

TH  
19  
0224  
MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE  
— I. N. R. A. —  
STATION de SCIENCE du SOL  
Domaine Saint-Paul  
84140 MONTFAVET

T H E S E

Présentée  
à la Faculté des Sciences  
de l'Université de GRENOBLE

Pour obtenir le Grade de Docteur de Spécialités  
(Troisième cycle d'Hydrodynamique Supérieure,  
Option Mécanique des Sols et Dynamique des Nappes Souterraines)

Par  
Jacques STERENBERG  
Ingénieur Civil de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

ETUDE DE LA LOCOMOTION TOUS TERRAINS

ETUDE THEORIQUE A DEUX DIMENSIONS DES ETATS STATIQUES  
D'UNE ROUE RIGIDE EN MILIEU PULVERULENT

Soutenue le 16 octobre 1963, devant la Commission d'Examen

- |    |                  |            |
|----|------------------|------------|
| M. | KRAVTCHENKO )    | Président  |
|    | ANGLES D'AURIAC) |            |
|    | BIAREZ )         | Examineurs |
|    | SIRIEYS )        |            |
|    | SIBILLE )        | Invités    |

TH-  
GC24

GRENOBLE

26 FEV. 1976

## INTRODUCTION

Nous nous sommes proposés dans le présent mémoire d'étudier le comportement d'une roue chargée motrice reposant sur un massif pulvérulent. Des études de cette question ont déjà été faites mais, à notre connaissance, d'un point de vue purement qualitatif. Les résultats qui en découlaient s'appliquent en effet immédiatement aux problèmes très importants dans la pratique de la circulation en tout terrain. Les seules données qu'il importe alors de connaître sont les charges, couples et efforts de traction qu'il y a lieu d'utiliser en fonction des caractéristiques mécaniques du terrain sur lequel on désire circuler.

Messieurs DUPERRIN et OBERTI ont d'ailleurs étudié ce côté de la question à l'Université de Grenoble en utilisant pour leurs expériences l'appareil analogique à deux dimensions de TAYLOR-SCHNEEBELI. Leurs résultats nous ont été maintes fois utiles pour établir les hypothèses de notre étude et vérifier les résultats.

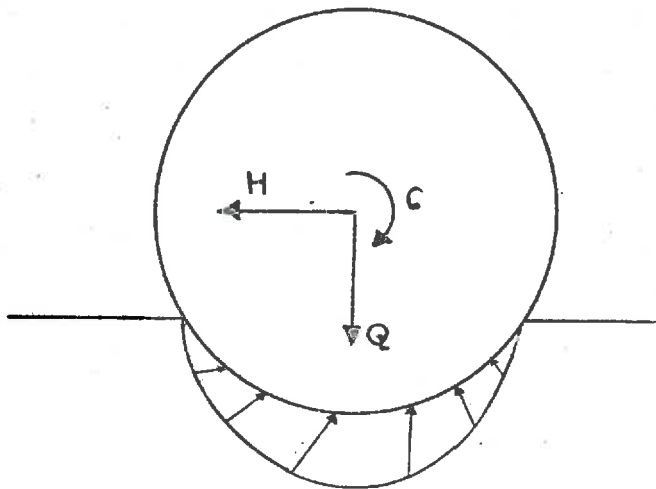
Ici nous nous sommes attachés au caractère quantitatif des phénomènes. Dans ce domaine, comme dans tous ceux où on veut interpréter de manière théorique un phénomène naturel, les principes et hypothèses de base ont une importance considérable, car les calculs qui en découlent peuvent être formellement exacts et donner des résultats physiquement inacceptables. Il importe donc au plus haut point de bien préciser ce que l'on cherche et en fonction de ceci les hypothèses que l'on a adoptées. Seuls ensuite les résultats de l'expérience pourront nous renseigner sur le bien-fondé de ces dernières.

## II - POSITION DU PROBLEME LIMITES DE L'ETUDE

---

L'étude du comportement d'une roue sur un sol présente différents aspects qui sont directement liés à l'évolution du système des contraintes s'exerçant sur la partie enterrée de celle-ci en fonction des conditions extérieures.

Considérons une roue de rayon  $R$ , reposant sur un sol de frottement interne  $\rho$ , de cohésion  $c$ , le frottement du massif est  $\delta$ . Appliquons au centre de la roue une force de composante verticale  $Q$  et horizontale  $H$ , et un couple  $C$ . En vertu du théorème du mouvement du Centre de Gravité, la roue sera au repos ou animée d'un mouvement uniforme si le sol développe sur la partie



enterrée de celle-ci un système de contraintes dont les éléments de réduction en  $O$  sont : -  $Q$ , -  $H$  et -  $C$ . Dans la pratique la force horizontale  $H$  s'introduit par le fait qu'une roue motrice n'est jamais isolée : ce sont les roues tractées de l'attelage qu'elle remorque qui lui donnent naissance et la font varier dans la suite du mouvement. Vu sous cet angle repos et mouvement uniforme ne présenteraient comme différence que celle existant entre les valeurs de la traction  $H$ , mais il se trouve que toutes les choses ne sont pas égales par ailleurs.

... / ...

En effet, à chaque étape de l'évolution du comportement de la roue, donc pour des valeurs différentes de  $H$  et de  $C$  ( $Q$  restant constant), correspondent des répartitions de contraintes sur la roue, déduites, de schémas différents, a priori inconnus. C'est la recherche de ces schémas et de ces répartitions de contraintes dans les cas importants de la pratique qui est le but de cette étude. Nous avons donc distingué les cas suivants :

- Cas I : Roue au repos. Couple et traction nuls

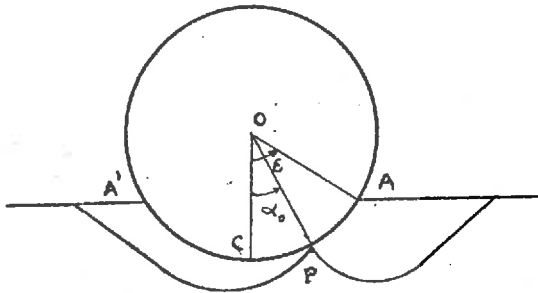
Le problème est alors de déterminer quelle sera la position d'équilibre statique de la roue. En terme de Mécanique des Sols, il faudra trouver le demi angle au centre  $\epsilon$ , d'enfoncement tel que l'arc circulaire, de longueur  $2 \epsilon R$  ait une capacité portante égale à  $Q$ .

- Cas II : Roue au repos mais à la limite du patinage  $C$  et  $H \neq 0$

Ce cas est très important car nous verrons qu'il donne les valeurs maxima du couple et de la force horizontale que peut créer le terrain. Le problème est encore statique mais les conditions extérieures ont varié par l'apparition d'un couple  $C$  et d'une traction  $H$ . Pour définir exactement ce que l'on peut chercher, examinons le nombre de paramètres qui s'introduisent dans ce problème. Nous verrons par la suite, et les photographies prises par M. DUPERRIN le montrent nettement, qu'il se forme, sous la roue, deux zones qui se rejoignent en un point  $P$  défini sur la roue par la valeur de l'angle  $\alpha_0$ , qui est

... / ...

un paramètre du problème, mais qui est défini à partir du moment où l'on s'impose la condition de limite de patinage. Nous avons donc 5 paramètres :  $\epsilon_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $Q$ ,  $H$  et  $C$ , reliés par les 3 équations de la statique et par une condi-

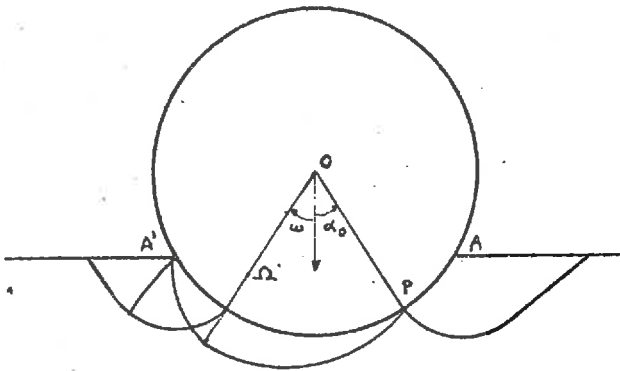


tion supplémentaire de limite de patinage. Par conséquent, nous ne pouvons nous en donner arbitrairement qu'un, les autres alors en dépendant. Dans la pratique on impose la charge maximum par essieu, c'est donc la traction  $H$  et le couple correspondant qui s'en déduisent.

Ici, pour des raisons de calcul, nous nous sommes donné  $\epsilon$ . Ce sont alors  $Q$ ,  $H$  et  $C$  que nous trouvons.

- Cas III : roue en mouvement  $C$  et  $H \neq 0$ .

---



Le problème se complique, alors il faut tenir compte de l'aspect cinématique du phénomène. En particulier, il s'introduit un nouveau paramètre  $w$ , lié à la position du C. I. R. (centre instantané de rotation), qui modifie le schéma de répartition de contraintes sous la

roue. Nous n'avons pas fait l'étude complète de ce cas qui poserait d'ailleurs dans sa généralité des difficultés de calculs et de principe assez considérables.

Les différents problèmes de cette étude ainsi définie, analysons maintenant les hypothèses que nous avons adoptées en vue de les résoudre. D'après ce qui précède, tout revient à trouver les schémas et répartitions de contraintes correspondant à chaque cas décrit précédemment.



II - HYPOTHESES DE CALCUL

HYPOTHESE 1 : Problème Plan

Tout d'abord nous avons traité un problème plan dans lequel la troisième dimension, comptée perpendiculairement à celui-ci, est supposée très grande par rapport aux deux premières. Cette hypothèse d'un milieu à deux dimensions est donc peu valable pour une roue dont la largeur est généralement inférieure au rayon. Elle ne peut raisonnablement se justifier que par les grands rouleaux ou les longs trains de pneus que l'on rencontre dans les problèmes de compactage. Faut de pouvoir faire une étude à trois dimensions, cela permet cependant dans tous les cas d'approcher les phénomènes et de dégager l'influence des divers paramètres rencontrés.

HYPOTHESE 2 : Plasticité parfaite sous la roue

Nous avons supposé que le sol situé sous la roue se trouvait en plasticité et obéissait au critère de Coulomb

$$t = C + n \operatorname{tg} \rho \quad (1)$$

Les grands déplacements relatifs que l'on observe sous une roue qui s'enfonce ou qui avance, justifient pleinement cette hypothèse plastique.

La relation (1) jointe aux équations générales de l'équilibre :

... / ...

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \delta \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

donne alors un système qui, compte tenu des conditions aux limites, permet de trouver, au moins théoriquement, les fonctions inconnues  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ .

Remarque 1 : Lorsque la roue avance, elle communique une certaine accélération aux particules du terrain. Accélération dont, en toute rigueur, il faudrait tenir compte dans les équations de l'équilibre. Dans les cas que nous avons considérés, elle est nulle, mais il faudrait l'introduire dans l'étude rigoureuse du mouvement de la roue.

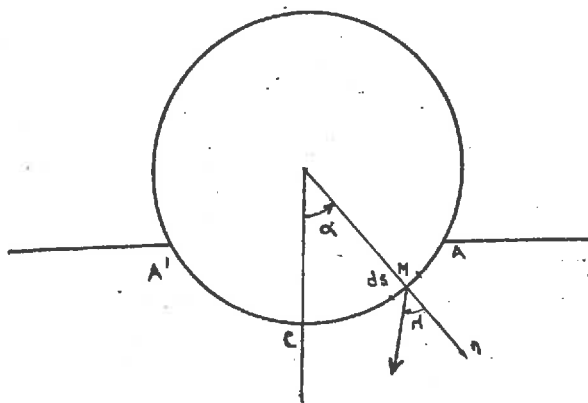
Remarque 2 : En réalité, il n'est pas évident que la zone située sous la roue soit en équilibre plastique. Les photos prises au cours d'expériences sur l'appareil à petits rouleaux de M. SCHNEEBELI, indiquent nettement l'existence d'un coin rigide à l'intérieur duquel les déplacements sont si faibles ou si rapides qu'on ne peut rien en conclure de façon catégorique quant à la nature de l'équilibre existant dans cette zone. A défaut donc d'un critère définissant explicitement, dans chaque cas, l'état atteint sous la roue, nous sommes obligés, dans l'état actuel de nos connaissances, d'admettre celui de Coulomb. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'il n'est pas impossible qu'il soit rigoureux.

... / ...

HYPOTHESE 3 : Conditions aux limites

La troisième hypothèse est la plus importante se rapportant aux conditions aux limites des différents cas proposés. Définissons par l'angle  $\alpha$  un point M quelconque

du contour circulaire A et A'. On sait, et nous y reviendrons par la suite, que le système



$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = c + n \operatorname{tg} \rho \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

permet de calculer au point M le tenseur contrainte correspondant, à condition de s'être fixé à l'avance :

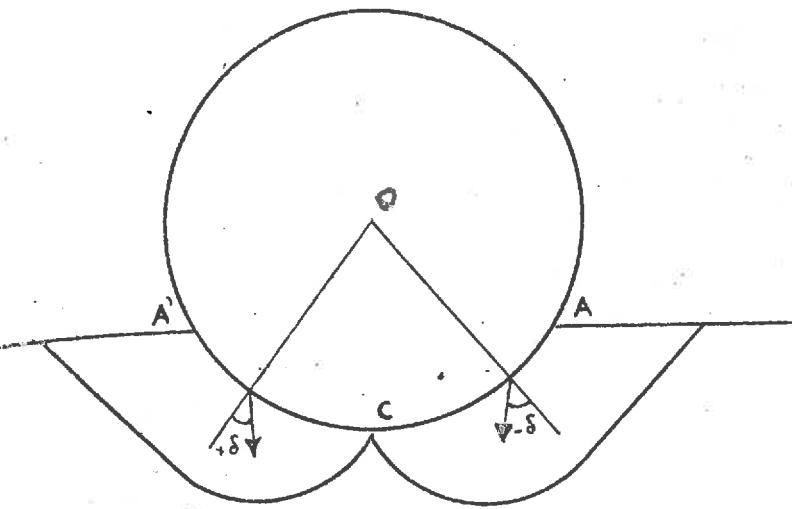
- Lequel des deux états, maximal ou minimal, de la plasticité existe sur le contour de la roue
- La loi de variation  $d = d(\alpha)$  de l'angle de la contrainte s'exerçant sur l'élément,  $ds$  avec la normale en ce point à celui-ci.

Or, cet état et cette loi sont à priori inconnus. Il faut donc se les imposer et ce de la manière qui semble la mieux coïncider avec la réalité des choses.

- Cas I - Couple et force de traction nuls

... / ...



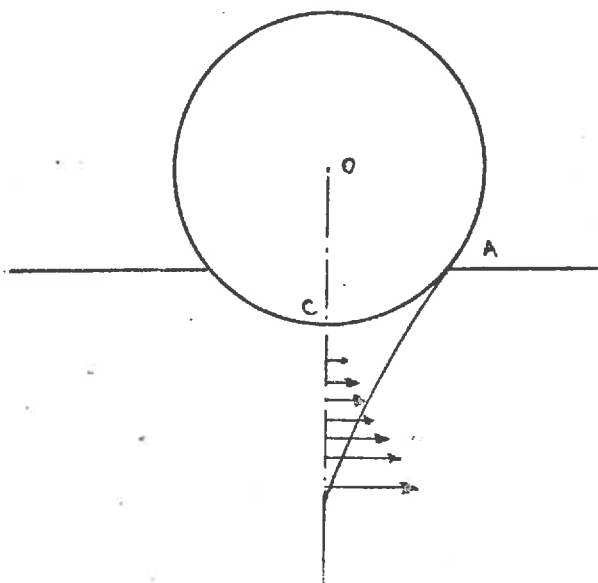


Le problème est alors symétrique par rapport à l'axe OC et il est physiquement évident que le sol, sous la roue, est en état de butée. D'autre part le mouvement relatif existant entre le sol et la roue au moment où elle arrive à sa position d'équilibre suppose que tous les points de celle-ci ont une orientation des contraintes, analogue à celle qui est indiquée sur le schéma ci-dessus.

Le plus simple alors est de supposer que leurs inclinaisons sur la normale est constante et égale au frottement  $\delta$  du terrain. On a donc  $d(\alpha) = \delta$

Remarque : Cette hypothèse est manifestement inexacte,

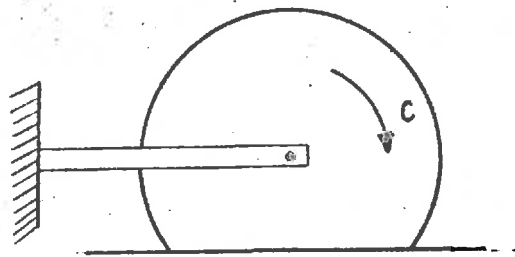
par raison de symétrie la contrainte en C sur le cercle doit être verticale. Dans ce cas d'ailleurs, il est possible de connaître exactement la loi de variation de l'angle des contraintes sur le contour de la roue. Il suffit pour cela de procéder de la même manière que M. STUTZ dans le problème du poinçon, en remarquant que sur l'axe de symétrie OC, on peut affirmer que  $d = 0$ .



... / ...

On en déduit alors l'exacte répartition des contraintes sur le contour AC et par conséquent la loi de variation  $d = d(\alpha)$ . A titre de comparaison avec le cas  $d = c^* = \delta$  et pour mesurer l'influence de cette loi sur les valeurs des contraintes, nous avons étudié le cas où  $d$  variait linéairement de  $\delta$  à 0 depuis A jusqu'à C, soit  $d(\alpha) = \frac{\alpha \delta}{\epsilon}$ .

- Cas II - Roue au repos à la limite du patinage



Pour montrer exactement dans quel cas nous nous plaçons, imaginons le montage suivant : une roue chargée d'un poids  $Q$  repose sur un massif horizontal ; son axe de rotation est relié par deux barres horizontales indéformables à un châssis fixe et rigide. Par des poids ou tout autre système, il est possible de créer

un couple variable au centre de la roue.

Au début de l'expérience le couple est nul, nous sommes dans le cas I et il s'est créé sous la roue deux zones symétriques en état de butée, le point P séparatif étant en C.

Appliquons maintenant un couple  $C$  et voyons comment vont évoluer les choses. Un fait est certain : à tout instant la partie enterrée de la roue reste en état de butée ; on sait en effet que le passage d'un état plastique à l'autre nécessite des déplacements relatifs très importants, déplacements qui n'apparaissent pas ici. Mais si l'état reste identique, il n'en est pas de même pour le système

... / ...

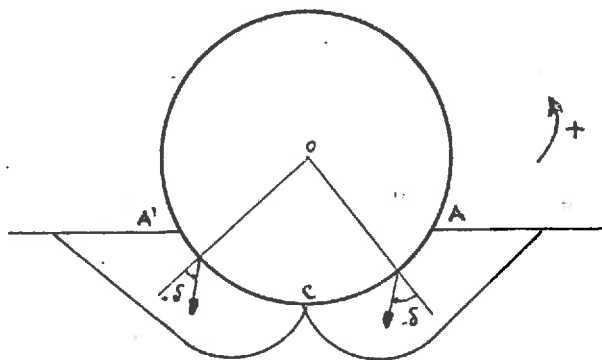
des contraintes agissant sur la roue. L'introduction du couple, détruisant la symétrie du problème a deux conséquences

- Le déplacement sur le contour du point P séparati des deux zones plastiques
- La variation en fonction de C de l'orientation de contraintes sur les normales à la roue

Le fait que le point P remonte sur la roue se voit très nettement sur les photos prises au cours d'expériences faites au Laboratoire. Les conditions de ces expériences étaient différentes de celles dans lesquelles nous nous sommes placés mais cela ne change surement pas le fait par lui même.

Rien, par contre, ne permet à priori d'affirmer que ce soit au sujet de l'orientation des contraintes. Il paraît vraisemblable cependant de penser que sa variation est liée au déplacement du point P. En d'autres termes : A un couple, correspond de façon unique, une position du point P et une certaine orientation de contraintes

Pour avoir une idée de cette dernière et de la façon dont elle évolue, partons du schéma correspondant au cas I



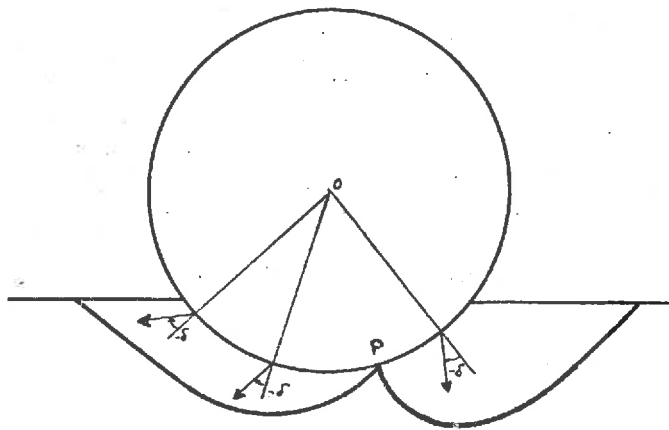
par hypothèses, les contraintes en tous les points de CA font l'angle  $-\delta$  et en tous les points de CA' l'angle  $+\delta$  avec les normales au contour. Introduisons un couple  $C$  en  $O$ , les zones I et II changent et se raccordent maintenant en un point  $P$  de l'arc  $CA'$ . On peut faire alors les suppositions suivantes :

... / ...

- Les contraintes s'exerçant sur le cercle aux différents points de la zone I ne changent pas d'orientation. En effet, le couple a pour tendance de faire tourner la roue dans le sens négatif, donc d'accuser, si possible, l'orientation négative des contraintes exercées sur le sol. Celle-ci était déjà auparavant égale à  $-\delta$ , il est donc vraisemblable de supposer qu'elle garde la même valeur.

- Par contre, cette tendance qu'a le couple de faire tourner la roue dans le sens négatif va redresser les contraintes s'exerçant sur celle-ci en tous les points de la zone II.

Et c'est ce redressement des contraintes, joint à la dissymétrie du schéma, qui crée une force horizontale  $H$  positive de traction résultante des composantes horizontales des contraintes sur la roue. Cette force  $H$  est annulée par la réaction du bâti dans notre montage ou par la réaction du terrain sur les roues tractées dans le cas d'un véhicule.



On peut alors supposer que lorsque le couple augmente, les contraintes de la zone II se redressent de plus en plus, donc tournent dans le sens négatif de façon à accroître ainsi leurs composantes horizontales et, par là même, leur résultante  $H$ .

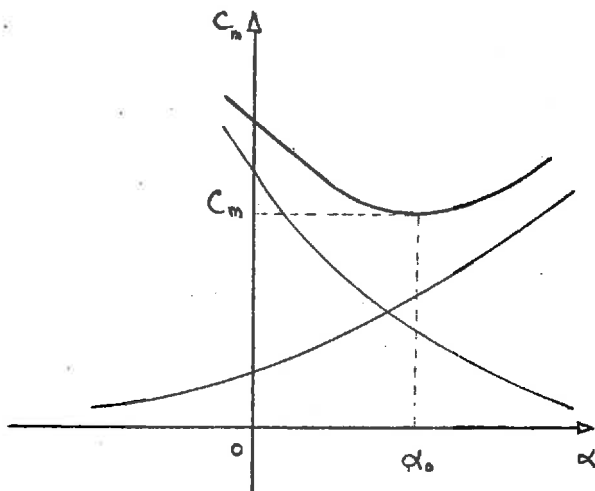
Ceci, jusqu'au moment où le couple aura une valeur  $C_m$  telle qu'elles seront toutes inclinées à l'angle  $-\delta$ . Ce couple  $C_m$  est alors le couple limite que peut supporter le terrain. Pour des valeurs supérieures de  $C$  la répartition des contraintes reste la même car celles-ci ont atteint l'orientation maximum compatible avec la valeur du frottement roue-terrain ; la roue patine alors sous l'influence du couple résultant  $C - C_m$ .

Nous poserons donc en hypothèse que c'est lorsque toutes les contraintes sont inclinées à  $-\delta$  que la roue est à la limite du patinage.

D'après ce qui précède, c'est ce cas qui fournit, pour une valeur donnée de  $Q$ , les valeurs maxima du couple  $e$  et de l'effort de traction que peut supporter, donc créer le terrain.

Une question se pose alors : quelle va être la position du point P correspondant à cette orientation constante  $-\delta$  des contraintes sur les normales à la roue ? Rien à priori ne nous l'indique, mais on peut suivre le raisonnement suivant :

A chaque position du point P, on peut faire correspondre la valeur du couple  $C_m$  créé par le système des contraintes s'exerçant sur la roue, celui-ci est en effet parfaitement défini car on connaît l'inclinaison de ses contraintes et les limites de ses deux zones. Il est donc possible de construire la courbe  $C_m = f(\alpha)$  donnant les valeurs de  $C_m$  en fonction de l'angle  $\alpha$  définissant le point P. Cette courbe a d'ailleurs l'allure ci-contre. Elle passe par un



minimum pour une valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  toujours comprise entre 0 et  $\epsilon$ . Il est alors logique de penser, en application de la loi du moindre effort qui veut que la nature fournisse toujours le travail résistant minimum, que le point P se place à l'endroit de la roue qui donne à cette fonction  $f(\alpha)$  sa valeur minimum.

... / ...

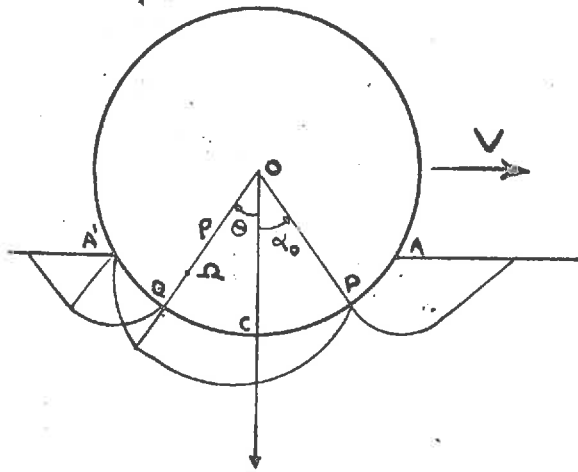
En définitive le schéma plastique correspondant à la limite de patinage repose, dans notre étude, sur les hypothèses suivantes :

- l'orientation des contraintes sur la roue est à  $-\delta$
- le point P séparatif des deux zones en butée donne dans ces conditions un couple C minimum en O.

Rappelons qu'avec ces hypothèses, la donnée de la charge sur la roue Q, ou de son enfoncement correspondant  $\xi$ , fournit alors les valeurs maxima  $H_m$  et  $C_m$  de la traction et du couple que peut supporter, donc créer le terrain. L'intérêt de ces valeurs est évident : pour tout effort de traction H inférieur à  $H_m$ , la roue motrice pourra démarrer, il faudra seulement que son moteur puisse lui appliquer le couple C suffisant correspondant. Par contre, la roue ne pourra pas exercer un effort de traction supérieur à  $H_m$  et ceci quel que soit le couple qu'on peut lui appliquer ; pour des couples supérieurs à  $C_m$ , la roue se mettra à patiner.

- Cas III : Roue en mouvement

-----



Nous n'en parlons ici qu'à titre indicatif et pour montrer la complexité du phénomène. Il s'introduit alors dans le schéma le point  $\Omega$ , centre instantané de rotation, que l'on peut définir par son angle polaire  $\theta$  et son rayon  $\rho$ . Les déplacements instantanés relatifs roue-terrain, permettent de supposer qu'à une certaine distance à gauche du point Q, le

... / ...

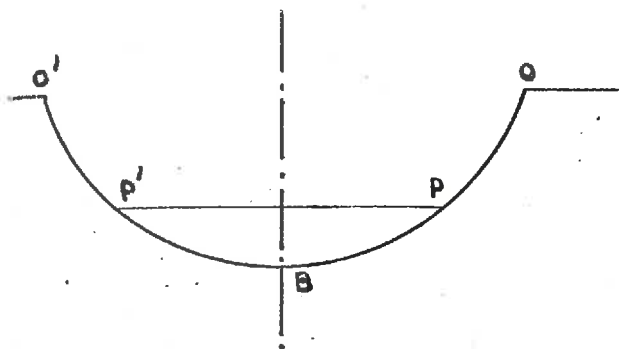


terrain est en état de poussée, à droite de Q, il reste évidemment en butée. A chaque loi d'orientation des contraintes sous la roue, correspond vraisemblablement un point  $\Omega$  et un point P, l'ensemble définissant alors le système des contraintes et par conséquent l'effort de traction H, créé par la roue et le couple C correspondant. Quelles sont les relations qui unissent le point  $\Omega$ , le point P et la répartition des contraintes qui agissent alors sur la roue ? Tout le problème est là. On ne les connaît pas à priori et il faudra se borner à poser les hypothèses qui paraîtront les plus vraisemblables. Ce ne sera d'ailleurs pas la moindre des difficultés à résoudre. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet, disons seulement que le cas intéressant à traiter, correspond à la limite du patinage en mouvement permanent : la roue exerce alors, à vitesse constante, l'effort de traction maximum ; on peut supposer que le point  $\Omega$  se trouve alors en C sur l'axe de la roue ( $\rho = R$ ,  $\theta = 0$ ) et que dans ce cas, toutes les contraintes sont inclinées à  $-\delta$ . Resterait dans ces conditions à définir la position sur le cercle du point P.

Ayant ainsi défini dans les cas qui nous intéressent les hypothèses que nous adoptons, voyons maintenant les principes des calculs auxquels elles donnent lieu.

III - PRINCIPES DE CALCULS

---

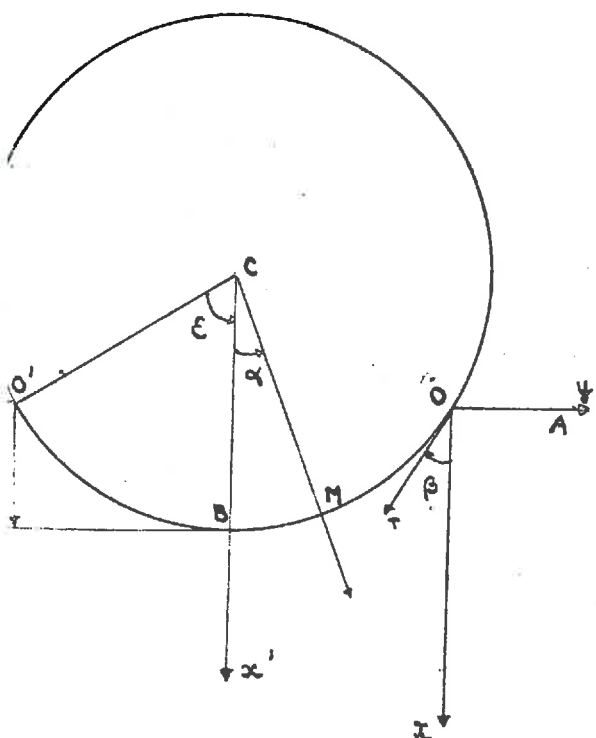


Rappelons que dans le cas I les contraintes sont inclinées à  $-\delta$  sur OB, et que la répartition sur O'B est symétrique. Dans le cas II, la répartition est la même que précédemment jusqu'au point P, et sur O'P elle est inclinée à  $-\delta$ , ce qui revient à l'incliner de  $+\delta$  sur la branche OP'. En définitive, il faut étu-

dier sur le contour OO' et dans ce sens, les deux schémas de contraintes en butée, dont l'un correspond à l'inclinaison  $+\delta$  et l'autre à l'inclinaison  $-\delta$ .

1 - Notations ; formules classiques

---



L'axe Ox est dirigé suivant la verticale descendante. L'axe Oy est porté par la surface libre OA du massif.

$\alpha$  = angle paramétrant un point M de OB =  $(Cx', CM)$

$\epsilon$  = demi-angle au centre d'enfoncement =  $(Cx', CO)$

$\beta = (Ox, O\tau) =$  angle de Ox avec la tangente en O à OB

$\alpha_0 =$  angle paramétrant le point P limite des 2 zones

$\varrho =$  profondeur d'enfoncement

... / ...

- $\sigma$  = densité du milieu
- $R$  = rayon de la roue
- $\rho$  = frottement interne du milieu
- $c$  = cohésion du milieu (nulle dans notre étude)

En un point  $M(x, y)$  du massif, l'état de contrainte est défini par les trois quantités  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ , contraintes normales et tangentielles sur les facettes parallèles aux axes  $Ox$  et  $Oy$  passant par ce point. La condition de plasticité de Coulomb  $\tau = c + n \rho \sigma$  impose une relation entre ces trois valeurs, ce qui permet de les exprimer en fonction des deux paramètres  $\sigma$  et  $\varphi$  :

$$\sigma = \text{contrainte moyenne } \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + H \quad \text{avec } H = c \cot \rho$$

$$\varphi = \text{angle de } Ox \text{ avec la direction de la contrainte principale majeure}$$

$$\sigma_1 \text{ et } \sigma_2 = \text{contraintes principales au point } M$$

On a en effet :

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) - H \\ \sigma_y = \sigma (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) - H \\ \tau_{xy} = \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \end{cases}$$

De même, sur une facette dont la normale fait l'angle  $\alpha$  avec l'axe  $Ox$ , les contraintes normales et tangentielles prennent les expressions :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma [1 + \sin \rho \cos 2(\varphi - \alpha)] - H \\ \sigma_t = \sigma [1 - \sin \rho \cos 2(\varphi - \alpha)] - H \\ \tau = \sigma \sin \rho \sin 2(\varphi - \alpha) \end{cases}$$

d'où les conditions aux limites :

... / ...

## 2 - Conditions aux limites

- Sur la surface horizontale du massif OA, on a par hypothèse :  $\sigma_n = \tau = 0$ , et on se trouve en poussée ; le système II donne alors :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{H}{1 - \sin \rho} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

- Sur le contour OB, on a l'état de butée

a - contraintes inclinées à  $-\delta$  sur les normales au contour

$$-\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau}{\sigma_n + H}$$

$$\text{donc } \varphi = \alpha - \frac{\delta + \Delta}{2} \quad \text{avec } \sin = \frac{\sin \delta}{\sin \rho}$$

b - contraintes inclinées à  $+\delta$  sur les normales au contour

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\tau}{\sigma_n + H}$$

$$\text{alors } \varphi = \alpha + \frac{\delta + \Delta}{2}$$

Au point O la fonction  $\varphi$  présente donc une discontinuité. Rappelons brièvement à ce sujet, la théorie de SOKOLOWSKY et le schéma à trois zones auquel elle donne lieu.

## 3 - Variables de SOKOLOWSKY - Schéma à trois zones

... / ...

Les équations de l'équilibre indéfini écrites en fonction de  $\sigma$  et  $\varphi$  donnent le système :

$$3.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \sin \rho \sin 2\varphi - 2\sigma \sin \rho \left[ \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \gamma \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sin \rho \sin 2\varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial y} [1 - \sin \rho \cos 2\varphi] + 2\sigma \sin \rho \left[ \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \gamma \end{array} \right.$$

Introduisons les variables de SCKOLOWSKY :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \chi + \varphi \\ \eta = \chi - \varphi \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{\cot \rho}{2} \log \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

Remarquons que l'emploi de ces variables impose que  $\sigma$  soit différent de zéro dans le domaine où on les utilise. Le système 3. 1. prend alors la forme :

$$3.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial y} = a = - \frac{\gamma \sin(\varphi + \mu)}{\cos \rho \cos(\varphi - \mu)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial y} = b = - \frac{\gamma \sin(\varphi - \mu)}{\cos \rho \cos(\varphi + \mu)} \end{array} \right.$$

C'est un système semi-linéaire, aux dérivées partielles, du type hyperbolique, dans lequel la première famille des bicaractéristiques est définie par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \\ d\xi = a dx \end{array} \right.$$

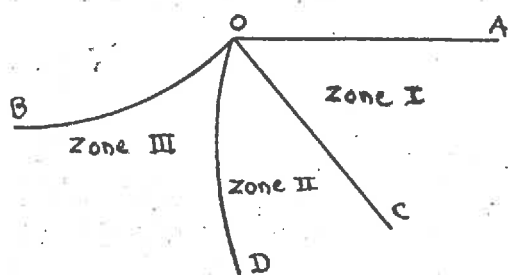
et la seconde famille par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \\ d\eta = b dx \end{array} \right.$$

... / ...

En mécanique des sols, les conditions aux limites introduisent presque toujours en un point, une discontinuité dans la variable  $\varphi$ , c'est ce qui se passe dans notre cas. Pour résoudre le problème SOKOLOWSKY on a bâti un schéma à trois zones en utilisant la méthode du Saut de Prandtl. Rappelons d'ailleurs, que cette solution n'est qu'une solution parmi toutes celles que l'on peut construire et qui sont statiquement possibles.

Schéma à trois zones  $\sigma \neq 0$  à l'origine



Dans ce schéma les zones I et III sont limitées, d'un côté par les frontières OA et OB du massif, et de l'autre par les bicaractéristiques de même famille OC et OD dont les pentes à l'origine correspondent aux valeurs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $\varphi$  en ce point O. Pour relier ces

deux zones, le Saut de Prandtl impose alors que dans la zone intermédiaire II toutes les bicaractéristiques de la même famille que OC et OD enveloppent le point O. Les équations du système 3. 2. montrent alors que dans cette zone II le point O peut être considéré comme une bicaractéristique dégénérée sur laquelle on peut appliquer la relation de KÖTTER :

$d\sigma + 2\sigma\varphi\rho d\varphi = 0$  (En réalité, c'est parce qu'on démontre que  $\eta$  (ou  $\xi$ ) reste constant au passage de la discontinuité en O, que l'on en conclut que ce point peut être considéré comme une bicaractéristique - C<sup>F</sup> Cours de M. KRAVTCHENKO - .

Ainsi construit ce schéma résoud le problème : dans la zone I on a un problème de CAUCHY du type I, dans notre cas d'ailleurs le massif est dans cette zone en état de RANKINE et on connaît directement  $\sigma$  et  $\varphi$  en tous les points de la bicaractéristique droite OC.

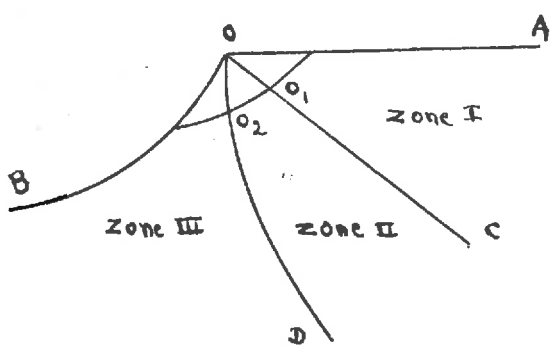
... / ...



Dans la zone II c'est un problème du type II, où les données sont les deux bicaractéristiques O et OC, et dans la zone III, c'est le problème du type III dans lequel on connait les valeurs de  $\sigma$  et de  $\varphi$  sur la bicaractéristique OD et la fonction  $\varphi$  sur la frontière OB. On trouve donc les valeurs de  $\sigma$  en tous les points de OB et par conséquent la répartition des contraintes sur ce contour. Mais ceci n'est valable que lorsque  $\sigma$  ne s'annule pas en O. Examinons ce cas.

4 - Cas où  $\sigma$  est nul à l'origine - Milieu pulvérulent non chargé sur OA

La théorie précédente est alors en défaut. Il n'est en effet plus possible de passer aux variables  $\xi$  et  $\eta$  et il faut utiliser le système d'équations aux dérivées partielles en  $\sigma$  et  $\varphi$  sous sa forme 3. 1. Il apparaît alors que le point O est un point singulier de ce système. En particulier il devient impossible de construire une solution dans laquelle toutes les bicaractéristiques d'une famille passent par ce point : en effet on ne peut plus dire qu'au travers de la discontinuité  $\eta$  (ou  $\xi$ ) reste constant et imposer ainsi aux bicaractéristiques d'envelopper le point O. Pour résoudre le problème, nous avons alors utilisé une méthode qui n'est fondée sur aucune démonstration rigoureuse mais qui donne cependant des résultats physiquement corrects. Elle consiste à isoler, en quelque sorte le point O en l'entourant par une courbe considérée comme une bicaractéristique. Ceci fait, le schéma diffère alors ensuite très peu de celui que l'on a décrit précédemment :



... /.

La zone I. OMC reste inchangée : à l'intérieur le massif est en équilibre de RANKINE. Prenons sur la bicaractéristique droite OC un point  $O_1$  arbitraire mais très proche de O, en ce point tout est connu et on a :

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \frac{\delta x}{1 - \sin \rho}$$

A partir de ce point traçons la spirale logarithmique d'équation polaire  $\rho = \rho_0 e^{tg \rho (\theta - \theta_0)}$  ; dans un milieu sans pesanteur on sait que cette spirale est une bicaractéristique. Si donc on s'est placé suffisamment près du point O, la courbe de glissement réel passant par le point  $O_1$  est sûrement très peu différente de cette spirale. On applique alors sur celle-ci la relation de KÖTTER écrite en milieu non pesant  $\sigma = \sigma_0 e^{-2tg \rho (\varphi - \varphi_1)}$  et on suppose en outre que  $\varphi$  varie linéairement avec l'angle polaire  $\theta$  depuis sa valeur  $\varphi_1$  en  $O_1$  jusqu'au point  $O_2$  qui correspond à la valeur  $\varphi_2$ . En tous les points de  $O_1O_2$  on a donc les valeurs de  $\sigma$  et de  $\varphi$ , ce qui permet de construire la solution dans la zone II limitée par  $O_1C$  et  $O_1O_2$ , donc de trouver la bicaractéristique  $O_2D$  et par conséquent la répartition de contrainte sur le contour OB.

5 - Conditions de validité de ce schéma

Ce sont les mêmes que pour le Saut de Prandtl. Il suffit que la bicaractéristique OD soit à gauche de OC donc que  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Or,  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  et

$\varphi_2 = \varepsilon + \frac{\delta + \Delta}{2}$	contraintes inclinées à $+\delta$ sur OB
$\varphi_2 = \varepsilon - \frac{\delta + \Delta}{2}$	contraintes inclinées à $-\delta$ sur OB

... / ...

On doit donc avoir :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon < \frac{\pi}{2} + \frac{\delta + \Delta}{2} \\ \text{et} \\ \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \frac{\delta + \Delta}{2} \end{array} \right.$$

Sinon il faudrait utiliser un schéma à deux zones avec ligne de discontinuité. Dans cette étude nous nous sommes toujours placés dans le cas où  $\varepsilon$  était inférieur à  $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta + \Delta}{2}$  ce qui correspond à des enfoncements maximum de l'ordre de 120. Une étude plus complète devra cependant envisager ce cas et introduire en conséquence la possibilité d'une ligne de discontinuité.

#### IV - CONDUITE DES CALCULS

---

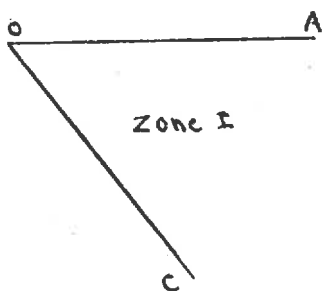
L'intégration du système différentiel a été réalisée par la méthode des différences finies, appliquée au réseau des bicaractéristiques. Le principe de la méthode est connu, nous donnons ici les formules qui permettent de calculer dans chaque zone les coordonnées d'un point de celle-ci et les valeurs de  $\sigma$  et de  $\varphi$  correspondantes. Le calcul lui-même a été réalisé sur la machine BULL-GAMMA -E-T.

Nous avons tout d'abord rendu le calcul adimensionnel en posant :

$$x = \frac{x}{R} \quad y = \frac{y}{R} \quad \sigma = \frac{\sigma}{\gamma R} \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{Q}{\gamma R^2} \quad H = \frac{H}{\gamma R^2} \quad C = \frac{C}{\gamma R^3}$$

##### 1 - Zone I - OAC

---



A l'intérieur règne l'équilibre de RANKINE. Les caractéristiques sont droites et on a sur OC :

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{x}{\tan \mu} \\ \sigma = \frac{x}{1 - \sin \mu} \\ \varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

##### 2 - Zone II - CO<sub>1</sub>O<sub>2</sub>D

---

##### a - Calcul de points sur O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>

---

... / ...

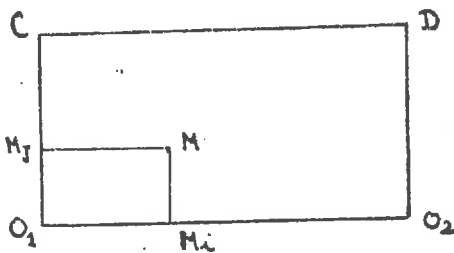
D'après ce qui est dit au chapitre III, paragraphe 4, le calcul de ces points se fait par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r_1 e^{tg(\varphi - \mu)} \cos(\varphi - \mu) \\ y = r_1 e^{tgP(\varphi - \mu)} \sin(\varphi - \mu) \\ \sigma = \sigma_1 e^{-2tgP(\varphi - \mu)} \\ \varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{n_2} k \quad \text{avec } 0 \leq k \leq n_2 \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{y_0}{\sin(\varphi_1 + \mu)} \\ \sigma_1 = \frac{y_0}{tg(\varphi_1 + \mu)(1 - \sin P)} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_2 = \varepsilon \mp \frac{\delta + \Delta}{2} \end{array} \right.$$

b - Points dans la zone II

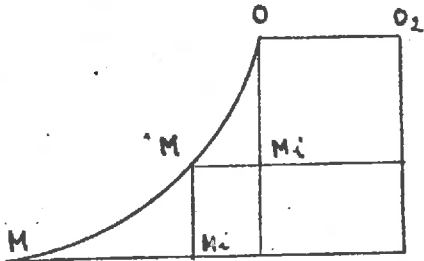


On obtient un point M par l'intersection des deux bicaractéristiques de familles différentes, issues de points précédents  $M_i$  et  $M_j$ .  $x, y, \sigma$  et  $\varphi$  en M sont alors donnés par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} y - y_i = tg(\varphi_i - \mu)(x - x_i) \\ y - y_j = tg(\varphi_j + \mu)(x - x_j) \\ \sigma - \sigma_i - 2\sigma_i tgP(\varphi - \varphi_i) = \frac{\sin(\varphi_i + \mu)}{\cos P \cos(\varphi_i - \mu)} (x - x_i) \\ \sigma - \sigma_j + 2\sigma_j tgP(\varphi - \varphi_j) = \frac{\sin(\varphi_j - \mu)}{\cos P \cos(\varphi_j + \mu)} (x - x_j) \\ \dots / \dots \end{array} \right.$$

En fin de calcul, dans cette zone, on connaît la bicaractéristique  $O_2D$  et les valeurs de  $\sigma$  et de  $\varphi$  en ses points.

3 - Zone III -  $O_2DB$



Les points sur le contour OB s'obtiennent par intersection de celui-ci avec la bicaractéristique de la première famille passant par le point précédent d'où les formules :

$$\begin{aligned}
 y_m &= \sin \alpha_m - \cos \beta & \left. \begin{array}{l} \text{équations paramétriques} \\ \text{du cercle OB} \end{array} \right\} \\
 x_m &= \cos \alpha_m + \sin \beta \\
 y_m - y_{mi} &= (x_m - x_{mi}) \operatorname{tg}(\varphi_{mi} + \mu) \\
 \varphi_m &= \varphi_2 + \alpha_m - \epsilon \\
 \sigma_m &= \sigma_{mi} - 2\sigma_{mi} \operatorname{tg} \rho (\varphi_m - \varphi_{mi}) - \frac{\sin(\varphi_{mi} - \mu)}{\cos \rho \cos(\varphi_{mi} + \mu)} (x_m - x_{mi})
 \end{aligned}$$

Remarquons que l'intersection de la bicaractéristique et du cercle donne deux points, donc deux valeurs de  $\alpha$  : par des conditions fixées à l'avance, la machine élimine systématiquement celui qui ne convient pas. En un certain nombre de points  $M_0, M_1, \dots, M_n$  du contour, fonction du pas  $\rho$  choisi, on a donc le couple de valeurs  $\sigma$  et  $\varphi$ . On connaît donc en chacun de ces points la valeur de la contrainte  $f$  s'exerçant sur le contour.

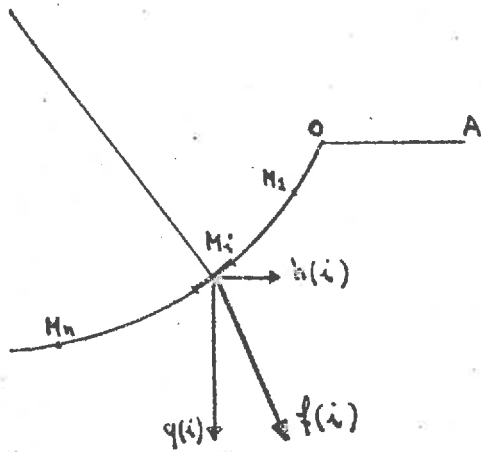
4 - Calcul de la résultante horizontale  $H_n$ , verticale

$Q_n$  et du couple  $C_n$  s'exerçant sur la branche  $OM_n$

du contour

... / ...





En un point  $M_i$  les composantes verticales  $q(i)$ , horizontale  $h(i)$  et tangentielle  $\tau(i)$  de la contrainte  $f(i)$  s'exerçant sur l'élément entourant ce point sont :

$$q(i) = \sigma_i [\cos \alpha_i + \sin \rho \cos(2(\varphi_i - \alpha_i) + \alpha_i)]$$

$$h(i) = \sigma_i [\sin \alpha_i + \sin \rho \sin(2(\varphi_i - \alpha_i) + \alpha_i)]$$

$$\tau(i) = \sigma_i \sin \rho \sin 2(\varphi_i - \alpha_i)$$

Par sommation jusqu'au point  $M_n$  ( $\alpha_n$ ), on a alors :

$$Q_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \frac{q(i) + q(i+1)}{2}$$

$$H_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \frac{h(i) + h(i+1)}{2}$$

$$C_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}$$

$$h(0) = q(0) = \tau(0) = 0 \quad \alpha_0 = \epsilon$$

Ces sommations cumulées ont été effectuées par la machine. Pour chaque élément d'arc  $OM_n$  du contour, on a donc directement les valeurs de  $Q_n$ ,  $H_n$  et  $C_n$  correspondantes.

... / ...

Remarque

Initialement, nous avons essayé de calculer les valeurs de la fonction  $\sigma$  sur le contour par la méthode dite d'approximation non linéaire de MM. KRAVTCHENKO-SIBILLE. Cette méthode consiste à calculer les dérivées successives de  $\sigma$  à l'origine, dans la direction de la tangente au contour en ce point. Par un développement en série de TAYLOR, on obtient alors les valeurs de la fonction  $\sigma$  sur le contour lui-même. Cette méthode possède l'immense avantage de conduire à des calculs relativement rapides que l'on effectue à la main. Malheureusement, cette méthode ne convient pas dans le cas où  $\sigma$  est nul à l'origine car nous avons vu que l'on se trouvait alors en présence d'une singularité : les valeurs des dérivées que l'on trouve à partir du système d'équations aux dérivées partielles pour  $x = y = \sigma = 0$  donnent d'ailleurs un développement en série de TAYLOR pour la fonction  $\sigma$  qui conduit à des résultats physiquement inacceptables.

L'étude théorique rigoureuse du cas où  $\sigma$  est nul à l'origine est actuellement entreprise sous la direction de M. le Professeur KRAVTCHENKO. Il s'ensuivra une extension de la précédente méthode dans ce cas particulier pour laquelle elle est actuellement en défaut.

V - APPLICATION AU CAS OU LE FROTTEMENT  
INTERNE DU MILIEU EST DE  $26^\circ$

---

Les calculs qui suivent se rapportent à un milieu pulvérulent au frottement interne  $\rho = 26^\circ$ . Pour mesurer l'influence de l'angle  $\delta$  du frottement roue-terrain, nous avons envisagé les deux cas où  $\delta$  est égal à  $\frac{\rho}{2} = 13^\circ$  et où  $\delta$  est égal à  $\frac{2}{3}\rho = 17^\circ 33'$ . Pour chacun de ces cas, nous avons pris un certain nombre de valeurs de l'enfoncement et nous avons calculé les valeurs correspondantes des charges, couple et effort de traction appliqués à la roue

1°) - Détermination pratique des valeurs  $Q_H$  et  $C_m$   
pour un enfoncement donné  $\epsilon$  de la roue.  
Application du cas où  $\epsilon = 50^\circ$ . Réseau des ligne  
de glissement

- Cas I : roue au repos  $c$  et  $H = 0$

---

On construit point par point d'après les résultats fournis par la machine, la courbe  $Q_1 = Q_1(\alpha)$  qui donne à point M d'angle  $\alpha$ , la composante verticale de la résultante des efforts (inclinés à  $-\delta$  sur les normales) s'exerçant sur l'arc OM. La valeur de la charge appliquée à la roue (ou à la force portante correspondante) est le double de l'ordonnée du point d'intersection de cette courbe avec l'axe  $\alpha = 0$ .

- Cas II : roue à la limite du patinage

---

Il faut tout d'abord déterminer le point P, lisi  
des deux zones en plasticité.

... /..

Pour cela on trace la courbe  $C = f(\alpha)$  définie au chapitre III : on sait que le point P correspond au minimum de cette courbe. On construit celle-ci point par point en partant des fonctions  $C_1 = C_1(\alpha)$  et  $C_2 = C_2(\alpha)$  :

-  $C_1 = C_1(\alpha)$  est la fonction qui donne au point  $M(\alpha)$  le couple résultant des efforts inclinés à  $-\delta$  s'exerçant sur l'arc OM.

-  $C_2 = C_2(\alpha)$  est la fonction qui donne au point  $M(\alpha)$  le couple résultant des efforts inclinés à  $-\delta$  s'exerçant sur l'arc O'M.

Ces courbes se construisent point par point à partir des résultats fournis par la machine.

Par sommation des ordonnées de ces deux courbes, on a alors la fonction  $C = f(\alpha)$  d'où les valeurs du couple cherché  $C_m$  et de l'angle au centre  $\alpha_0$  définissant le point P.

A partir des courbes  $Q_1(\alpha)$ ,  $H_1(\alpha)$ ,  $Q_2(\alpha)$  et  $H_2(\alpha)$  donnant les composantes verticales et horizontales des résultantes des efforts qui s'exercent sur les arcs OM et O'M, on trouve ensuite les valeurs  $Q$  et  $H_m$  de la charge et de l'effort de traction appliqués à la rose. On a en effet :

$$Q = Q_1(\alpha_0) + Q_2(\alpha_0)$$

et

$$H_m = H_1(\alpha_0) + H_2(\alpha_0)$$

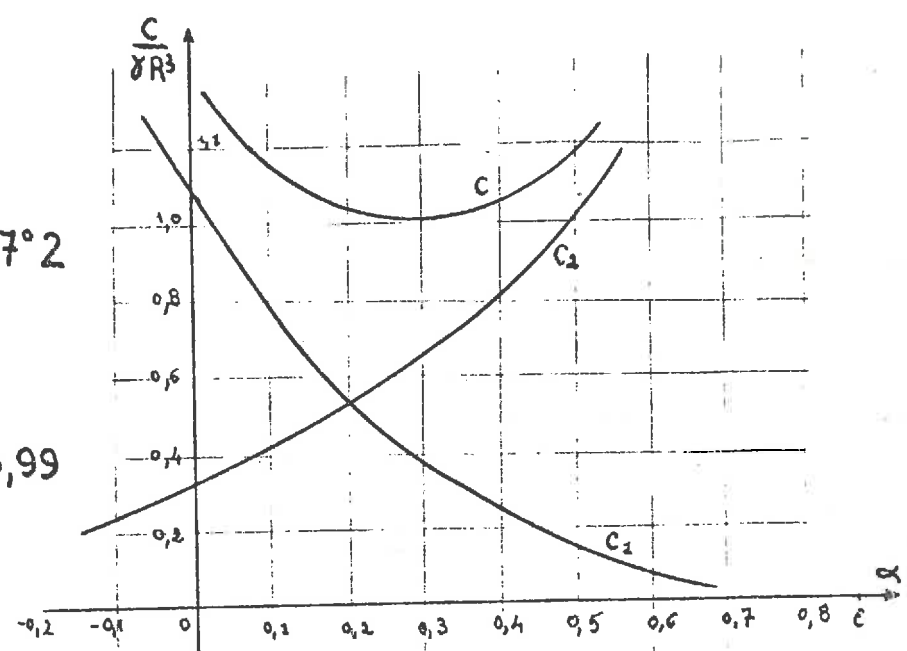
Remarque :  $Q$ ,  $H_m$  et  $C_m$  sont des nombres adimensionnels. Pour passer aux valeurs naturelles, il faut multiplier  $Q$  et  $H_m$  par  $\delta R^2$  et  $C_m$  par  $\delta R^3$ .

... / ...

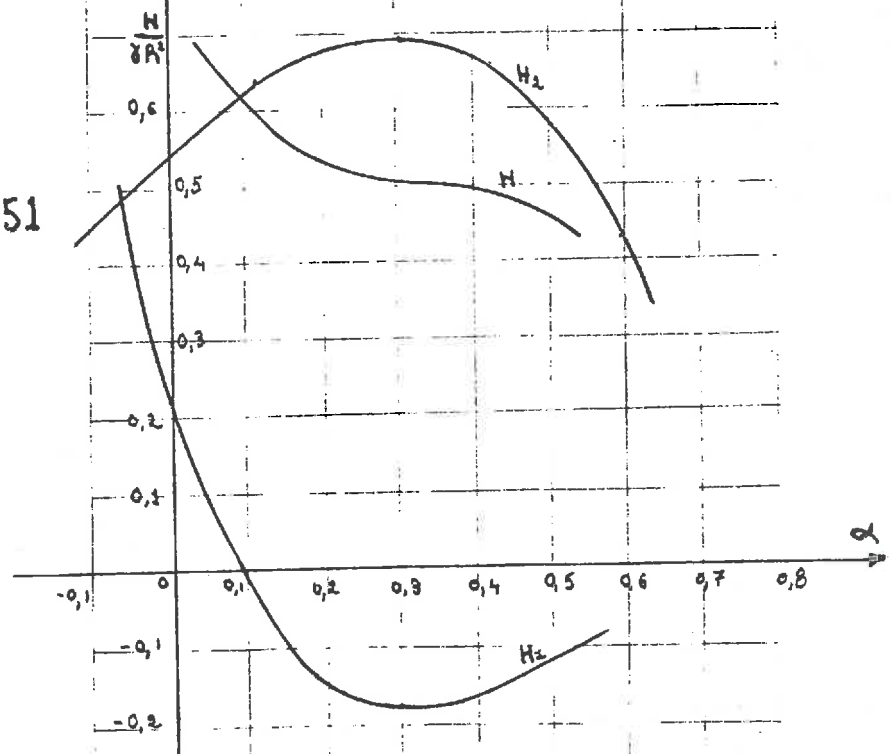
$\epsilon = 50^\circ \quad \rho = 26^\circ \quad \delta = 17^\circ 33'$

$\alpha_0 = 17^\circ 2'$

$\frac{C_m}{\delta R^3} = 0,99$

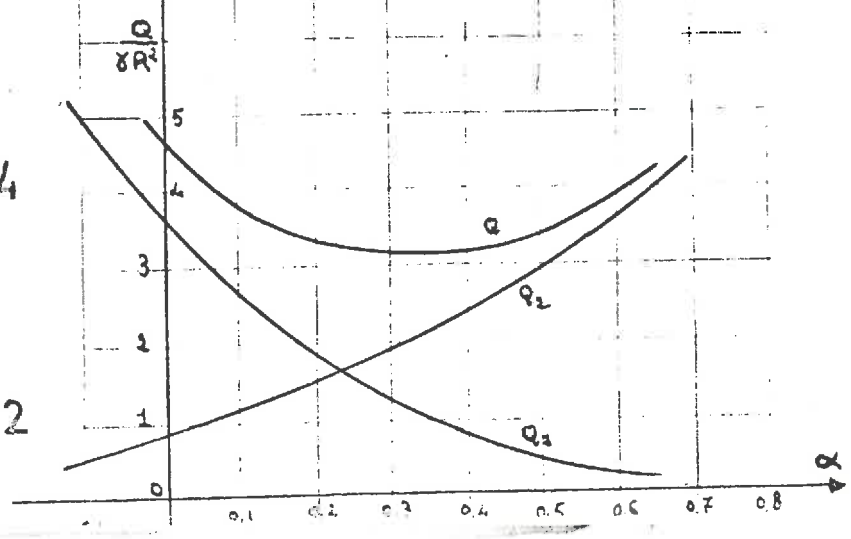


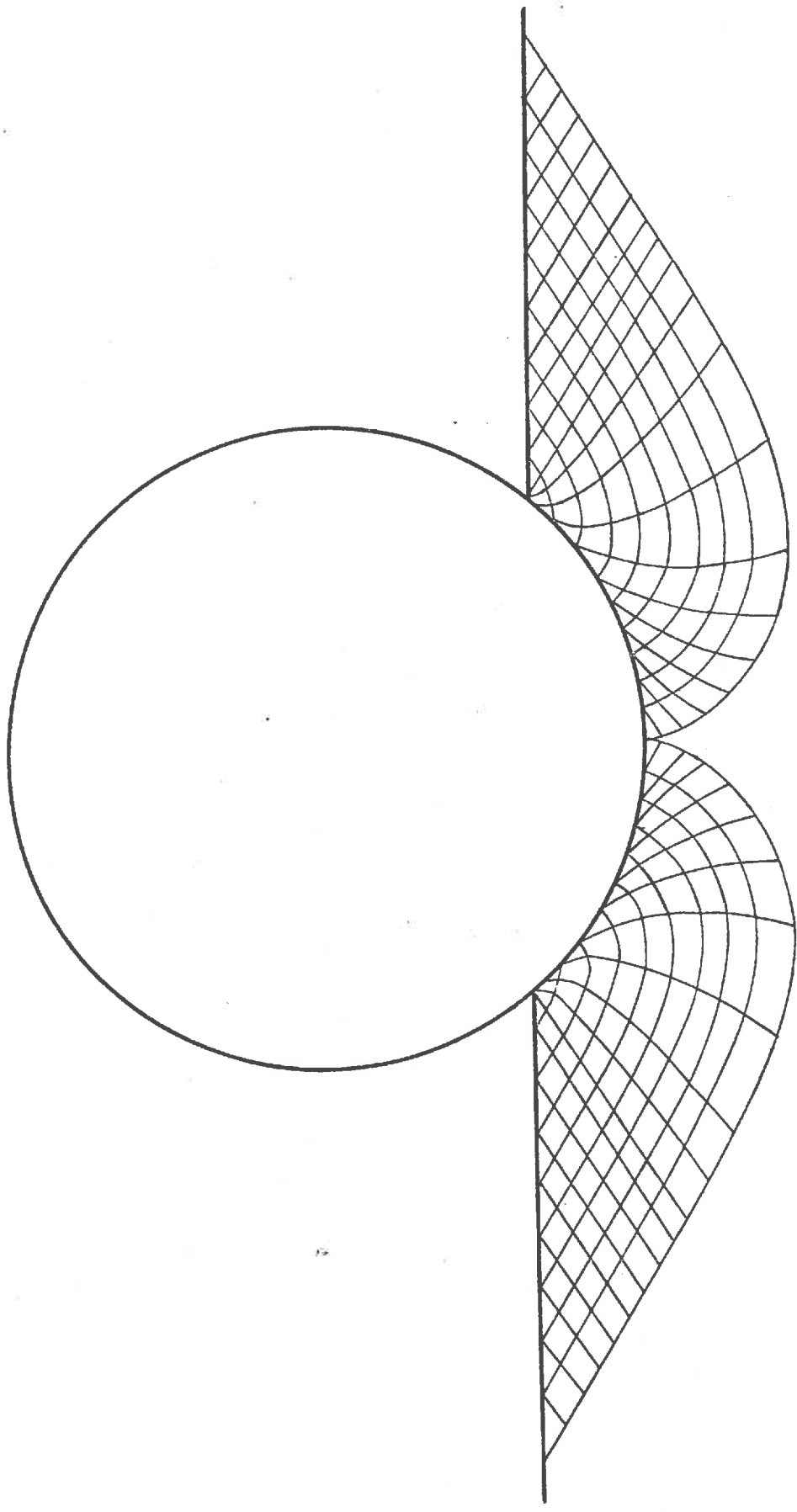
$\frac{H_m}{\delta R^2} = 0,51$



cas I:  $\frac{Q}{\delta R^2} = 6,94$

cas II:  $\frac{Q}{\delta R^2} = 3,12$



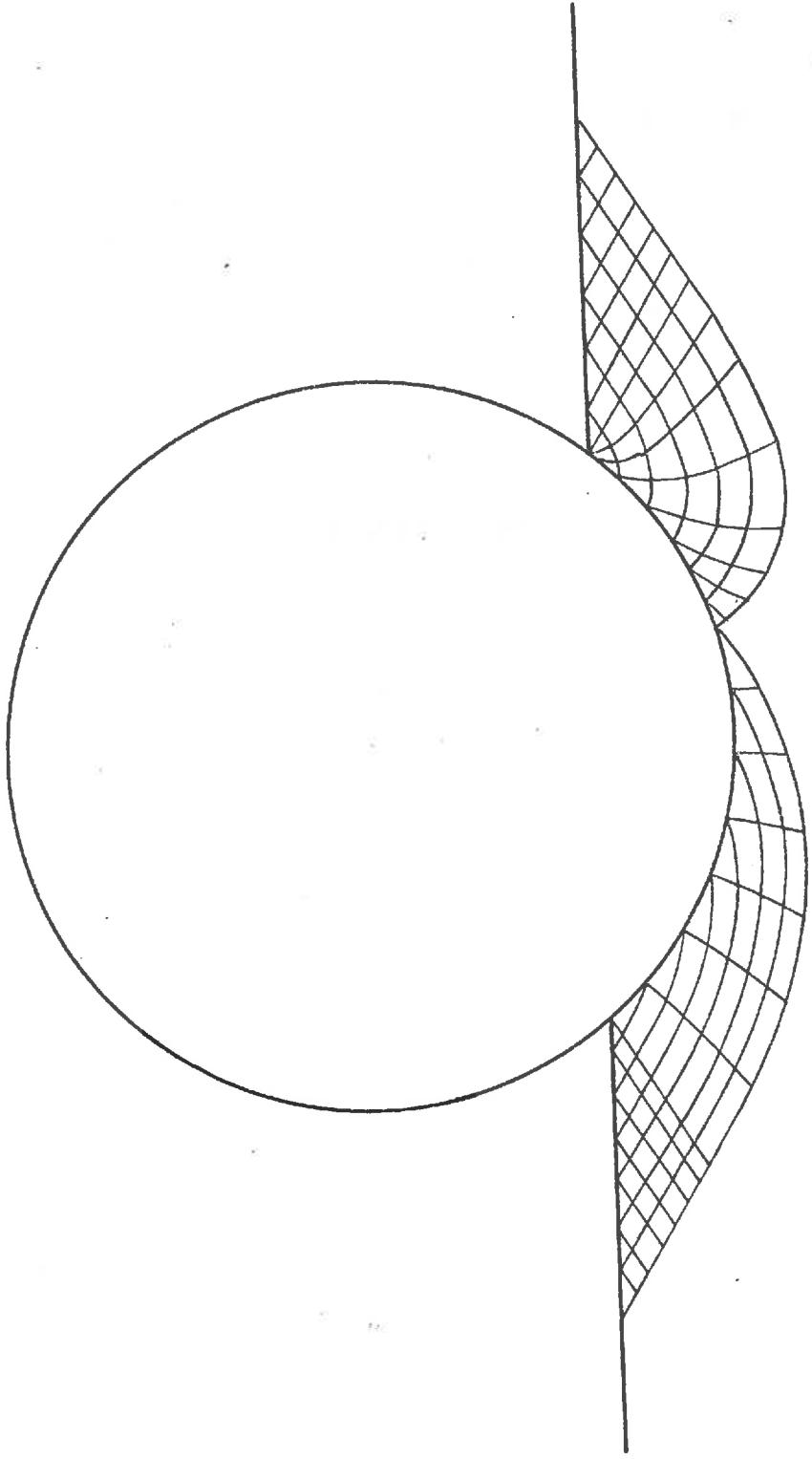


CASI

lignes de glissement



$\varepsilon = 50^\circ$   $\rho = 26^\circ$   $\delta = 17'35''$



CAS II

lignes de glissement

A titre d'exemple, nous donnons ci-dessus les graphiques qui ont servi à déterminer  $Q$ ,  $H_m$  et  $C_m$  dans le cas où  $\epsilon = 50^\circ$  et  $\delta = 17^\circ 33'$ . Dans ce cas aussi et pour avoir une idée de l'importance de zones mises en plasticité, nous avons tracé dans les Cas I et II le réseau des lignes de glissement du terrain sous la roue.

2°) - Résultats

- Cas I : roue au repos sans application de couple

Les résultats dans les deux cas où  $\delta = 13^\circ$  et  $\delta = 17^\circ 33'$ , sont condensés dans le tableau suivant :

TABLEAU I

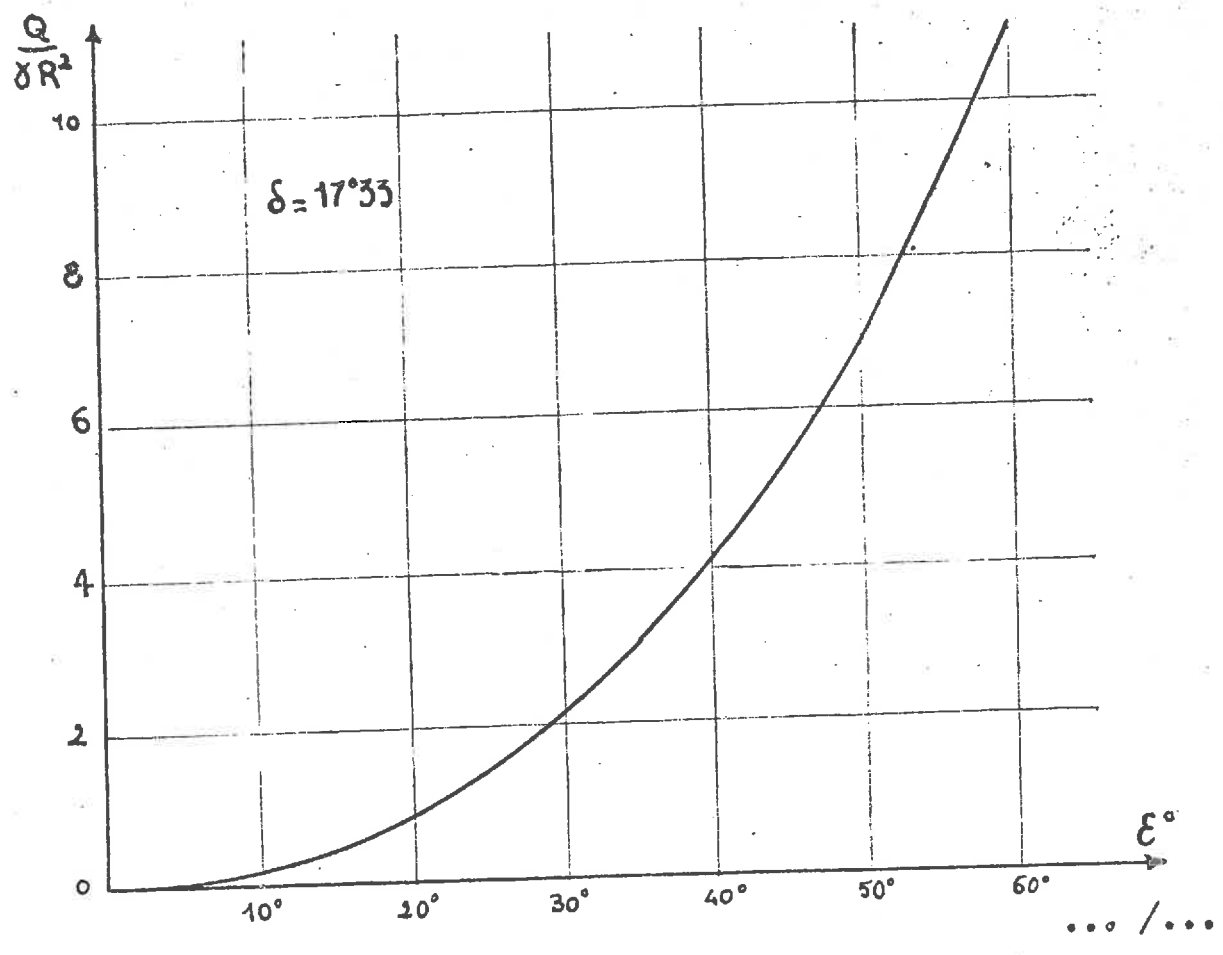
$\epsilon$ en degrés	10	20	30	40	50	55	60
$\delta = 17^\circ 33'$							
$\frac{Q}{\delta R^2}$	0,18	0,86	2,18	4,30	6,94	8,88	11,03
$\delta = 13^\circ$							
$\frac{Q}{\delta R^2}$	0,16	0,77	2,00	3,95	6,34	8,06	9,94

... / ...

a - Influence du frottement roue-terrain

On voit que l'angle de frottement roue-terrain n'a pas une très grande influence sur la force portante : à enfoncement égal, une différence de  $4^{\circ}33$  dans la valeur de  $\delta$ , entraîne une diminution d'environ 9 % de la force portante. Nous verrons par la suite que cette différence se fait beaucoup plus ressentir sur les valeurs des couples et efforts de traction limites  $C_m$  et  $H_m$ .

b - Variation de l'angle d'enfoncement  $2\varepsilon$  avec la charge Q



Graphique n°1

On peut approximativement relier Q à ε dans le cas  
ε = 17°33, par la formule :

$$Q = \gamma R^2 b \epsilon^2 (1,65 + 0,025 \epsilon) \quad (b = \text{largeur de la roue})$$

Dans cette formule, Q s'exprime en kilogs, R et b en  
mètres, γ en tonnes par m<sup>3</sup> et ε en degré.

Application :

Calculons la charge qui, appliquée à une roue de 0,40m  
de rayon et de 0,20m de large, lui impose un enfoncement au cen-  
tre de 70°

Prenons γ = 2,2 T/m<sup>3</sup> on a :

$$Q = 2,2 \times 0,4^2 \times 0,2 \times 35^2 (1,65 + 0,025 \times 35) \text{ soit}$$

$Q = 217 \text{ Kgs}$

Pour δ = 13° on a une valeur de 9 % inférieure, soit  
environ :

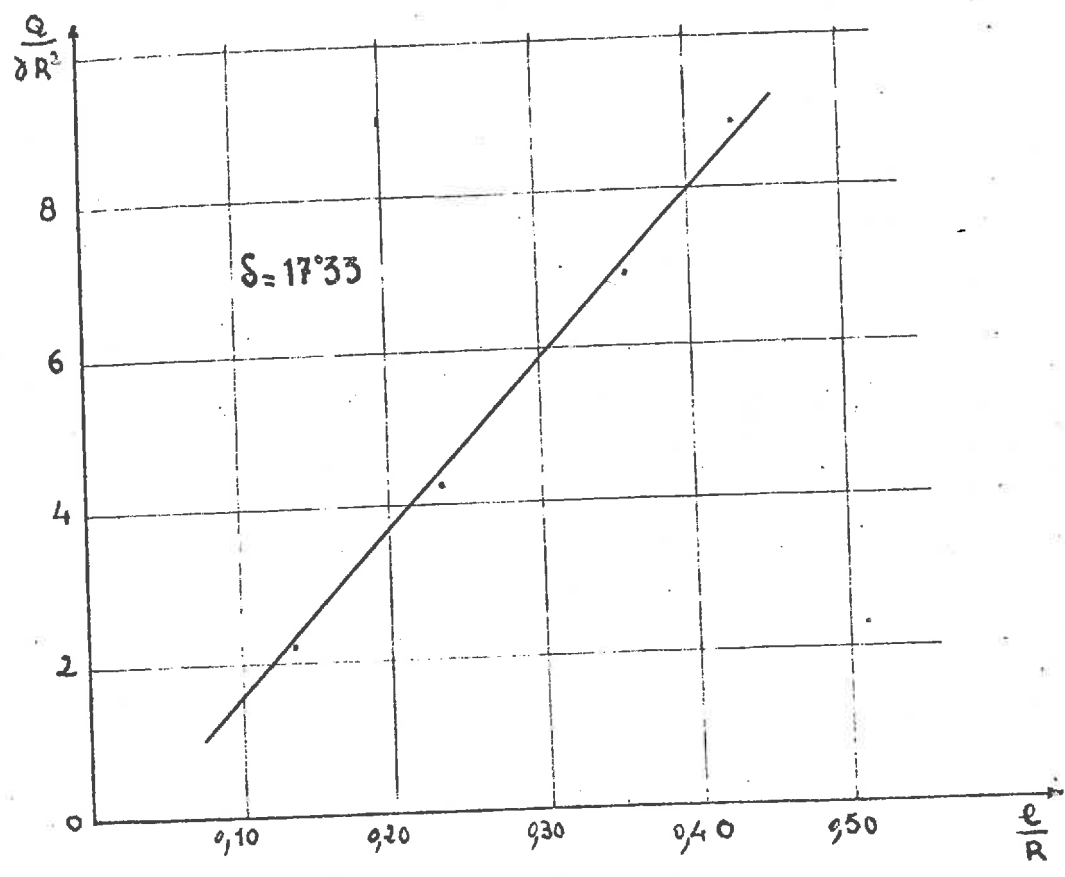
$Q = 195 \text{ Kgs}$

c - Variation de la profondeur d'enfoncement e avec la charge Q

La formule précédente n'est pas très pratique car elle  
ne permet pas, connaissant Q, d'en déduire facilement ε .

... / ...

Par contre, le graphique suivant montre que l'enfoncement relatif  $\frac{e}{R} = 1 - \cos \epsilon$  varie presque linéairement avec la charge  $Q$  et ceci dans un domaine assez étendu.



Graphique n°2

Pour des enfoncements  $e$  tels que  $0,05R \leq e \leq 0,4$  on a sensiblement pour  $\delta = 17^\circ 33$  :

$$\frac{e}{R} = 0,046 \frac{Q}{\delta R^2 b} + 0,032$$

Application : Chechons quel sera l'enfoncement d'une roue 0,40m de rayon, de 0,20m de large, chargée d'un poids de 217 K en milieu de densité  $2,2T/m^3$   $\rho = 26^\circ$   $\delta = 17^\circ 33$

... /..

On a :

$$\frac{\varepsilon}{R} = 0,046 \frac{0,217}{2,2 \times 0,4^2 \times 0,2} + 0,032$$

Soit :  $\frac{\varepsilon}{R} = 0,176$

Cela correspond à un angle d'enfoncement total de  $71^\circ$   
On voit donc que dans ses limites, la formule est assez précise.

Remarque : Ainsi que nous l'avions dit dans le chapitre II, hypothèse III relative aux conditions aux limites, nous avons étudié un cas dans lequel on s'impose une variation linéaire de l'orientation des contraintes sur le demi arc OB. Pour  $\varepsilon = 50^\circ$  et  $\delta$  variant de  $-17^\circ 33$  à 0, depuis O jusqu'à B, on a trouvé  $\frac{Q}{\varepsilon R^2} = 5,96$ .

Pour le même enfoncement mais avec  $\delta = \delta^b = -17^\circ 33$  on a  $\frac{Q}{\varepsilon R^2} = 6,93$ . On voit donc que ces deux hypothèses entraînent des résultats assez différents.

Compte tenu des erreurs inhérentes à la méthode même d'approximation linéaire qui sert à intégrer le système des équations aux dérivées partielles, on peut dire que le tableau I donne les valeurs des forces portantes avec une erreur maximum de 20 % par excès.

- Cas II : roue à la limite du patinage

... / ...



On a obtenu les résultats suivants :

$$\delta = 17^{\circ}33$$

$\varepsilon$ degrés	20°	30°	40°	50°	55°
$\alpha_0$ degrés	9°2	12°5	16°	17°2	20°6
$Q/\gamma R^2$	0,342	0,95	1,89	3,12	3,96
$H_m/\gamma R^2$	0,08	0,215	0,355	0,51	0,59
$C_m/\gamma R^3$	0,105	0,295	0,595	0,99	1,26

TABLEAU II

$$\delta = 13^{\circ}$$

$\varepsilon$ degrés	20°	30°	40°	50°	55°	60°
$\alpha_0$ degrés	7°44	8°5	12°6	12°9	14°9	17°2
$Q/\gamma R^2$	0,35	1,10	2,06	3,60	4,37	5,58
$H_m/\gamma R^2$	0,058	0,175	0,255	0,43	0,455	0,435
$C_m/\gamma R^3$	0,081	0,255	0,475	0,85	1,05	1,29

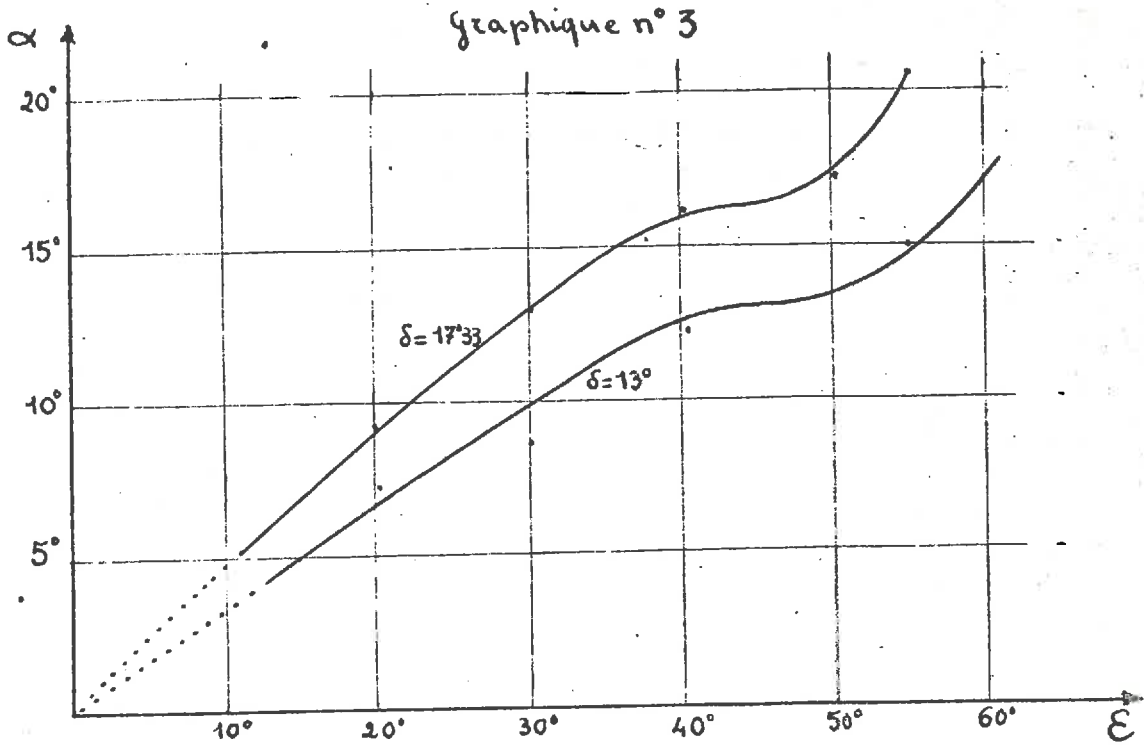
TABLEAU III

Ces résultats permettent, dans le domaine utilisé des variations de  $\varepsilon$ , de faire les observations importantes qui suivent

...

a - Position du point P

Le point P correspond au minimum de courbes  $C = f(\alpha)$ ; au voisinage de ce minimum, ces courbes sont très aplaties. Il s'ensuit que les valeurs obtenues de  $\alpha_0$  sont relativement peu précises et cela explique la dispersion assez importante des points du graphique N° 3.



Il semble au'après une partie presque linéaire, la courbe  $\alpha_0 = f(\epsilon)$  passe par un point d'inflexion pour une valeur de  $\alpha_0$  qui serait égale à l'angle de frottement  $\delta$  roue-terrain. Quoiqu'il en soit,  $\alpha_0$  est une fonction croissante de (donc de la charge Q) et en première approximation, on peut écrire :

$$\alpha_0 = 0,4 \epsilon \quad \text{pour } \delta = 17^\circ 33'$$

et

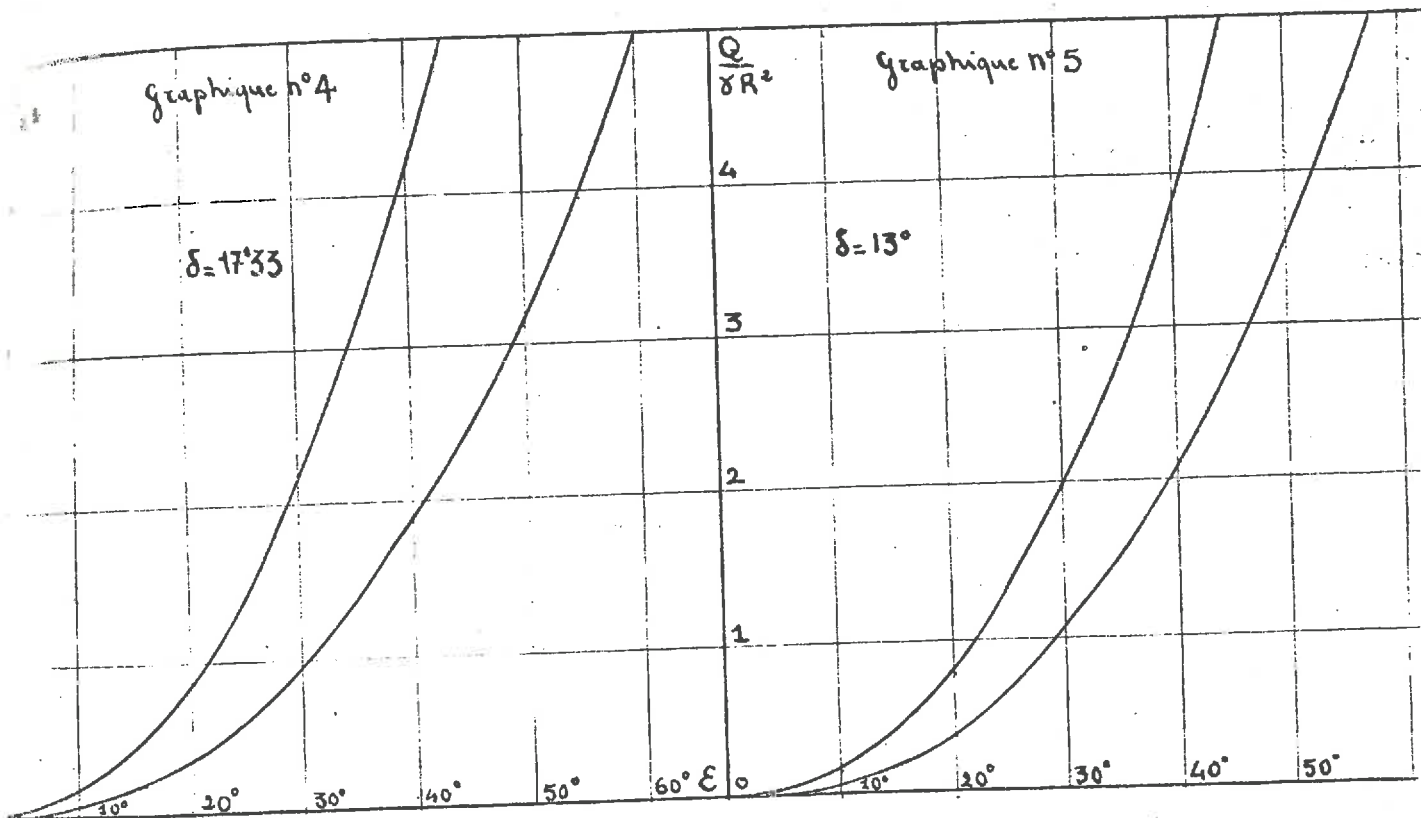
$$\alpha_0 = 0,3 \epsilon \quad \text{pour } \delta = 13^\circ$$

... / ...

Notons d'ailleurs que cette relative imprécision dans la détermination du point P a très peu d'influence sur les valeurs correspondantes de  $Q$ ,  $H_m$  et  $C_m$ .

b - Variation de l'enfoncement avec la charge

Nous avons tracé dans les deux cas où  $\delta = 13^\circ$  et  $\delta = 17^\circ 33'$ , les courbes qui donnent le demi angle au centre d'enfoncement  $\epsilon$  en fonction de la charge  $Q$  appliquée à la roue.



Sur les graphiques nous avons aussi porté les courbes  $Q = f(\epsilon)$  donnant les charges en fonction des enfoncements lorsque la roue se trouve dans le Cas I. Ces courbes appellent les remarques suivantes :

- A charge donnée  $Q$  sur la roue, correspond des enfoncements de celle-ci différents dans les Cas I et II.

.... /...

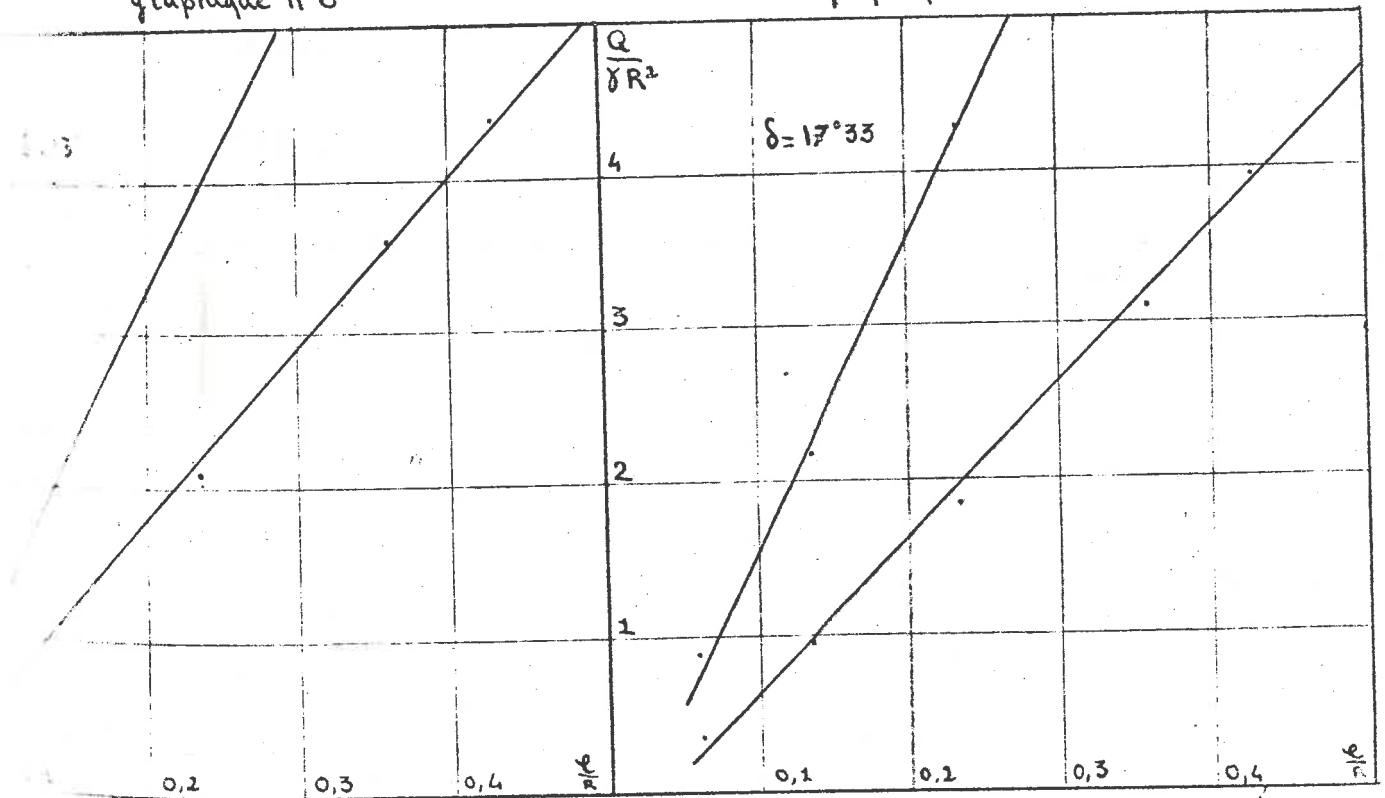
L'application du couple  $C_m$  diminue donc la force portante sur la roue : pour pouvoir supporter ce couple, la roue va en quelque sorte "creuser" le terrain et s'enfoncer d'une certaine quantité. Cette augmentation de l'enfoncement est d'ailleurs importante : on voit sur le graphique N°4 qu'elle atteint  $30^\circ$  pour une valeur de  $\frac{Q}{\delta R^2}$  égale à 5.

- Alors que, pour une charge donnée, l'enfoncement de la roue diminue quand le frottement  $\delta$  augmente dans le Cas I, c'est le contraire qui se produit lorsqu'on est dans le Cas II. En d'autres termes, l'application du couple  $C_m$  provoque un supplément d'enfoncement qui est d'autant plus grand que le frottement roue-terrain est plus grand. Ce fait est d'ailleurs intuitif car la roue ayant plus de frottement donc de "prise" sur le terrain pourra ainsi plus creuser.

Pour étudier ces phénomènes de manière quantitative et donner des formules simples il est plus pratique de passer aux profondeurs relatives d'enfoncement  $\frac{e}{R}$

Graphique n°6

Graphique n°7



... / ...

Les graphiques N° 6 et 7 montrent que l'on peut relier les profondeurs relatives  $\frac{e}{R}$  aux charges  $\frac{Q}{\gamma R^2 b}$  par les formules

$$\delta = 17^\circ 33' \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{R} = 0,046 \frac{Q}{\gamma R^2 b} + 0,032 \\ \frac{e}{R} = 0,102 \frac{Q}{\gamma R^2 b} + 0,033 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Roue au repos Cas I} \\ \text{Roue à la limite du patinage Cas II} \end{array}$$

$$\delta = 13^\circ \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{R} = 0,048 \frac{Q}{\gamma R^2 b} + 0,027 \\ \frac{e}{R} = 0,092 \frac{Q}{\gamma R^2 b} + 0,033 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Roue au repos Cas I} \\ \text{Roue à la limite du patinage Cas II} \end{array}$$

Ces formules sont valables pour  $0,05 \leq \frac{e}{R} \leq 0,45$

On déduit de ces formules que l'application du coup  $C_m$  sur une roue initialement chargée d'un poids  $Q$  crée un enfoncement supplémentaire  $\Delta e$  qui s'écrit :

$$\begin{array}{l} \Delta e = 0,056 \frac{Q}{\gamma R b} \quad \text{pour } \delta = 17^\circ 33' \\ \text{et} \\ \Delta e = 0,044 \frac{Q}{\gamma R b} \quad \text{pour } \delta = 13^\circ \end{array}$$

Ces formules sont valables quand l'enfoncement relatif est inférieur à 0,45

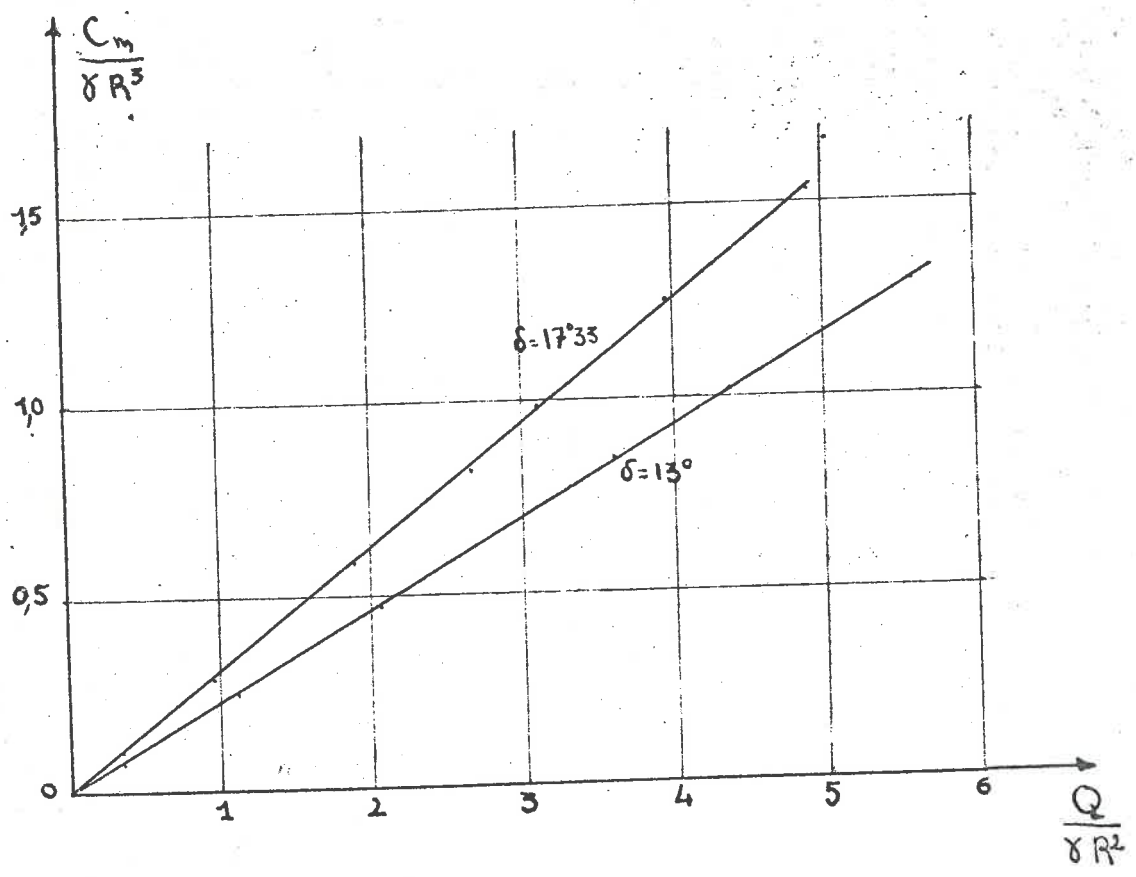
... /.

c - Variations du couple  $C_m$  et de l'effort de traction  $H_m$  correspondant en fonction de la charge  $Q$  sur la roue  
Influence du frottement

1°) - Etude du Couple limite  $C_m$

Les résultats des tableaux II et III permettent de tracer le graphique suivant :

Graphique n°8



... / ...



Les points représentatifs du couple  $C_m$  en fonction de la charge  $Q$  s'alignent parfaitement sur des droites. On a ainsi :

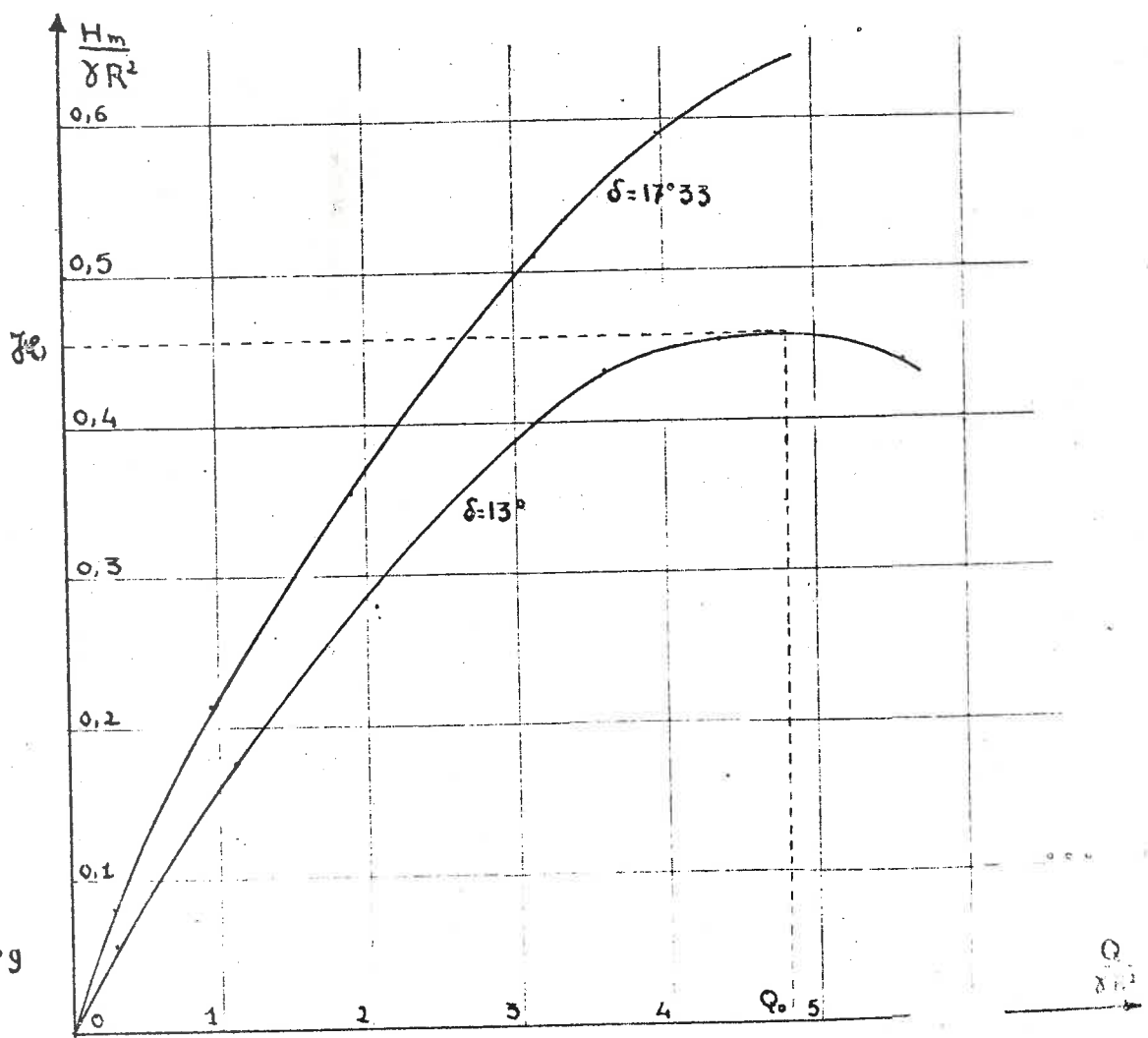
$$C_m = 0,314 Q R \quad \text{pour } \delta = 17^\circ 33'$$

et

$$C_m = 0,231 Q R \quad \text{pour } \delta = 13^\circ$$

Ici, l'influence du frottement est très importante : une augmentation de  $4^\circ 33'$  de celui-ci permet, à charge et rayon égaux, d'augmenter la valeur du couple limite de plus de 30 %. Nous allons voir que  $\delta$  a aussi une influence prépondérante sur l'effort de traction  $H_m$

2°) - Etude de l'effort de traction  $H_m$

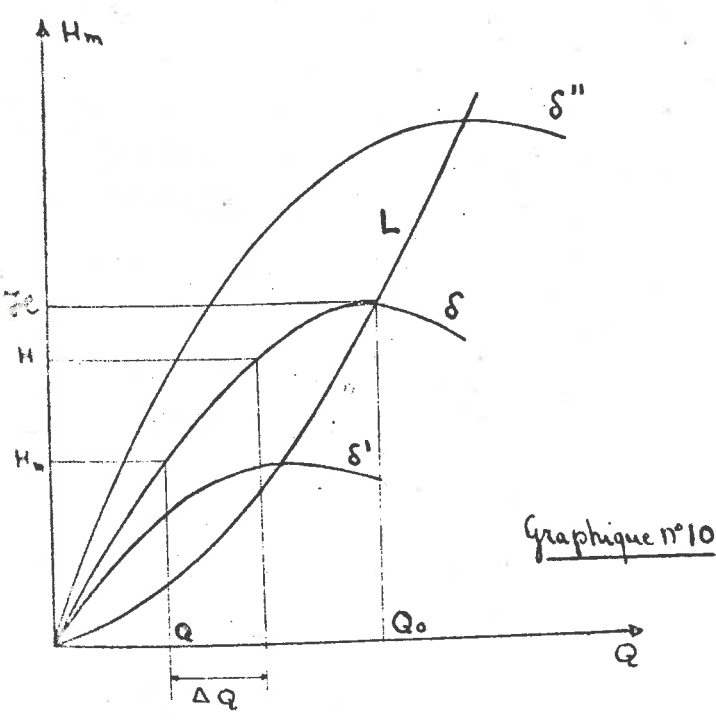


Graphique n°9

Le graphique N° 9 qui représente la variation de l'effort de traction maximum  $H_m$  en fonction de la charge  $Q$  appliquée à la roue met en évidence un fait très important : la courbe  $H_m = f(Q)$  passe par un maximum  $\mathcal{H}$  pour une valeur  $Q_0$  de la charge  $Q$ . Nous avons atteint ce maximum quand le frottement est de  $13^\circ$ . Pour  $\delta = 17^\circ 33'$ , nous n'avons pas pu l'obtenir car il n'a alors lieu pour une valeur de l'enfoncement  $\epsilon$  qui nécessite une ligne de discontinuité dans le schéma plastique sous la roue.

La connaissance de cette valeur maximum  $\mathcal{H}$  est très importante car elle donne la limite supérieure de l'effort de traction que pourra exercer la roue pour un frottement donné de celle-ci avec le terrain. Elle démontre le fait, couramment utilisé, qu'il existe une charge  $Q_0$  bien déterminée qui donne à la roue sa plus grande possibilité de traction.

Conséquence pratique de l'existence d'un maximum de la courbe  $H_m = f(Q)$



La courbe L  $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta) \\ Q_0 = Q(\delta) \end{array} \right.$

apparaît comme représentative des performances de la roue en fonction de son frottement avec le terrain : pour tout effort de traction inférieur à  $\mathcal{H}(\delta)$  la roue pourra démarrer ; il suffira de la charger en conséquence. Par contre elle ne pourra pas exercer un effort supérieur à  $\mathcal{H}(\delta)$  quels que soient sa charge et son couple

... /...

Il est dès lors possible de résoudre le problème suivant :

Une roue chargée d'un poids  $Q$  repose sur un milieu avec lequel elle a un frottement d'angle  $\delta$ . On désire lui faire exercer un effort de traction  $H$ . Quelles sont les conditions de possibilité ?

On regarde tout d'abord sur la courbe  $\delta$  du graphique la valeur  $H_m$  qui correspond à  $Q$  :

- Si  $H < H_m$  la roue démarre avant d'atteindre la limite de patinage
- Si  $H_m \leq H \leq \mathcal{H}(\delta)$  : il faudra la charger de la quantité  $\Delta$  correspondante (voir graphique 10). La roue sera alors à la limite de patinage
- Si  $H > \mathcal{H}(\delta)$  : pour pouvoir démarrer, la seule chose à faire est d'augmenter le frottement du terrain  $\delta$ .

3°) - Application numérique des résultats trouvés  
comparaison avec l'expérience

Pour nous placer dans le champ des expériences faites au laboratoire sur l'appareil analogique à deux dimensions considérons une roue de 30 cm de diamètre, de largeur 6 cm appliquons lui une charge de 10 Kgs (poids propre compris). Cherchons quels seront les enfoncements, couple  $C_m$  et traction  $H_m$  correspondants :

... /

Les formules et graphiques donnés aux paragraphes précédents permettent de résoudre le problème. Nous avons condensé les résultats dans le tableau suivant :

Frottement : $\delta$	Charge : Q	Enfoncement : $\epsilon$ et e Cas I	Enfoncement : $\epsilon$ et e Cas II	$H_m$	$C_m$
17°33	10 Kg	$\epsilon = 35^{\circ}5$ e = 2cm 8	$\epsilon = 51^{\circ}4$ e = 5cm 6	1,60 Kg	0,46 Kgm
13°	10 Kg	$\epsilon = 35^{\circ}5$ e = 2cm 8	$\epsilon = 48^{\circ}8$ e = 5cm 1	1,25 Kg	0,35 Kgm

Monsieur DUPERRIN donne un enfoncement dans le Cas I d'environ 37°. En tenant compte de l'imprécision avec laquelle on connaît la valeur de  $\delta$  et des erreurs inhérentes aux procédés de calculs et d'expérimentations, on peut donc dire que, dans le Cas I où le couple est nul, expérience et théorie donnent des résultats concordants.

Pour ce qui est du couple  $C_m$  et de l'effort de traction  $H_m$ , il est à signaler que les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés pour poser nos hypothèses, n'ont pas été pratiquement réalisées. MM. OBERTI et DUPERRIN se sont en effet plus spécialement occupés des problèmes de la roue tractée et du mouvement de la roue motrice. Leurs résultats montrent cependant que l'ordre de grandeur des valeurs que nous avons calculées est correct, ce qui permet de penser que ces valeurs sont acceptables.

CONCLUSION

Les hypothèses que nous avons faites sont donc apparemment correctes. Elles conduisent à des résultats qui sont physiquement acceptables et fournissent les explications théoriques de certains phénomènes parmi lesquels on peut citer la perte de portance d'un sol par application d'un couple et l'existence d'un effort maximum de traction  $\mathcal{R}$  et de la charge adéquate  $Q_0$  correspondante.

Par ailleurs, elles permettent de dégager l'influence des paramètres qui régissent le comportement d'une roue motrice : influence du rayon, du frottement roue-terrain, de la densité et du frottement interne du milieu.

Dans notre étude, nous avons limité les valeurs de l'enfoncement  $\mathcal{E}$  à celles qui permettraient le calcul des contraintes sur la roue à partir d'un schéma plastique à trois zones par la méthode du Saut de Prandtl. Une étude plus poussée devra élargir le champ des valeurs de l'enfoncement et introduire dans les calculs un schéma à deux zones avec ligne de discontinuité ; c'est d'ailleurs ce schéma qui livrera les valeurs de  $\mathcal{R}$  et de  $Q_0$  dans les cas intéressants de la pratique.

Nous n'avons considéré, ici, que le cas où le frottement interne du milieu pulvérulent était égal à 26 il est évident qu'il faudra s'intéresser à des valeurs plus importantes de ce dernier et introduire une cohésion

... /.

Nous signalons à ce sujet que la programmation complète de ce problème est faite : la simple introduction, dans la machine BULL - GAMMA - ET, des données  $\rho$ ,  $\delta$  et  $C$ , fournira les résultats dans les cas où le Saut de Prandtl reste possible.

Nous n'avons fait qu'effleurer le problème du mouvement de la roue. Celui-ci reste entier, mais on peut cependant affirmer que la roue en mouvement "demande" moins au terrain qu'elle ne le fait au démarrage. La valeur de  $\mathcal{H}$  apparaît ainsi comme une des caractéristiques fondamentales du problème général de la locomotion tout terrain.