des méthodes numériques pour le résoudre (par exemple, la méthode des éléments finis). Quant à la partie rhéologique du problème, elle est dès maintenant connue : squelette élasto-plastique, eau visqueuse-newtonienne, éventuellement loi d'état des gaz. Ces questions ont été discutées en détail par AURIAULT (7) et CHAMBON (14).

La consolidation "secondaire", due à la viscosité du squelette argileux, est par contre un problème proprement rhéologique. La solution en sera donnée par une description correcte de la partie visqueuse de la loi du matériau argileux.

En conséquence, rappelons que la loi rhéologique que nous étudions est celle relative au squelette. Les contraintes, intervenant dans son expression, seront donc nécessairement des contraintes intergranulaires ou effectives (sauf exceptions, en particulier dans la troisième partie, nous les notons : " $\sigma$ "). Les expériences destinées à mesurer les paramètres de cette loi seront effectuées à pression interstitielle constante (nous considérerons donc systématiquement des essais drainés).

Et nous pouvons maintenant définir avec précision le concept de fluage dont nous avons besoin dans cette étude. Puisque nous nous intéressons au comportement du squelette, c'est la déformation sous état de contrainte effective constant que nous devons étudier. La déformation instantanée étant produite par la partie élasto-plastique de la loi, nous analyserons la seule déformation différée.

Nous appelons donc vitesse de fluage la vitesse de déformation différée sous état de contrainte effective constant. Elle est relative à un squelette argileux drainé.

D'après les notations utilisées (§ 2 du chapitre 1 de la première partie), il s'agit d'un vecteur (monovalent d'ordre 6) et précisément du vecteur noté  $C$ . Le but de ce chapitre est l'explicitation de ce vecteur  $C$ .

Dans la formulation incrémentale :  $d\varepsilon = M d\sigma + C dt$ , à la différence de la matrice  $M$ , le vecteur  $C$  est d'ores et déjà caractérisé comme représentant une vitesse de déformation sur une classe de chemins particuliers, dont l'état de contrainte reste constant. Sa détermination sera donc beaucoup plus simple, sur un plan théorique, que celle de la matrice  $M$  : il suffit de décrire le fluage des sols. L'ensemble du comportement visqueux d'une argile sera obtenu comme une conséquence de l'écriture générale de la loi, dans laquelle on aura introduit le comportement en fluage.

Par ailleurs, l'incrément de temps " $dt$ " est toujours positif (il n'est pas possible de remonter le temps). Aucun problème, analogue à celui des zones tensorielles, ne se pose donc ici.

### 3.2 - Analyse des résultats expérimentaux

J'ai largement été aidé dans cette analyse bibliographique par FLAVIGNY (en particulier, sa note interne (22)), qui m'a fait profiter de sa vaste expérience à travers de nombreuses discussions, et par VUAILLAT (rapport D.E.A. (62)).

Nous allons dégager successivement trois conclusions d'une analyse des résultats expérimentaux, tirés de la littérature internationale.

#### A - Inexistence d'un fluage tertiaire

La figure 1 ci-après schématise les trois types de fluage que l'on distingue de manière classique : fluage primaire à vitesse décroissante, secondaire à vitesse constante, tertiaire à vitesse croissante et menant à une rupture par fluage.

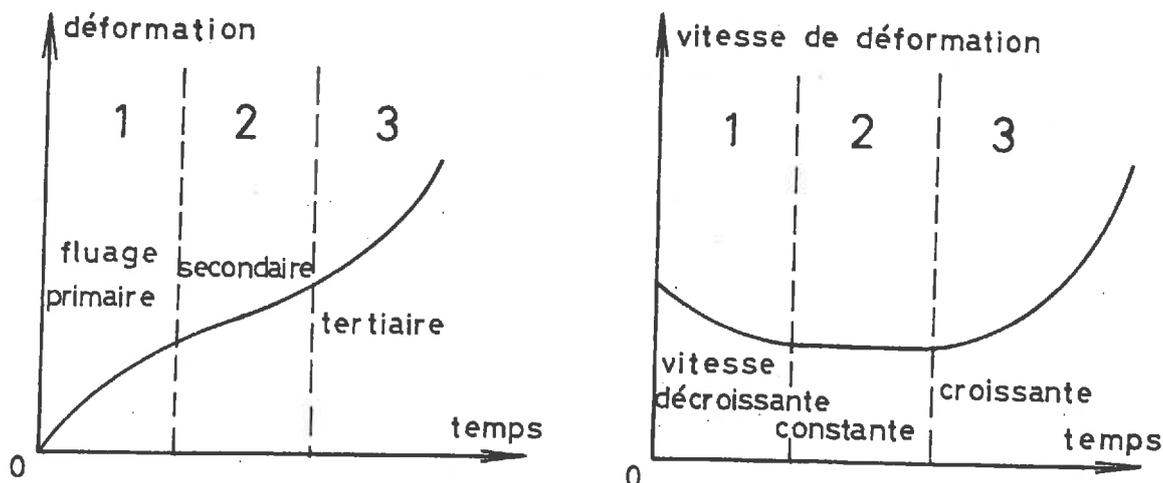


FIG. 1

Les expériences de fluage déviatoire drainé ont mis en évidence, de manière très générale, le fait que les ruptures d'échantillons ne se produisaient que très près du critère de rupture plastique.

SHIBATA et KARUBE (56) ont réalisé des essais de fluage déviatoire drainé en augmentant par incrément la valeur de  $1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$  et en conservant constant  $1/2 (\sigma_1 + \sigma_3)$ , les échantillons d'argiles ayant été normalement consolidés. Les essais ont duré de 20 à 30 jours. Leurs résultats, présentés sur la figure 2, montrent que la rupture n'a été obtenue que lorsque le critère de plasticité avait été atteint.

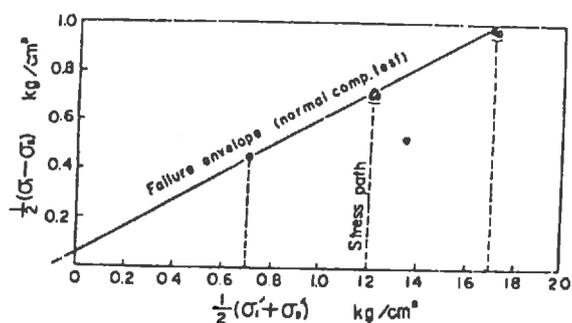


FIG. 2 : Résultats d'essais de fluage drainé.

SCHULTZE (55) lors d'essais de fluage déviatoire drainé sur des échantillons de limon normalement consolidés anisotropement, n'a jamais obtenu de fluage tertiaire même pour une valeur du rapport du déviateur constant appliqué au déviateur de rupture plastique égale à 0.954. Ses essais duraient plusieurs mois.

SCHULTZE affirme ainsi dans son article : "Contrairement à ce qui peut se passer dans un essai consolidé non drainé, l'éprouvette se déforme sans se rompre au cours d'un essai drainé ". Ses résultats sont reproduits sur la figure 3.

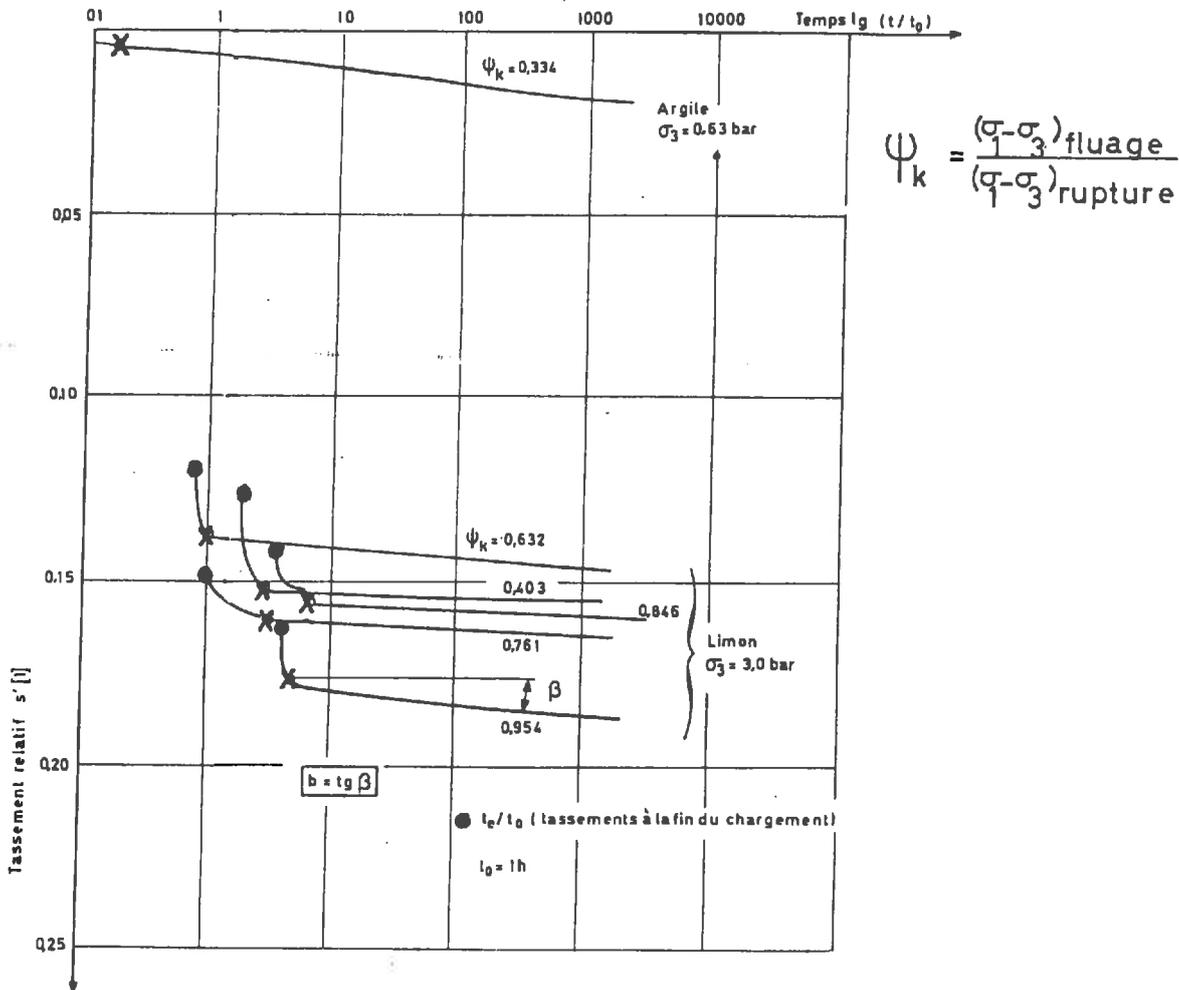


FIG. 3 : Evolution dans le temps du fluage drainé d'éprouvettes de limon et d'argile normalement consolidées anisotropement.

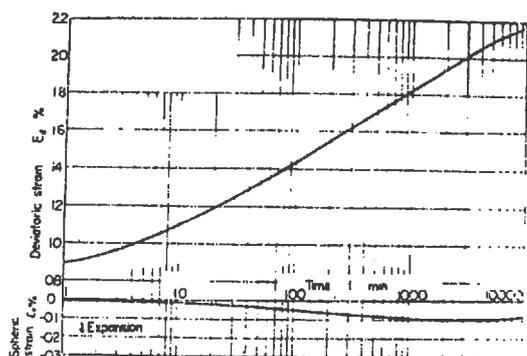
Les points noirs représentent la fin du chargement et les croix la fin de la consolidation hydraulique.

La prise en compte d'une phase primaire à vitesse de déformation décroissante, et éventuellement d'une phase secondaire à vitesse constante, semble donc suffisante pour décrire le fluage déviatoire drainé des sols.

### B - Faiblesse des variations de volume de fluage

Il semble qu'un fluage déviatoire (en contraintes) drainé produise de faibles variations de volume.

Ainsi SHIBATA et KARUBE (56) affirment que les teneurs en eau de chaque échantillon sont restées "approximativement constantes" tout au long des essais. La figure 4 en donne un exemple.



**FIG. 4 :** Variations de volume lors d'un essai de fluage drainé sur un échantillon d'argile surconsolidé.

SCHULTZE (55), pour sa part, note que "les variations de volume mesurées sont incertaines, mais oscillent constamment autour de la valeur zéro pour les deux liquides de mise en pression utilisés". (Remarque : il s'agit d'eau et d'huile de silicone). Il affirme que "on peut considérer que le fluage s'effectue à volume constant".

La figure 5 en présente un exemple caractéristique.

En second lieu, il semble que le fluage isotrope drainé soit négligeable.

SCHULTZE (55) "n'a pas constaté de fluage" lors d'essais de fluage isotrope par pression hydrostatique comprise entre 1.5 et 4 daN/cm<sup>2</sup> sur des échantillons remaniés, saturés, de limon. Il en conclut que "le fluage est un phénomène qui n'apparaît que lorsque le sol est soumis à des efforts de cisaillement".

Il apparaît ainsi, de manière générale, que les variations du premier invariant de la déformation de fluage restent négligeables devant le deuxième et qu'une pression isotrope est sans effet. Un matériau argileux se comporte comme un milieu sensiblement incompressible en fluage.

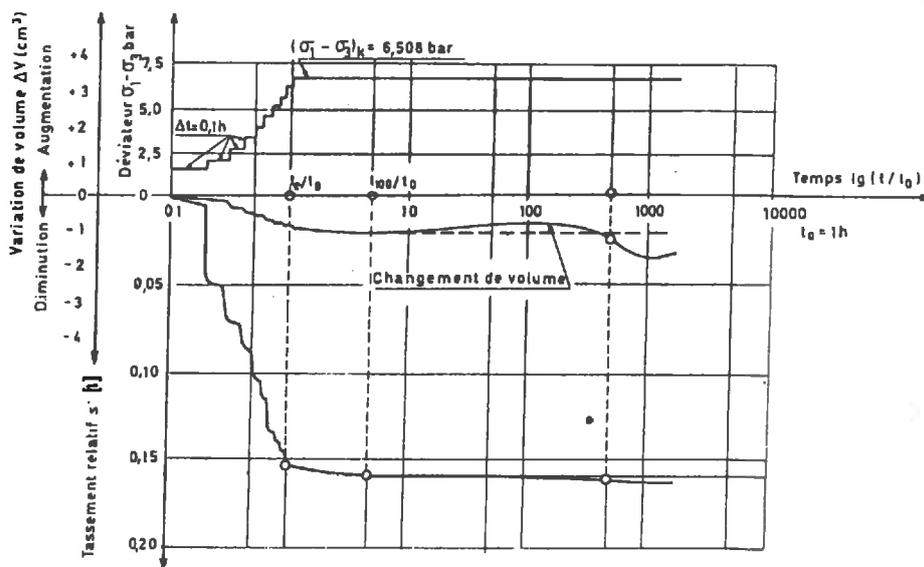


FIG. 5 : Variations caractéristiques de la charge appliquée à l'éprouvette, du tassement et du changement de volume en fonction du temps pour un essai de fluage drainé.

Par ailleurs, il semble peu vraisemblable que la phase du tenseur déformation varie profondément en fluage. Mais nous ne disposons pas de résultats expérimentaux systématiques à cet égard.

Nous sommes ainsi amenés à penser que ce sont les deuxièmes invariants des tenseurs contrainte et déformation (et leurs dérivées) qui déterminent principalement le fluage d'un matériau argileux. C'est dans le cadre de cette hypothèse que nous nous placerons désormais.

### C - Variations linéaires du déviateur de déformation avec le logarithme du temps

De nombreux résultats ont été publiés concernant ce point. Un large consensus paraît se dégager pour conclure que le déviateur de déformation varie de façon sensiblement linéaire avec le logarithme du temps. Ceci implique en particulier qu'il n'y ait pas de fluage tertiaire (hypothèse qui correspond à ce qui a été dit en A). Nous nous contenterons ici de présenter rapidement les résultats obtenus par SHIBATA-KARUBE (56) et SCHULTZE (55).

Sur la figure 6, sont reproduits les résultats de SHIBATA et KARUBE (56). Les essais ont duré une semaine environ. Les différents échantillons normalement

consolidés, étaient préparés de telle manière que leurs teneurs en eau soient identiques avant l'application des déviateurs de contrainte ( $W = 39.5\%$ ). Cette teneur en eau restait ensuite sensiblement fixe au cours de l'essai de fluage.

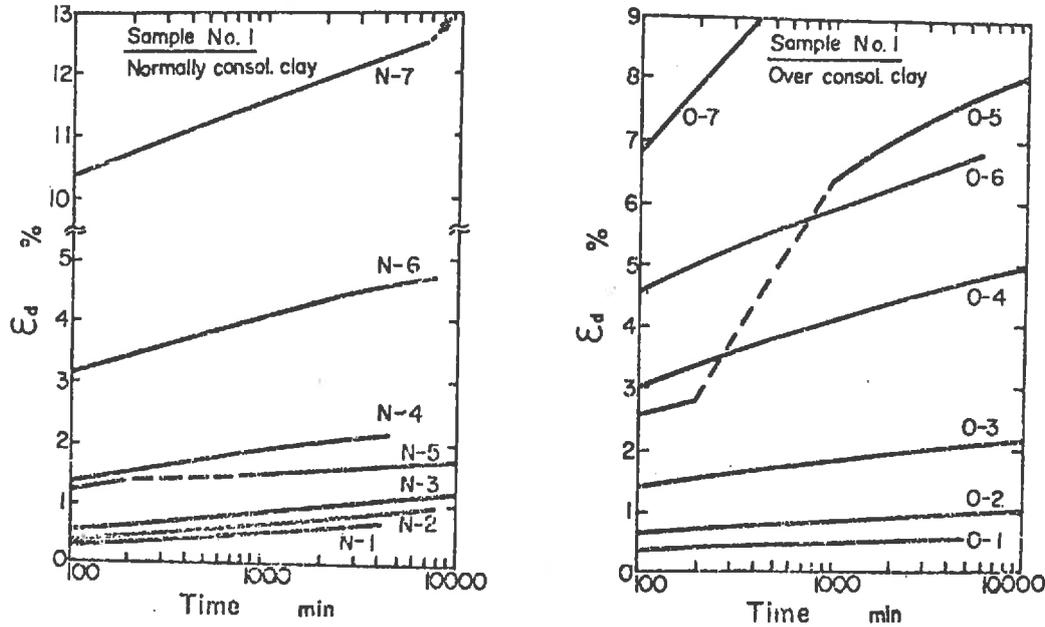


FIG. 6 : Variations de la déformation déviatoire :  $\epsilon_d = 2/3 (\epsilon_1 - \epsilon_3)$  avec le logarithme du temps pour des essais de fluage drainé sur des échantillons d'argile normalement consolidés (à gauche) et surconsolidés (à droite).

La figure 3 nous montre les résultats obtenus par SCHULTZE (55) pour différentes valeurs du déviateur appliqué. La relation linéaire, mise en évidence entre  $\epsilon_1$  et  $\log t/t_0$ , implique la linéarité des variations du deuxième invariant des déformations avec le logarithme du temps par suite de la faiblesse des variations de volume (ce deuxième invariant serait proportionnel à  $\epsilon_1$ , si les variations de volume étaient rigoureusement nulles).

### 3.3 - Ecriture détaillée de la loi

Sur la base des trois constatations expérimentales A, B et C, nous pouvons maintenant tenter de donner une première (1) formulation approchée du vecteur vitesse de fluage  $\dot{C}$ .

(1) Les thèses et articles ultérieurs présenteront - nous n'en doutons pas - des formulations améliorées.

Nous allons utiliser ici la notion d'invariants (ceci apparaît naturel] à la suite de la remarque B). Nous devons donc, auparavant, préciser nos notations. Elles seront valables pour l'ensemble de la thèse (et en particulier, pour le chapitre II de la troisième partie).

Les tenseurs contrainte et déformation possèdent trois scalaires invariants par changement de référentiel. En effet, leurs polynômes caractéristiques de degré 3, dont les racines sont les valeurs propres des matrices associées, doivent rester invariants : il existe ainsi trois coefficients de ces polynômes, qui sont invariants.

On sait que la trace d'une matrice  $A$ , qui est égale à la somme de ses éléments diagonaux, représente la somme de ses valeurs propres. Cette trace est donc invariante : c'est le premier invariant que nous avons choisi.

La trace de la partie déviatoire de  $A^2$  est aussi invariante : c'est notre deuxième invariant.

Le troisième sera alors naturellement représenté par la trace de la partie déviatoire de  $A^3$ .

Nous noterons ainsi :

$$\begin{array}{l}
 \text{1er invariant :} \\
 \text{2ème invariant:} \\
 \text{3ème invariant:}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 I_{1\sigma} = \text{trace} ([\sigma_{ij}]) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
 I_{1\varepsilon} = \text{trace} ([\varepsilon_{ij}]) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\
 \\
 I_{2s} = \text{trace} ([s_{ij}]^2) = (s_1)^2 + (s_2)^2 + (s_3)^2 \\
 I_{2e} = \text{trace} ([e_{ij}]^2) = (e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2 \\
 \\
 I_{3s} = \text{trace} ([s_{ij}]^3) = (s_1)^3 + (s_2)^3 + (s_3)^3 \\
 I_{3e} = \text{trace} ([e_{ij}]^3) = (e_1)^3 + (e_2)^3 + (e_3)^3
 \end{array} \right.$$

$[s_{ij}]$  et  $[e_{ij}]$  sont les parties déviatoires de  $\sigma$  et de  $\varepsilon$  :

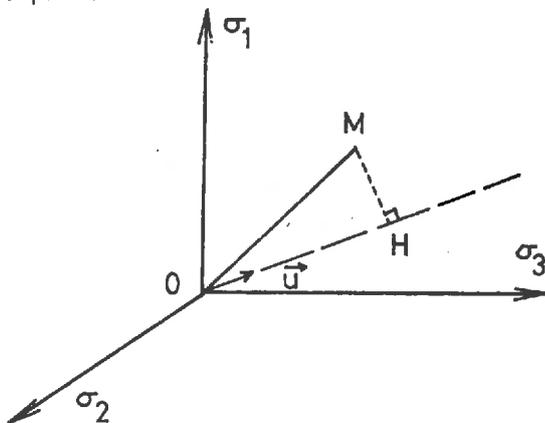
$$\left| \begin{array}{l}
 s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_{1\sigma}}{3} \delta_{ij} \\
 e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{I_{1\varepsilon}}{3} \delta_{ij}
 \end{array} \right.$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de KRONECKER : 
$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & (i = j) \\ \delta_{ij} = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

L'intérêt fondamental des invariants (qui restent fixes dans tout changement de référentiel) est qu'ils représentent intrinsèquement (à son orientation près) l'être physique, dont la matrice considérée est la représentation mathématique. Encore faut-il les choisir pour que leur interprétation physique soit la plus riche possible !

$I_{1\varepsilon}$  représente ainsi les variations de volume ( $-dV/V_0$  en petites déformations,  $\text{Log } V_0/V$  en grandes déformations) et  $I_{1\sigma}$  le triple de la contrainte moyenne.

Raisonnons maintenant dans l'espace des contraintes ou des déformations principales.



$$\begin{aligned} \vec{OM} & \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{vmatrix} \\ \vec{u} & \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On peut calculer facilement :

$$\begin{cases} OH = \vec{OM} \cdot \vec{u} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sqrt{3} = I_{1\sigma} / \sqrt{3} \\ MH = \|\vec{OM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{(s_1)^2 + (s_2)^2 + (s_3)^2} = \sqrt{I_{2s}} \end{cases}$$

La racine carrée du deuxième invariant de la partie déviatoire représente la distance à la trissectrice. Cette distance est ce que nous appelons "le déviateur" qui est donc un scalaire à distinguer de "la partie déviatoire", qui est un tenseur.

Insistons sur l'importance physique de la notion de déviateur.

Notons que dans un essai de révolution classique :

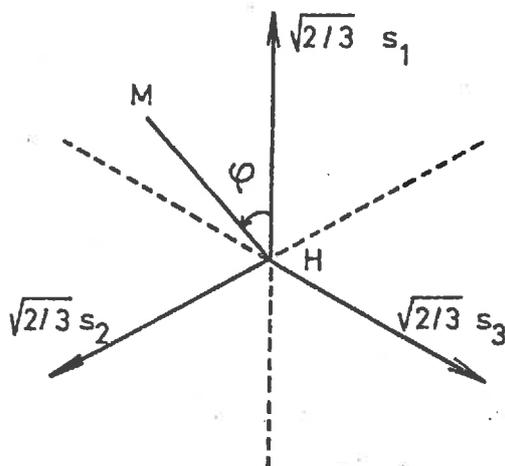
$$MH = \sqrt{I_{2s}} = \sqrt{2/3} |\sigma_1 - \sigma_3|^{(1)}.$$

Dans le cas d'un milieu bidimensionnel (matériau de SCHNEEBELI), on aurait :

$$OH = I_{1\sigma} / \sqrt{2} = (\sigma_1 + \sigma_2) / \sqrt{2} \quad \text{et} \quad MH = \sqrt{I_{2s}} = |\sigma_1 - \sigma_2| / \sqrt{2}.$$

Il n'existe, évidemment, dans ce cas que 2 invariants.

Dans un plan "déviatoire" (perpendiculaire à la trissectrice) contenant M, la figure ci-dessous définit "la phase"  $\varphi$  à  $2k\pi/3$  près.



On montre que :

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{6} I_{3s}}{\sqrt{(I_{2s})^3}}$$

La phase dépend ainsi du troisième invariant.

Les coefficients  $\sqrt{2/3}$  indiqués sur la figure permettent de respecter la métrique de l'espace tridimensionnel dans le plan déviatoire.

Les deux longueurs OH et MH et l'angle  $\varphi$ , qui représentent des coordonnées cylindriques pour le point M si l'on prend comme axe la trissectrice (HM et  $\varphi$  sont les coordonnées polaires du point M dans le plan déviatoire), ont été ainsi exprimés de manière simple en fonction des trois invariants :  $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2s}$  et  $I_{3s}$ . Tous ces raisonnements auraient été identiques dans l'espace des déformations principales.

Après ces brefs rappels sur la notion d'invariants et ayant ainsi défini nos notations, venons-en à l'explicitation du vecteur vitesse du fluage C.

(1) Il nous semble que chacun devrait faire l'effort d'utiliser cette définition du déviateur (logique et rigoureuse) plutôt que des expressions en :

$\sigma_1 - \sigma_3$ , ou  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , ou  $(\sigma_1 - \sigma_3)/3$ , etc...

D'après le point C du paragraphe précédent, on peut écrire :

$$\sqrt{I_{2e}} = P(\sigma) \text{Log } t/t_0,$$

qui exprime la linéarité du déviateur de déformation (1) en fonction du logarithme du temps.

$t_0$  représente l'unité de temps, et  $P(\ )$  une certaine fonction de l'état de contrainte et de l'histoire de la sollicitation.

Nous ferons intervenir l'histoire de la sollicitation au niveau des coefficients permettant l'explicitation de  $P(\ )$  en fonction de la contrainte.

Par ailleurs, d'après le point B du paragraphe précédent, il ne semble pas que la contrainte isotrope ait une influence importante. Il nous paraît a priori peu vraisemblable que la phase ait un rôle déterminant, mais nous manquons d'expériences sur ce point précis. Donc, la fonction  $P(\ )$  devrait dépendre essentiellement du déviateur de contrainte et de son histoire.

$$\text{Ainsi : } \sqrt{I_{2e}} = P(\sqrt{I_{2s}}) \text{Log } t/t_0 \quad (1)$$

Comme nous nous intéressons à la vitesse de fluage, par différentiation par rapport au temps, nous obtenons :

$$d\sqrt{I_{2e}} = P(\sqrt{I_{2s}}) t_0/t \, dt/t_0 \quad (2)$$

Nous savons qu'une loi rhéologique doit être formellement indépendante à la fois des référentiels qui servent à la définir et du temps (principe d'objectivité).

Mais d'après la relation (1) :

$$t/t_0 = \exp\left[\sqrt{I_{2e}} / P(\sqrt{I_{2s}})\right]$$

$$\text{D'où : } dI_{2e} = 2\sqrt{I_{2e}} P(\sqrt{I_{2s}}) \exp\left[-\sqrt{I_{2e}} / P(\sqrt{I_{2s}})\right] dt/t_0$$

Dans le point B du paragraphe précédent, nous avons noté la faiblesse des variations de volume. D'autre part, il nous avait paru vraisemblable que la phase des déformations variait peu.

---

(1) Il s'agit ici, plus précisément, de la partie visqueuse de la déformation.

Nous supposons ici que le fluage s'effectue, en déformation, dans un plan déviatoire et à phase fixe. La première condition s'exprime simplement par :

$$d I_{1\varepsilon} = 0 \quad (3)$$

La deuxième condition s'écrit :

$$d \left[ I_{3e} / (I_{2e})^{3/2} \right] = 0$$

$$D'où : \quad d I_{3e} = 3 I_{3e} / 2 I_{2e} d I_{2e} \quad (4)$$

Les relations (2), (3) et (4) impliquent :

$$\begin{bmatrix} d I_{1\varepsilon} \\ d I_{2e} \\ d I_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 I_{2e} \\ 3 I_{3e} \end{bmatrix} \frac{P(\sqrt{I_{2s}})}{\sqrt{I_{2e}}} \exp \left[ - \frac{\sqrt{I_{2e}}}{P(\sqrt{I_{2s}})} \right] \frac{dt}{t_0} \quad (5)$$

Des calculs fastidieux permettent d'exprimer le vecteur incrément de déformation principale en fonction du vecteur incrément d'invariants intervenant au premier membre de la relation (5).

Rappelons les définitions :

$$\begin{cases} I_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I_{2e} = 1/9 \left[ (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \right] \\ I_{3e} = 1/27 \left[ (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)^3 + (2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1)^3 + (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^3 \right] \end{cases}$$

Par différentiation :

$$d I_{1\varepsilon} = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3$$

$$d I_{2e} = 2/3 \left[ (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) d\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1) d\varepsilon_2 + (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) d\varepsilon_3 \right]$$

$$dI_{3e} = 1/3 \left[ \left[ 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 \right] d\varepsilon_1 + \right. \\ \left. \left[ 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] d\varepsilon_2 + \left[ 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \right] d\varepsilon_3 \right]$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} dI_{1e} \\ dI_{2e} \\ dI_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} B_k = 2/3 (2\varepsilon_k - \varepsilon_j - \varepsilon_l) \\ C_k = 1/3 \left[ 2(\varepsilon_k - \varepsilon_j)(\varepsilon_k - \varepsilon_l) - (\varepsilon_j - \varepsilon_l)^2 \right] \end{cases} \begin{cases} k, j, l = 1, 2, 3 \\ k \neq j \neq l \neq k \end{cases}$$

Par inversion de la matrice R, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det R} \begin{bmatrix} 2I_{2e}(C_3 - C_2) + 3I_{3e}(B_2 - B_3) \\ 2I_{2e}(C_1 - C_3) + 3I_{3e}(B_3 - B_1) \\ 2I_{2e}(C_2 - C_1) + 3I_{3e}(B_1 - B_2) \end{bmatrix} \frac{P(\sqrt{I_{2s}})}{\sqrt{I_{2e}}} \exp \left[ \frac{-\sqrt{I_{2e}}}{P(\sqrt{I_{2s}})} \right] \frac{dt}{t_0} \quad (6)$$

$$\text{avec : } \det R = (B_1 - B_3)(C_2 - C_3) - (B_2 - B_3)(C_1 - C_3),$$

$$C_k - C_j = (\varepsilon_j - \varepsilon_k)(2\varepsilon_l - \varepsilon_k - \varepsilon_j),$$

$$\text{et } B_k - B_j = 2(\varepsilon_k - \varepsilon_j).$$

Pour effectuer ce calcul nous avons dû supposer que la matrice **R** était inversible. Elle ne l'est pas dans deux cas. Le premier cas est celui, très particulier, d'un état actuel isotrope en déformations, quant au second, plus général, d'un état actuel de révolution en déformation.

Cas particuliersA - Etat actuel isotrope en déformations

Si l'état de contrainte actuel est aussi isotrope, nous avons vu que la déformation de fluage pouvait être négligée.

Si l'état de contrainte actuel n'est pas isotrope, nous pouvons déterminer directement l'augmentation du déviateur :

$$\begin{aligned} \sqrt{I_{2e}} &= 1/3 \sqrt{(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2 + (2d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2} \\ &= P(\sqrt{I_{2s}}) \text{ Log } t/t_0 \end{aligned}$$

avec par ailleurs :  $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0$

Mais, nous sommes obligés de faire une hypothèse supplémentaire pour la phase.

En l'absence de résultats expérimentaux de fluage tridimensionnel, nous choisissons de manière simpliste un incrément de déviateur de déformation dans la direction de la contrainte principale majeure. Quand il s'agit de la direction 1, on obtient :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} P(\sqrt{I_{2s}}) \frac{dt}{t_0} \quad (7)$$

B - Etat actuel de révolution en déformations

Il nous faut refaire un calcul direct. Nous supposons le problème de révolution autour de la direction 1.

$$\begin{cases} dI_{1\varepsilon} = d\varepsilon_1 + 2 d\varepsilon_3 \\ dI_{2e} = 4/3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & \frac{1}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \\ 1/3 & \frac{-1}{4(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dI_{1\varepsilon} \\ dI_{2e} \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit : } \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sqrt{I_{2e}} P(\sqrt{I_{2s}}) \exp \left[ \frac{-\sqrt{I_{2e}}}{P(\sqrt{I_{2s}})} \right] \frac{dt}{t_0} \quad (8)$$

### 3.4 - Conclusion

Les relations (6), (7) et (8) fournissent le vecteur vitesse de fluage drainé pour un sol.

Elles ont été établies sur la base de trois hypothèses principales :

1. le déviateur de déformation est fonction linéaire du logarithme du temps
2. un sol se comporte comme un matériau incompressible en fluage
3. la phase de la déformation reste constante.

Les deux premières hypothèses sont bien confirmées expérimentalement (cf § 3.2). Par contre, la troisième reste arbitraire. Des expériences de fluage tridimensionnel sont nécessaires pour la préciser. Une autre hypothèse simple aurait été de supposer que le troisième invariant restait constant en fluage. Pour obtenir l'expression de la vitesse de fluage correspondant à cette hypothèse, il suffit de faire :  $I_{3e} \equiv 0$  dans les formules (6), (7) et (8). Des études expérimentales ultérieures nous permettront de préciser cette question. Par ailleurs, cette troisième hypothèse n'intervient pas dans l'interprétation des expériences de révolution réalisées de manière classique.

Le vecteur de fluage n'a été étudié et exprimé que pour une même charge appliquée indéfiniment. On doit se poser la question de savoir si les formulations proposées restent valables en cas de changement des charges appliquées. D'après les expériences de fluage drainé en torsion réalisées par BOUCEK (9), il semble qu'une augmentation instantanée de la contrainte de cisaillement se traduise par un brusque

accroissement de la déformation de cisaillement (réponse élasto-plastique) suivi d'une courbe de fluage avec une légère augmentation de la pente. L'allure "en escalier" des courbes obtenues par BOUCEK (9) nous paraît être compatible avec notre formulation, mais ce point demande à être précisé par une comparaison approfondie de la théorie avec les expériences. Eventuellement, il faudra prendre en compte de manière plus complète l'histoire du chargement en utilisant un principe de superposition des vitesses de déformation dans le temps (principe de BOLTZMANN), chaque niveau de charge antérieur induisant une certaine vitesse de déformation actuelle en fluage :

$$C_{\alpha}(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) d\sigma_{\alpha}(\tau) d\tau$$

Les relations (6), (7) et (8) ont été écrites dans les axes principaux de la partie visqueuse de l'incrément de déformation. Nous supposerons qu'ils coïncident avec ceux de la partie élasto-plastique de l'incrément de déformation.

L'expression générale de la loi est écrite dans les axes d'orthotropie, relatifs à la partie élasto-plastique incrémentale. Dans les applications à des calculs d'ouvrages (pour lesquels la loi est introduite dans des programmes de calcul numérique utilisant la méthode des éléments finis), ces axes d'orthotropie de la loi incrémentale sont supposés coïncider avec les axes principaux de la contrainte totale actuelle. Sur l'expression du vecteur vitesse de fluage, il faudra donc effectuer la rotation amenant les axes principaux de la partie élasto-plastique de la déformation incrémentale sur les axes d'orthotropie de la loi incrémentale. L'addition de la partie visqueuse à la partie élasto-plastique devra être effectuée dans ces axes d'orthotropie.

Enfin, il est clair que le vecteur vitesse de fluage dépend des états de contrainte et de déformation actuels. Il peut éventuellement dépendre de l'histoire de la contrainte par l'intermédiaire de la fonction  $P(\sqrt{I_{2s}})$ , dont les coefficients pourront varier avec certains paramètres caractérisant l'histoire antérieure en contrainte. C'est à ce niveau-là que l'influence de la surconsolidation sur le comportement d'une argile sera prise en compte.

L'expression de cette fonction  $P(\sqrt{I_{2s}})$  sera étudiée dans le paragraphe 2 du prochain chapitre.

#### CHAPITRE IV

##### DETERMINATION DES PARAMETRES D'UNE ARGILE DONNEE

De même que nous avons distingué, dans la théorie, partie élasto-plastique et partie visqueuse, ce chapitre est divisé en deux paragraphes, chacun étant relatif à la définition des paramètres respectifs élasto-plastique et visqueux.

Situons, tout d'abord, de manière générale le problème en nous demandant quelles sont les différences majeures des comportements d'un sable et d'une argile ?

Tout d'abord, une argile est visqueuse, et nous avons donc dû étudier son comportement dans le cadre des matériaux visco-élasto-plastiques.

Ensuite, elle est extrêmement peu perméable par rapport à un sable. Cette très faible perméabilité a eu des conséquences importantes dans l'étude expérimentale de la rhéologie des argiles. En effet, on a pu faire coïncider ainsi résistance à court-terme et non-drainage, résistance à long-terme et drainage. Or, les calculs de stabilité à court terme se sont toujours révélés être les plus défavorables. Une abondante littérature a ainsi fleuri sur le comportement non-drainé des argiles. Si ces études ont effectivement permis des calculs de stabilité, elles ont repoussé, à notre avis, l'analyse plus générale de la rhéologie du squelette argileux. Nous reprendrons rapidement cette question dans le premier paragraphe de ce chapitre.

Enfin, la consolidation isotrope (1) d'une argile est beaucoup plus importante que celle d'un sable. C'est cette ampleur de la consolidation isotrope,

---

(1) Rappelons, encore une fois, qu'il ne s'agit pas de la consolidation hydraulique, mais de la compressibilité d'une argile à pression interstitielle fixe. Nous étudions la rhéologie du squelette et il s'agit ici de déformation instantanée de type élasto-plastique.

analogue à celle du diagramme critique, qui permet de passer d'une argile normalement consolidée contractante à une argile sur-consolidée dilatante par une pré-contrainte de consolidation, dont la valeur n'est pas nécessairement importante. Par ailleurs, si l'on peut déposer un ensemble de grains de sable de multiples manières différentes ( en vibrant, par déversement, etc...), il y a une manière "canonique" (si l'on peut dire) de fabriquer un échantillon d'argile à un indice des vides donné : par consolidation isotrope à partir de l'argile saturée, remaniée. Il existe ainsi une courbe de consolidation vierge et une seule. Nous pourrons dès lors traiter l'ensemble du comportement d'une argile saturée remaniée, quelle soit normalement consolidée ou surconsolidée (par pré-consolidation isotrope).

Les bases expérimentales, indispensables aux formulations analytiques qui suivent, ont été recueillies à la suite de nombreuses discussions avec FLAVIGNY (cf ses notes internes), ROBINET (49), qui a réalisé des compression-extension drainées et des expériences de fluage à l'Ecole Centrale Lyonnaise ,et VUAILLAT (62).

Dans le cadre de cette thèse, je me limiterai, d'une part à exposer quelques idées, pour dégager certaines inter-relations en rhéologie des argiles, et d'autre part à préciser quelques relations analytiques permettant de décrire , en première approximation, les caractéristiques majeures du comportement d'une argile.

#### 4.1 - Partie élasto-plastique

Les expérimentateurs distinguent trois types d'essais conventionnels sur matériaux argileux :

- |   |   |
|---|---|
| 1. les essais non-consolidés, non-drainés | } consolidation normale<br>ou sur-consolidation |
| 2. les essais consolidés, non-drainés     |   |
| 3. les essais consolidés, drainés         |   |

Le troisième cas est celui que nous traitons directement en toute logique, puisque nous nous intéressons à la loi du squelette argileux.

Le deuxième cas, nous le traitons alors comme une application de la loi générale sur une classe de chemins particuliers : les chemins à volume constant. Les chemins non-drainés apparaissent ainsi comme des chemins de vérification, testant la validité de la loi. En particulier, il est clair qu'il existe une surface

de rupture plastique unique pour le matériau, qui est donc nécessairement la même en consolidé, non-drainé et en consolidé, drainé. Angles de frottement et cohésions doivent être identiques, si l'on raisonne en contrainte effective ; à cette remarque près cependant : dans le cas des argiles sur-consolidées, angle de frottement et cohésion de "pic" dépendent de la contrainte latérale effective, qui ne reste pas constante dans un essai triaxial non-drainé classique. Pour réaliser une comparaison significative, il faut donc effectuer un essai triaxial drainé avec une contrainte latérale égale à la contrainte latérale effective atteinte lors du pic non-drainé.

Quant au premier cas, il correspond à un matériau presque fictif : eau + squelette, sans mouvement relatif de chacune des deux phases et rigoureusement incompressible. C'est un matériau différent de celui des deux autres cas. On peut déterminer sa loi rhéologique incrémentale, qui est particulièrement simple du fait de l'incompressibilité. Il faudra, dans ce cas, raisonner en contraintes totales.

Rompons un instant le fil de notre propos et regardons d'un peu plus près cette question.

Un matériau incompressible a un comportement indépendant de la pression isotrope. Sa surface limite ne peut donc être qu'un cylindre ou un prisme droit d'axe la trissectrice. Dans le plan de MOHR, une telle surface limite se traduit par une droite parallèle à l'axe des contraintes normales, que l'on peut interpréter en disant qu'un tel corps possède une cohésion non nulle (dépendant de la contrainte intermédiaire, éventuellement) et un angle de frottement nul. Par ailleurs, puisqu'un tel corps a des variations de volume identiquement nulles, toutes les fonctions  $V_k^I$  seront identiquement égales à 0.5, si l'on néglige l'influence de la contrainte intermédiaire. •

La seule connaissance de la cohésion, du module  $U_j$  (c'est-à-dire deux constantes) et le choix d'un critère de plasticité (type MISES ou TRESCA) suffit alors pour déterminer la partie élasto-plastique de la loi rhéologique.

Remarquons que les chemins de sollicitation réalisables sont tous situés dans un plan déviatoire en déformations, que l'on ne peut pas calculer des pressions interstitielles et enfin que la matrice  $M$  n'est pas inversible (résultat physiquement évident, puisque l'état de contrainte n'est déterminé qu'à une contrainte isotrope arbitraire près).

Les conclusions du chapitre I de la deuxième partie sont absolument valables pour les matériaux argileux. Ainsi, ce sont des essais triaxiaux drainés en compression-extension, qu'il faudra réaliser pour déterminer les paramètres de la partie élasto-plastique de la loi de l'argile considérée.

Si cette argile est normalement consolidée, on effectuera ces essais triaxiaux pour différentes valeurs de la contrainte de consolidation  $\sigma_c$ , égale à la contrainte latérale  $\sigma_3$  restant constante au cours de l'essai.

Si l'argile est surconsolidée, sa contrainte de pré-consolidation étant notée  $\sigma_c$ , les essais triaxiaux seront à réaliser pour différentes valeurs du taux de sur-consolidation ("overconsolidation ratio") égal à  $\frac{\sigma_c}{\sigma_3}$  (1). Si l'on fait varier en outre la contrainte de préconsolidation, on pourra déterminer la loi complète d'une argile saturée remaniée.

Les formulations analytiques, présentées dans le chapitre II (deuxième partie) et décrivant la famille des courbes contrainte-déformation et de variations de l'indice des vides, restent valables pour les matériaux argileux. Nous savons, en effet, qu'une argile normalement consolidée<sup>(2)</sup> possède une courbe contrainte-déformation sans extrémum et est contractante en compression sur un chemin triaxial classique : ce comportement est ainsi analogue à celui d'un sable lâche. Une argile surconsolidée<sup>(2)</sup> présente au contraire une rupture avec extrémum de contrainte et elle est dilatante : elle se comporte comme un sable dense.

Par contre, certaines relations empiriques, précisées dans le même chapitre II et donnant les variations de certaines grandeurs physiques avec la contrainte latérale, doivent être modifiées.

Le pseudo-module d'Young d'une argile est ainsi fonction linéaire de la contrainte :

$$U_i(\sigma_3) = K \sigma_3$$

Rappelons rapidement que cette hypothèse, jointe à deux autres que nous allons préciser, aboutit à une courbe de consolidation isotrope rectiligne dans les axes ( $e$ ,  $\text{Log } \sigma$ ). Soit un essai de compression isotrope ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ) sur un échantillon initialement isotrope.

(1) Rappelons, une dernière fois, qu'il s'agit de contraintes "effectives".

(2) Cette caractérisation, valable dans le cas général, est parfois insuffisante.

L'application de la loi incrémentale à un tel chemin donne :

$$d\varepsilon = \frac{1 - 2 \nu_i(\sigma)}{U_i(\sigma)} d\sigma$$

Or :  $3 d\varepsilon = - de / (1 + e)$

D'où :  $\frac{de}{1 + e} = \frac{-3 [1 - 2 \nu_i(\sigma)]}{U_i(\sigma)} d\sigma$

Nous avons vu que :  $U_i(\sigma) = K \sigma$

Si l'on suppose de plus que :

1. l'indice des vides reste voisin de l'indice des vides initial  $e_i$ ,
2. le pseudo-coefficient de Poisson  $\nu_i(\sigma)$  est constant,

on obtient :

$$\frac{de}{1 + e_i} = \frac{-3(1 - 2\nu)}{K\sigma} d\sigma,$$

qui s'intègre en :  $e = e_i - \frac{3(1 - 2\nu)(1 + e_i)}{K} \text{Log } \sigma / \sigma_i$

Nous retrouvons ici la relation de ROSCOE, SCHOFIELD et WROTH (50,54) :

$$e = e_i - \lambda \text{Log } \sigma / \sigma_i$$

La valeur de  $K$  en extension étant supérieure à sa valeur en compression, le coefficient  $\lambda$ , correspondant à une décharge isotrope, prendra une valeur plus faible qu'en charge.

Nous obtenons ainsi le diagramme classique :

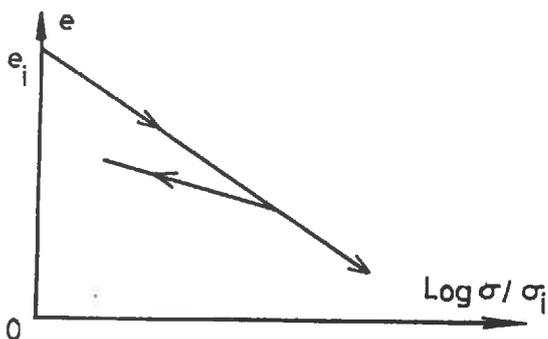


FIG. 1 : Schématisation d'une charge-décharge sur chemin isotrope

Expérimentalement, ROSCOE, SCHOFIELD et WROTH (50, 54) ont montré que le diagramme critique, tracé dans des axes  $(e, \text{Log } \sigma)$ , avait une pente voisine de la courbe de consolidation vierge isotrope.

En accord avec ces résultats, nous avons donc choisi comme représentation analytique du diagramme critique :

$$e_c = B_1 - B_2 \text{Log } \sigma_m / B_3 ,$$

où  $B_2$  aura une valeur voisine de  $\lambda$ .

Cette relation est, en fait, la seule fondamentalement différente parmi les formulations utilisées pour les sables (remarque, qui est simplement à mettre à l'actif de la grande souplesse de notre modèle).

Le traitement de la surconsolidation demande quelques commentaires supplémentaires.

Les pseudo-modules  $U_i$  et les pseudo-coefficients de Poisson  $\nu_i$  varient avec la surconsolidation, comme dans le cas d'un sable, mais d'une manière qu'il reste à expliciter (voir, pour les sables, le chapitre IV de la troisième partie). Par contre, un comportement propre à l'argile est l'apparition d'une cohésion importante à la suite d'une préconsolidation.

La courbe intrinsèque que nous décrivons aura ainsi la forme suivante :

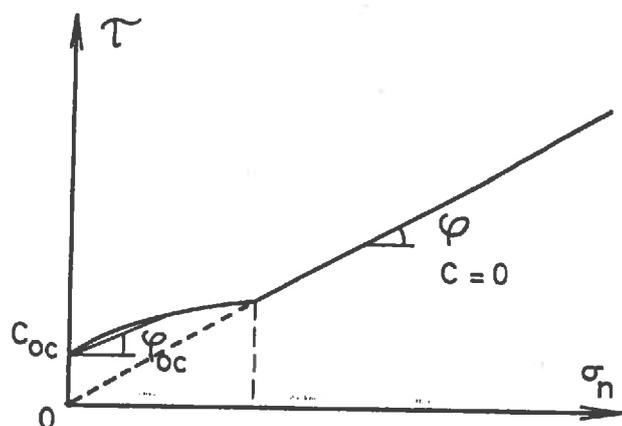


FIG. 2 : Schématisation de la courbe intrinsèque d'une argile

Tandis qu'une argile normalement consolidée possèdera un angle de frottement constant  $\varphi$  et une cohésion  $C$  nulle, la surconsolidation se traduira par un angle de

frottement  $\varphi_{oc}$  (oc pour "overconsolidated") variant avec la contrainte et une cohésion  $C_{oc}$ .

Le passage d'un comportement de type contractant (consolidation normale) à un comportement de type dilatant (surconsolidation) s'effectue au moyen des formules du chapitre II (troisième partie) lors du passage de l'indice des vides critique au-dessus de l'indice des vides initial. Cette remarque est schématisée sur la figure ci-dessous.

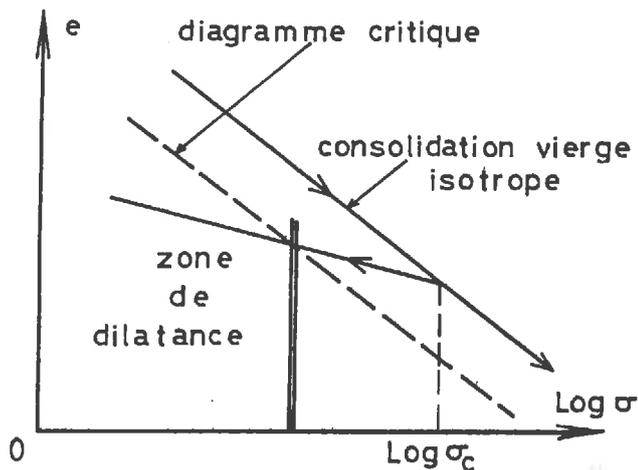


FIG. 3 : Schématisation du domaine de comportement dilatant pour une argile surconsolidée. Cette schématisation est généralement valable, mais il en existe des contre-exemples.

Des compressions-extensions triaxiales drainées seront prochainement réalisées au Laboratoire de Mécanique des Sols de Grenoble. Quelques essais ont déjà été effectués par ROBINET (49) à l'Ecole Centrale Lyonnaise. Sur la base de tels essais, il sera possible de déterminer les paramètres élasto-plastiques des argiles étudiées.

Par ailleurs, le lecteur se reportera avec profit à l'excellente analyse physique du comportement élasto-plastique des argiles saturées, remaniées, effectuée par l'Ecole de Cambridge (50, 54) et résumée en français par ANQUETIL (4).

Pour notre part, nous nous contenterons ici de calculer les paramètres d'une argile normalement consolidée à partir d'essais tirés de la littérature. Nous avons ainsi choisi l'argile de WEALD. Nous allons rapidement préciser comment nous en avons déterminé les paramètres et donner leurs valeurs.

Les résultats expérimentaux utilisés ont été publiés dans la thèse de HENKEL (30) et dans l'article de PARRY (45).

Variations du pseudo-module d'Young

$$U_i(\sigma_3) = 31 \sigma_3 \text{ en compression et } 83.7 \sigma_3 \text{ en extension.}$$

Angle de frottement :  $\varphi = 25^\circ$

SCHOFIELD et WROTH (54, p.157) donnent une valeur de  $24.25^\circ$  sur la base des mesures de PARRY (45).

Pseudo-coefficient de Poisson en compression :  $\nu_i = 0.23$

La valeur 0.23 est tirée des résultats expérimentaux de HENKEL et SOWA (31).

Equation du diagramme critique :  $e_c = 0.71 - 0.091 \text{ Log} \sigma_m / 0.5$

SCHOFIELD et WROTH (54, p.157) ont déterminé une pente de : 0.093.

Sur la figure 4, est représenté ce diagramme critique comparé avec les points expérimentaux de HENKEL (30). Nous avons tracé sur cette même figure un cycle de charge-décharge en consolidation isotrope, obtenu par intégration de la loi rhéologique incrémentale générale. Les résultats expérimentaux sont tirés aussi de la thèse de HENKEL (30) : pour ne pas avoir à transposer des points expérimentaux, nous avons été ainsi amenés à respecter les axes et les variables de HENKEL.

La figure 5 présente les courbes obtenues par les formulations analytiques du chapitre 2 (deuxième partie) pour le calcul des paramètres. Il s'agit de chemins triaxiaux de révolution drainés en compression (noté C) et en extension (noté E) sur l'argile de WEALD saturée, remaniée, normalement consolidée ( $\sigma_3 = 2.1 \text{ daN/cm}^2$ ). Les deux courbes supérieures représentent des courbes contrainte-déformation, les deux courbes inférieures les variations de volume. Les courbes expérimentales en pointillés sont tirées de l'article de PARRY (45).

Les paramètres de cette argile ayant été ainsi calculés, nous avons pu en écrire la loi rhéologique incrémentale (partie élasto-plastique) et l'intégrer sur différents chemins de sollicitation. Nous verrons ces résultats, comparés aux mesures expérimentales, dans le chapitre III de la troisième partie.

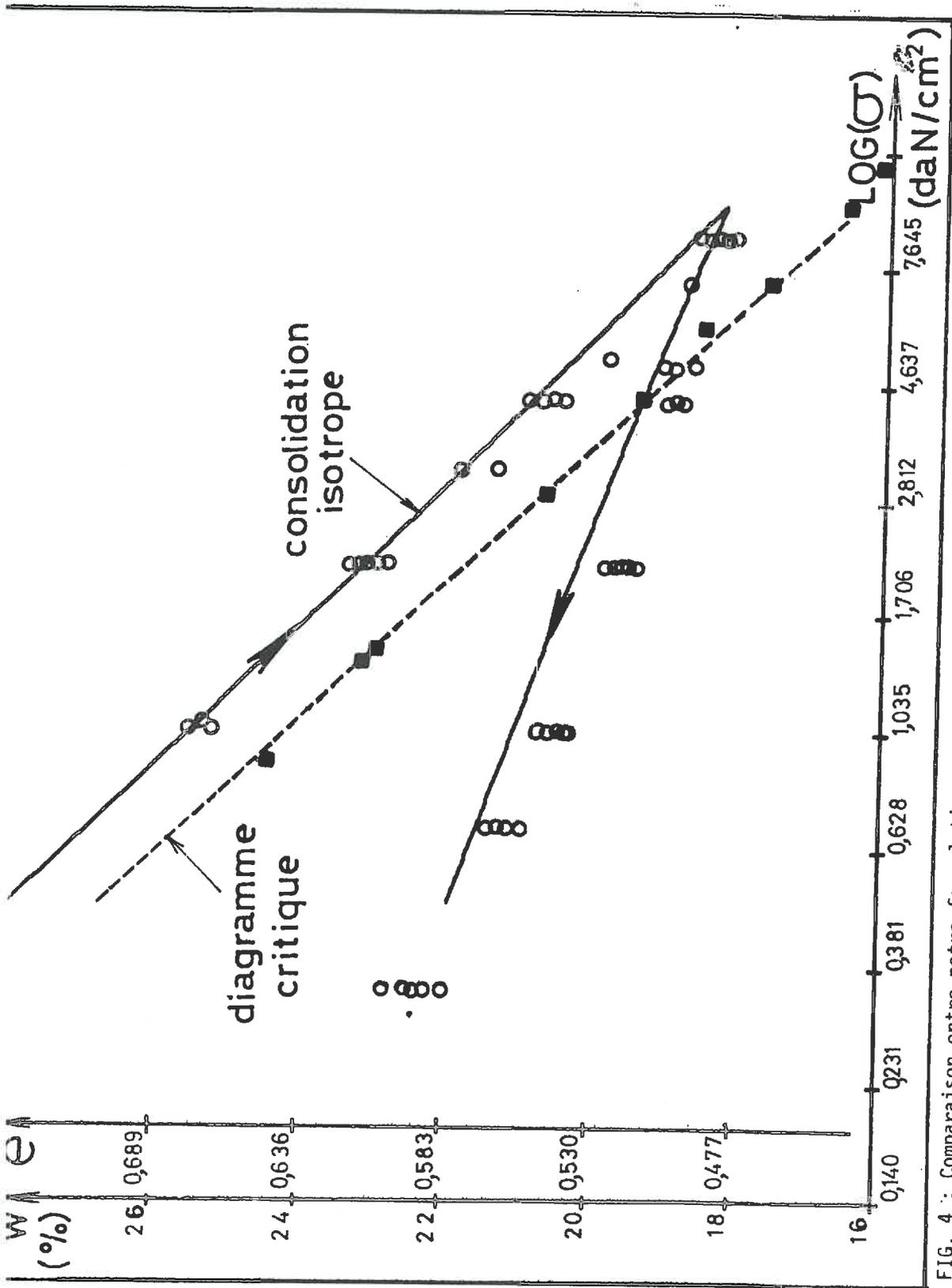
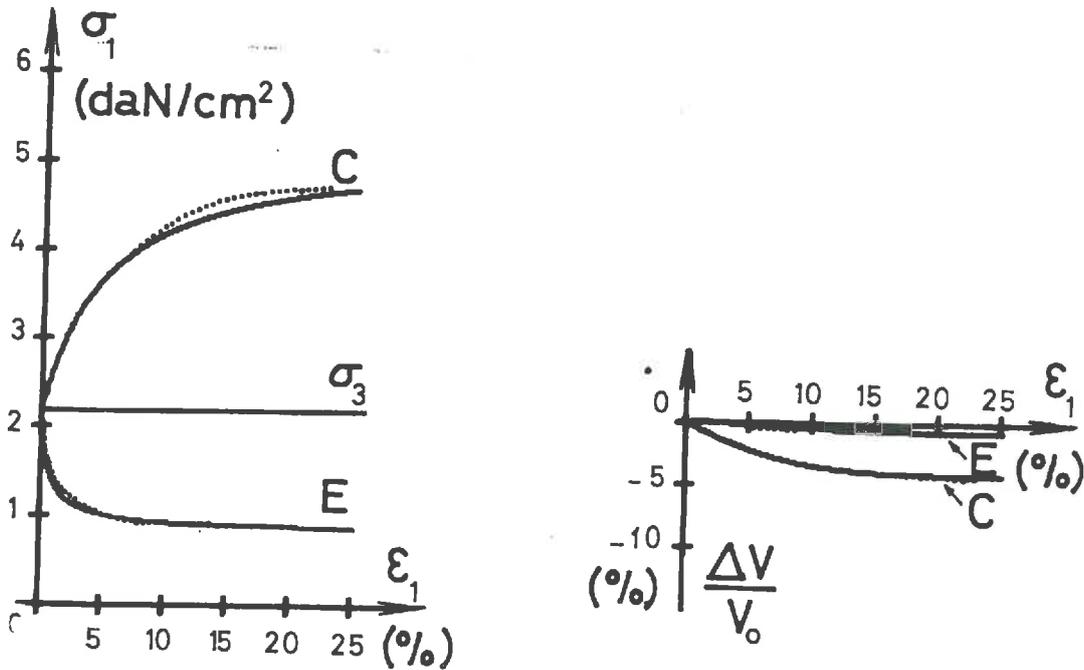


FIG. 4 : Comparaison entre notre formulation analytique du diagramme critique (courbe en traits discontinus) et les points expérimentaux de HENKEL (30).  
 Comparaison entre un cycle théorique de charge-décharge en consolidation isotrope obtenu par intégration de la loi incrémentale et les points expérimentaux de HENKEL (30).



**FIG. 5** : Exemple de courbes contrainte-déformation et de variations de volume sur chemin triaxial de révolution drainé en compression (C) et en extension (E) avec l'argile de WEALD normalement consolidée à  $2.1 \text{ daN/cm}^2$ . Les courbes analytiques (en trait continu) ont servi à déterminer les paramètres de la loi. Les courbes expérimentales (en pointillés) sont tirées de PARRY (45).

#### 4.2 - Partie visqueuse

Le chapitre III nous a permis de dégager une fonction  $P(\sqrt{I_{2s}})$  dans l'explicitation du vecteur vitesse de fluage déviatoire drainé. Rappelons que cette fonction  $P$  représente la pente de la droite représentant les variations du déviateur de déformation en fonction du logarithme du temps.

Si, de manière tout à fait générale, cette fonction  $P$  dépend de l'état de contrainte, comme la contrainte isotrope a une influence négligeable, nous avons vu que l'on pouvait ne faire dépendre  $P$  en première approximation que du déviateur de contrainte. Plus précisément, il nous semble qu'une variable adimensionnelle privilégiée est constituée par le rapport du déviateur de contrainte constant exercé sur la valeur du déviateur à la rupture élasto-plastique (pour la même contrainte isotrope et la même phase). Nous rejoignons ici une idée de

SCHULTZE (55) et de KOENIG (35).

Nous noterons : 
$$\psi = \sqrt{\frac{(I_{2s})_{\text{fluage}}}{(I_{2s})_{\text{rupture élasto-plastique}}}}$$

avec :  $0 \leq \psi \leq 1$ .

Pour relier la fonction  $P$  à  $\psi$ , SCHULTZE (55) a proposé la relation empirique suivante :

$$P = b_0 \left( \frac{1}{1-\psi} - 1 \right)^{b_1}$$

où  $b_0$  et  $b_1$  sont deux constantes que SCHULTZE a fait dépendre de la contrainte latérale des essais triaxiaux de fluage réalisés.

Nous ferons deux remarques à propos de cette formulation. Tout d'abord, il n'est pas très logique de faire dépendre  $b_0$  et  $b_1$  de  $\sigma_3$ , puisqu'il a été montré par ailleurs que la pression isotrope n'avait qu'une faible influence sur la vitesse de fluage. Par contre,  $b_0$  et  $b_1$  dépendent certainement de l'histoire antérieure de l'échantillon, en particulier d'une surconsolidation éventuelle.

En second lieu, les valeurs numériques trouvées pour  $b_1$  sont strictement inférieures à 1 (0.456 et 0.598). Ceci implique une pente infinie à l'origine de la courbe  $P(\psi)$ , ce qui est incorrect physiquement : pour un déviateur de contrainte infiniment petit, le déviateur de déformation reste infiniment petit.

Nous proposons, pour notre part, la formulation suivante :

$$P = \exp\left(\frac{A \psi}{1-\psi}\right) - 1$$

où  $A$  est une constante positive dépendant de l'argile et de son taux de surconsolidation éventuel.  $P$  s'annule pour  $\psi = 0$  et est infiniment grand pour  $\psi = 1$ .

La détermination graphique de  $A$  est facilitée, si l'on utilise le logarithme de  $(P+1)$  :

$$\text{Log}(P+1) = A \frac{\psi}{1-\psi}$$

$A$  s'interprète comme étant la pente de la droite représentant les variations de  $\text{Log}(P+1)$  avec  $\frac{\psi}{1-\psi}$ .

La figure 6 représente notre courbe analytique avec  $A = 0.2$ , comparée aux points expérimentaux de SCHULTZE (55).

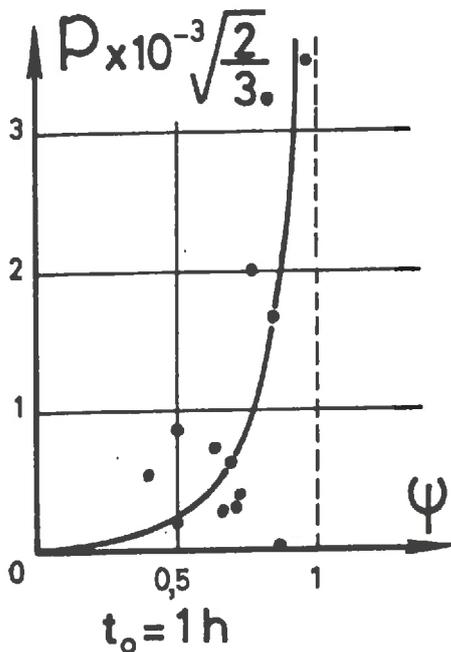


FIG. 6 : Comparaison entre les points expérimentaux de SCHULTZE (55) et notre formulation analytique. Fluage drainé sur limon normalement consolidé.

Les expériences de fluage drainé de VUAILLAT (62), en cours à l'heure actuelle à l'Institut de Mécanique de Grenoble, permettront de tester cette formulation et de préciser l'ensemble de cette question. Nous ne présenterons donc ici aucun exemple d'intégration de la loi rhéologique d'une argile, faisant intervenir la partie visqueuse.

Par ailleurs, une comparaison de nos résultats théoriques avec les mesures expérimentales, réalisées en non-drainé par LEINENKUGEL (69), devrait être très riche d'enseignements.

#### 4.3 - Conclusion

Quels sont finalement les essais nécessaires à la détermination de la loi rhéologique visco-élasto-plastique d'une argile ?

Pour la partie élasto-plastique, il faut effectuer des essais tri-axiaux drainés en compression-extension pour différentes valeurs de la contrainte latérale et éventuellement de la contrainte de pré-consolidation (si l'on veut décrire le phénomène de surconsolidation). Il se pose alors le problème (délicat) du choix de la vitesse de déformation axiale : cette vitesse doit être assez faible pour que l'échantillon ait le temps de se drainer, et assez forte, pour que les phénomènes de fluage ne perturbent pas trop les résultats. Dans tous les cas réels,

il semble possible de faire un tel compromis.

Pour la partie visqueuse, des essais de fluage drainé sont nécessaires. Un essai de fluage isotrope, tout d'abord, permet de vérifier, si ce fluage est négligeable par rapport au fluage déviatoire. Ensuite, quelques essais de fluage déviatoire drainé pour différentes valeurs du déviateur de contrainte nous fourniront l'unique paramètre visqueux (dans le cas d'une argile normalement consolidée). Là encore, si l'on veut prendre en compte une surconsolidation isotrope quelconque, il faudra réaliser des essais pour différentes valeurs de la contrainte de préconsolidation.

Le lecteur aura remarqué que, dans ces deux derniers chapitres portant sur les argiles, je me suis limité à une surconsolidation isotrope. Le problème de la surconsolidation quelconque (par exemple, avec des axes principaux de préconsolidation très distincts des axes principaux de la sollicitation actuelle) est très complexe. Par ailleurs, de tels cas se posent-ils dans la pratique pour des domaines de sol importants en volume par rapport à l'ouvrage ? La préconsolidation oedométrique est, par contre, un cas courant, que nous n'avons pas évoqué, mais qui est proche de la préconsolidation isotrope. Bien sûr, résumer toute une histoire antérieure par un simple scalaire : la contrainte isotrope maximale subie antérieurement ne peut être qu'une approximation ! Les exemples de cycles, présentés dans le chapitre IV de la troisième partie, montreront comment nous tentons de décrire l'influence de l'histoire en sollicitations dans le cas de changements de sens de la sollicitation.

---

## CONCLUSION

### SCENARIO-TYPE DANS UNE APPLICATION PRATIQUE DE LA LOI

Rassemblons ici les différents éléments de notre démarche.

La base expérimentale est constituée par :

- une série d'essais triaxiaux classiques drainés réalisés en compression et en extension pour quelques valeurs de la contrainte latérale. On procède à la mesure de la contrainte axiale et des variations de l'indice des vides en fonction de la déformation axiale.
- une série d'essais de fluage déviatoire drainés pour quelques valeurs du déviateur de contrainte. On procède à la mesure des variations du déviateur de déformation en fonction du temps.

Sur ces courbes, un certain nombre de caractéristiques mécaniques sont calculées : pentes à l'origine, asymptotes de plasticité parfaite, positions des extréma. A partir de ces caractéristiques, les relations analytiques données (chapters II et IV) permettent le calcul des constantes du matériau.

Dès lors notre programme de calculs peut expliciter :

- les fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  correspondant aux états de contrainte et déformation actuels et au sens actuel de la sollicitation incrémentale par rapport à chaque axe d'orthotropie. Par dérivation, le programme fournit le calcul des trois fonctions  $U_k$  et des six fonctions  $v_k^l$ , puis des éléments de la matrice de la partie élasto-plastique de la loi.
- la fonction  $P$ , puis les trois éléments du vecteur vitesse de fluage à partir des états de contrainte et de déformation actuels.

Reprenant ce calcul à chaque incrément de sollicitation, défini pour un incrément de temps donné, on détermine ainsi l'incrément réponse correspondant à cet incrément de temps. Finalement, on obtient le chemin-réponse produit par le chemin-sollicitation.

Il est alors possible de vérifier la validité de la loi sur différents chemins de sollicitation. C'est à cet aspect que nous nous attachons dans la partie suivante.

-----

TROISIEME PARTIE

APPLICATION DE LA LOI RHEOLOGIQUE  
SUR DIFFERENTS CHEMINS DE SOLLICITATION  
ET COMPARAISONS AVEC L'EXPERIENCE

CHAPITRE IAPPLICATION DE LA LOI RHEOLOGIQUE DANS LE CAS DES SABLES1.1 - Comparaisons avec les résultats expérimentaux de LADE et DUNCAN

Nous avons simplement repris ici un article publié par ailleurs par l'A.S.C.E. dans les comptes-rendus de : Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics (19). Nous en donnons, dans cette thèse, la traduction française.

Le lecteur trouvera tous les calculs de paramètres détaillés et des résultats complémentaires dans la thèse de LABANIEH (36).

LOI RHEOLOGIQUE INCREMENTALE  
POUR SOLS PULVERULENTS

par F. DARVE, S. LABANIEH, R. CHAMBON

INTRODUCTION

Nous proposons une loi rhéologique incrémentale (DARVE 3,4) valable pour le domaine non-visqueux du comportement des sols. Les résultats théoriques, obtenus par intégration de cette loi, sont comparés systématiquement avec des mesures réalisées sur des presses tridimensionnelles.

Les paramètres de la loi sont déterminés par des essais triaxiaux classiques de compression et d'extension. Cette loi permet de prendre en compte les différents aspects, caractéristiques du comportement d'un sol : variations du module de Young et du coefficient de Poisson avec la contrainte moyenne, variations de l'angle de frottement à la rupture avec l'état de contrainte, influence de la contrainte intermédiaire, critère de Mohr-Coulomb en plasticité parfaite, variations de l'indice des vides critique avec la contrainte moyenne, cisaillement des sols denses avec apparition d'un "pic" en contraintes et d'une dilatance importante, etc ... Le comportement d'un sol est décrit de manière continue depuis les petites déformations, presque élastiques, jusqu'à l'écoulement plastique.

LA LOI RHEOLOGIQUE INCREMENTALE

En axes corotationnels et pour les matériaux non-visqueux, la loi incrémentale prend la forme :

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \\ \text{ou} \quad d\epsilon_{\alpha} &= M_{\alpha\beta} d\sigma_{\beta} \end{aligned}$$

Un matériau, même initialement isotrope, soumis à une déformation déviatoire n'est plus isotrope. C'est pourquoi nous avons supposé la loi incrémentale orthotrope.

Le comportement d'un sol est irréversible ; par conséquent, la matrice

$M$  dépend non seulement des états de contrainte et de déformation actuels, mais aussi de la direction du vecteur sollicitation incrémentale courant  $d\sigma$ . Nous appelons "zones tensorielles" les domaines de l'espace des sollicitations incrémentales dans lesquelles la matrice  $M$  conserve une même valeur pour une histoire donnée de la sollicitation.

En appliquant le principe de superposition des sollicitations incrémentales dans une même zone tensorielle (il est valable dans ce cas), neuf parmi les douze éléments non nuls de la matrice  $M$  peuvent être évalués explicitement à partir de la seule connaissance du comportement du matériau le long de chemins de sollicitation particuliers (notés C), pour lesquels une seule contrainte principale varie, les deux autres restant constantes éventuellement distinctes et toutes les directions principales étant fixes. Les trois derniers éléments sont déterminés à partir des neuf autres au prix d'une hypothèse supplémentaire.

Comme le matériau peut être considéré comme en compression ou en extension dans chacune des trois directions d'orthotropie, nous avons supposé l'existence de huit zones tensorielles, auxquelles sont associées huit déterminations de la matrice  $M$ . Par conséquent, il n'est plus possible de définir de manière générale un chemin de charge et un chemin de décharge (8 zones tensorielles et non 2) mais seulement un sens de parcours pour un chemin donné.

Sur la base de ces hypothèses, la loi rhéologique incrémentale prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ d\epsilon_{23} \\ d\epsilon_{31} \\ d\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_1} & -\frac{V_2^1}{U_2} & -\frac{V_3^1}{U_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{V_1^2}{U_1} & \frac{1}{U_2} & -\frac{V_3^2}{U_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{V_1^3}{U_1} & -\frac{V_2^3}{U_2} & \frac{1}{U_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

avec 
$$G = \frac{\sqrt{(U_2)^2 + (U_3)^2}}{U_2 U_3 \sqrt{2}} + \frac{U_2(V_3^2 - 1) + U_3(V_2^2 - 1)}{4 U_2 U_3}$$

et 
$$u_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\sigma_j, \sigma_l}; \quad v_k^j = -\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\sigma_j, \sigma_l}; \quad v_k^l = -\left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\sigma_j, \sigma_l}$$

où 
$$\sigma_k = f_{\sigma_j, \sigma_l}(\varepsilon_k); \quad \varepsilon_l = h_{\sigma_j, \sigma_l}(\varepsilon_k); \quad \varepsilon_j = g_{\sigma_j, \sigma_l}(\varepsilon_k) \quad \cdot \quad k, j, l \in (1, 2, 3)$$

Ces fonctions sont déterminées sur les chemins de sollicitation particuliers C tels que :  $\sigma_j \neq \sigma_l = \text{constante}$ .

En première approximation, nous pouvons négliger l'influence de la contrainte intermédiaire sur les chemins C. Il nous suffit alors de connaître des résultats expérimentaux sur des essais triaxiaux classiques en compression et en extension pour pouvoir déterminer les paramètres d'un sol donné.

#### VERIFICATIONS AVEC UNE PRESSE TRIDIMENSIONNELLE

Pour vérifier la validité de la loi proposée, les courbes théoriques obtenues par intégration de la loi incrémentale ont été comparées avec les mesures réalisées sur différentes presses tridimensionnelles. Nous présentons ici la comparaison avec les résultats de LADE et DUNCAN (5,6) sur un sable à forte et faible densité.

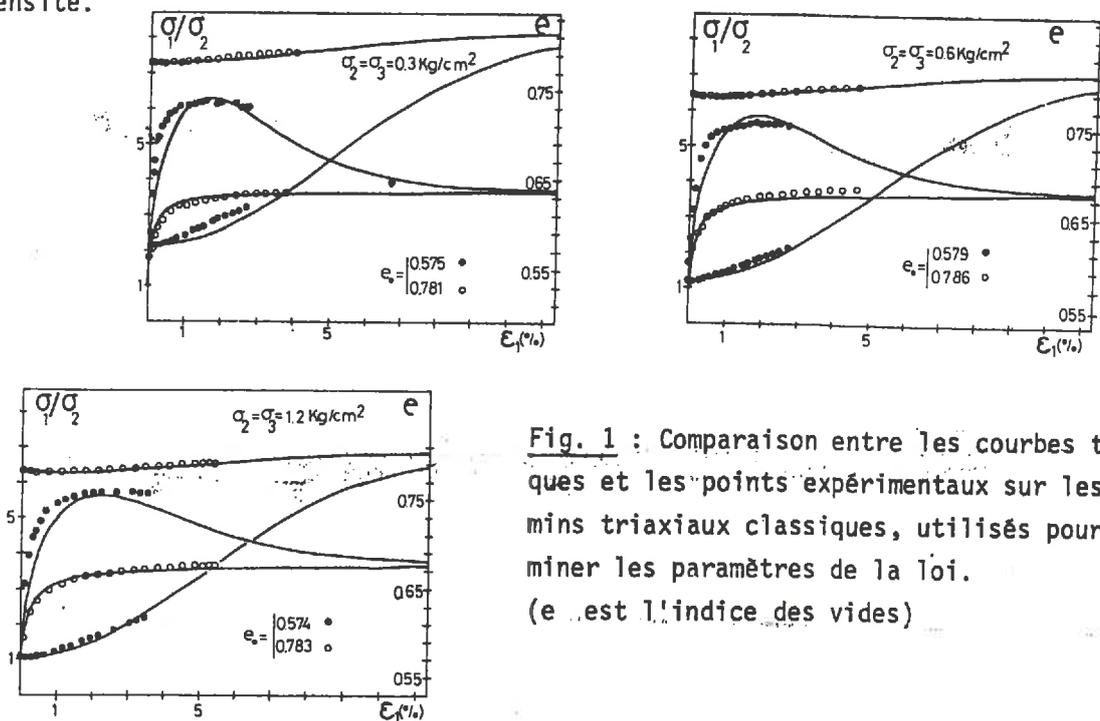


Fig. 1 : Comparaison entre les courbes théoriques et les points expérimentaux sur les chemins triaxiaux classiques, utilisés pour déterminer les paramètres de la loi. ( $e$  est l'indice des vides)

Nous pouvons noter que la formulation utilisée permet de prendre en compte les caractéristiques classiques du comportement d'un sable dense aussi bien que lâche.

Ayant ainsi déterminé les paramètres de la loi à partir de ces essais triaxiaux classiques, nous présentons sur la figure 2 une comparaison entre la théorie et l'expérience pour des essais de compression isotrope.

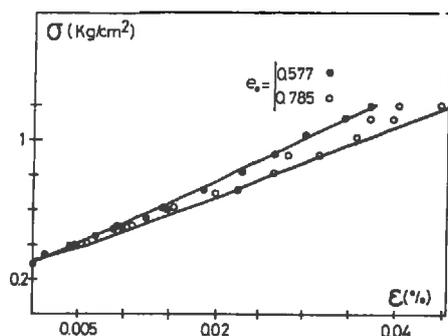


Fig.2 ! Comparaison entre les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi, et les résultats expérimentaux pour des essais de compression isotrope.

Sur les figures 3 et 4 est présentée la comparaison théorie-expérience dans le cas de différents chemins en contraintes planes ( $\sigma_2 = \text{constante} = 0,6 \text{ kg/cm}^2$ ) définis par la valeur de  $B$  ( $B = \Delta\sigma_3 / \Delta\sigma_1 = \text{constante}$  pour un chemin donné). La contrainte dans la direction 1, les variations de l'indice des vides et les déformations dans les directions 2 et 3 sont correctement décrites par la théorie.

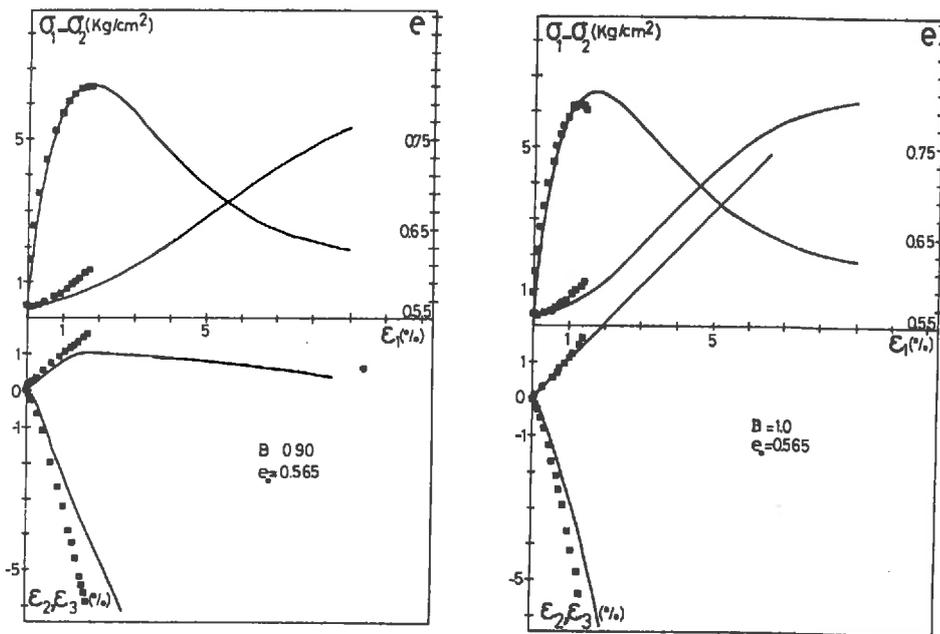
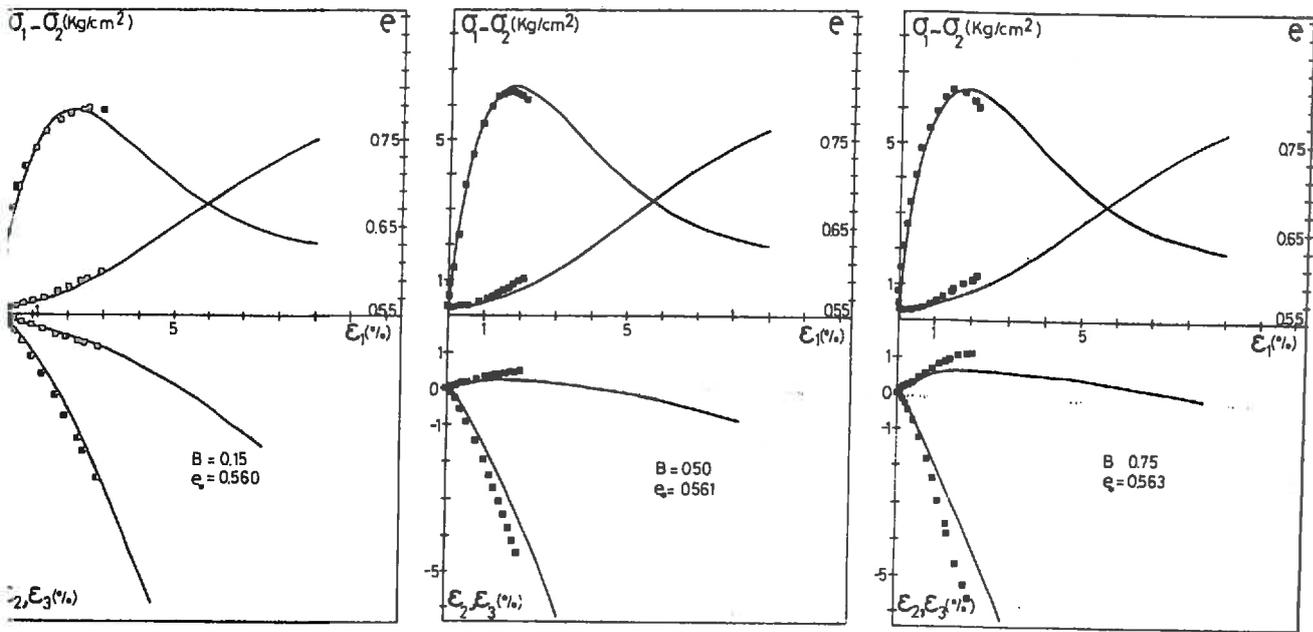


Fig. 3 : Comparaison théorie-expérience pour des chemins de contrainte plane sur sable dense.

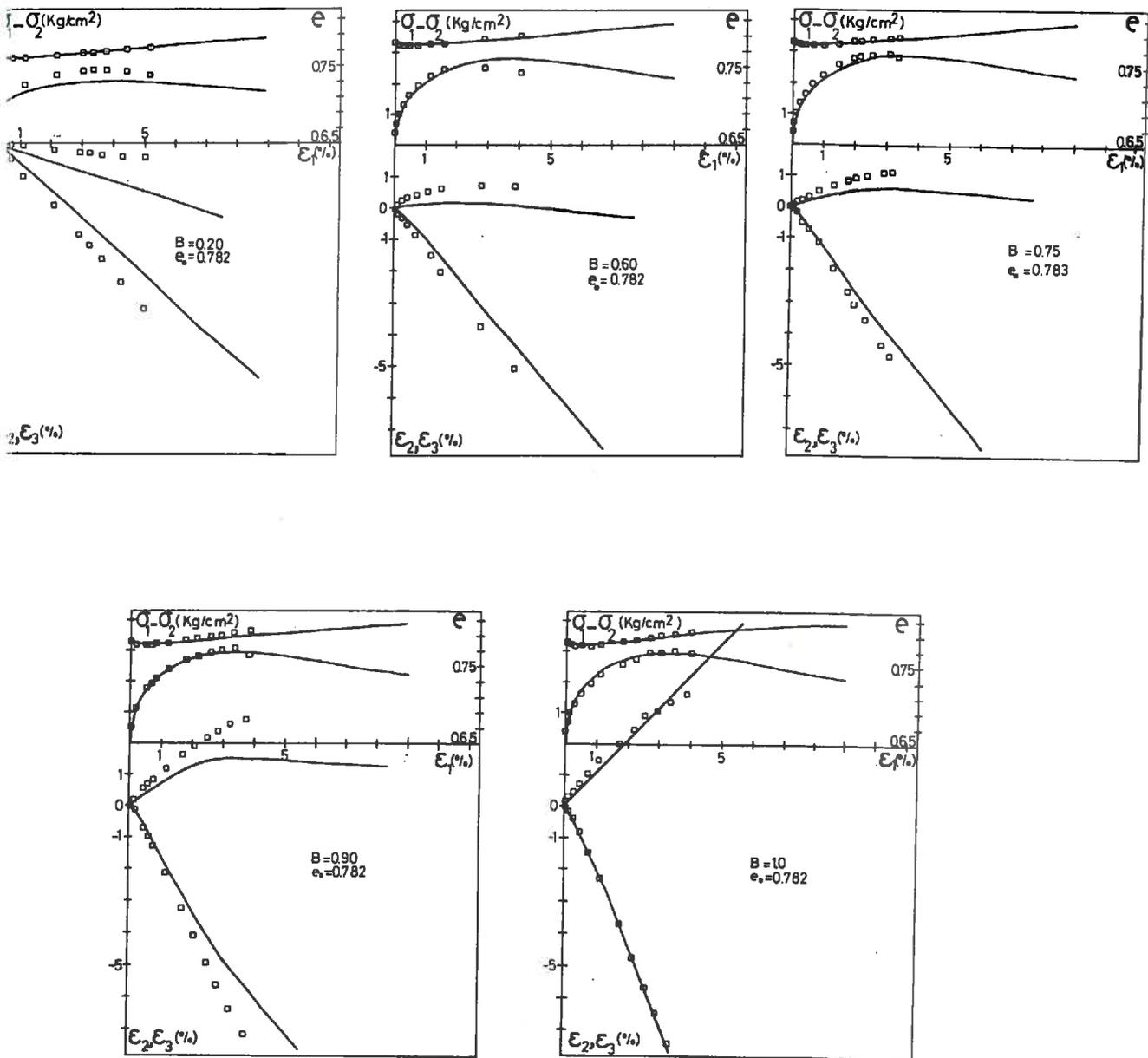


Fig. 4 : Comparaison théorie-expérience pour des chemins de contrainte plane sur sable lâche.

Sur la figure 5, les résultats théoriques et expérimentaux dans le cas de la déformation plane dans la direction 3 et de la contrainte plane dans la direction 2 ( $\sigma_2 = 0,6 \text{ kg/cm}^2$ ), pour le sable à forte et faible densités, montrent une bonne concordance.

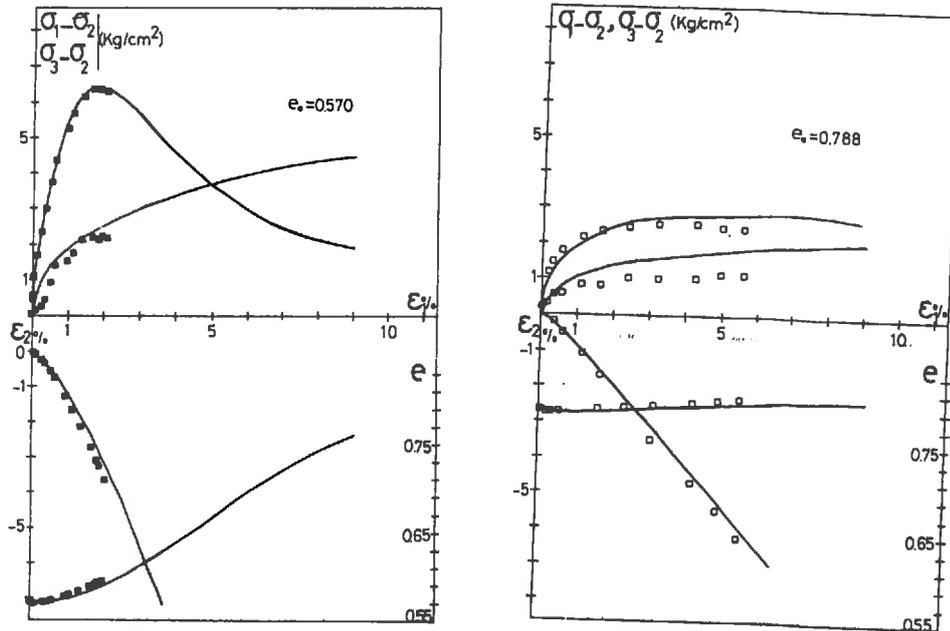


Fig.5 : Comparaison théorie-expérience en déformation plane et contrainte plane pour le sable à forte et faible densités.

#### UN EXEMPLE DE CALCUL PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Nous présentons ici les résultats d'une simulation numérique d'un modèle de laboratoire, constitué de petits rouleaux (matériau de SCHNEEBELI, 7) ; ce matériau est vraiment bidimensionnel. Le calcul a été effectué par la méthode des éléments finis. La loi rhéologique utilisée est celle décrite précédemment avec certaines simplifications (par exemple, suppression du "pic" de contraintes, matrice  $\mathbf{M}$  symétrique) et des hypothèses supplémentaires (par exemple, portant sur la rotation des axes d'orthotropie). Le cas traité ici est celui du chargement d'une plaque rigide rugueuse.

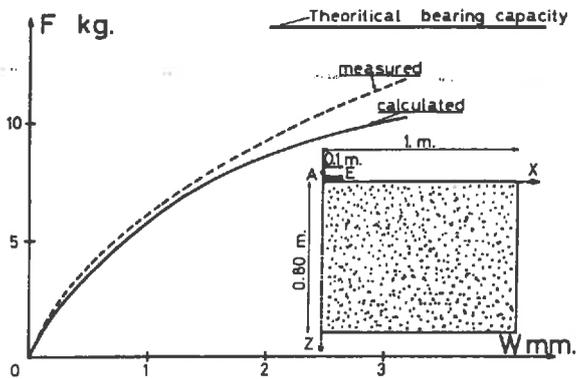


Fig. 6 : Comparaison entre les résultats calculés et mesurés de la charge (F) en fonction du tassement (W). La moitié de la géométrie du problème est représentée.

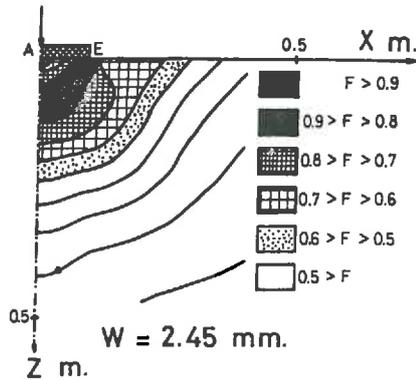


Fig. 7 : Courbes iso-valeurs de

$$F = \frac{\sigma_1/\sigma_3 - 1}{\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - 1}$$

pour un tassement de 2,45 mm.

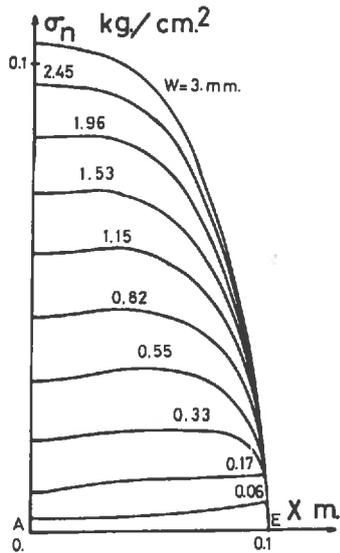


Fig. 8 : Evolution des valeurs calculées de la contrainte normale sous la plaque avec le tassement.

Rappelons que les paramètres de la loi n'ont pas été "calés" a posteriori mais déterminés à partir d'essais triaxiaux classiques ; cependant, la comparaison théorie-expérience est très satisfaisante jusqu'au 2/3 de la capacité portante théorique. D'autres problèmes avec des conditions aux limites très différentes (CHAMBON 1, 2) ont aussi donné de bons résultats.

REFERENCES

1. BOULON, CHAMBON, DARVE  
"Résolution de problèmes aux limites avec loi rhéologique incrémentale pour milieu pulvérulent", Congrès Français de Mécanique, 1975.
2. CHAMBON  
"Applications de la méthode des éléments finis et d'une loi rhéologique incrémentale aux calculs de mécanique des sols", Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1975.
3. DARVE  
"Contribution à la détermination de la loi rhéologique incrémentale des sols". Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1974.
4. DARVE, LABANIEH  
"Loi rhéologique incrémentale des milieux pulvérulents", Congrès Français de Mécanique, 1975.
5. LADE  
"The Stress-Strain and Strength Characteristics of Cohesionless Soils", Thesis of Doctor of Philosophy, Berkeley, 1972.
6. LADE, DUNCAN  
"Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol.99, n°SM 10, oct. 1973.
7. SCHNEEBELI  
"Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion"  
Compte-Rendus à l'Académie des Sciences Françaises, Tome 243, p.125, 1956 .

## 1.2 - Comparaisons avec les résultats expérimentaux de GOLDSCHIEDER et GUDEHUS

GOLDSCHIEDER et GUDEHUS (24, 26) ont mis au point une presse tridimensionnelle à l'Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik à KARLSRUHE. Ils ont réalisé, en particulier, sur leur presse des chemins rectilignes en déformation à partir d'un état de contrainte initial isotrope très faible (GOLDSCHIEDER (25)). Le chemin de réponse en contraintes est lui-aussi sensiblement rectiligne et, par suite de la courbure de la surface de rupture, il la rencontre. Ces chemins mènent ainsi à une rupture plastique du matériau.

Le sable étudié correspond au sable dense, dont nous avons calculé les paramètres de la loi rhéologique au chapitre II de la deuxième partie. Nous avons donc pu effectuer la comparaison entre les mesures expérimentales de GOLDSCHIEDER et les courbes théoriques, fournies par l'intégration de la loi.

Les chemins de sollicitation que nous avons choisis pour simuler les chemins réels n'ont pu être pris rigoureusement confondus avec ces derniers. En effet, un incrément de sollicitation, nécessitant un certain travail, effectué à partir d'un point isotrope en contraintes, provoque nécessairement une contraction du milieu:

$$dW = -\sigma_i (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3) = \sigma_i dV/V < 0$$

Les chemins expérimentaux (rectilignes en déformation) sont légèrement dilatants depuis l'état initial : mais ceci est dû à l'énergie élastique bloquée au sein de l'échantillon à la suite du cycle isotrope effectué antérieurement sur l'échantillon.

Les chemins réels, pour lesquels  $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$  ont trois valeurs données constantes au cours de l'essai, ont donc été simulés par des chemins "mixtes" :  $\dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_3 = \text{constante}$ ,  $\dot{\sigma}_3 / \dot{\sigma}_1 = \text{constante}$ ,  $\dot{\varepsilon}_1$  donné. Cette approximation était satisfaisante, dans la mesure où le chemin réponse en contraintes était lui-aussi rectiligne. Une légère contractance initiale a été alors trouvée.

18 essais différents de ce type ont été réalisés, dont nous avons effectué les 18 simulations avec la loi rhéologique. Par ailleurs, des "décharges" ayant été systématiquement réalisées expérimentalement, nous avons pu simuler ces "aller-retour".

Les figures 1, 2, 3 présentent trois exemples parmi ces 18 cas. Les résultats ont été reportés dans les plans des invariants et les plans déviatoires. Nos notations ont été définies dans le chapitre III de la deuxième partie.

Sur la figure 4, l'ensemble des résultats, relatifs au critère de rupture, a été regroupé dans une coupe par un plan déviatoire. Notons que les points expérimentaux se trouvent à l'extérieur du polygone du critère de MOHR-COULOMB. Ce résultat, confirmé sur d'autres presses tridimensionnelles, est désormais classique : le critère de rupture d'un sable dense est à l'extérieur de la pyramide de MOHR-COULOMB.

La courbe théorique de rupture, tracée en tireté sur la figure 4, a été obtenue comme ensemble des points  $M$ , dans le plan déviatoire des contraintes (pour un premier invariant des contraintes égal à  $10 \text{ daN/cm}^2$ ), tels que :  $OM = PQ$ . La construction, qui a été effectuée pour les 18 cas, est schématisée sur les figures 1 et 3. Il avait été vérifié auparavant que, pour  $I_{1\sigma} = 10 \text{ daN/cm}^2$ , les points  $Q$  se trouvent effectivement très proches de la surface de rupture. Cette construction a été rendue nécessaire par le fait que la droite  $OQ$  ne recoupait pas la surface limite pour une même valeur du premier invariant. La bonne concordance obtenue entre la courbe théorique et les points expérimentaux visualise le fait que notre critère de rupture décrit bien l'influence de la contrainte intermédiaire.

La figure 5 présente l'ensemble des directions des vecteurs incréments de déformation expérimentaux et théoriques à la rupture. Notons globalement une bonne concordance et remarquons que, pour les vecteurs théoriques et expérimentaux, la règle de normalité n'est vérifiée ni par rapport au critère de MOHR-COULOMB, ni même par rapport au critère de rupture plus général. Il s'avère ainsi que le sol est un matériau non-standard et que notre loi rhéologique peut décrire cet aspect du comportement plastique d'un sol (en particulier, grâce à la non-symétrie de la matrice  $M$ ).

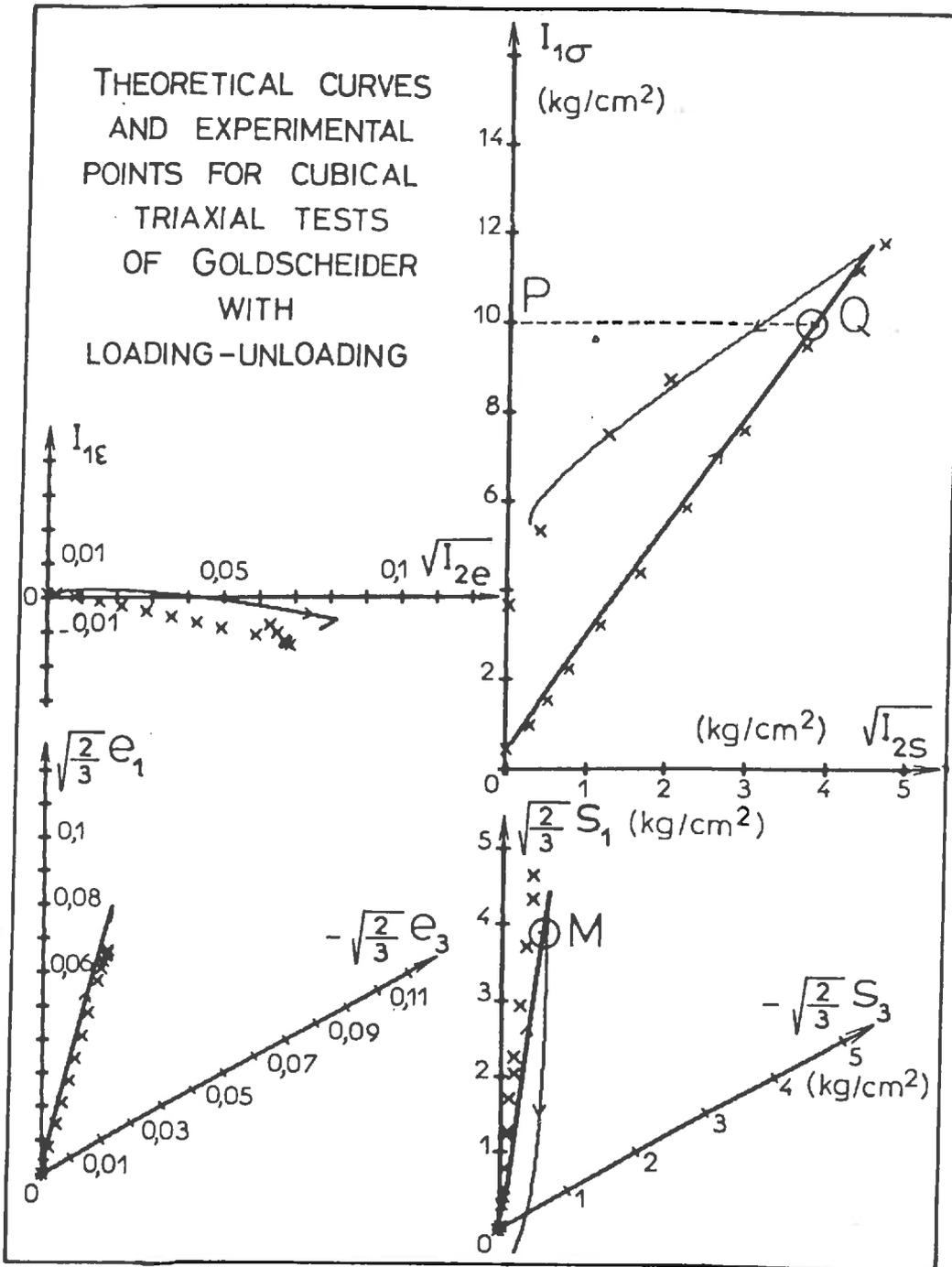


FIG. 1 : Points expérimentaux (GOLDSCHIEDER (25) ) et courbes théoriques données par l'intégration de la loi incrémentale sur chemins de sollicitation tridimensionnels en charge-décharge.



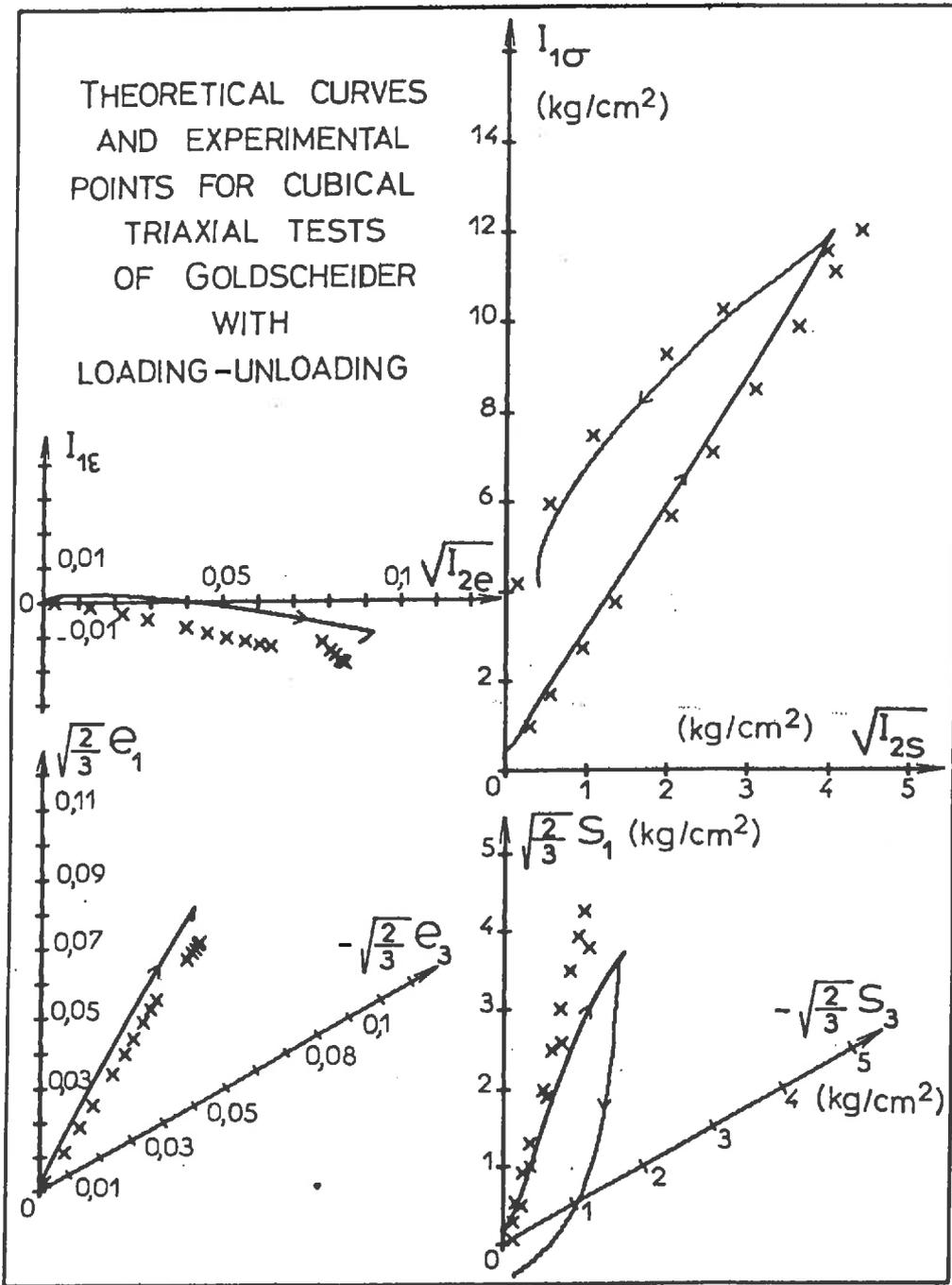


FIG. 2 : Points expérimentaux (GOLDSCHIEDER (25)) et courbes théoriques données par l'intégration de la loi incrémentale sur chemins de sollicitation tridimensionnels en charge-décharge.

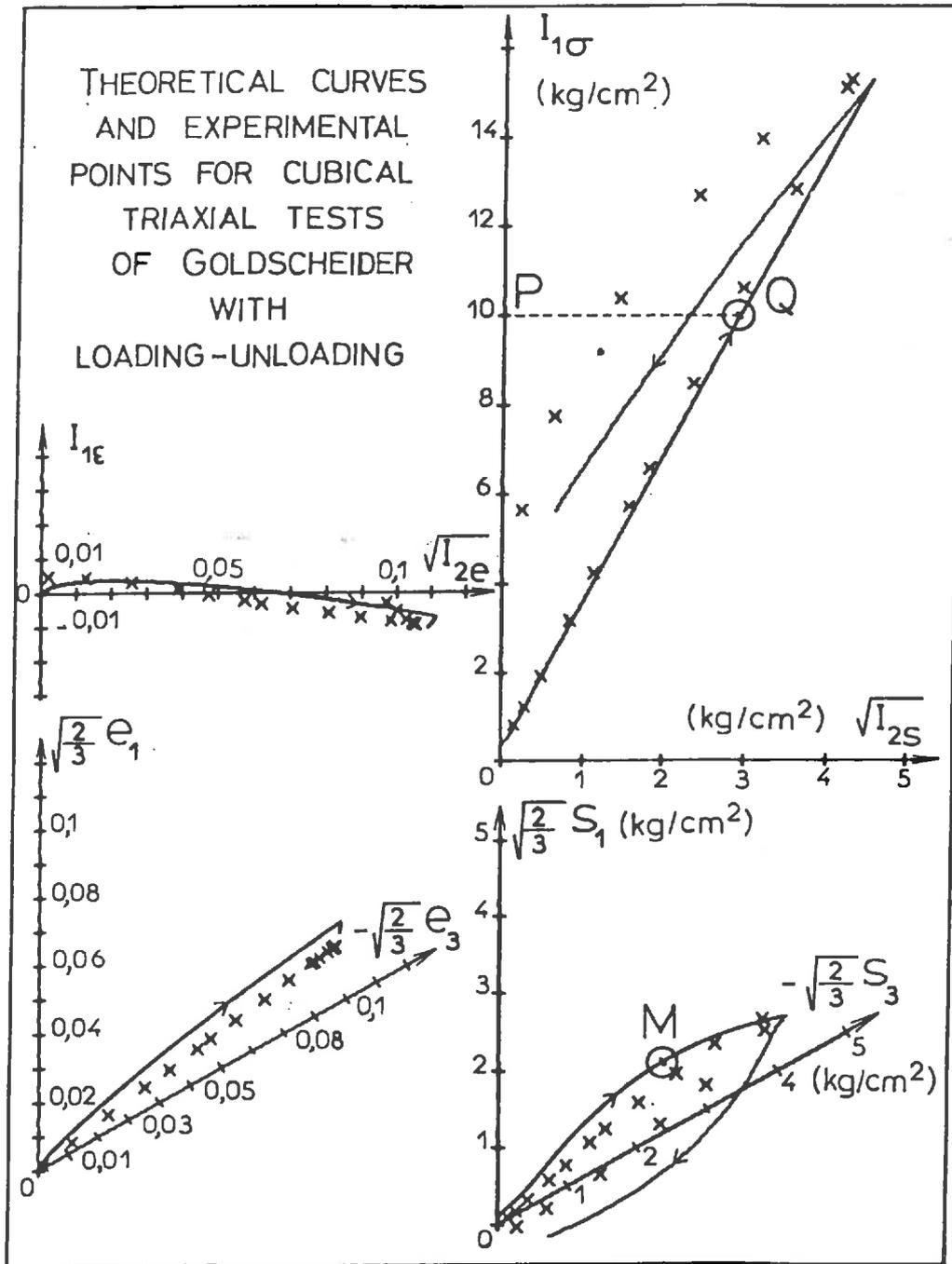


FIG. 3 : Points expérimentaux (GOLDSCHIEDER (25) ) et courbes théoriques données par l'intégration de la loi incrémentale sur chemins de sollicitation tridimensionnels en charge-décharge.

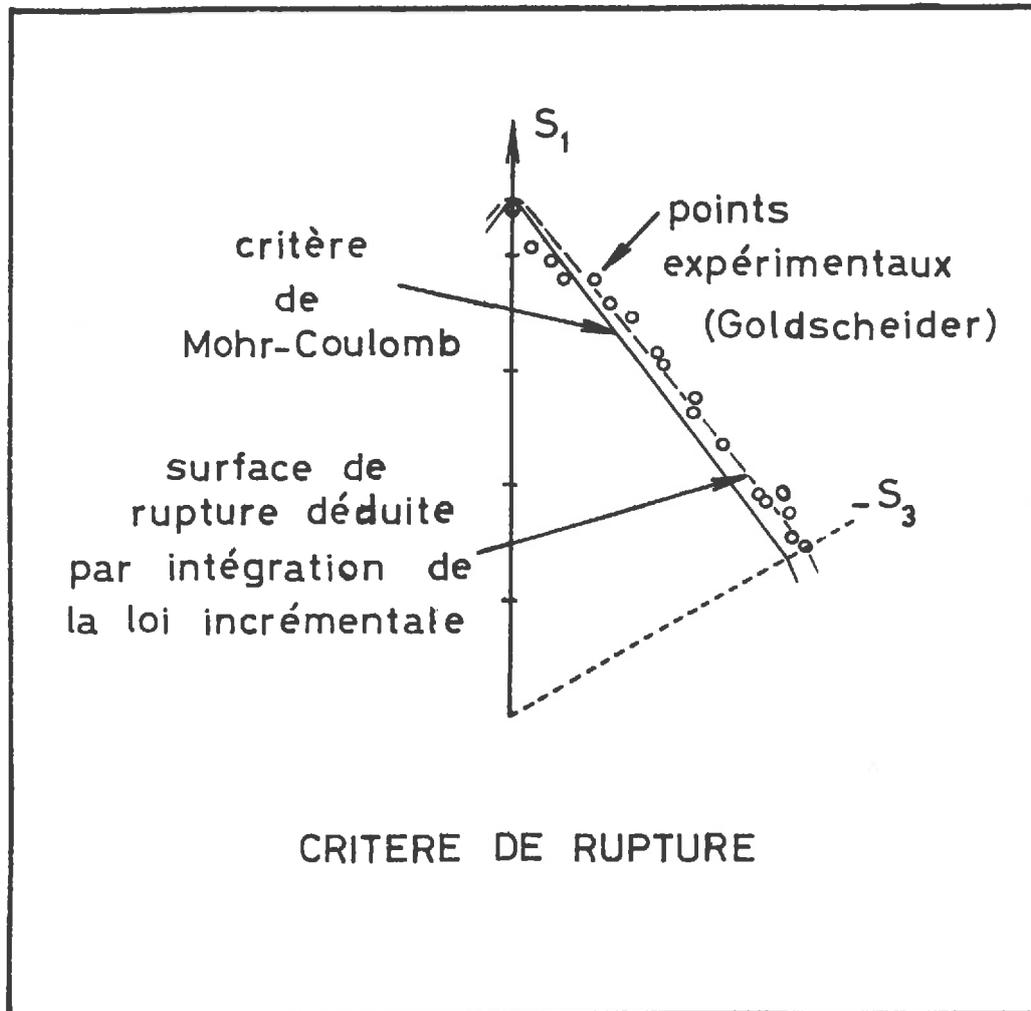


FIG.4 : Comparaisons théorie-expériences pour une coupe du critère de rupture par un plan déviatoire.

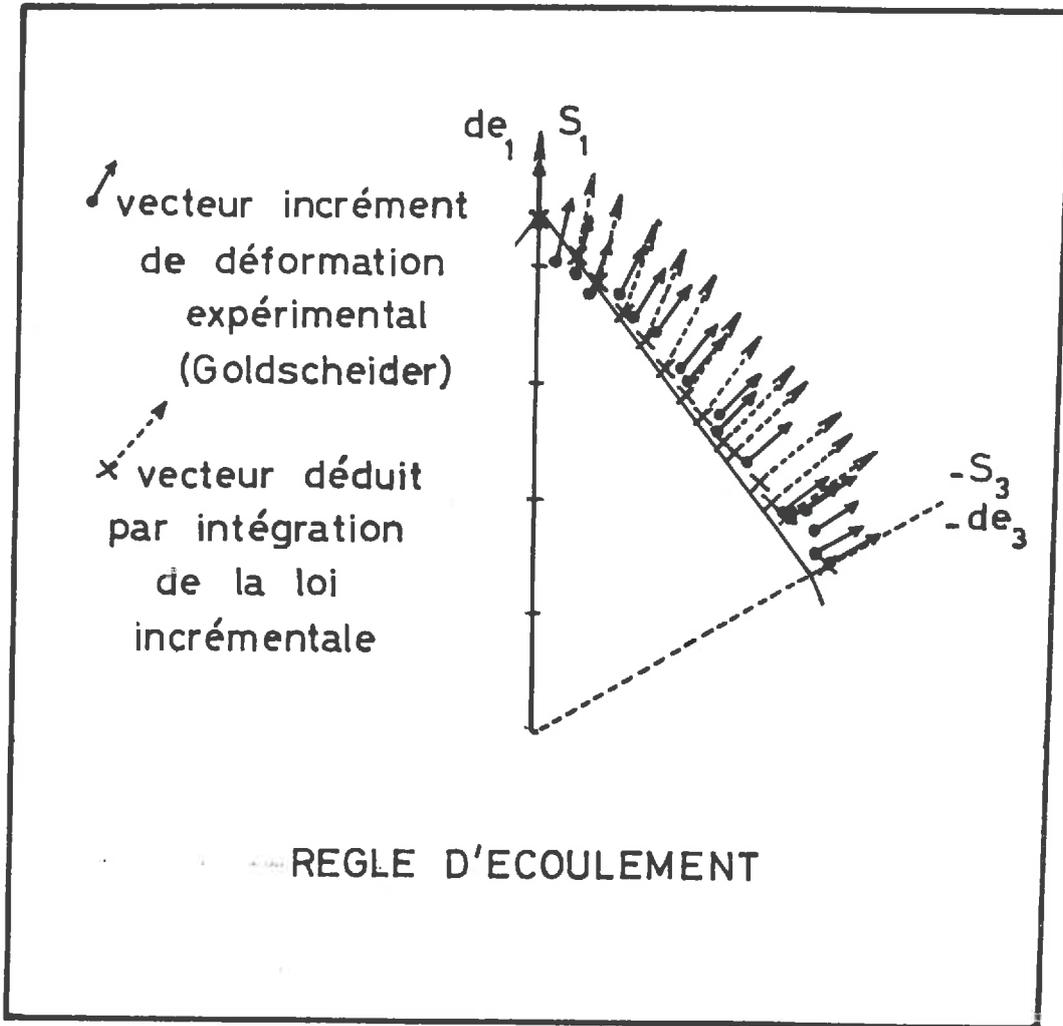


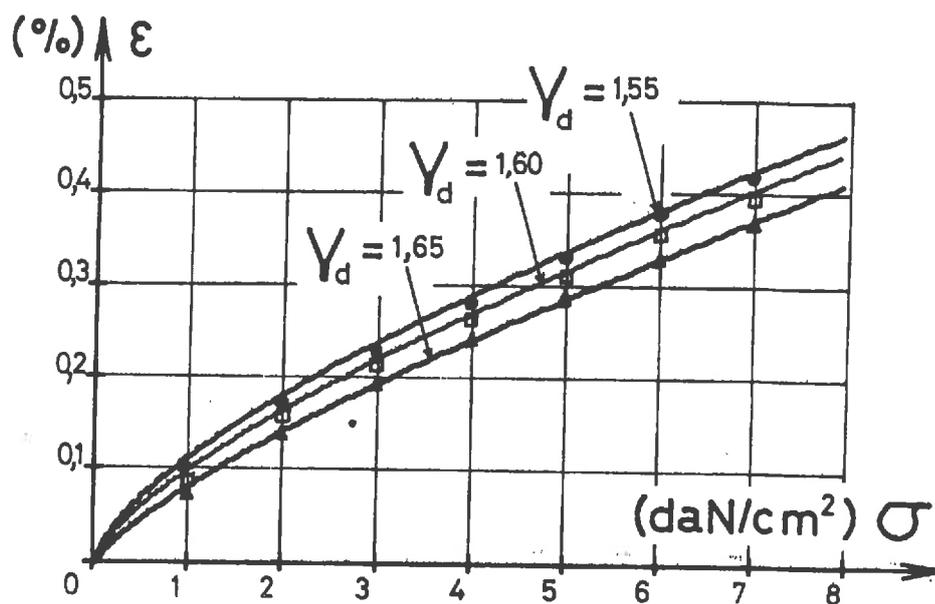
FIG. 5 : Comparaisons théorie-expériences pour une projection de la règle d'écoulement dans un plan déviatoire.

La plasticité dans le cas des sols est en fait particulièrement complexe :

- la "courbe intrinsèque" dans le plan de MOHR n'est pas rectiligne (influence de la contrainte moyenne sur l'angle de frottement à la rupture)
- le critère de MOHR-COULOMB sous-estime de manière générale la résistance à la rupture (influence de la contrainte intermédiaire sur le critère de plasticité)
- le sol est non-standard (la règle d'écoulement est distincte du critère de plasticité).

Nous avons vu dans quelle mesure nous rendons compte de ces trois caractéristiques.

Par ailleurs, la figure 6 présente les trois chemins de compression isotrope, obtenus pour les trois densités du sable de KARLSRUHE, dont on a déterminé les paramètres (chapitre II, deuxième partie). Les points expérimentaux sont tirés de la thèse de MEISSNER (41).



**FIG. 6** : Comparaisons entre points expérimentaux (MEISSNER (41) ) et courbes théoriques, données par l'intégration de la loi incrémentale, sur un chemin de compression isotrope pour le sable de KARLSRUHE à trois densités différentes.

## CHAPITRE II

### APPLICATION DE LA LOI RHEOLOGIQUE DANS LE CAS DES ARGILES

#### 2.1 - Comparaison avec les résultats expérimentaux de HENKEL et PARRY

Dans le premier paragraphe (4.1) du chapitre IV de la deuxième partie, nous avons vu comment ont été déterminés les paramètres élasto-plastiques de l'argile de WEALD à partir des essais triaxiaux drainés réalisés en compression et en extension par PARRY (45) (figure 5 de ce chapitre IV). Par ailleurs, la figure 4 de ce même chapitre présentait l'intégration de la loi rhéologique incrémentale sur un chemin de compression isotrope en charge-décharge, comparée avec les points expérimentaux de HENKEL (30).

Dans son article, PARRY (45) fournit d'autre part des résultats expérimentaux obtenus lors de compressions-extensions non-drainées, sur la même argile de WEALD, normalement consolidée à 2,1 daN/cm<sup>2</sup>.

Nous avons pu, dès lors, comparer ces mesures avec les courbes obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale le long de tels chemins non-drainés, et ceci en compression comme en extension (dans la direction repérée par l'indice 1). Ces résultats sont présentés sur la figure 1.

Le chemin triaxial non-drainé a été caractérisé comme un chemin de révolution en déformations, à volume constant. L'incrément courant de sollicitations est donc donné par :

$$\left| \begin{array}{l} d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 \\ d\varepsilon_1 \left| \begin{array}{l} \text{constant positif en compression } (= + 10^{-3}) \\ \text{constant négatif en extension } (= - 10^{-3}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'intégration de la loi incrémentale le long de ce chemin de sollicitation fournit le chemin de réponse du matériau en contraintes effectives évidemment. La valeur de

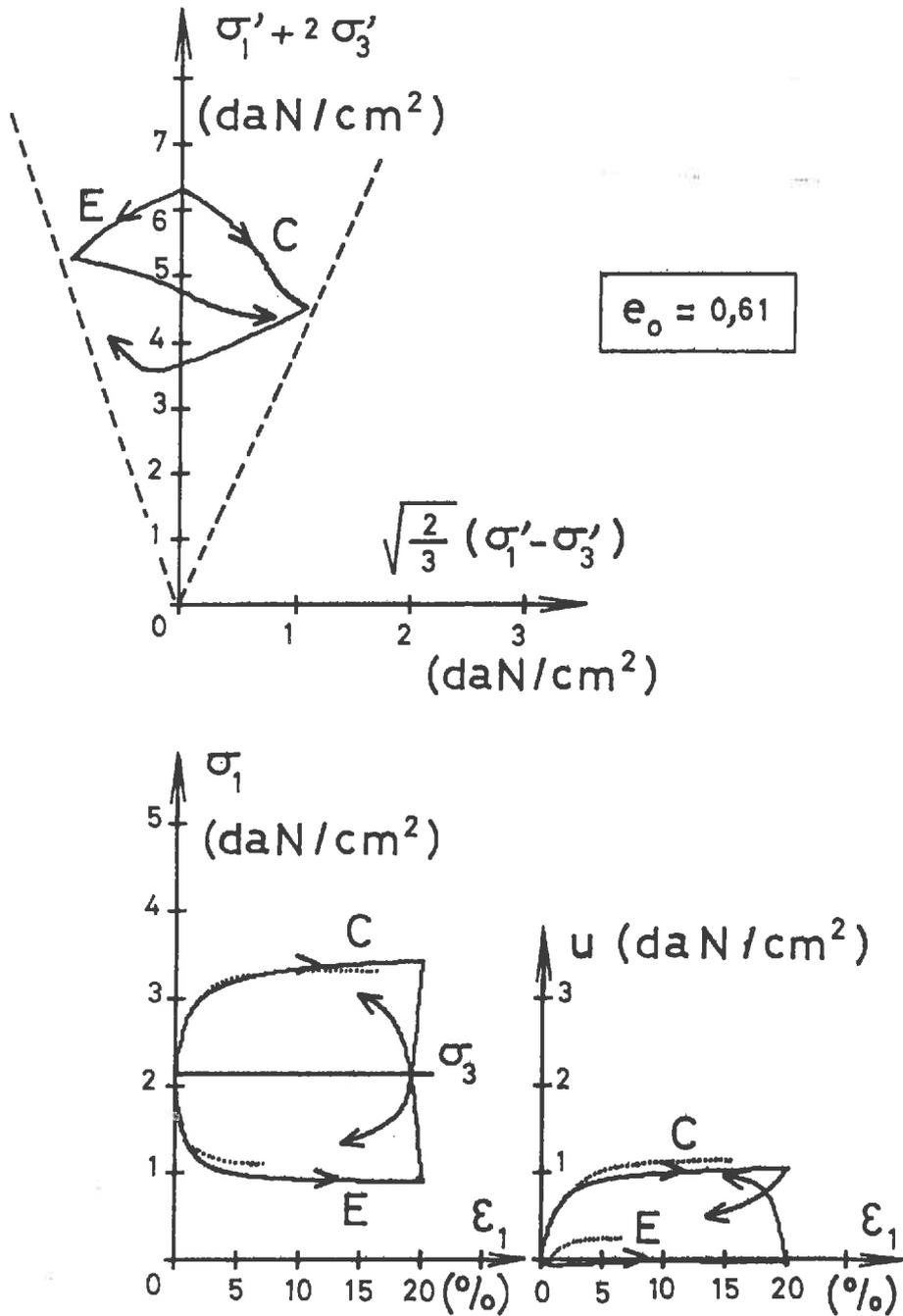


FIG. 1 : Comparaison entre les courbes expérimentales en pointillés de PARRY (45) et les courbes théoriques en charge-décharge obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale de l'argile de WEALD normalement consolidée à 2,1 daN/cm<sup>2</sup> sur un chemin triaxial non-drainé en compression (courbes notées C) et en extension (courbes notées E) par rapport à la direction axiale indiquée 1.

la pression interstitielle est donnée par la relation :  $u = \sigma_3 - \sigma'_3$  , où  $\sigma'_3$  est calculé tandis que la contrainte totale latérale  $\sigma_3$  reste égale à : 2,1 daN/cm<sup>2</sup>.

Les deux graphiques inférieurs de la figure 1 présentent ainsi la comparaison théorie-expérience pour les courbes contrainte totale axiale - déformation axiale et pression interstitielle - déformation axiale en compression et en extension. La comparaison apparaît très satisfaisante, si l'on excepte la courbe théorique de variation de la pression interstitielle en extension qui sous-estime les mesures expérimentales. Mais la figure 5 du chapitre IV de la deuxième partie mettait en évidence des variations de volume très faibles en extension : la faible variation de pression interstitielle théorique est directement en rapport avec ce résultat. A notre avis, il existe une certaine contradiction sur ce point entre les mesures expérimentales réalisées en drainé et en non-drainé. Il n'en reste pas moins que l'on peut noter qualitativement que nous avons obtenu, par intégration de la loi rhéologique, d'une part une forte augmentation continue de pression interstitielle en compression et d'autre part une faible diminution initiale suivie d'une légère augmentation en extension, résultats corroborés expérimentalement.

Par ailleurs, le graphique supérieur de cette figure 1 présente les courbes théoriques dans le plan des contraintes effectives : premier invariant en fonction de la racine carrée du deuxième invariant. En outre, le calcul a été effectué en charge-décharge.

Pour conclure sur ces résultats, insistons sur le fait que, si, en mécanique des sols traditionnelle, on parle souvent de "caractéristiques drainées" et de "caractéristiques non-drainées", les unes et les autres ne sont pas indépendantes. Le comportement d'un matériau non-drainé représente que son comportement le long d'une certaine classe de chemins de sollicitation et ce comportement est entièrement déterminé (nous le vérifions ici) par les caractéristiques drainées du matériau.

La figure 2 présente les mêmes courbes que la figure 1, mais j'avais commis une erreur dans les données en prenant comme indice des vides initial non pas 0,61 mais 0,71. Je présente cependant ces résultats car le hasard a voulu qu'ils éclairent en partie une autre question.

Comparons en effet les courbes tracées dans le plan des contraintes effectives (premier invariant fonction de la racine carrée du second) après le changement de sens de la sollicitation dans le cas d'un indice des vides initial égal à 0,61

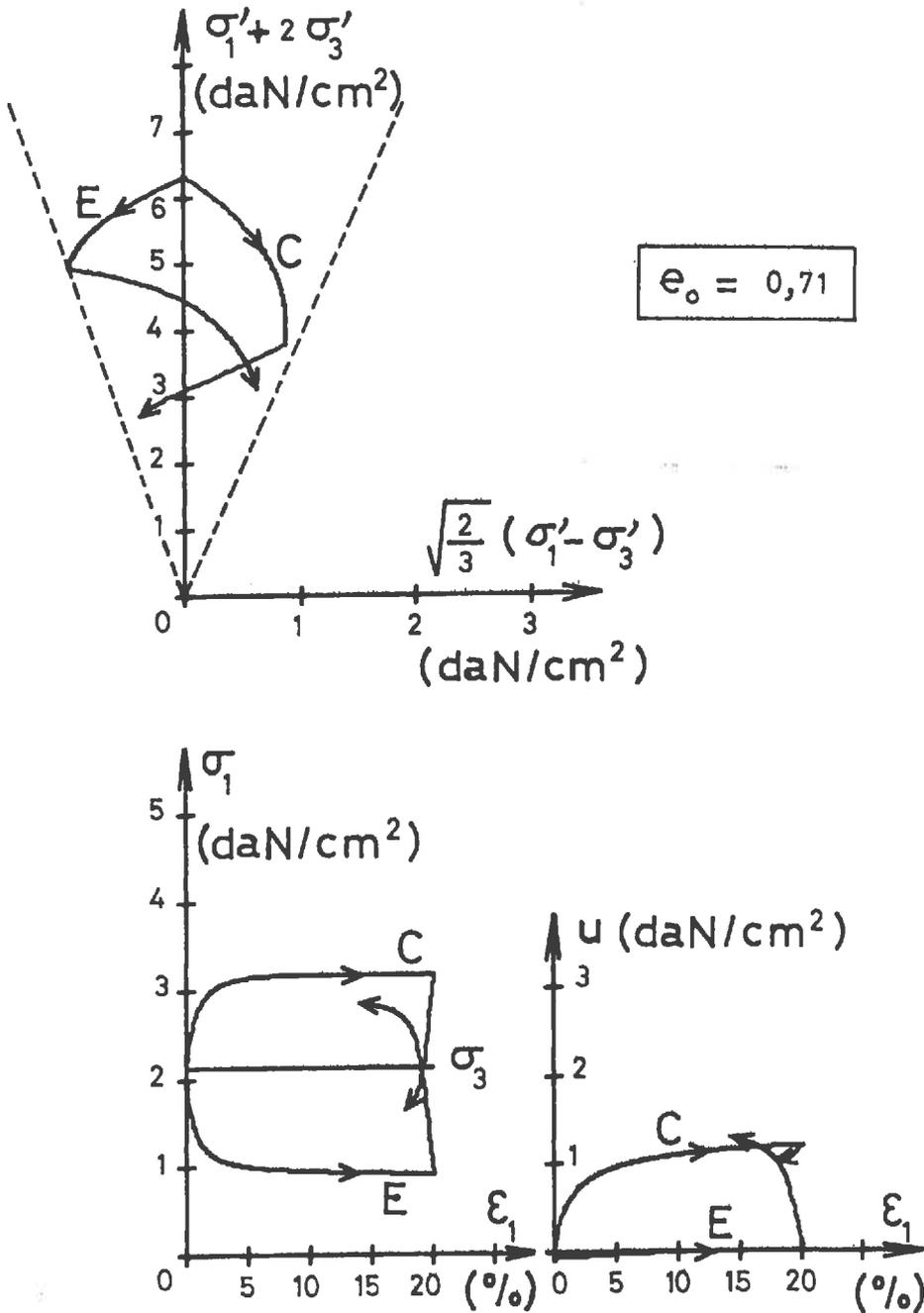


FIG.2 : Courbes théoriques en charge-décharge obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale de l'argile de WEALD, normalement consolidée à 2,1 daN/cm<sup>2</sup> mais avec un indice des vides initial de 0,71 (au lieu de 0,61) sur un chemin triaxial non-drainé en compression (courbes notées C) et en extension (courbes notées E) par rapport à la direction axiale indiquée 1.

(figure 1) et à 0,71 (figure 2). Ces courbes ont des allures très différentes : notons, en particulier, que dans le cas 0,71 elles tendent nettement à se rapprocher de l'origine des axes, c'est-à-dire que les deux contraintes effectives tendent à s'annuler. Nous voyons apparaître ici le début d'une liquéfaction d'un matériau lâche, non-drainé, sollicité cycliquement par un déviateur de contrainte. En particulier, les amorces de "remontées" de la surface limite très visibles sur la figure 1 ont entièrement disparues sur la figure 2. Ces quelques remarques seront développées et approfondies dans le prochain chapitre où nous proposerons une analyse du phénomène de liquéfaction des sols.

## 2.2 - Comparaison avec les résultats expérimentaux de LADE et MUSANTE

Utilisant la presse tridimensionnelle mise au point par LADE et DUNCAN (64) à BERKELEY, LADE et MUSANTE (39) ont effectué une série d'essais sur l'argile de GRUNDITE. Les échantillons étaient normalement consolidés sous 1 ; 1,5 ; 2 daN/cm<sup>2</sup>. Les essais tridimensionnels, non-drainés, sont définis par une contrainte latérale totale  $\sigma_3$  maintenue constante de même que le rapport des "déviateurs" de contrainte:

$$B = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$$
 Pour les cinq essais réalisés, le paramètre B restait égal aux cinq valeurs successives : B = 0 ; 0,21 ; 0,40 ; 0,70 ; 0,95 . L'argile utilisée est décrite dans le rapport de LADE et MUSANTE (39).

Comme pour l'argile de WEALD, pour déterminer les paramètres de la loi rhéologique de l'argile de GRUNDITE, il nous aurait été indispensable de connaître des essais triaxiaux drainés, réalisés en compression et en extension. Malheureusement, n'avaient été effectués que trois essais triaxiaux non-drainés en compression et un essai de compression isotrope (drainé !).

Nous avons donc dû utiliser ces quatre essais pour tenter de déterminer les paramètres par un "calage" approximatif des courbes théoriques sur les points expérimentaux.

La figure 3 montre ce "calage" pour la compression isotrope.

Sur la figure 4 sont représentés les trois essais triaxiaux de révolution non-drainés avec les points expérimentaux et les courbes théoriques de "calage" correspondantes. Nous avons ainsi abouti aux valeurs approximatives suivantes :

$$E = 23 \sigma_3' \text{ en compression}$$

$$115 \sigma_3' \text{ en extension pour le pseudo-module d'Young.}$$

(la contrainte est exprimée en daN/cm<sup>2</sup>)

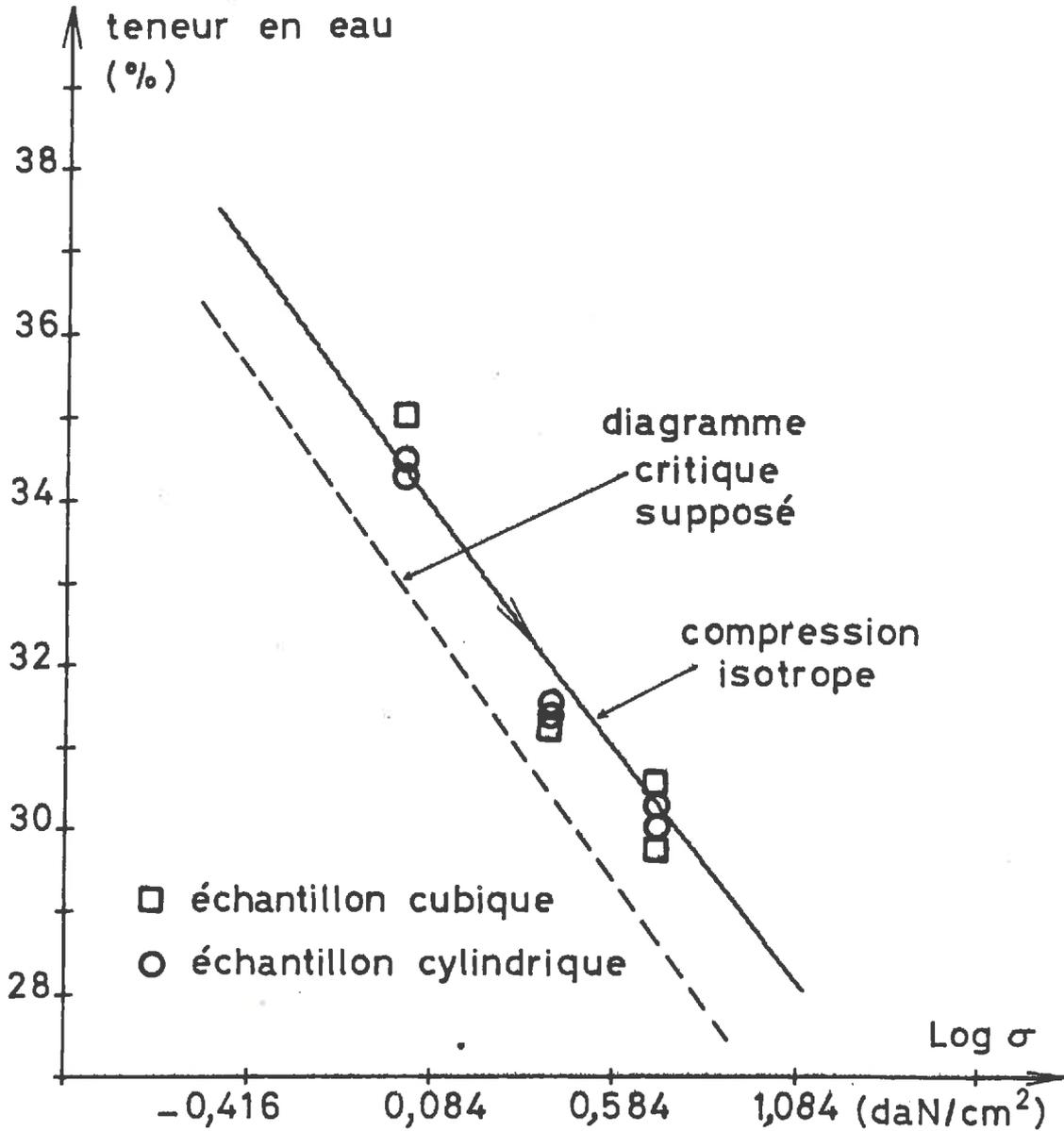


FIG. 3 : Comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) obtenus lors de compressions isotropes d'échantillons d'argile de GRUNDITE, et la courbe théorique donnée par l'intégration de la loi incrémentale. La courbe en tireté représente le diagramme critique supposé (aucun point expérimental).

$e_c = 0,957 - 0,165 \text{ Log } (\sigma'_m / 0,6)$  pour le diagramme critique.

$\nu = 0,183$  en compression  
 0,27 en extension  
 pour le pseudo-coefficient de Poisson.

L'angle de frottement en plasticité parfaite a été pris égal à :  $37^\circ$ , valeur évidemment très forte, mais améliorant le "calage". La cohésion a été supposée nulle (il s'agit d'angle de frottement et de cohésion effectifs).

Par ailleurs, nous avons supposé que les courbes contrainte-déformation ne possédaient pas de "pic", hypothèse courante pour une argile remaniée normalement consolidée sous  $1,5 \text{ daN/cm}^2$ , mais qui n'est pas toujours vérifiée dans les expériences de LADE et MUSANTE (fretage trop important ? hétérogénéités ?).

Enfin, remarquons que, si nous supposons :

1. le pseudo-module d'Young fonction linéaire de la contrainte,
2. l'angle de frottement en palier de plasticité constant,

les différentes courbes, représentant les variations du rapport de la contrainte effective axiale à la contrainte effective latérale en fonction de la déformation axiale, seront toutes confondues pour différentes valeurs constantes de la contrainte latérale sur des essais triaxiaux drainés. La figure 4 (graphique médian) montre que ce résultat subsiste en non-drainé, avec les paramètres très simples que nous avons choisis, ce qui était loin d'être évident a priori.

Sur le graphique supérieur de la figure 4, nous pouvons noter le caractère homothétique des trois courbes tracées. Nous retrouvons ici un résultat déjà énoncé par ROSCOE, SCHOFIELD et WROTH (50,54). L'Ecole de Cambridge avait fait, plus précisément, l'hypothèse d'ellipses homothétiques, qui correspondent pour nous à un cas particulier (courbe de la figure 2).

Les paramètres de l'argile de GRUNDITE ayant été ainsi déterminés de manière approchée, nous avons pu intégrer la loi rhéologique incrémentale sur les cinq chemins de sollicitation suivis par LADE et MUSANTE (39) sur leur presse tri-dimensionnelle. Les échantillons d'argile étaient normalement consolidés sous  $1,5 \text{ daN/cm}^2$ .

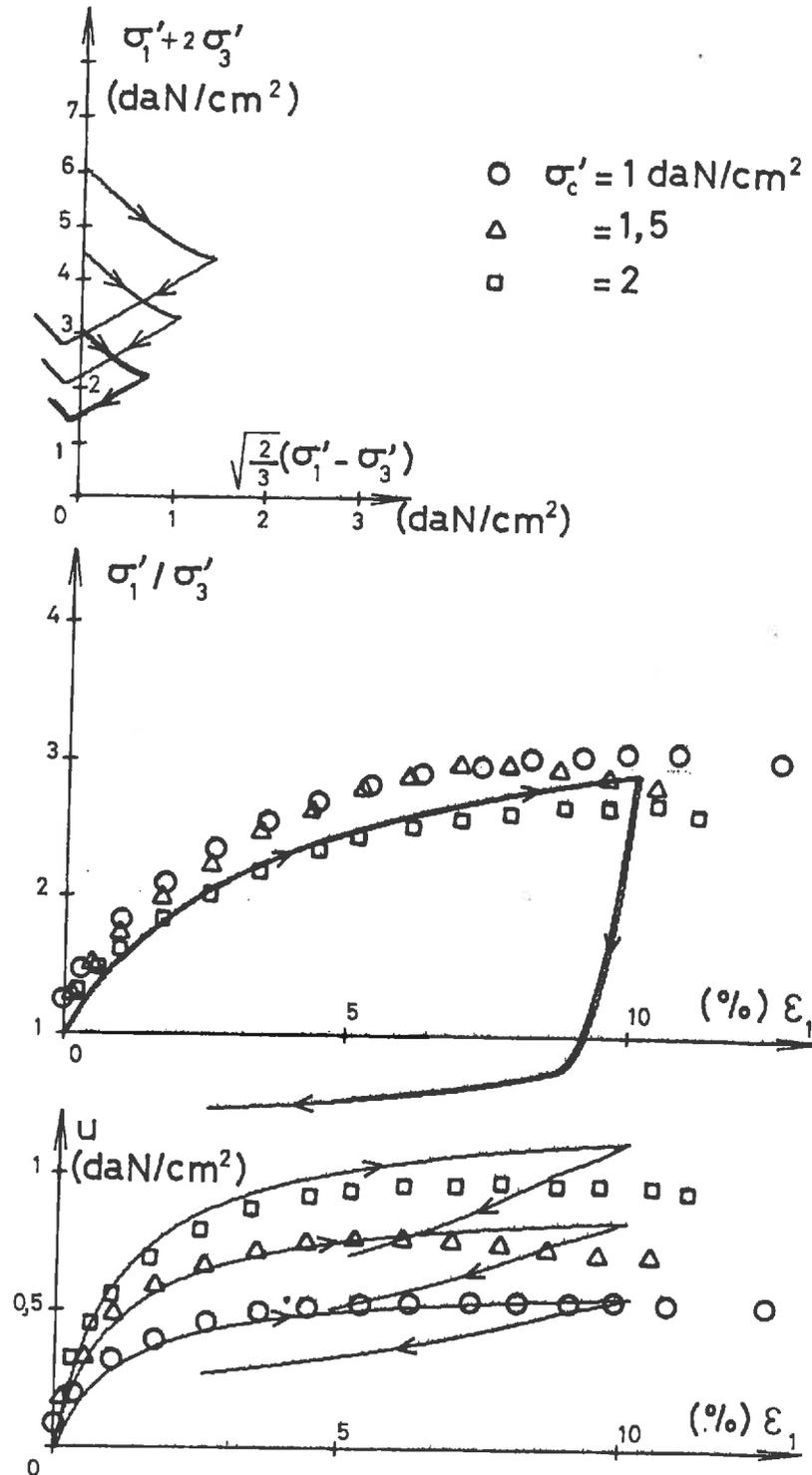


FIG. 4 : Essais triaxiaux de révolution non-drainés en compression sur l'argile de GRUNDITE (39), normalement consolidée, pour trois valeurs de la contrainte de consolidation : 1 ; 1,5 ; 2 daN/cm<sup>2</sup>. Le calage entre les courbes théoriques et les points expérimentaux, pour les variations du rapport des contraintes effectives et de la pression interstitielle avec la déformation axiale, a permis une détermination approchée des paramètres de la loi rhéologique de cette argile.

L'incrément courant de sollicitation est défini par :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \\ d\sigma'_2 - d\sigma'_3 = B (d\sigma'_1 - d\sigma'_3) \\ d\varepsilon_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

La pression interstitielle est calculée par :  $u = \sigma_3 - \sigma'_3$

Le cas  $B = 0$  correspond au chemin triaxial de révolution non-drainé.

Les figures 5, 6, 7, 8, 9 présentent la comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques. Notons la bonne concordance pour les courbes de variations de la pression interstitielle, mais une sous-estimation systématique des mesures expérimentales du rapport des contraintes effectives dans les directions 1 et 3. Cependant, les maxima expérimentaux trouvés sur ces courbes nous paraissent étonnants dans la mesure où la pression interstitielle augmente de manière continue et où l'argile est normalement consolidée. Nous concluons, pour notre part, à un frettage important de la presse tridimensionnelle.

La figure 10 regroupe les différentes courbes de variations de la déformation dans la direction 2 en fonction de la déformation dans la direction 1 pour les cinq cas considérés. Remarquons l'excellente concordance et, en particulier, le changement de signe de la déformation pour les valeurs de  $B$  supérieures à 0,4.

La figure 11, relative aux déformations dans la direction 3, montre aussi une excellente concordance.

Ces chemins se sont révélés être, en fait, particulièrement intéressants, si l'on étudie plus en détail la direction 2.

Pour  $B = 0$ , les contraintes latérales (effectives et totales) dans les directions 2 et 3 sont égales et constantes quant à leur valeur totale. Or la pression interstitielle augmente de manière continue, donc la contrainte effective dans la direction 3 diminue de manière continue, et par suite la contrainte effective dans la direction 2 diminue de même. Le chemin  $B = 0$  reste dans une même zone tensorielle définie par (+, -, -), signes successifs des incréments de contrainte dans les trois directions respectives (1, 2, 3).

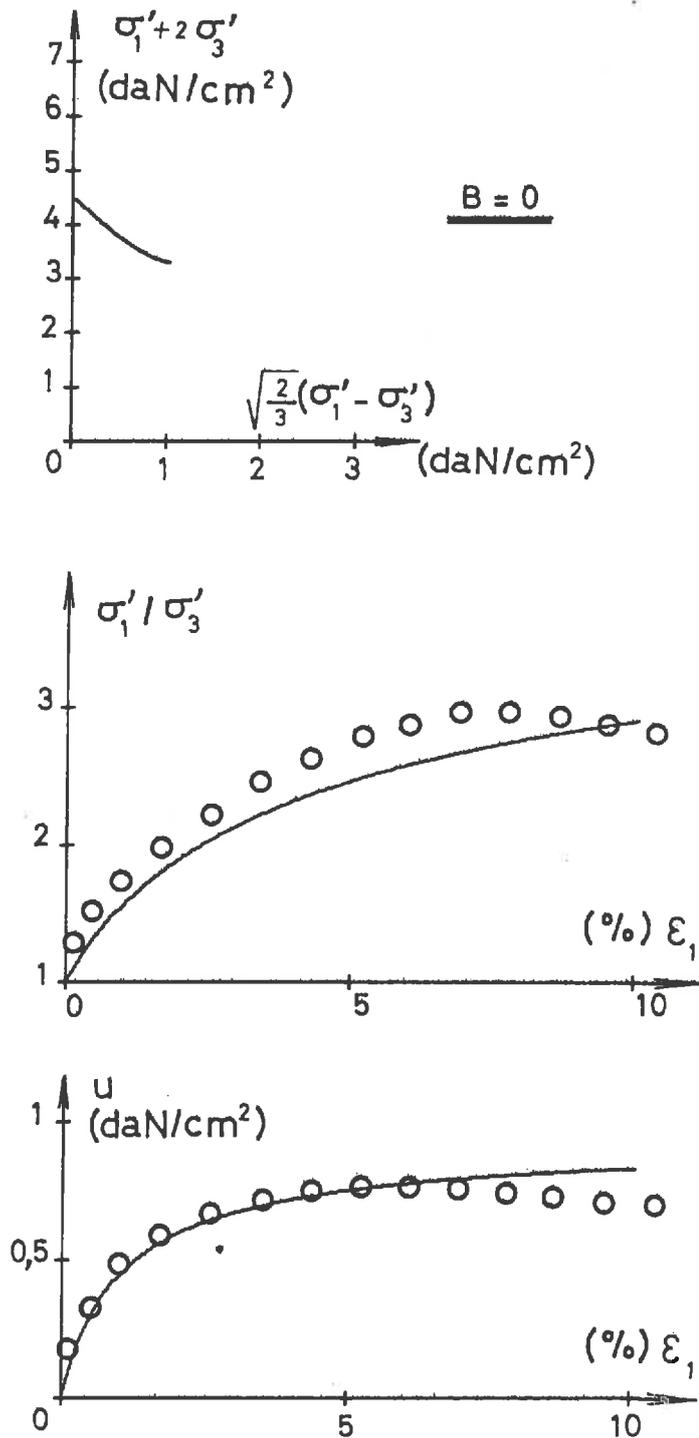


FIG. 5 : Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous 1,5 daN/cm<sup>2</sup>. Comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale. Cas :  $B = 0$ .

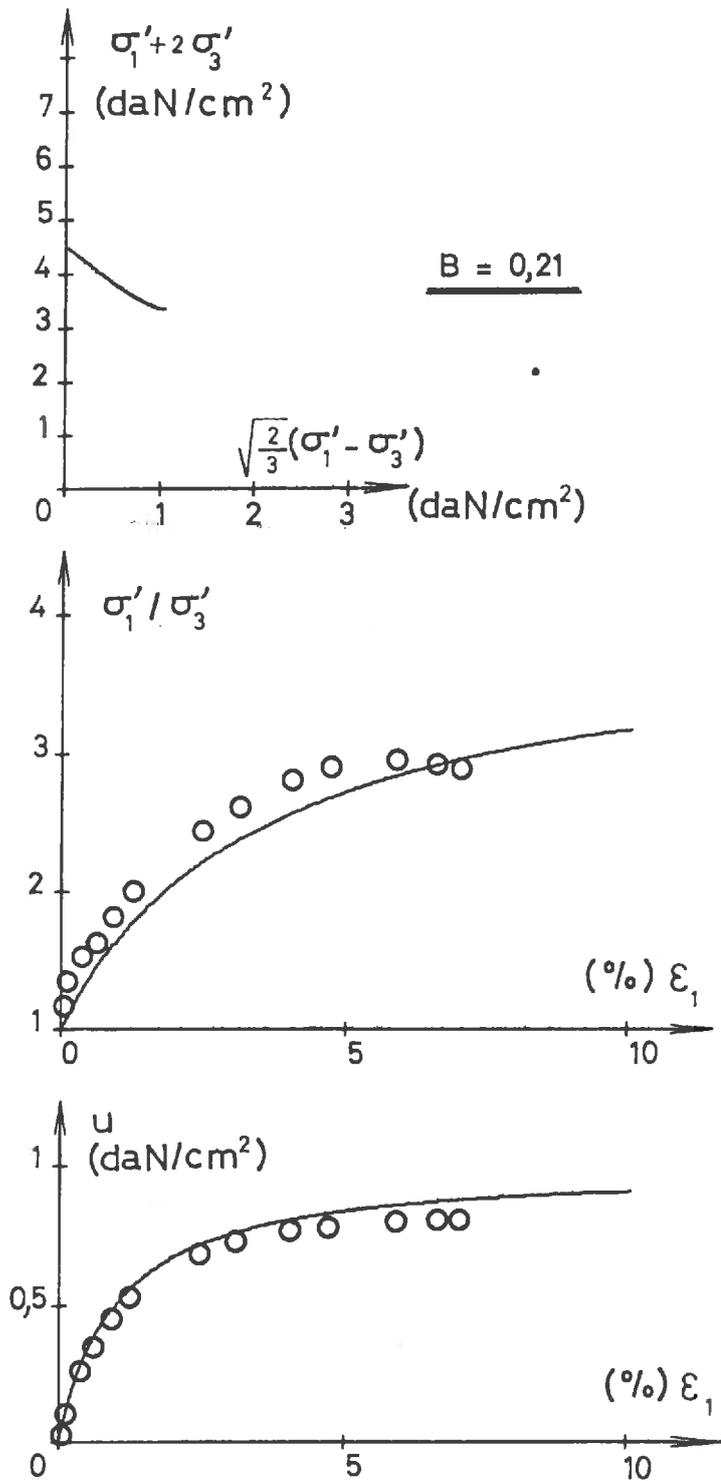


Fig. 6 : Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous 1,5 daN/cm<sup>2</sup>. Comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale. Cas  $B = 0,21$ .

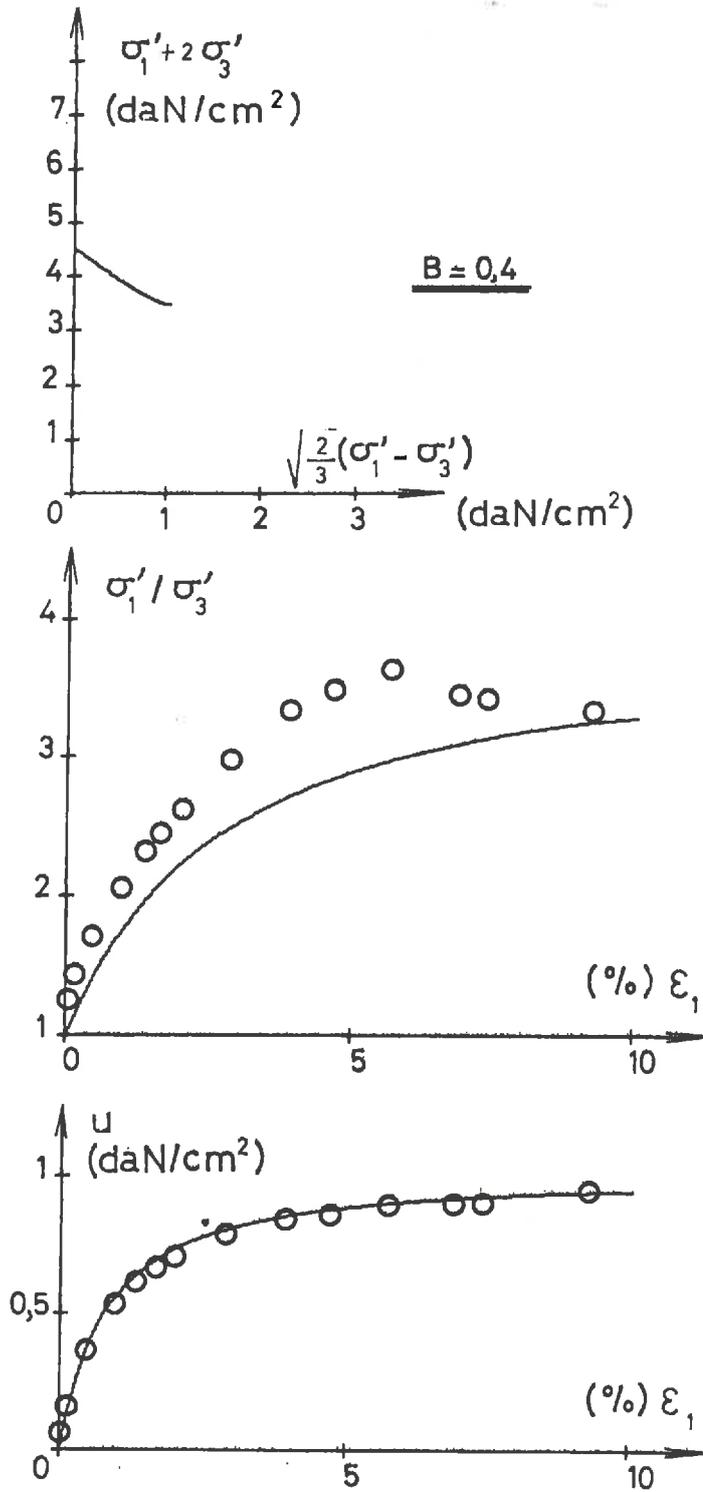
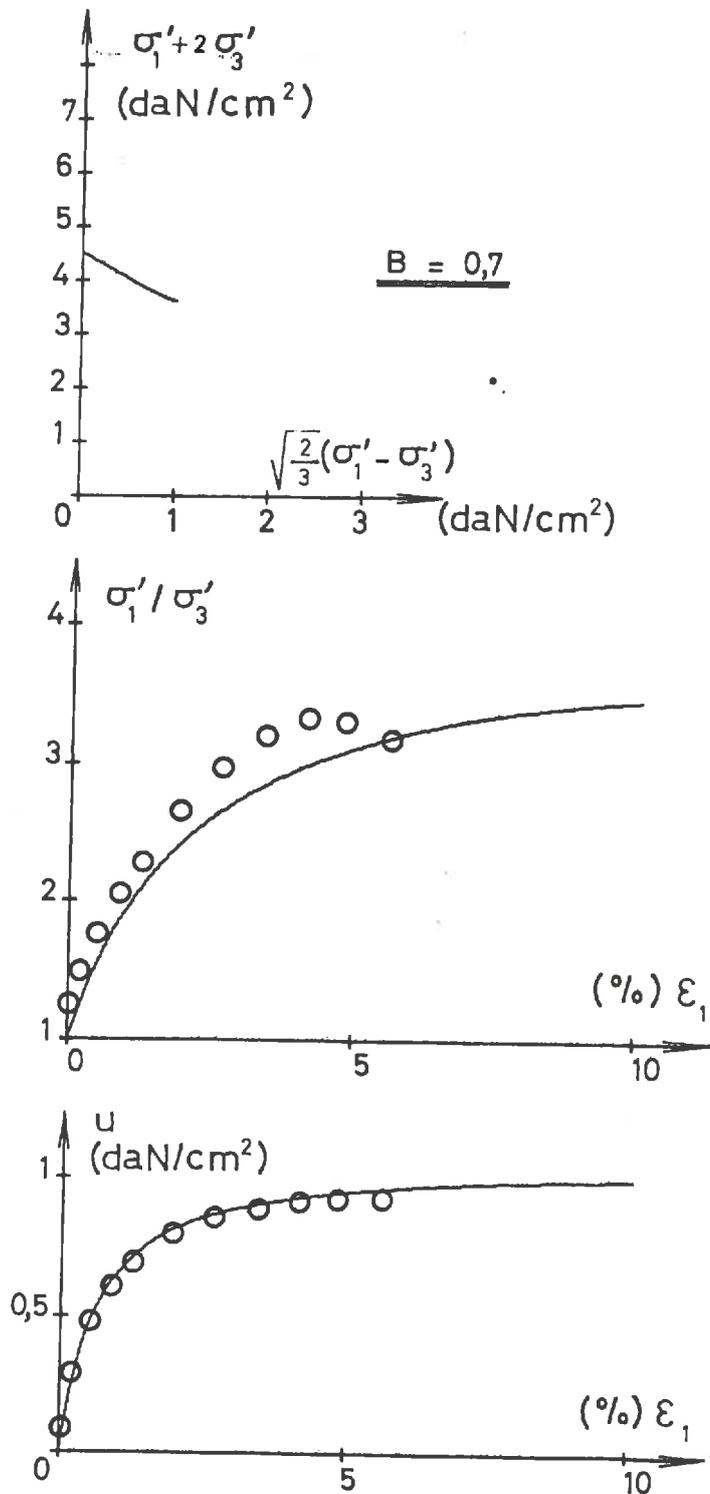


FIG. 7 : Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous 1,5 daN/cm<sup>2</sup>. Comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale. Cas B = 0,4.



**FIG. 8 :** Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous 1,5 daN/cm<sup>2</sup>. Comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale. Cas  $B = 0,7$ .

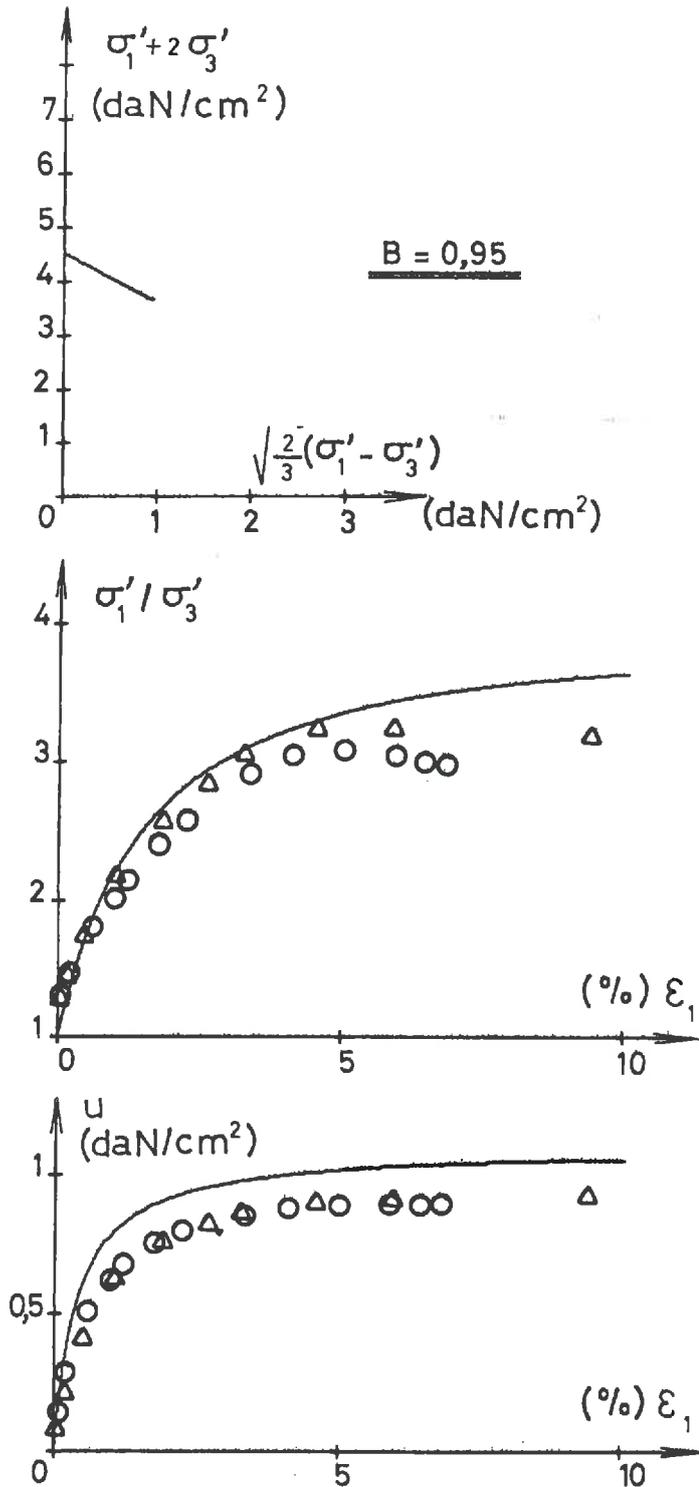


FIG. 9 : Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous 1,5 daN/cm<sup>2</sup>. Comparaison entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale. Cas  $B = 0,95$ .

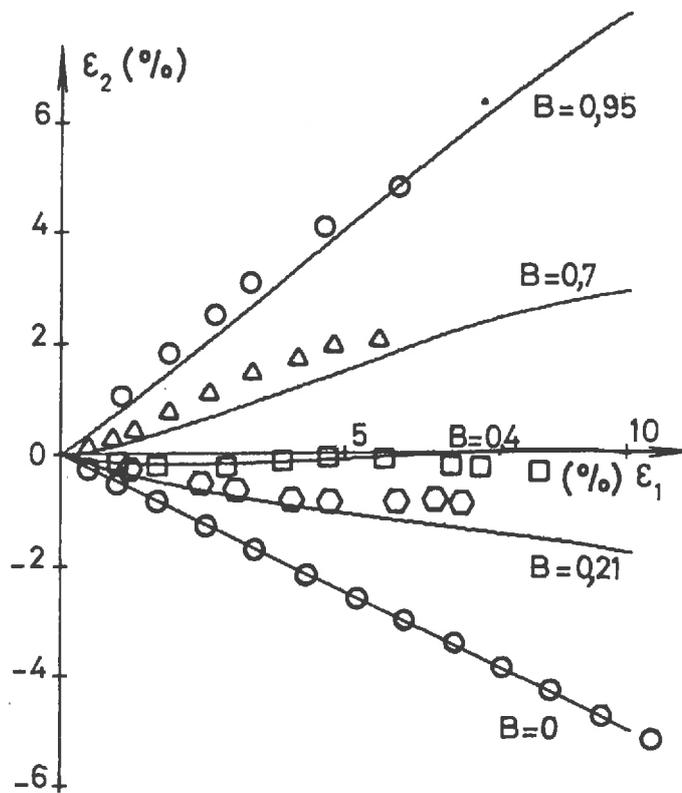
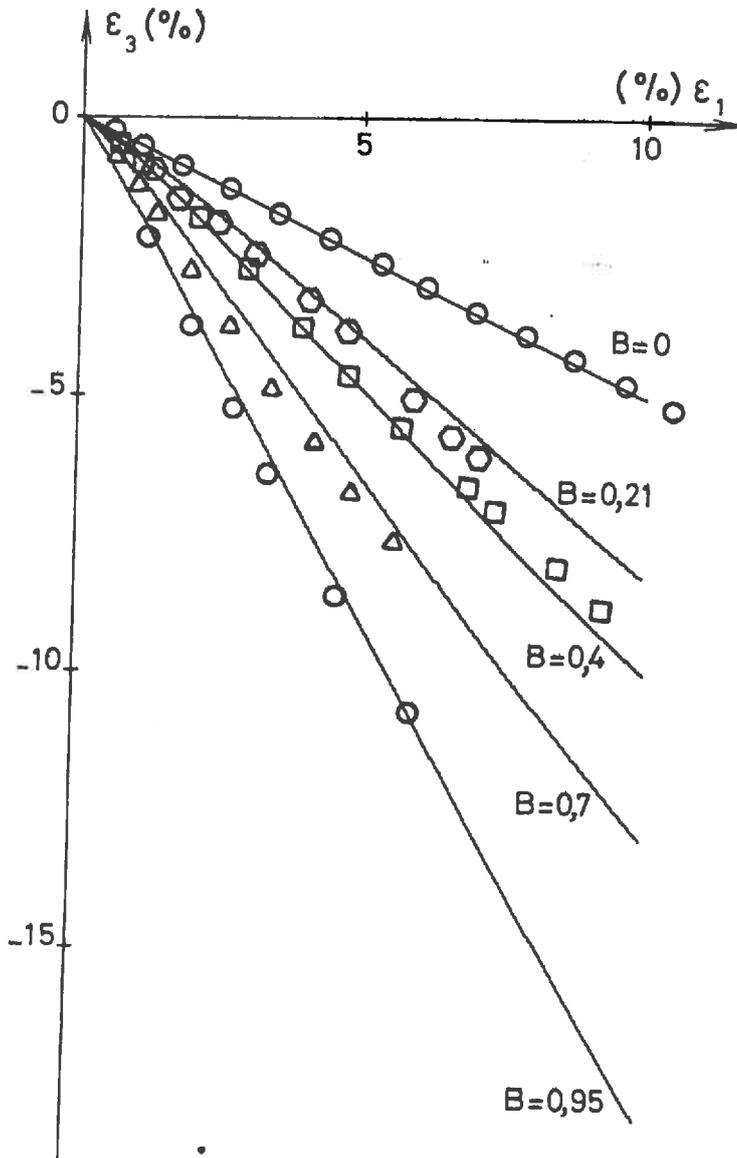


FIG. 10 : Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous  $1,5 \text{ daN/cm}^2$ . Comparaisons entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale, donnant les variations de la déformation dans la direction 2 en fonction de la déformation dans la direction 1.



**FIG. 11** : Essai tridimensionnel sur l'argile de GRUNDITE normalement consolidée sous  $1,5 \text{ daN/cm}^2$ . Comparaisons entre les points expérimentaux de LADE et MUSANTE (39) et les courbes théoriques, obtenues par intégration de la loi rhéologique incrémentale, donnant les variations de la déformation dans la direction 3 en fonction de la déformation dans la direction 1.

Pour  $B = 1$ , les contraintes (effectives et totales) dans les directions 1 et 2, sont égales. Dans la direction 1, la contrainte effective augmente continuellement, donc la contrainte effective dans la direction 2 aussi. Le chemin  $B = 1$  reste dans la zone tensorielle : (+, +, -).

Pour des valeurs de  $B$ , comprises entre 0 et 1, certains chemins présenteront donc, sans aucun doute, un changement de zone tensorielle et passeront de la zone (+, -, -) à la zone adjacente (+, +, -).

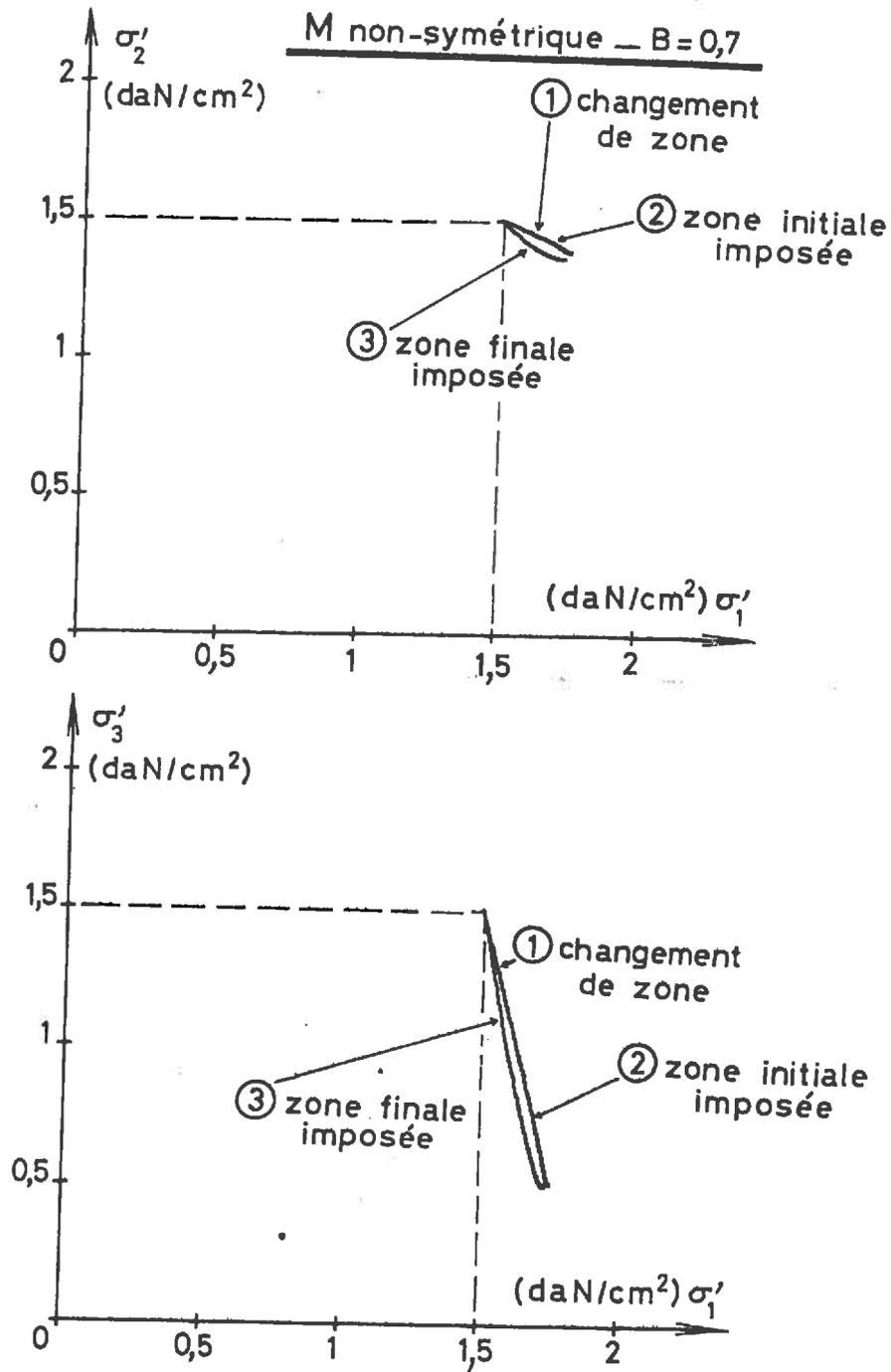
Le calcul a montré que les chemins  $B = 0 ; 0,21 ; 0,4$  restaient dans la zone (+, -, -) et le chemin  $B = 0,95$  dans la zone (+, +, -). Par contre, le chemin  $B = 0,7$  passe de la première zone à la seconde pour une déformation dans la direction 1 approximativement égale à 7,5%.

Les figures 12, 13, 14 permettent de comparer les résultats obtenus avec les trois hypothèses suivantes :

1. loi rhéologique générale avec changement de zone tensorielle possible. Le changement de zone est effectué avec un incrément de retard.
2. la zone tensorielle est imposée fixe. Il s'agit, dans ce cas, de la zone des premiers incréments, soit (+, -, -).
3. la zone tensorielle est imposée fixe, mais on choisit la zone des derniers incréments, soit (+, +, -).

Sur la figure 12, les courbes 1 et 2 sont confondues : le changement de zone se produit tout près de la surface limite, où l'état de contrainte ne varie presque plus. La courbe 3 reste proche des courbes 1 et 2 sur les figures 12 et 13. Sur la figure 14, on voit apparaître nettement le changement de zone. Remarquons la parfaite continuité de la courbe 1, bien que la matrice change brutalement de détermination lors du changement de zone. Notons que les courbes théoriques les plus proches des points expérimentaux correspondent au choix de la zone réelle.

Nous avons vu, sur un plan théorique, dans le chapitre I de la deuxième partie, qu'un changement de zone devait s'effectuer de manière continue avec la matrice non-symétrique mais avec une discontinuité "en dérivée" dans le cas de la



**FIG. 12 :** Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses :

1. loi rhéologique générale avec changement de zone
  2. zone tensorielle imposée fixe : celle des premiers incréments (+,-,-)
  3. zone tensorielle imposée fixe : celle des derniers incréments (+,+,-)
- Cas de la matrice non symétrique avec  $B = 0,7$ .

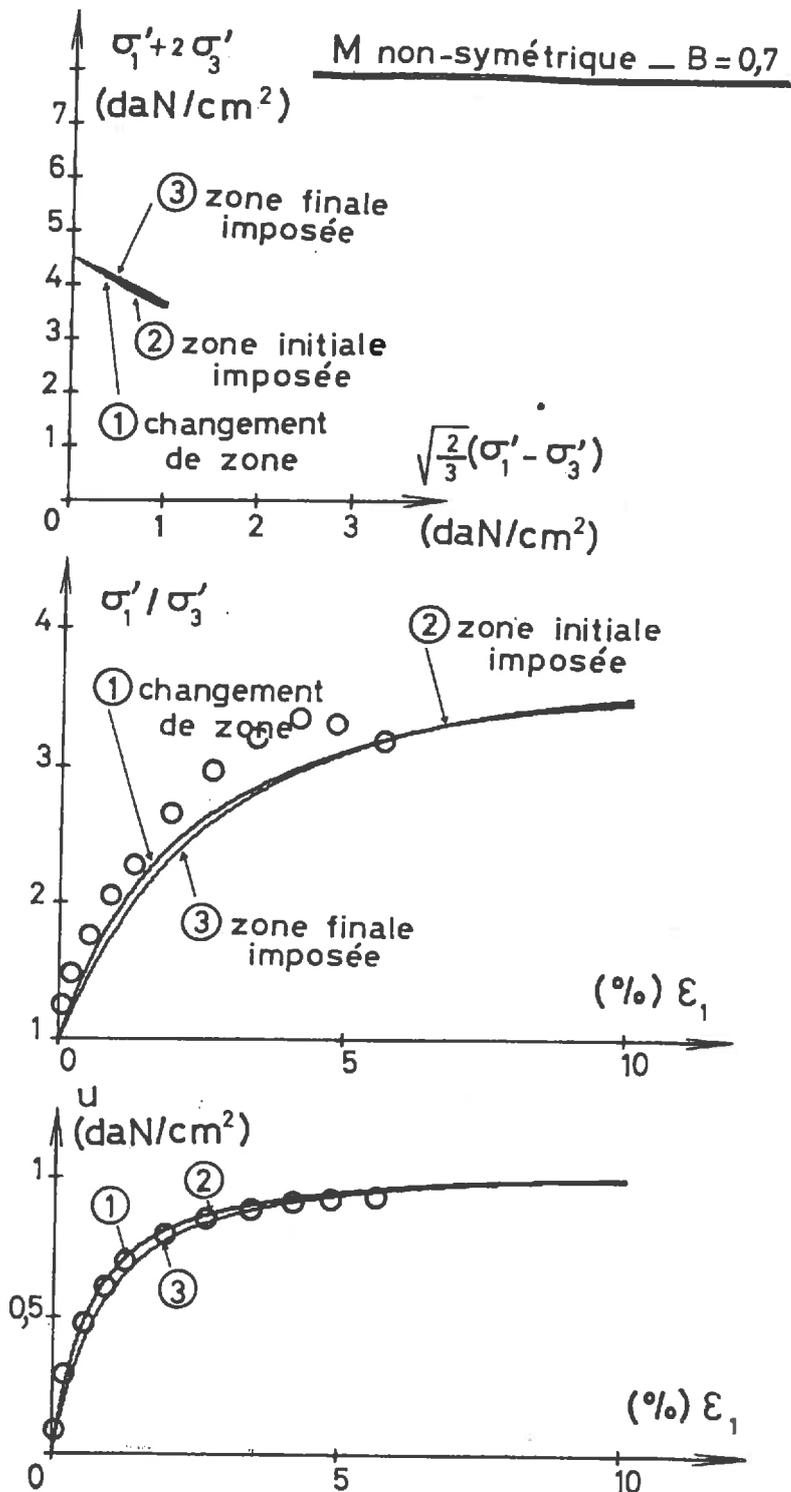


FIG. 13 : Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses :

1. Loi rhéologique générale avec changement de zone
  2. Zone tensorielle imposée fixe : celle des premiers incréments (+,-,-)
  3. Zone tensorielle imposée fixe : celle des derniers incréments (+,+,-)
- Cas de la matrice non symétrique avec  $B = 0,7$

M non-symétrique — B = 0,7

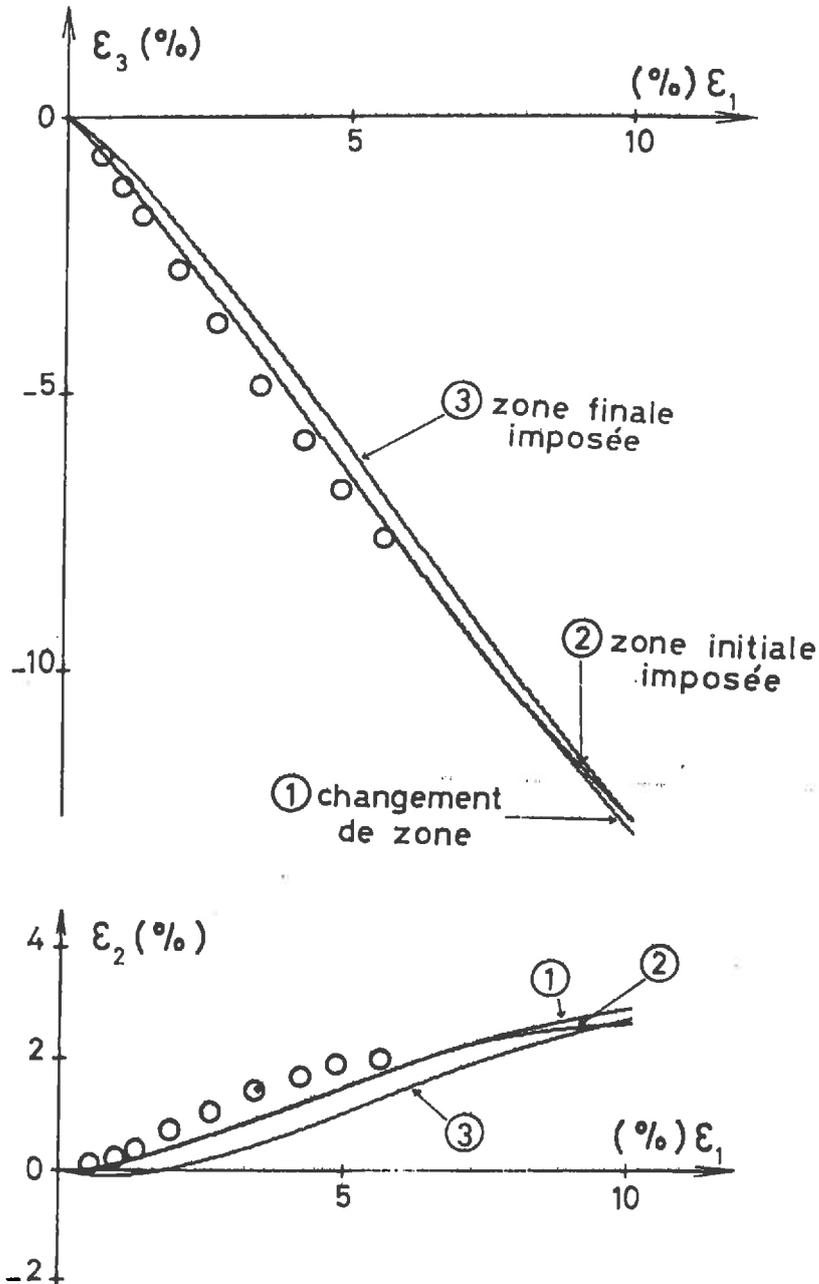


FIG. 14 : Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses :

1. Loi rhéologique générale avec changement de zone
  2. Zone tensorielle imposée fixe : celle des premiers incréments (+,-,-)
  3. Zone tensorielle imposée fixe : celle des derniers incréments (+,+,-)
- Cas de la matrice non symétrique avec  $B = 0,7$ .

matrice symétrique (1). Nous avons donc voulu le vérifier sur cet exemple. Malheureusement (hasard fâcheux !) avec la matrice symétrique, le changement de zone disparaît : le chemin  $B = 0,7$  reste dans la zone (+, -, -).

Sur les figures 15, 16, 17 les courbes correspondant aux hypothèses 1 et 2 restent donc rigoureusement confondues. L'hypothèse 3 correspond à un cas d'école, puisque l'ex-zone finale (+, +, -) n'est jamais atteinte ici.

Cependant, ces figures permettent de faire deux remarques importantes. D'une part, on note que les courbes obtenues en imposant une symétrie, a priori arbitraire, à la matrice  $M$  ne diffèrent pas trop des courbes données par la loi générale avec matrice non-symétrique. D'autre part, les différences les plus importantes entre les deux séries de courbes apparaissent pour les variations des déformations (fig.14 et 17) et la matrice non-symétrique donne alors, sans conteste, des résultats en bien meilleure concordance avec l'expérience que la matrice symétrique.

Enfin, nous avons voulu étudier sur ce même chemin l'influence de la grandeur de l'incrément en déformation, imposé dans la direction 1. La qualité de ce choix est d'une particulière importance dès que la loi, introduite dans un programme "éléments finis", doit être intégrée avec un nombre de pas nécessairement limité (pour des raisons de coût du calcul). BOULON (10) et CHAMBON (15, 16) ont apporté des solutions originales à cette question.

Les quatre dernières figures, numérotées 18, 19, 20, 21 montrent ainsi les courbes obtenues avec les trois hypothèses successives :

1. loi rhéologique générale avec matrice non-symétrique, changement de zone et calcul effectué en 200 incréments.
2. loi rhéologique avec matrice symétrique et calcul effectué en 10 incréments.
3. loi rhéologique avec matrice non-symétrique et calcul effectué en 10 incréments.

Les courbes 1 et 3 sont donc toujours tangentes entre elles à l'origine.

---

(1) Les hypothèses, à la base de l'expression de la matrice symétrique, et le programme de calcul utilisé ont été présentées de manière détaillée dans notre thèse de doctorat-ingénieur (DARVE, 17).

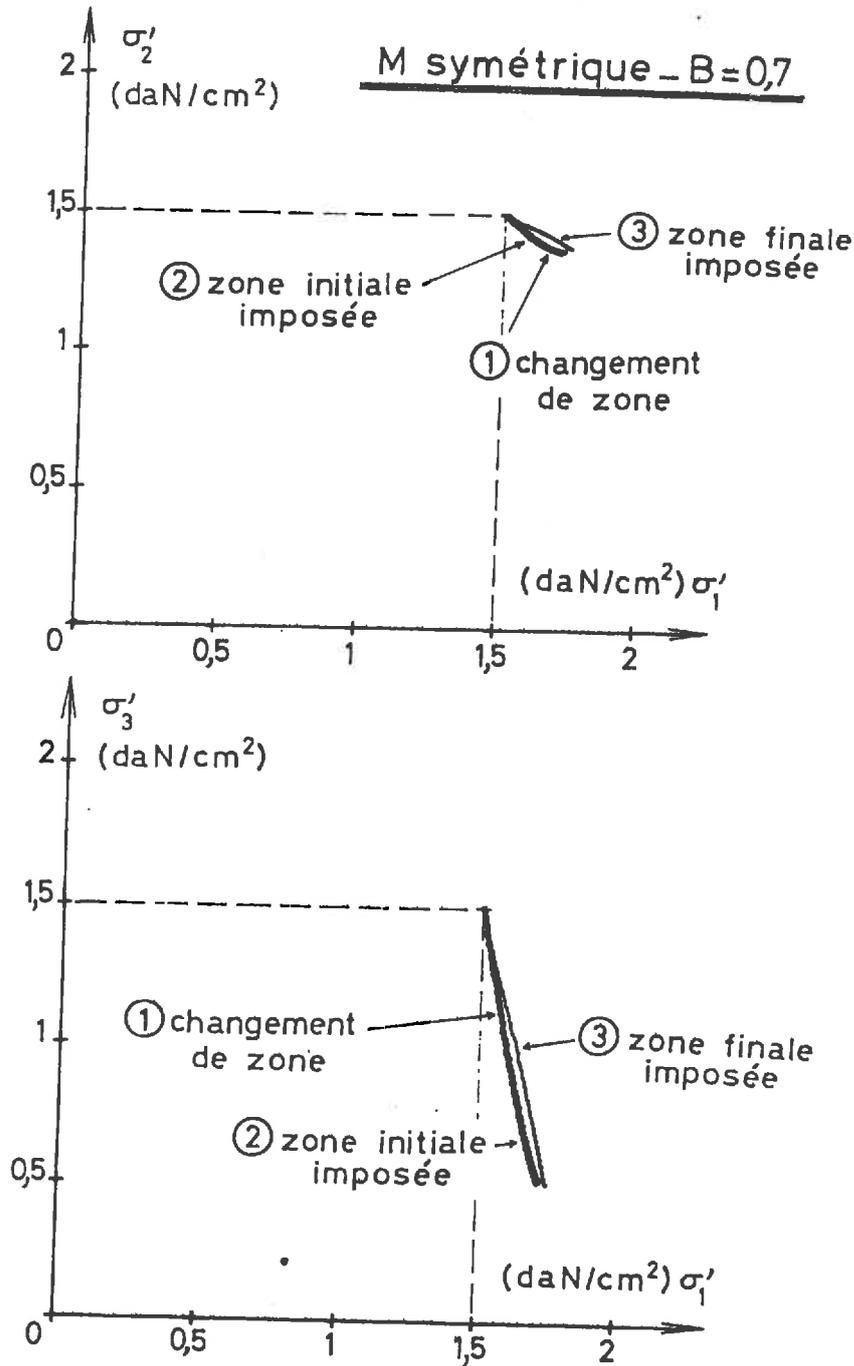


FIG. 15 : Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses :

1. Loi rhéologique générale avec changement de zone
  2. Zone tensorielle imposée fixe : elle des premiers incréments (+,-,-)  
Comme il ne se produit aucun changement de zone, ces deux hypothèses conduisent à des courbes identiques.
  3. Zone tensorielle imposée fixe : (+,+,-)
- Cas de la matrice symétrique avec  $B = 0,7$ .

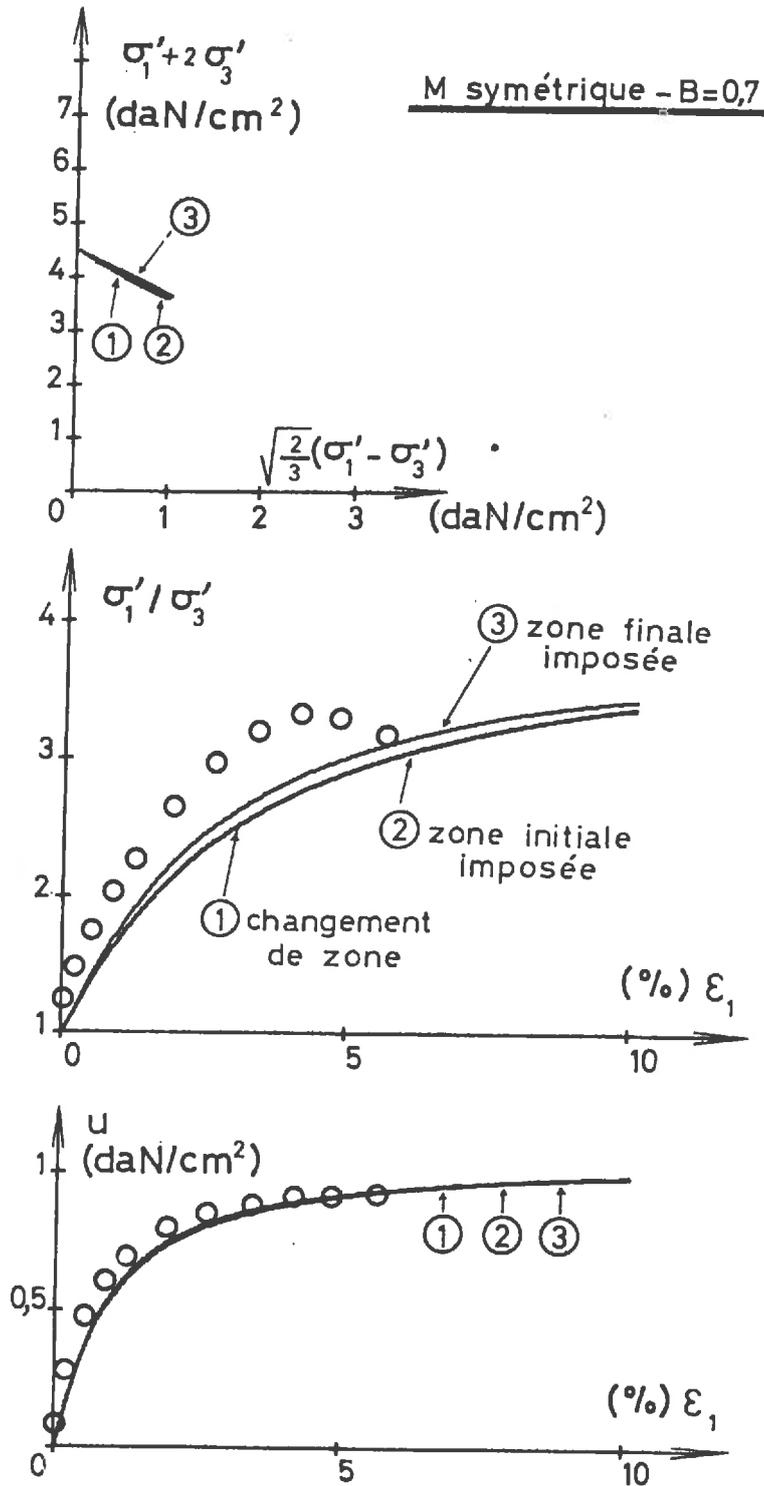


FIG. 16 : Comparaisons de courbes obtenues avec les trois hypothèses :

1. Loi rhéologique générale avec changement de zone.
2. Zone tensorielle imposée fixe : celle des premiers incréments (+,-,-)  
Comme il ne se produit aucun changement de zone, ces deux hypothèses conduisent à des courbes identiques.
3. Zone tensorielle imposée fixe : (+,+,-)  
Cas de la matrice symétrique avec  $B = 0,7$ .

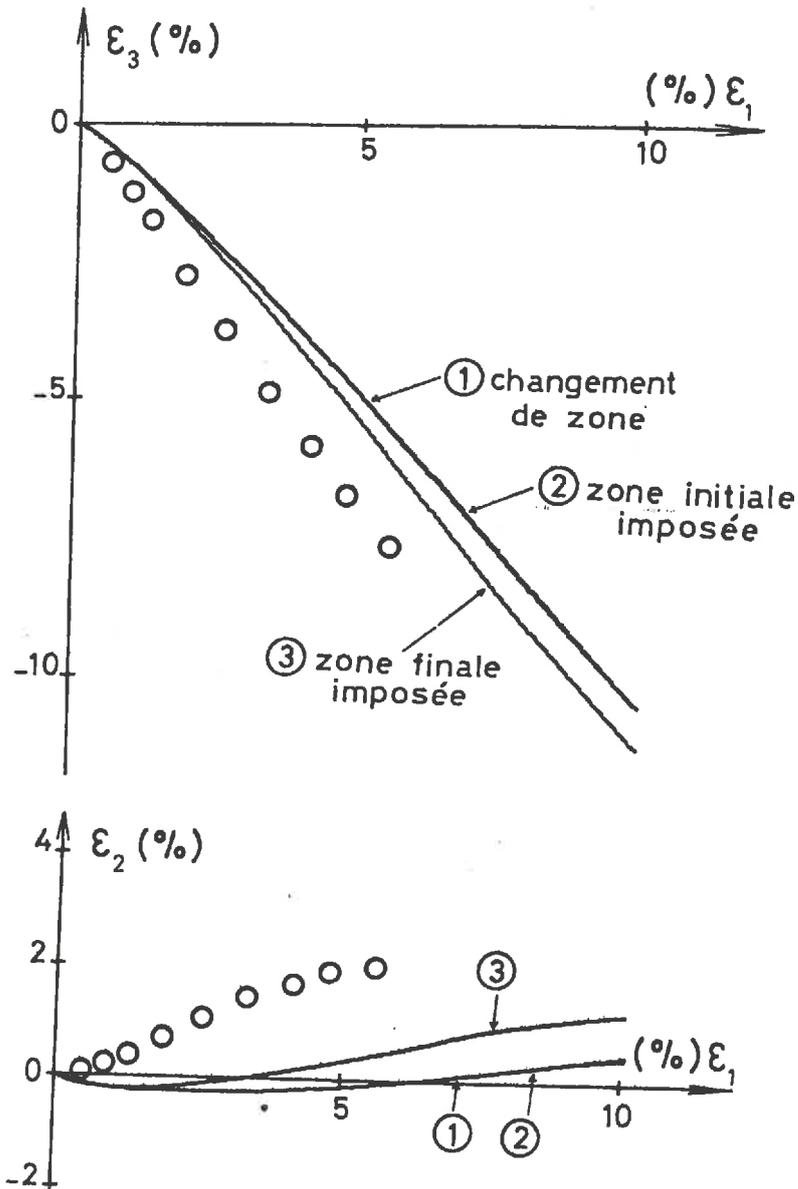
M symétrique - B=0,7

FIG. 17 : Comparaisons de courbes obtenues avec les trois hypothèses :

1. Loi rhéologique générale avec changement de zone.
2. Zone tensorielle imposée fixe : celle des premiers incréments (+,-,-)  
Comme il ne se produit aucun changement de zone, ces deux hypothèses conduisent à des courbes identiques
3. Zone tensorielle imposée fixe : (+,+,-)  
Cas de la matrice symétrique avec  $B = 0,7$ .

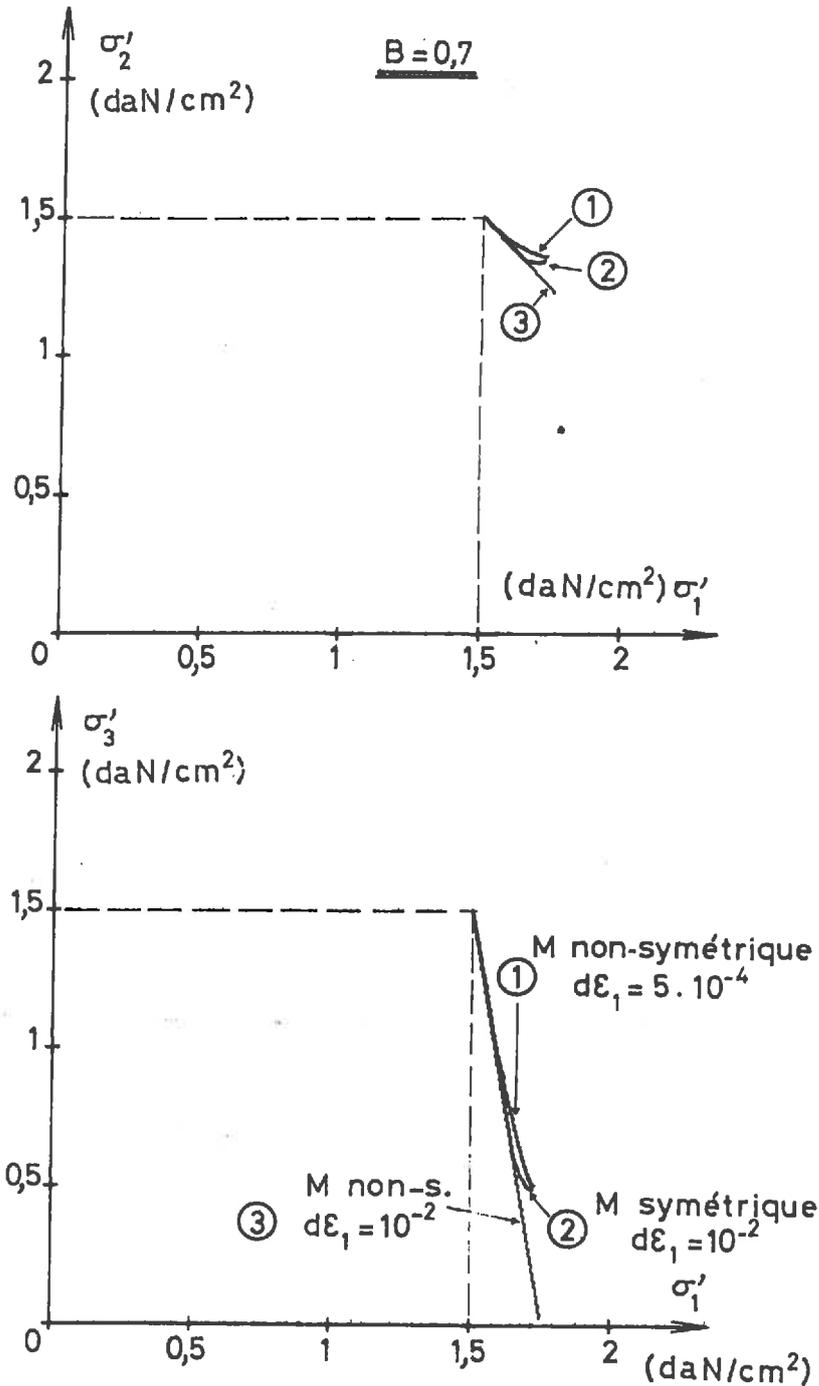


FIG. 18 : Influence de la grandeur des incréments de sollicitation

Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses suivantes (cas :  $B = 0,7$ ) :

1. Loi rhéologique générale avec matrice non-symétrique et changement de zone. Le calcul est effectué en 200 incréments.
2. Loi rhéologique avec matrice symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.
3. Loi rhéologique avec matrice non-symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.

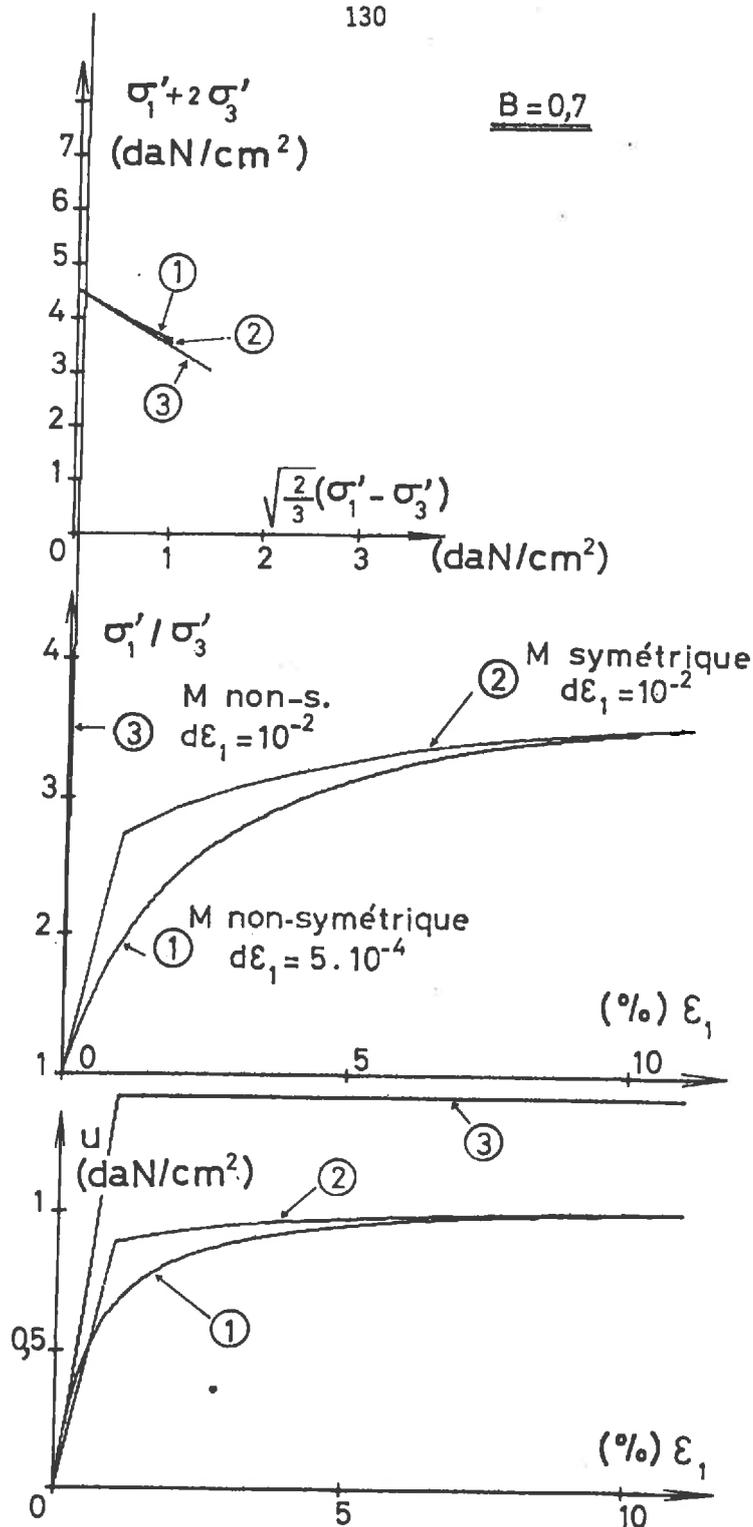


FIG. 19 : Influence de la grandeur des incréments de sollicitation

Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses suivantes (cas :  $B = 0,7$ ) :

1. Loi rhéologique générale avec matrice non symétrique et changement de zone. Le calcul est effectué en 200 incréments.
2. Loi rhéologique avec matrice symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.
3. Loi rhéologique avec matrice non-symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.

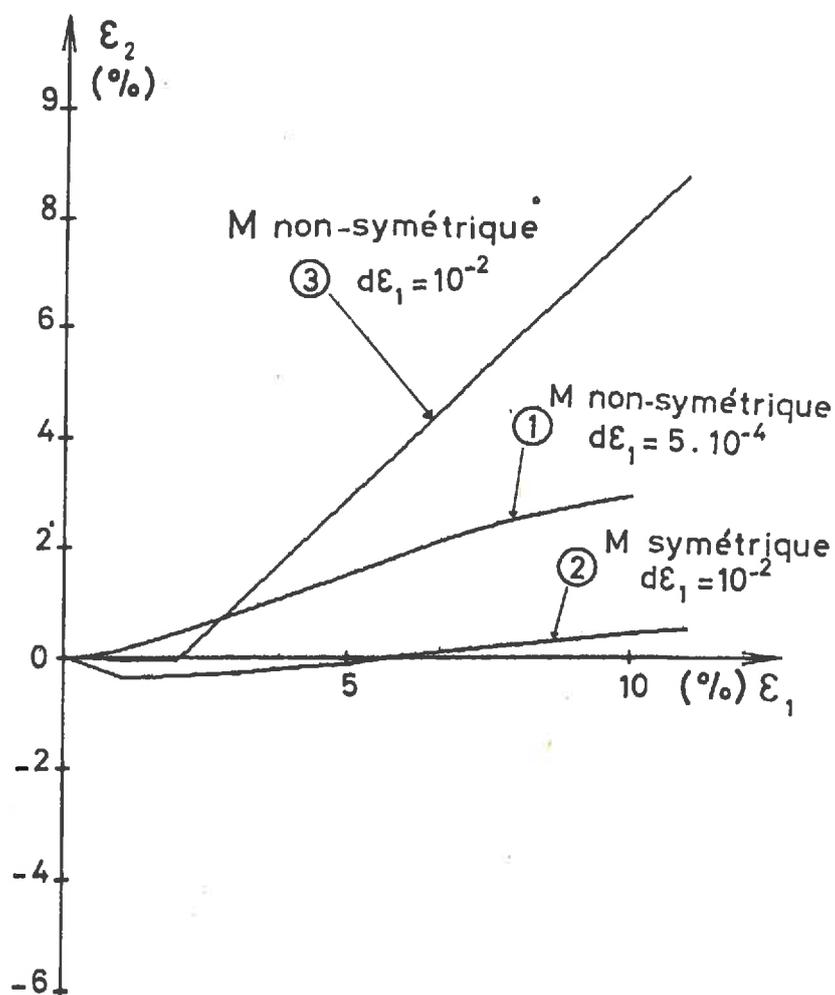
B = 0,7

FIG. 20 : Influence de la grandeur des incréments de sollicitation

Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses suivantes (cas :  $B = 0,7$ ) :

1. Loi rhéologique générale avec matrice non-symétrique et changement de zone. Le calcul est effectué en 200 incréments.
2. Loi rhéologique avec matrice symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.
3. Loi rhéologique avec matrice non-symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.

$$\underline{B = 0,7}$$

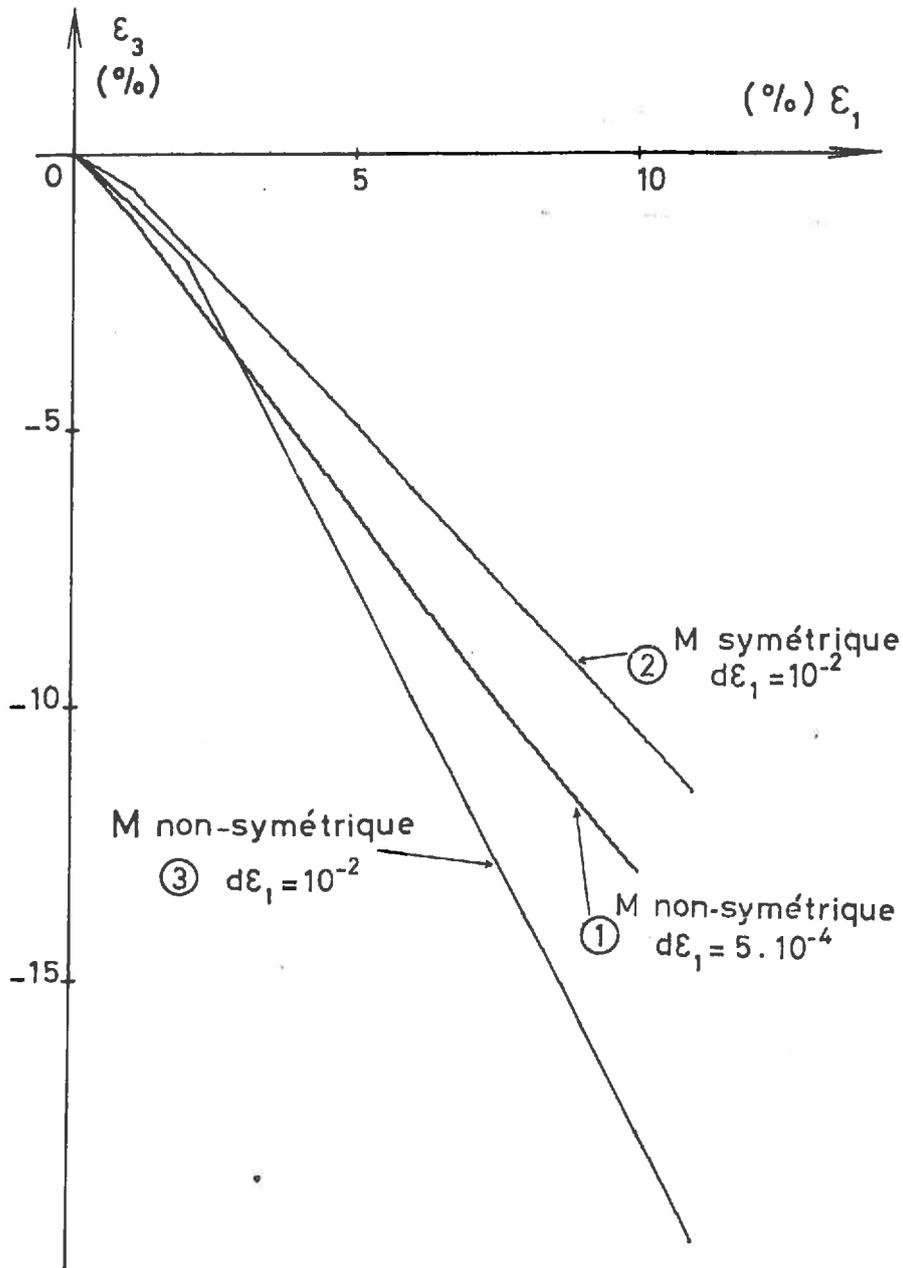


FIG. 21 : Influence de la grandeur des incréments de sollicitation

Comparaisons des courbes obtenues avec les trois hypothèses suivantes (cas :  $B = 0,7$ ) :

1. Loi rhéologique générale avec matrice non-symétrique et changement de zone. Le calcul est effectué en 200 incréments.
2. Loi rhéologique avec matrice symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.
3. Loi rhéologique avec matrice non-symétrique. Le calcul est effectué en 10 incréments.

La première remarque à faire est de noter que la surface limite est très largement franchie dès le premier incrément dans le cas 3 : on se trouve dès lors en présence d'un comportement élastique-plastique caractéristique.

Notons, par ailleurs, la pente très forte de la courbe représentant les variations du rapport des contraintes effectives en fonction de la déformation axiale dans le cas 3 (graphique médian de la figure 19). Les deux pentes dans les cas 2 et 3 sont très différentes.

Si l'on excepte le cas d'une sortie brutale de la surface limite à la suite d'un incrément de sollicitation trop grand (mais ce n'est pas un cas d'école : BOULON et CHAMBON ont rencontré ce problème dans des calculs "éléments-finis"), les résultats restent relativement groupés en contraintes (figure 18 et graphique supérieur de la figure 19), tandis que l'éventail s'élargit en déformations (figures 20 et 21). La raison en est claire : un chemin pratiquement rectiligne (cas du chemin en contraintes) reste, dans une large mesure, indépendant de la grandeur de l'incrément de sollicitation (à l'exception d'une sortie hors de la surface limite), alors qu'un chemin présentant une courbure importante (cas des déformations) peut être notablement altéré par des incréments trop grands.

---

## CONCLUSION GENERALE

Parvenu au terme de ce travail, je voudrais ici tenter d'en rassembler les différentes parties, rendues éparses par leur analyse détaillée.

La base de cette étude repose sur les deux idées essentielles que sont l'intérêt d'une formulation incrémentale des lois rhéologiques et la capacité de la notion de "zones tensorielles" à décrire les irréversibilités plastiques de manière simple.

Dans ce cadre général, deux hypothèses supplémentaires nous ont été indispensables pour déterminer la partie élasto-plastique de la loi rhéologique d'un sol : orthotropie de la loi incrémentale et définition de huit zones tensorielles. Quant à la partie visqueuse (cas des argiles), son explication nécessite le calcul de la vitesse de fluage d'un sol, dont nous proposons une formulation. Le détail de la détermination des paramètres d'un sol donné et les essais nécessaires sont enfin présentés.

La loi rhéologique d'un sol, ainsi explicitée sous forme incrémentale, peut être intégrée sur différents chemins de sollicitation et les courbes théoriques obtenues comparées avec les résultats expérimentaux. Les presses tridimensionnelles permettent d'imposer à un échantillon une gamme très étendue de chemins de sollicitation (cependant les axes principaux de la sollicitation, et, par souci d'homogénéité, de la réponse, restent fixes). Dans le cas des sables, une comparaison systématique entre les courbes théoriques et les mesures de LADE et DUNCAN (BERKELEY) et de GOLDSCHIEDER et GUDEHUS (KARLSRUHE) a été effectuée. Pour les argiles, nous sommes tout d'abord préoccupés d'étudier le passage des essais drainés aux essais non-drainés sur la base des expériences de HENKEL et PARRY (LONDRES). Puis, les essais tridimensionnels de LADE et MUSANTE (BERKELEY) sur une argile normalement consolidée nous ont permis de vérifier la validité de la partie élasto-plastique de la loi pour une argile. Ceci nous a donné la possibilité, en particulier, de tester la loi dans le cas d'un changement progressif de zone tensorielle sur un chemin "en apparence" monotone. Enfin, nous avons intégré la loi sur différents types de cycles de charge-décharge et nous avons pu obtenir théoriquement le phénomène de liquéfaction dans le cas d'un sable lâche, saturé, non drainé.

La loi rhéologique proposée a été appliquée à une seconde classe de problèmes, constituée par la détermination des surfaces de rupture en mécanique des sols. La condition de localisation, proposée par HILL et reprise par RICE, permet en effet de déterminer dans quels cas de telles surfaces peuvent naître et de calculer leurs directions locales, dans la mesure où la loi rhéologique est écrite sous forme incrémentale et où l'on a défini un critère de rupture. Un calcul de la forme, du nombre et de la direction de ces surfaces de rupture dans trois cas, géométriquement simples, a pu être effectué.

Cette conclusion ne se veut pas une porte qui se ferme et, pour finir, je tiens à insister sur le fait que ce travail est très loin d'avoir épuisé les sujets abordés. Beaucoup de questions ne trouveront leurs réponses que dans les thèses et articles ultérieurs : cette étude n'a prétendu qu'à faire le point dans l'avancée d'un travail collectif qui se poursuit.

---

REFERENCES

- (1) ANGLES D'AURIAC : "Les principes en mécanique des milieux continus"  
La Houille Blanche, vol.5, pp 427-432, 1970.
- (2) ANGLES D'AURIAC : "Etude du tenseur d'anisotropie, basée sur la représentation d'un tenseur symétrique dans un espace  $E_3$  par un vecteur dans un espace  $E_6$ " , C.R.A.S., vol. 272, pp 612-613, 1971.
- (3) ANGLES D'AURIAC : "Remarques sur les lois de comportement incrémentales"  
Note interne, Institut de Mécanique de Grenoble, 1975.
- (4) ANQUETIL : "Présentation de la théorie de l'Ecole de Cambridge sur les déformations des argiles soumises aux contraintes triaxiales" ,  
Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics,  
n°295-296, pp 143-157, Juillet-Août 1972.
- (5) ANQUETIL : "Déformation des sables sous différents états de contrainte",  
Thèse de docteur-ingénieur, Paris, 1976.
- (6) AUBRY : "Détermination expérimentale des paramètres de la loi rhéologique incrémentale d'un milieu pulvérulent", Thèse de doctorat de spécialité,  
Grenoble, 1974.
- (7) AURIAULT : "Contribution à l'étude de la consolidation des sols" ,  
Thèse d'état, Grenoble, 1973.
- (8) BOEHLER : "Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols anisotropes"  
Thèse de doctorat de spécialité, Grenoble, 1968.
- (9) BOUCEK : "Résistance maximale, ultime et à long terme de l'argile" ,  
Thèse d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1969.
- (10) BOULON : Thèse d'état, Grenoble, à paraître.

- (11) BOULON, CHAMBON, DARVE : "Loi rhéologique incrémentale pour les sols et application par la méthode des éléments finis", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n°351, pp 22-38, juin 1977 et Revue Française de Géotechnique, n°2, pp 5-22, septembre 1977.
- (12) BOULON, CHAMBON, DARVE, DESRUES, FLAVIGNY, FORAY : "Comportement d'un écran et d'un pieu : expériences et calculs" , comptes-rendus du Congrès International de Mécanique des Sols, tome 2, Tokyo, 1977.
- (13) BOULON, DARVE, DESRUES, FORAY : "Soil-structure coupling. Non linear rheological relationship and boundary conditions in soil mechanics", Collóque international sur les développements nouveaux dans les méthodes numériques de l'ingénieur, Paris, 1977, à paraître dans Computers and Structures.
- (14) CHAMBON : "Application de la méthode des éléments finis et d'une loi rhéologique incrémentale aux calculs de mécanique des sols", Thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1975.
- (15) CHAMBON : Thèse d'état, Grenoble, à paraître.
- (16) CHAMBON, DARVE, TRATAPEL : "Mesures et calculs avec loi non-linéaire pour un modèle expérimental", Comptes-rendus du symposium franco-polonais, Cracovie, juillet 1977, à paraître en 1978.
- (17) DARVE : "Contribution à la détermination de la loi rhéologique incrémentale des sols", Thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1974.
- (18) DARVE, BOULON, CHAMBON : "Loi rhéologique incrémentale des sols" , Journal de mécanique, à paraître.
- (19) DARVE, LABANIEH, CHAMBON : "Incremental stress-strain relationship for cohesionless soil", Comptes-rendus de : Second International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, tome 1, pp 264-270, Blacksburg (U.S.A.), 1976.
- (20) DRUCKER : "Some implications of work hardening and ideal plasticity", Quarterly of Appl. Math., tome 7, n°4, pp 441-418, 1950.

- (21) DUNCAN, CHANG : "Non-Linear analysis of stress and strain in soils",  
Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E.,  
vol.96, n°SM 5, pp 1629-1653, 1970.
- (22) FLAVIGNY : "Le fluage", note interne, Institut de Mécanique de Grenoble, 1976.
- (23) FLAVIGNY : Thèse, Grenoble, à paraître.
- (24) GOLDSCHIEDER : "Spannungen in Sand bei räumlicher, monotoner Verformung",  
dissertation, univ. Karlsruhe, 1972.
- (25) GOLDSCHIEDER : "Grenzbedingung und Fließregel von Sand", Mechanics  
Research Communications, à paraître.
- (26) GOLDSCHIEDER, GUDEHUS : "Rectilinear extension of dry sand : testing apparatus  
and experimental results", comptes-rendus du Congrès International de  
Mécanique des Sols, tome 1, pp 143-149, Moscou, 1973.
- (27) GUDEHUS : "Elasto-plastische Stoffgleichungen für Trocken Sand" ,  
Ingenieur Archiv 42, pp 151-169, 1973.
- (28) GUDEHUS, GOLDSCHIEDER, WINTER : "Mechanical properties of sand and clay  
and numerical integration methods : some sources of errors and bounds  
of accuracies", ch. 3 of "Finite elements in geomechanics", WILEY,  
Londres, à paraître.
- (29) HANSEN : "Line ruptures regarded as narrow rupture zones : basic equations  
based on kinematic considerations", Conference of Earth Pressure  
Problems, vol.1, pp 39-49, Bruxelles, 1958.
- (30) HENKEL : "The correlation between deformation, pore water pressure and  
strength characteristics of saturated clays", Ph. D. thèse, Londres,  
1958.
- (31) HENKEL, SOWA : "The influence of stress history on stress paths in undrained  
triaxial tests on clay", Special Technical Publication, n°361, Labora-  
tory Shear Testing of Soils, American Society of Testing and Materials,  
pp 280-291, Ottawa, 1963.

- (32) HILL : "Acceleration waves in solids", J. Mech. Phys. Solids, vol.10, pp 1-16, 1962.
- (33) JAMES, BRANSBY : "Experimental and theoretical investigations of a passive earth pressure problem", Geotechnique, vol.20, n°1, pp 17-37, 1970.
- (34) JAMES, BRANSBY : "A velocity field for some passive earth pressure problems" Geotechnique, vol. 21, n°1, pp 61-83, 1971.
- (35) KOENIG : "Dreiaxiale Kriechversuche mit Schluff", Monotone zeitabhängige Vorgänge im Baugrund, Spezialsitzung der Baugrundtagung, pp 191-215, Frankfurt, 1974.
- (36) LABANIEH : Thèse d'état (à paraître), Grenoble, 1979.
- (37) LADE : "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", Report to the National Science Foundation, Mechanics and Structures Department, University of California, Berkeley, 1975.
- (38) LADE, DUNCAN : "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soils" Journal of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E., vol.101, n° GT 10, pp 1037-1053, 1975.
- (39) LADE, MUSANTE : "Three-dimensional behaviour of normally consolidated cohesive soil", Soil Mechanics Laboratory, School of Engineering and Applied Science, University of California, Berkeley, 1976.
- (40) MACVEAN : "Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs - und Verzerrungstensoren", Z.A.M.P., vol.19, pp 157-185, 1968.
- (41) MEISSNER : "Nichtlineares Kraft-Verformungsverhalten zylindrischer Körper aus rolligem Erdstoff" , Heft n°45, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik , Karlsruhe, 1971.
- (42) NAYAK, ZIENKIEWICZ : "Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening", International Journal of Numerical Methods in Engineering, n°5, pp 113-135, 1972.

- (43) OZAWA : "Elasto-plastic finite element analysis of soil deformation",  
Ph. D. thesis, department of civil engineering, University of  
California, Berkeley, 1973.
- (44) OWEN, WILLIAMS : "On the time derivatives of equilibrated response functions"  
A.R.M.A., vol.33, n°4, pp 288-306, 1969.
- (45) PARRY : "Triaxial compression and extension tests on remoulded saturated clay ",  
Geotechnique, vol. X, n°4, pp 166-180, 1960.
- (46) PERSOZ : "La rhéologie", monographies du centre d'actualisation scientifique  
et technique , MASSON, pp 45-72, 1969.
- (47) RAMAMURTHY, RAWAT : "Shear strength of sand under general stress system" ,  
Congrès International de Mécanique des Sols, tome 1, pp 339-342, Moscou,  
1973.
- (48) RICE : "The localization of plastic deformation" , Comptes-rendus du  
congrès I.U.T.A.M., tome 1, pp 207-220, Delft, 1976.
- (49) ROBINET : Thèse, Ecole Centrale Lyonnaise, à paraître.
- (50) ROSCOE, SCHOFIELD, WROTH : "On the yielding of soils", Geotechnique, volume  
VIII, n°1, pp 22-53, 1958.
- (51) RUDELLE : "Essais de chargements cycliques au triaxial", Comptes-rendus du  
séminaire "Mécanique des Sols Marins", Institut Français du Pétrole,  
Paris, 1977.
- (52) RUDNICKI, RICE : "Conditions for the localization of deformation in pressure-  
sensitive dilatant-materials", J. Mech. Phys. Solids, vol.23, pp 371-  
394, 1975.
- (53) SCHNEEBELI : "Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion" ,  
C.R.A.S., tome 243, p. 125, 1956.
- (54) SCHOFIELD, WROTH : "Critical state soil mechanics", Mc Graw Hill, Londres,  
1968,

- (55) SCHULTZE : "Essais de fluage sur des sols normalement compactés" ,  
comptes-rendus des Journées Françaises de Mécanique des Sols,  
"Comportement des sols avant la rupture", pp 20-29, Paris, 1971.
- (56) SHIBATA, KARUBE : "Creep rate and creep strength of clays", Congrès  
International de Mécanique des Sols, tome 1, pp 361-367, Mexico,  
1969.
- (57) STUTZ : "Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents",  
Thèse d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1972.
- (58) THOM : "Stabilité structurelle et morphogénèse : Essai d'une théorie générale  
des modèles", W.A. BENJAMIN INC., EDISCIENCE S.A., Paris, 1972.
- (59) THOMPSON : "Catastrophe theory and its rôle in applied mechanics", Comptes-  
rendus du Congrès I.U.T.A.M., tome 2, pp 451-458, Delft, 1976.
- (60) TRATAPEL : "Contribution à l'étude du comportement mécanique d'un milieu  
analogique bidimensionnel", thèse de docteur-ingénieur, Grenoble,  
1977.
- (61) VAGNERON, LADE, LEE : "Evaluation of three stress-strain models for soils",  
comptes-rendus de Second International Conference on Numerical Methods  
in Geomechanics, A.S.C.E., vol.3, pp 1329-1351; Blacksburg (U.S.A.),  
1976 .
- (62) VUAILLAT : "Contribution à l'étude du comportement visqueux des milieux  
argileux", rapport de D.E.A., Institut de Mécanique de Grenoble, 1977.
- (63) VUAILLAT : Thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, à paraître.
- (64) LADE, DUNCAN : "Cubical triaxial tests on cohesionless soil", Journal of  
the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E., n° SM 10, pp  
793-812, Oct. 1973.
- (65) LAPLACE : "Théorie analytique des probabilités", tome 5, Courcier, Paris,  
1812.

- (66) MORIN : "La Méthode", tome 1 : "La Nature de la Nature", éditions du Seuil, 1977.
- (67) LANIER : "Etude expérimentale des lois de comportement en grandes déformations à l'aide d'une presse réellement tridimensionnelle", Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, tome IV-2, pp 53-60, 1976.
- (68) HABIB : "La liquéfaction des sables", Journée technique "Eau, Sol et Construction", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n°355, pp 155-159, nov. 1977.
- (69) LEINENKUGEL : "Deformations - und Festigkeitsverhalten bindiger Erdstoffe. Experimentelle Ergebnisse und ihre physikalische Deutung", dissertation, Karlsruhe, 1976.
- (70) KOLUMBAS : "Ein nichtlineares viskoplastisches Stoffgesetz für Böden", dissertation, Universität ce Karlsruhe, 1978.

