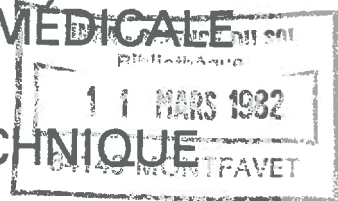


TH M26
GC 23

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
ET
L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE



pour obtenir le titre de

DOCTEUR - INGÉNIEUR

par

Didier BOUVARD

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

S U J E T

Rhéologie des milieux pulvérulents : Etude expérimentale et identification d'une loi de comportement.

Soutenue le 22 Janvier 1982 devant la Commission d'Examen

M. J.-M. PIERRARD	Président
M. F. SCHLOSSER	Rapporteurs
M. P. STUTZ	
M. J. SALENÇON	Examineurs
M. B. WACK	

AVANT-PROPOS

Qu'il me soit permis, au début de ce mémoire, d'exprimer toute ma gratitude à Monsieur Le Professeur STUTZ, qui m'a guidé tout au long de ce travail avec sa très grande compétence et une parfaite disponibilité. Son esprit critique et son discernement m'ont enseigné une qualité essentielle du chercheur scientifique, le doute.

Ce travail n'existerait pas sans la collaboration brillante et cordiale de Monsieur COMMANDEUR, qui a participé à l'ensemble des travaux expérimentaux et à la réalisation matérielle de ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mon amitié.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur LANIER avec qui les relations scientifiques très fréquentes ont toujours été amicales et fructueuses.

Monsieur PIERRARD, qui m'avait accueilli avec bienveillance dans son laboratoire, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury : je lui en suis très reconnaissant.

Messieurs SALENÇON et SCHLOSSER ont accepté, au milieu de leurs lourdes responsabilités, de venir participer à ce Jury, assurant en quelque sorte la continuité de ma formation, puisque ce sont eux qui m'ont enseigné la Mécanique des Sols, à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Je leur adresse mes plus vifs remerciements.

Monsieur WACK a suivi avec attention l'ensemble de mes recherches ; je le remercie d'avoir bien voulu faire partie du Jury de soutenance.

Je dois également associer à ce travail, Messieurs BAUDOIN et LOUIS du Service Electronique, Madame JULIEN et Monsieur BRAULT du Service Reprographie, Madame SOLANO et Mademoiselle SAURA qui ont assuré la dactylographie du mémoire.

Enfin, je ne saurais oublier l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui m'a soutenu financièrement au cours de ces deux années de recherche.

"§"§"§"§"§"§"§"

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>PRINCIPALES NOTATIONS</u>	
<u>PREMIERE PARTIE : ETUDE EXPERIMENTALE</u>	5
<u>Chapitre A : Le dispositif expérimental</u>	9
1) Description générale	9
2) La cellule de pression	12
3) La plateforme de mesure de la densité	15
4) Pilotage et dépouillement	19
5) Précision des mesures	20
<u>Chapitre B : Etude des conditions expérimentales de l'essai triaxial de compression</u>	25
1) Le dispositif d'application de la charge axiale	25
2) Elancement et antifrettage	27
3) Etude théorique de la déformation en tonneau	38
4) Préparation de l'échantillon	41
5) Forme de l'échantillon	45
6) Conclusion : les conditions expérimentales optimales	47
<u>Chapitre C : Résultats des essais de compression triaxiale de révolution</u>	50
1) Présentation de l'étude	50
2) Essais à pression latérale constante	53
3) Essais à pression moyenne constante	62
4) Essais à déviateur de contrainte constant	67
5) Conclusions	72

	<u>Pages</u>
<u>Chapitre D : Essais d'extension triaxiale de révolution</u>	76
1) Méthode expérimentale	76
2) Localisation de la striction	78
3) Le problème théorique de la striction	82
4) Résultats d'essais d'extension	84
<u>Chapitre E : Comportement cyclique</u>	90
1) Présentation de la presse tridimensionnelle "TRI-TRI"	90
2) Essais cyclique à pression latérale constante	97
3) Essai cyclique à déviateur de contrainte constant	113
4) L'état caractéristique	116

DEUXIEME PARTIE : ETUDE THEORIQUE

<u>Chapitre A : Evolution des lois de comportement proposées pour les milieux pulvérulents</u>	121
1) Les modèles élastoplastiques	121
2) Les modèles hypoélastiques	126
3) Les lois incrémentales	131
4) Les modèles endochroniques	134
5) Conclusion	137
<u>Chapitre B : Présentation d'une loi hypoélastique avec écrouissage en densité</u>	139
1) Expression analytique de la loi	139
2) Définition de l'état-limite	141
3) Expression des fonctions α_i à l'état-limite	144
4) Expression des fonctions α_i en dehors de l'état-limite	147

	<u>Pages</u>
5) Définition du critère de charge	150
6) Application à l'essai triaxial de révolution	152
<u>Chapitre C : Identification des essais effectués</u>	158
1) Calage des coefficients de la loi	158
2) Comparaison théorie - expérience	163
<u>CONCLUSIONS</u>	185
<u>REFERENCES</u>	186

INTRODUCTION

En Mécanique des Sols, que ce soit pour déterminer les caractéristiques d'un matériau, en vue d'une application aux problèmes de Génie Civil, ou pour caler les modèles rhéologiques, c'est l'essai triaxial de révolution qui est le plus employé. Pourtant les conditions dans lesquelles est réalisé cet essai sont rarement expliquées, les techniques de mesure rarement discutées, alors que les quelques études effectuées à ce sujet montrent que les caractéristiques expérimentales et métrologiques influencent beaucoup les résultats que l'on obtient. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur le problème, particulièrement important en grande déformation, du frottement du matériau sur les têtes de compression. Successivement ROWE et BARDEN [39], BISHOP et GREEN [3] ont constaté l'influence du dispositif d'antifretage et de l'élancement des échantillons sur la résistance des sables mesurée dans l'essai triaxial classique. KIRKPATRICK [14], en disposant des billes de plomb dans le matériau a mis en évidence l'influence du fretage sur le champ de déformation à l'intérieur de l'échantillon. L'importance de la préparation des échantillons a été également soulignée par BISHOP et GREEN [3], qui ont proposé une méthode originale pour réduire l'hétérogénéité. Plus récemment ROBINET [24] a remarqué que le pic de contrainte est presque supprimé lorsqu'on utilise un dispositif d'application de la charge muni de têtes de compressions rotulées qui éliminent les efforts parasites. En ce qui concerne les essais d'extension, presque rien n'a été dit au sujet du phénomène de striction qui apparaît systématiquement, et de son influence sur les mesures effectuées.

Cette incertitude sur les techniques d'expérimentation classiques conduit à des résultats peu fiables, particulièrement en grande déformation : des mauvaises conditions aux limites sous les têtes de compression provoquent l'apparition des plans de rupture à l'intérieur de l'échantillon. Développée à partir de 1975 pour les sables, par VARDOULADIS [38] et DARVE [9], la théorie de la bifurcation considère que le comportement après le pic de contrainte est la conséquence de la localisation des déformations le long des

plans de rupture. Ainsi est remis en cause le concept d'état-limite, correspondant à un écoulement plastique à contrainte et volume constants. Cette hypothèse, présentée dès 1936 par CASSAGRANDE [4], et confirmée expérimentalement par de nombreux auteurs (GEUZE [10], ROSCOE [26], WACK [41]), qui considèrent que la densité-limite^(*) caractérisant l'écoulement plastique est une fonction de la pression moyenne, a été utilisée dans beaucoup de modèles rhéologiques jusqu'à ces dernières années. Abandonnant cette idée la plupart des lois présentées récemment (GUDEHUS [12], LORET [19], CHAMBON [5]), ne décrivent que le comportement en petite déformation.

Le travail que nous présentons s'efforce, dans sa première partie d'apporter des réponses aux problèmes expérimentaux par une étude systématique effectuée à l'aide d'un appareil triaxial original, décrit au chapitre A, qui permet des mesures locales de densité. Le chapitre B est consacré à une étude des conditions expérimentales de l'essai triaxial classique ; cette étude nous permet de déterminer les meilleures conditions expérimentales pour obtenir une déformation aussi homogène que possible en grande déformation. On peut alors penser que les résultats obtenus représentent bien le comportement réel du matériau. Dans les chapitres suivants, on présente les résultats d'essais de compression et d'extension triaxiale suivant différents trajets de charge, en s'intéressant surtout au comportement en grande déformation et au phénomène de striction qui caractérise les essais d'extension. Enfin, le chapitre E concerne le comportement cyclique, qui est étudié grâce à des essais effectués simultanément sur l'appareil triaxial de révolution et sur une presse véritablement triaxiale.

(*) On préfère utiliser le terme "densité-limite" plutôt que celui de "densité-critique" employé habituellement, puisque le palier de densité, correspondant au palier de contrainte, définit l'état-limite, qui représente l'aboutissement du processus d'écrouissage.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à la modélisation théorique. Après une étude bibliographique des modèles rhéologiques les plus récents, on formule une loi de comportement hypoélastique avec écrouissage en densité permettant de décrire, avec un formalisme unique, l'évolution du matériau, depuis la phase des déformations infinitésimales, jusqu'à celle des très grandes déformations correspondant à un comportement parfaitement plastique. Cette loi a été présentée dès 1972 par STUTZ [29]. Dans le dernier chapitre on réalise la comparaison de la théorie proposée avec les essais monotones effectués au cours du travail expérimental.

PRINCIPALES NOTATIONS

d	Tenseur vitesse de déformation
\bar{d}	Déviateur de d
d_i, \bar{d}_i	Valeurs principales de d et \bar{d}
E_1	Premier invariant de d : $E_1 = d_{ij}$
\bar{E}_2, \bar{E}_3	Invariants de \bar{d} : $\bar{E}_2 = \bar{d}_{ij} \bar{d}_{ij}$ et $\bar{E}_3 = \bar{d}_{ij} \bar{d}_{jk} \bar{d}_{ki}$
σ	Tenseur contrainte de Cauchy
$\bar{\sigma}$	Déviateur de σ
$\sigma_i, \bar{\sigma}_i$	Valeurs principales de σ et $\bar{\sigma}$
S_1	Premier invariant de σ : $S_1 = \sigma_{ii}$
\bar{S}_2, \bar{S}_3	Invariants de σ : $\bar{S}_2 = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ji}$ et $\bar{S}_3 = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{\sigma}_{ki}$
p	Contrainte moyenne : $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$
q	Différence des contraintes principales extrêmes : $q = \sigma_1 - \sigma_3$
X	Phase de l'état de contrainte : $\cos 3X = \sqrt{6}(\bar{S}_3 / \bar{S}_2)^3$
M	Puissance totale : $M = \sigma_{ij} d_{ij}$
\bar{M}, \bar{N}	Invariants mixtes de $\bar{\sigma}$ et \bar{d} : $\bar{M} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{d}_{ji}$ et $\bar{N} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{d}_{ki}$
$\hat{\sigma}$	Dérivée de Jaumann de σ
\hat{S}_1	Premier invariant de $\hat{\sigma}$: $\hat{S}_1 = \hat{\sigma}_{ii}$
\hat{S}_2, \hat{S}_3	Invariants mixtes de $\bar{\sigma}$ et $\hat{\sigma}$: $\hat{S}_2 = 2 \bar{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ji}$ et $\hat{S}_3 = 3 \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \hat{\sigma}_{ki}$
ϕ	Angle de frottement interne
ϕ_l	Valeur-limite de ϕ
ρ	Densité
ρ_l	Densité-limite

PREMIERE PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE

CHAPITRE A : LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1) Description générale

L'appareil "PHOGADENSE" (Mesure par Photométrie et Gammamétrie de la Densité de l'Echantillon), mis au point successivement par WACK[42] et TERRIEZ [32], permet de réaliser, sur un échantillon de matériau, un essai triaxial classique (c'est-à-dire avec deux contraintes égales), avec une mesure locale de densité. Il comporte donc quelques-unes des restrictions habituelles de l'essai triaxial (chemin imposé dans l'espace des contraintes, hétérogénéité en grandes déformations), mais permet, en outre, d'obtenir des valeurs locales de la densité du matériau, au cours de l'évolution de la déformation. La densité d'un échantillon soumis à la sollicitation triaxiale de révolution s'obtient, habituellement, par la mesure de la variation de son volume total. Cette mesure fournit une densité moyenne, qui peut être très différente de la densité locale dans les zones où l'échantillon se déforme le plus. Au contraire, grâce à la technique de gammamétrie, la mesure s'effectue par transmission d'un faisceau de rayons gamma, ce qui permet, sans perturber l'échantillon, de déterminer, à chaque instant, une intégration de la densité, le long de n'importe quel segment horizontal de l'échantillon. Un système de photométrie optique fournit la mesure de la corde traversée par le rayonnement. Faisant l'hypothèse d'homogénéité le long de cette corde, on obtient une valeur de la densité locale dans la section horizontale considérée. Cette hypothèse nous paraît acceptable, puisqu'il semble, à la vue de certains résultats expérimentaux (KIRKPATRICK [14]) que l'essentiel des hétérogénéités se trouve le long de la direction de chargement, alors que les sections transversales sont à peu près homogènes.

L'appareil expérimental est présenté sur la figure I.1, et schématisé sur la figure I.2. Il se compose d'un socle fixe (S) supportant le système de mesure de la densité (D), et d'une partie mobile, formée d'une potence (P), à laquelle est suspendu le bâti (B) supportant la presse (T) et la cellule triaxiale (C). La potence se déplace horizontalement sur le socle, et le bâti se déplace verticalement par rapport à la potence. Ainsi, l'échantillon (E) est mobile dans un plan vertical, perpendiculaire à l'axe du faisceau radioactif.

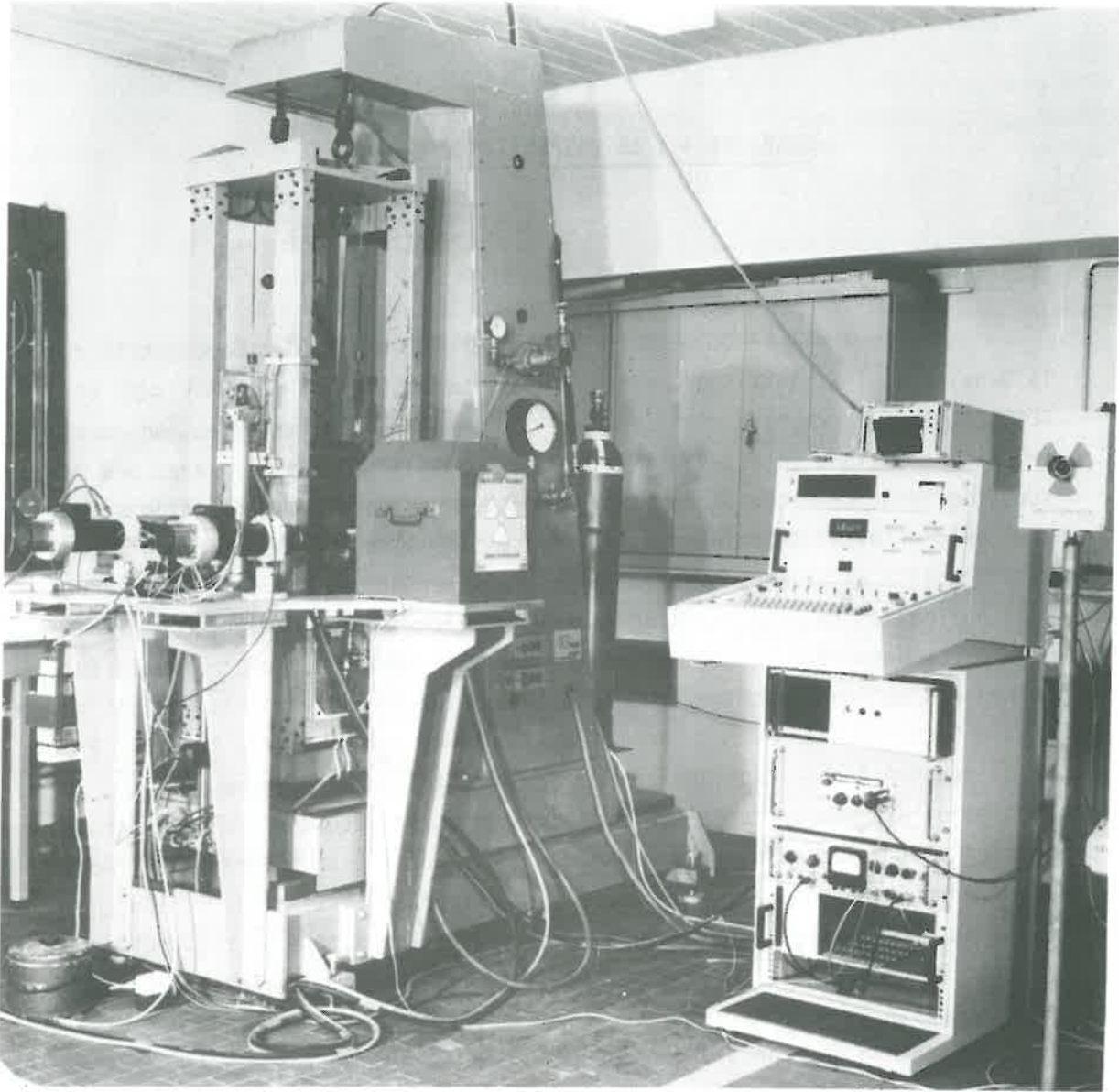


FIGURE I 1

Vue d'ensemble de l'appareil triaxial "Phogadense"

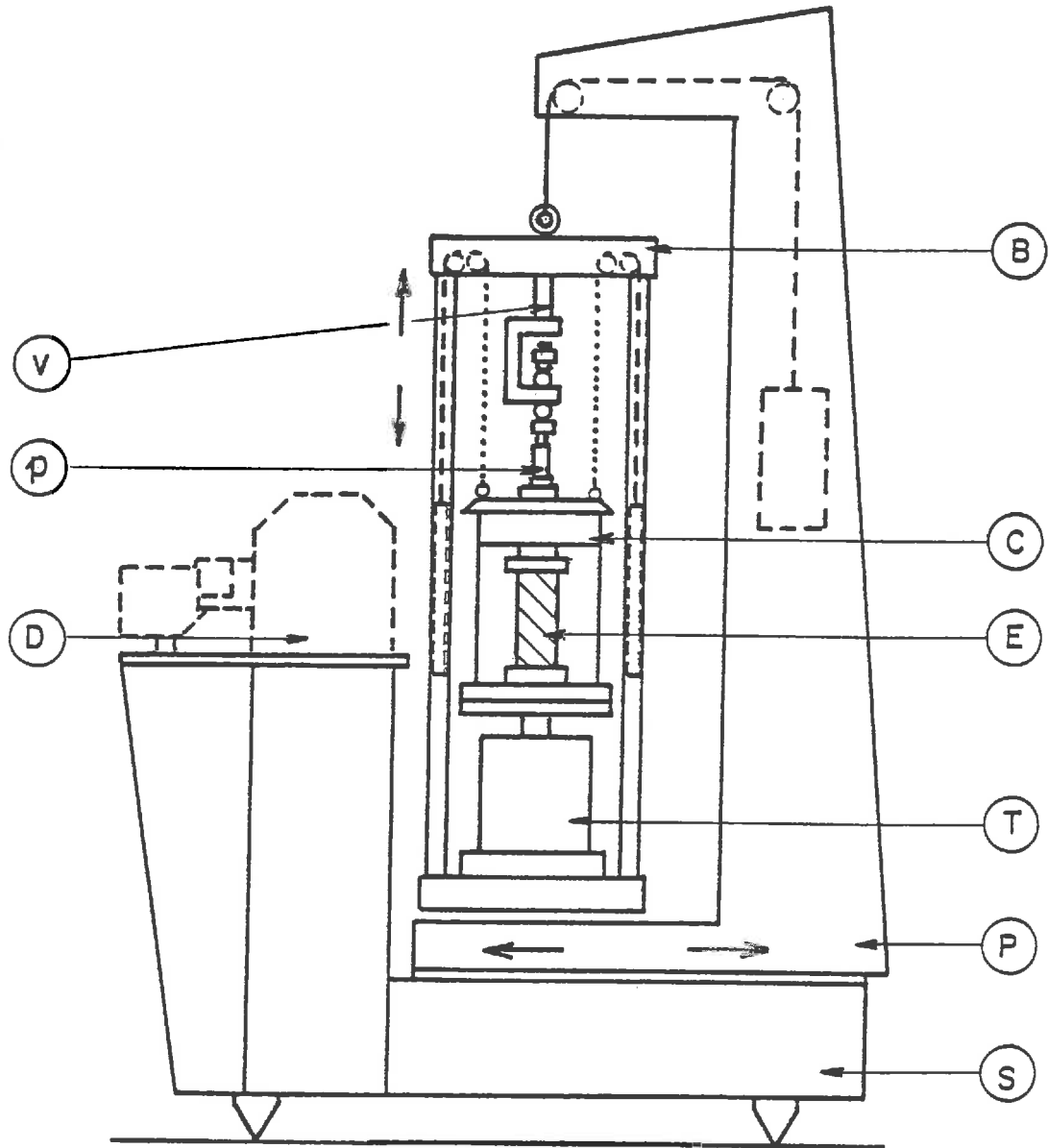


FIGURE I.2

Schéma de l'appareil triaxial "Phogadense"

2) La cellule de pression

La pression au sein de la cellule est appliquée par de l'air comprimé. L'eau, que l'on emploie habituellement, pour des raisons de sécurité, ne peut être utilisée car, avec une densité égale à 1, elle absorberait une partie importante du rayonnement radioactif. La cellule de pression est ainsi fraisée dans la masse, et comporte quatre hublots de plexiglass de 5 cm d'épaisseur, l'étanchéité étant assurée par des joints toriques. Les hublots sont toujours perpendiculaires aux faisceaux optiques et radioactifs. La cellule a été calculée pour supporter une pression de l'ordre de 4 MPa. La pression de confinement est mesurée par deux appareils : un manomètre, qui fournit une valeur visuelle et un capteur de pression, qui permet d'enregistrer une mesure analogique.

La disposition de l'échantillon à l'intérieur de la cellule est représentée sur la figure I.3. Un capteur de force traction-compression, de 25 mm de hauteur, à jauges de contrainte travaillant en cisaillement est placé entre la tête supérieure en contact avec l'échantillon et le piston (p). La liaison entre le capteur et la tête cylindrique est effectuée par un système de mâchoires actionnées par des vérins à air comprimé. L'étanchéité de la cellule, à la traversée du piston, est assurée par deux joints toriques ; la mesure de l'effort axial s'effectuant à l'intérieur de la cellule, le frottement du piston ne fausse pas cette mesure. Un capteur de déplacement, placé dans la cellule, mesure la déformation axiale totale de l'échantillon.

Le piston est relié à la vis (v), solidaire du bâti par un dispositif (figure I.4) permettant, grâce à deux billes superposées, une articulation, aussi bien en traction qu'en compression, et éliminant, par une molette, tout jeu au passage traction-compression.

Dans les cellules classiques, la charge est exercée par l'intermédiaire d'une tête rigide, dont le centre de rotation est bien au-dessus de l'extrémité supérieure de l'échantillon ; la tête rigide est, soit solidaire du piston,

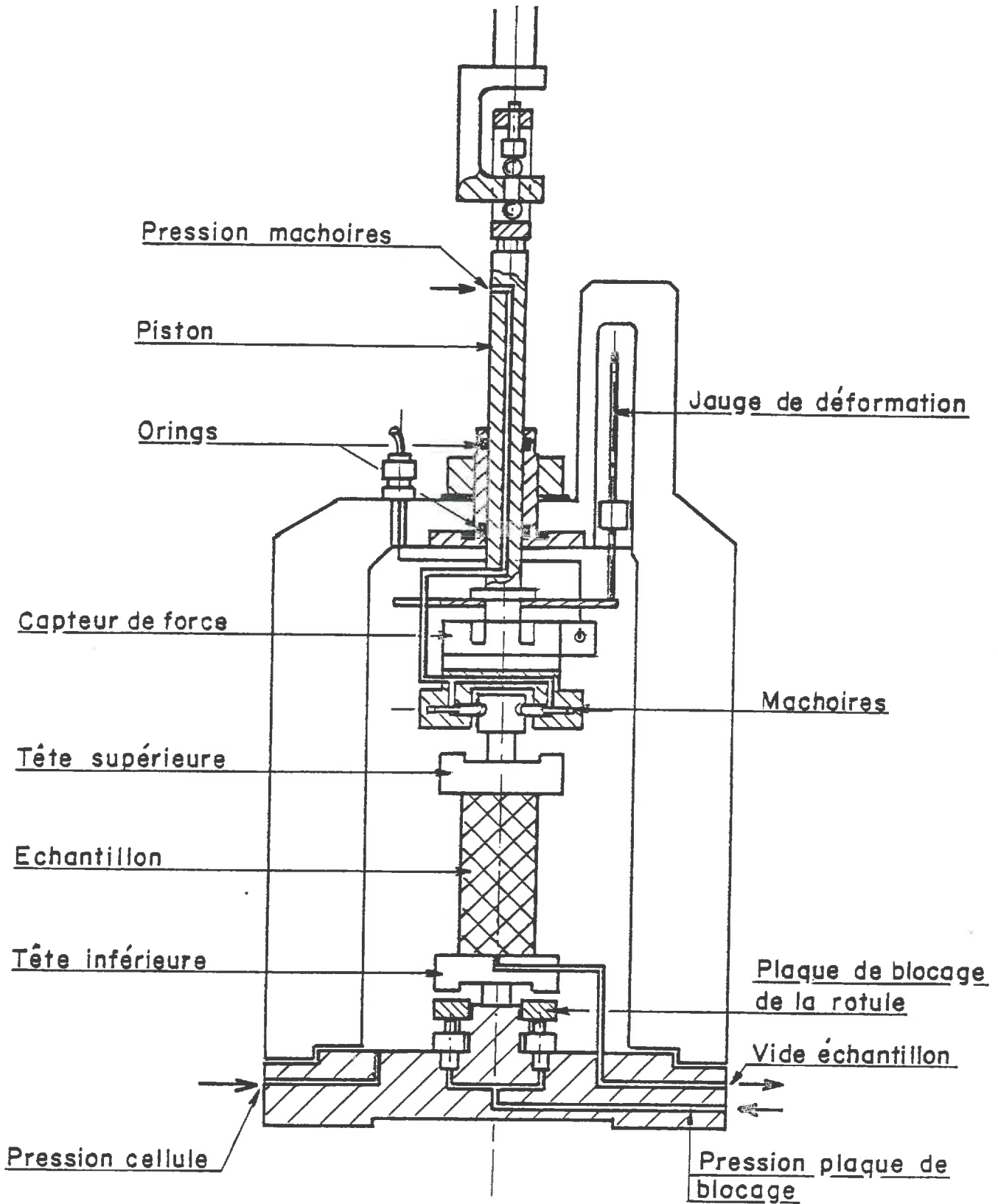


FIGURE I.3

Disposition de l'échantillon à l'intérieur de la cellule de pression

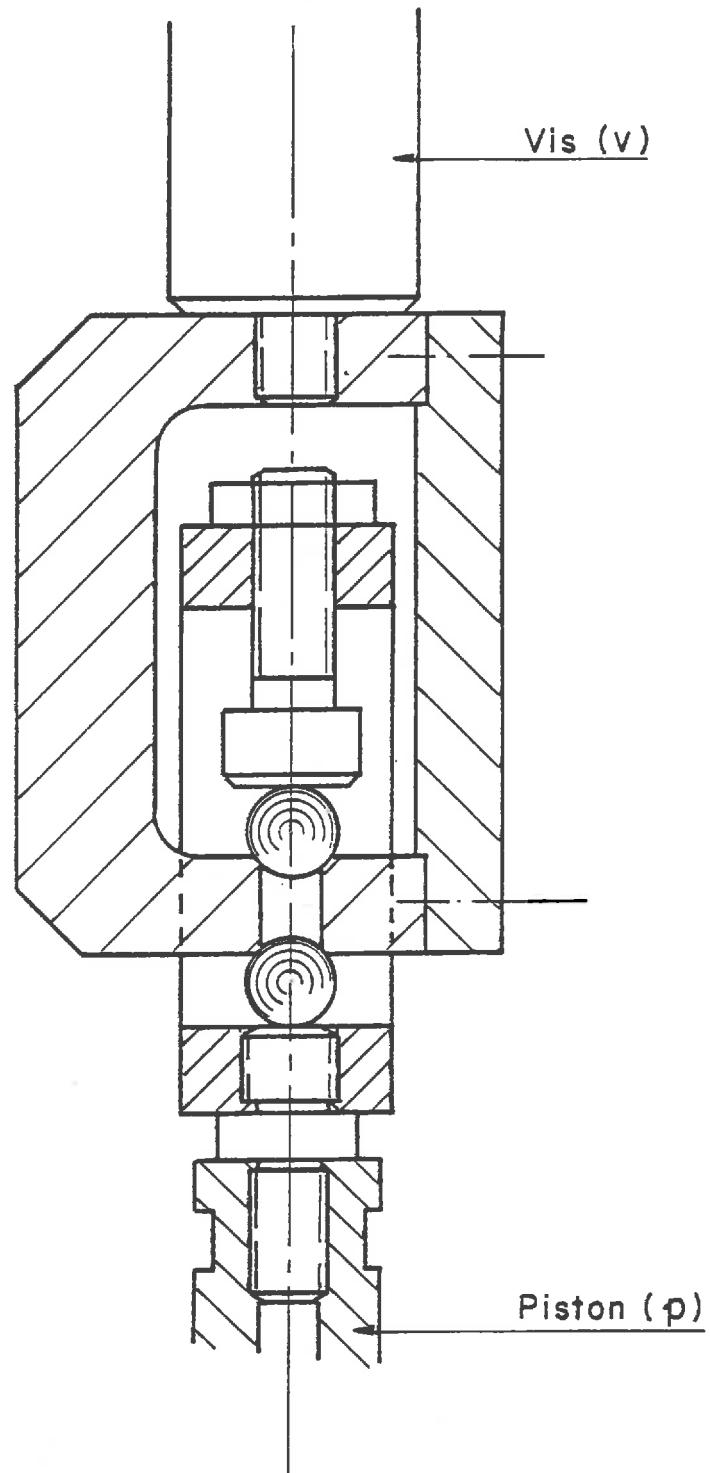


FIGURE I.4

Dispositif d'articulation du piston de charge

soit articulée sur le piston par l'intermédiaire d'une bille (figure I.5a). Il en résulte que les efforts réellement exercés sur l'échantillon se composent d'une force axiale et d'un moment provoqué par le défaut d'alignement inévitable entre l'axe de l'échantillon et le centre de rotation de la tête de compression. Pour éliminer cet effet, qui peut perturber la déformation de l'échantillon, on a utilisé des têtes rotulées (Figure I.5b). La rotule transmettant l'effort est située à l'intérieur de la tête supérieure, de telle sorte que son centre de rotation soit confondu avec le centre de la section supérieure de l'échantillon. La disposition analogue est réalisée dans la tête inférieure. Une plaque, actionnée par des vérins, permet de bloquer la rotule inférieure lors de la préparation de l'échantillon. Enfin, il est possible, en changeant la tête supérieure, et en bloquant la rotule inférieure, de réaliser des essais avec le système classique.

3) La plateforme de mesure de la densité

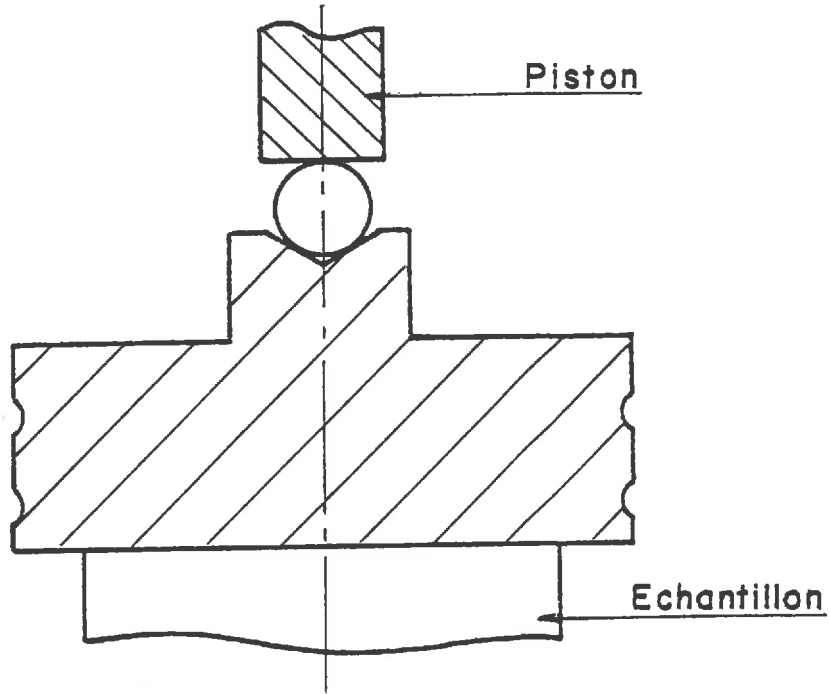
La source de rayons gamma est un échantillon de Césium 137, dont la période élevée (32 ans) et la puissance importante (0,662 MeV) répondent bien aux conditions requises. La détection du rayonnement s'effectue à l'aide d'un compteur à scintillation : quand le rayonnement gamma traverse le scintillateur, il se produit une excitation des atomes qui, en revenant à l'état stable, émettent des photons lumineux. Un photomultiplicateur accolé au cristal du scintillateur détecte le rayonnement lumineux. L'impulsion électrique résultante est proportionnelle à l'énergie du rayonnement qui l'a engendrée. Deux collimateurs de 4 mm de diamètre définissent le faisceau utile, en éliminant tout rayonnement diffusé. La géométrie de mesure est dite par transmission : source et détecteur sont de part et d'autre de l'échantillon (figure I.6).

L'intensité du faisceau, après atténuation à travers une épaisseur l de matériau de densité ρ , est donnée par l'expression :

$$I = I_0 e^{-\mu \rho l}$$

où I_0 représente l'intensité du faisceau avant la mise en place du matériau. μ , caractéristique du matériau, est le coefficient d'absorption. I et I_0 sont

a)



b)

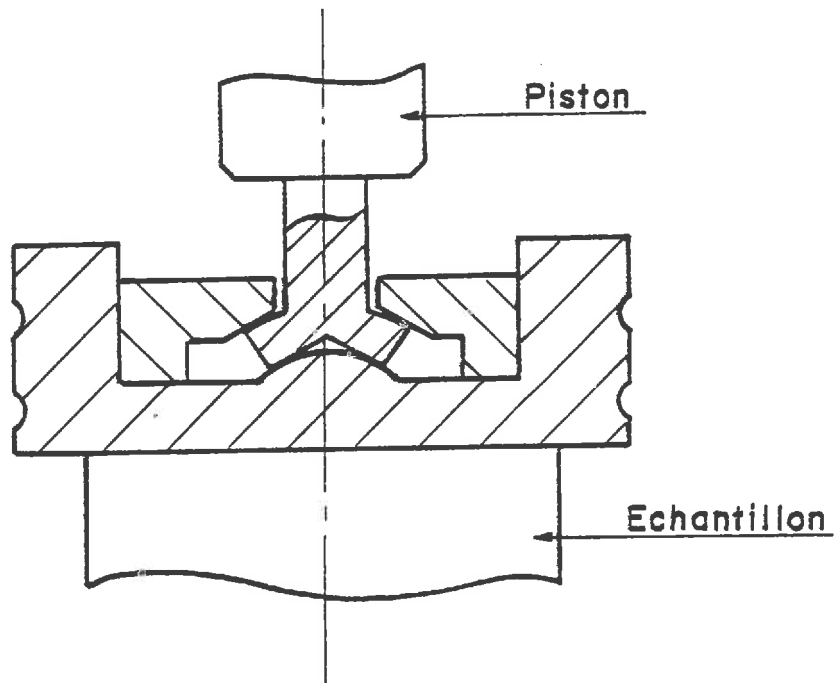


FIGURE I.5

Dispositif d'application de la charge axiale

a) sans tête rotulée

b) avec tête rotulée

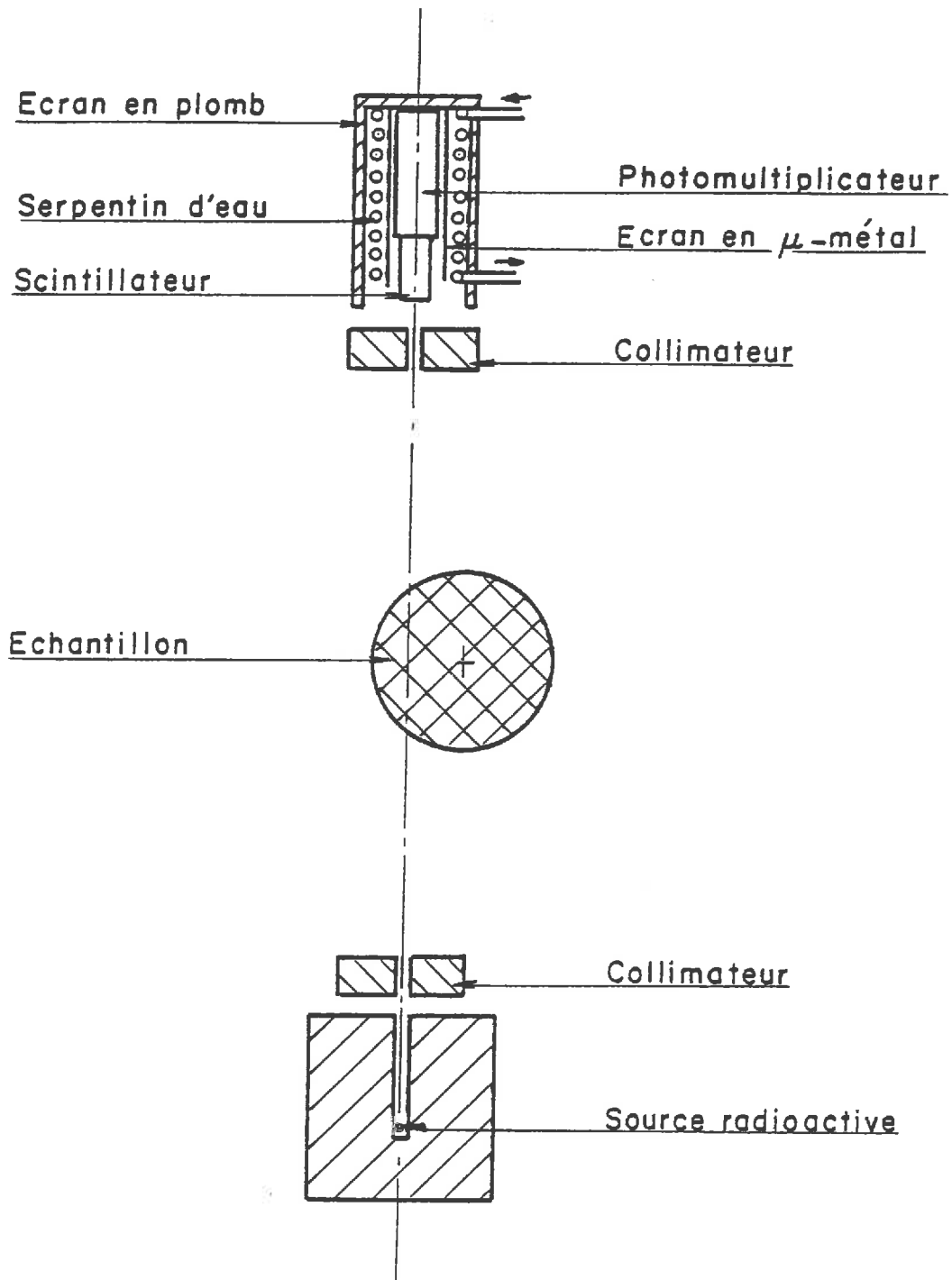


FIGURE I.6

Schéma de la mesure radioactive

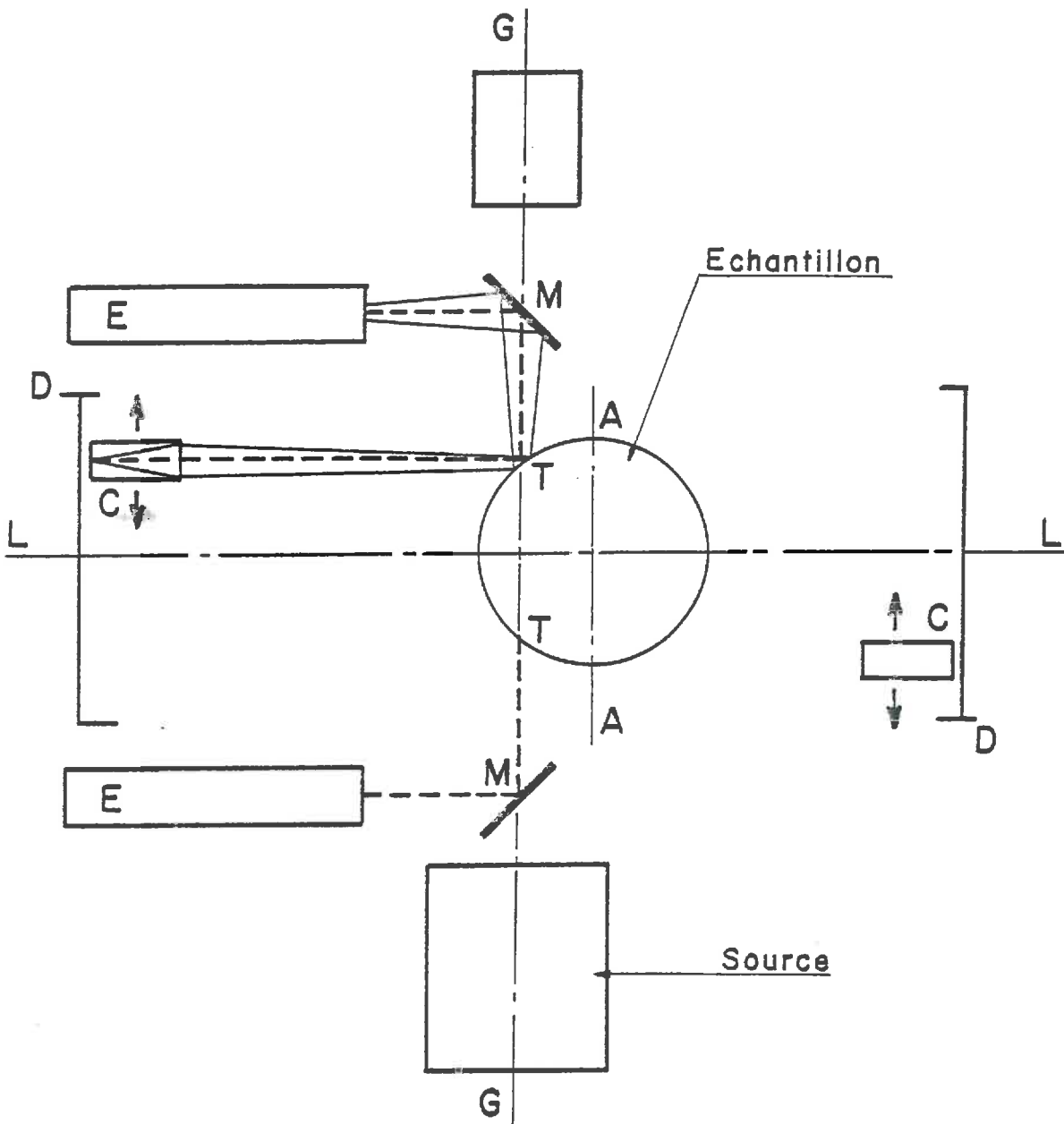


FIGURE I.7

Principe de la plateforme de mesure de la densité

proportionnelles aux taux de comptage N et N_0 produits dans l'ensemble de détection, ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{\mu l} \text{Log} \frac{N}{N_0}$$

La détermination de ρ nécessite donc une mesure préalable de μ et N_0 , et l'évaluation du taux de comptage N et de l'épaisseur du matériau l traversée par le faisceau de rayons gamma.

Afin de mesurer avec précision cette corde l , un système de télémétrie optique a été mis au point (figure I.7). Il permet d'effectuer cette mesure sans toucher à l'échantillon, qui n'est pas accessible, et sans gêner la mesure radioactive. Un ensemble optique, constitué des projecteurs E et des miroirs M fournit sur l'échantillon deux tâches lumineuses T . L'axe optique TT coïncide avec l'axe GG du faisceau de rayon gamma. Ces tâches sont détectées par l'une ou l'autre des cellules photo-électroniques C (éventuellement par les deux en même temps), suivant que les tâches T se situent d'un côté ou de l'autre du plan diamétral AA de l'échantillon. Un système électronique compte les impulsions dues à la rotation des moteurs qui entraînent les cellules. Par différence des deux distances séparant le point fixe D de chacune des tâches, on obtient la valeur de la corde.

4) Pilotage et dépouillement

L'essai est piloté par une centrale électronique à microprocesseur, possédant 5 compteurs numériques et 16 voies analogiques. Les compteurs sont utilisés pour les mesures gammamétrique et photométrique : comptage radioactif et localisation des tâches lumineuses focalisées sur l'échantillon. Les mesures analogiques fournies par les différents capteurs sont scrutées régulièrement et transformées par la centrale en valeurs numériques. La sortie des informations, recueillies à chaque cycle de mesure, s'effectue sur télétype, avec perforation de bande de papier.

Les opérations de dépouillement sont réalisées sur un ordinateur WANG, équipé d'un lecteur optique de bande perforée, d'une imprimante et d'un traceur

de courbe. Les programmes, écrits en Basic, sont stockés sur cassette, de même que les résultats numériques du dépouillement de chaque essai.

5) Précision des mesures

- Diamètre de l'échantillon

Les mesures de dimensions effectuées avec le système télémétrique donnent une très bonne précision lorsque l'axe optique est placé le long d'un diamètre de l'échantillon ; dans ce cas, les 2 tâches peuvent être repérées par les deux cellules photo-électriques et leurs focalisations dans le plan des cellules sont suffisamment fines pour être signalées avec précision. C'est d'ailleurs ce cas qui nous intéresse tout particulièrement, puisqu'on obtient, de cette façon, la section de l'échantillon dans le plan de mesure. En prenant la moyenne des valeurs données par les deux cellules on peut mesurer le diamètre ϕ à 0,2 mm près, ce qui correspond, pour des échantillons de 70 mm de diamètre initial, à une précision supérieure à $\pm 0,3 \%$.

- Contrainte

Nous disposons d'un seul capteur, d'une capacité de 20 000 Newtons, en traction et en compression, pour l'ensemble des essais, la gamme des efforts mesurés s'étendant de 15 000 N en compression à 3 000 N en traction, pour une pression de confinement égale à 1 MPa. Avec la pression la plus faible utilisée (0,1 MPa), les efforts maximaux sont divisés par 10, la précision étant alors 10 fois moins bonne. Il serait préférable de disposer de plusieurs capteurs de différentes capacités, mais cela semble peu réaliste, étant donnée la difficulté de démontage du capteur, qui se trouve à l'intérieur de la cellule de pression.

La précision du capteur est de l'ordre de 5 N. Pour un essai de compression à pression latérale égale à 0,1 MPa, la force axiale au palier de contrainte étant d'environ 1 500 N, on aura une précision relative de 0,3 % sur l'effort, ce qui donne, sur la contrainte, étant donnée la précision de mesure du diamètre, une valeur de 0,9 %, qui est le cas le plus défavorable, en compression.

En extension, l'effort de traction est plus faible, donc la précision moins bonne. Toujours pour une pression latérale de 0,1 MPa, on obtient une précision de 2 %.

- Déformation axiale

La capteur de déformation donne une précision absolue de 0,1 mm, le déplacement mesuré variant, pour un échantillon de 70 mm de hauteur initiale, entre 0 et 30 mm.

- Pression

Le manomètre utilisé pour le réglage manuel de la pression permet une mesure à 0,002 MPa près. Le capteur de pression utilisé dans le dépouillement a une précision absolue d'environ 0,003 MPa.

- Densité

On a vu que la densité ρ est donnée par la formule :

$$\rho = \frac{1}{\mu \phi} \text{Log} \frac{N_0}{N}$$

La constante μ , caractéristique du matériau est déterminée par comparaison entre des mesures radioactives et des mesures volumiques donnant une valeur moyenne, avec une précision relative de 0,5 %. On n'en tiendra pas compte dans le calcul d'erreur, puisque cette valeur a été prise constante, pour tous les essais effectués avec un matériau donné.

Plus délicate est l'évaluation de la précision sur les taux de comptage N et N_0 . L'émission des rayons gamma est aléatoire, elle suit une loi statistique que l'on peut supposer gaussienne, étant donné le nombre très élevé d'impulsions enregistrées. L'écart-type σ est ainsi égal à la racine carrée de l'inverse du nombre d'impulsions détectées dans le système de comptage. L'intervalle $\pm 2 \sigma$ correspond à un degré de certitude de 95 % ; c'est-à-dire que dans des conditions données, 19 mesures sur 20 se trouvent dans l'intervalle $]n(1 - 2\sigma), n.(1 + 2\sigma)[$ autour de la valeur moyenne n cherchée, σ étant égal à $\sqrt{1/n}$. Nous caractériseront

la précision relative d'une mesure radioactive par cette valeur 2σ .

Soient n et n_0 les nombres d'impulsions comptées, respectivement, avec échantillon pendant le temps t , et sans échantillon pendant le temps t_0 . (On a $N = n/t$ et $N_0 = n_0/t_0$).

La précision relative sur la mesure de densité vaut :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta \phi}{\phi} + \frac{1}{\text{Log} \frac{N_0}{N}} \left(\frac{\Delta n_0}{n_0} + \frac{\Delta n}{n} \right)$$

avec

$$\frac{\Delta n_0}{n_0} = \frac{2}{\sqrt{n_0}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta n}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Au cours d'un essai, après un comptage à vide de 500 secondes, on effectue habituellement des cycles de mesure de 1 minute, ce qui permet un comptage de 40 s. Donc, on peut prendre par exemple :

$$n_0 = 10^6 \text{ coups} \quad \text{et} \quad N_0 = 2000 \text{ coups/s}$$

$$n = 3 \cdot 10^4 \text{ coups} \quad \text{et} \quad N = 750 \text{ coups/s}$$

ce qui donne une précision relative $\Delta \rho / \rho$ égale à 1,6 %. On peut réduire cette valeur à 1,2 % en prenant la moyenne de deux mesures successives (ce qui revient à peu près à multiplier le temps de comptage par deux). On obtient ainsi une précision absolue égale à 0,02.

Lorsqu'on effectue des explorations de densité le long de l'axe de chargement, l'écrasement étant arrêté, on peut faire des comptages plus longs, de 500 s par exemple, ce qui donne une précision bien meilleure, d'environ 0,01.

Il s'agit bien là de calculs théoriques sur la précision d'un point de mesure, avec un degré de certitude élevé, de 95 %. Pratiquement la détermination des courbes d'évolution de la densité, au cours d'un essai, à l'aide d'une centaine de points de mesure, s'effectue avec une précision bien meilleure. La figure I.8

montre comment on peut obtenir une courbe de densité à partir de l'ensemble des points de mesure, ou à partir des moyennes de deux points successifs, et l'incertitude dans chaque cas.

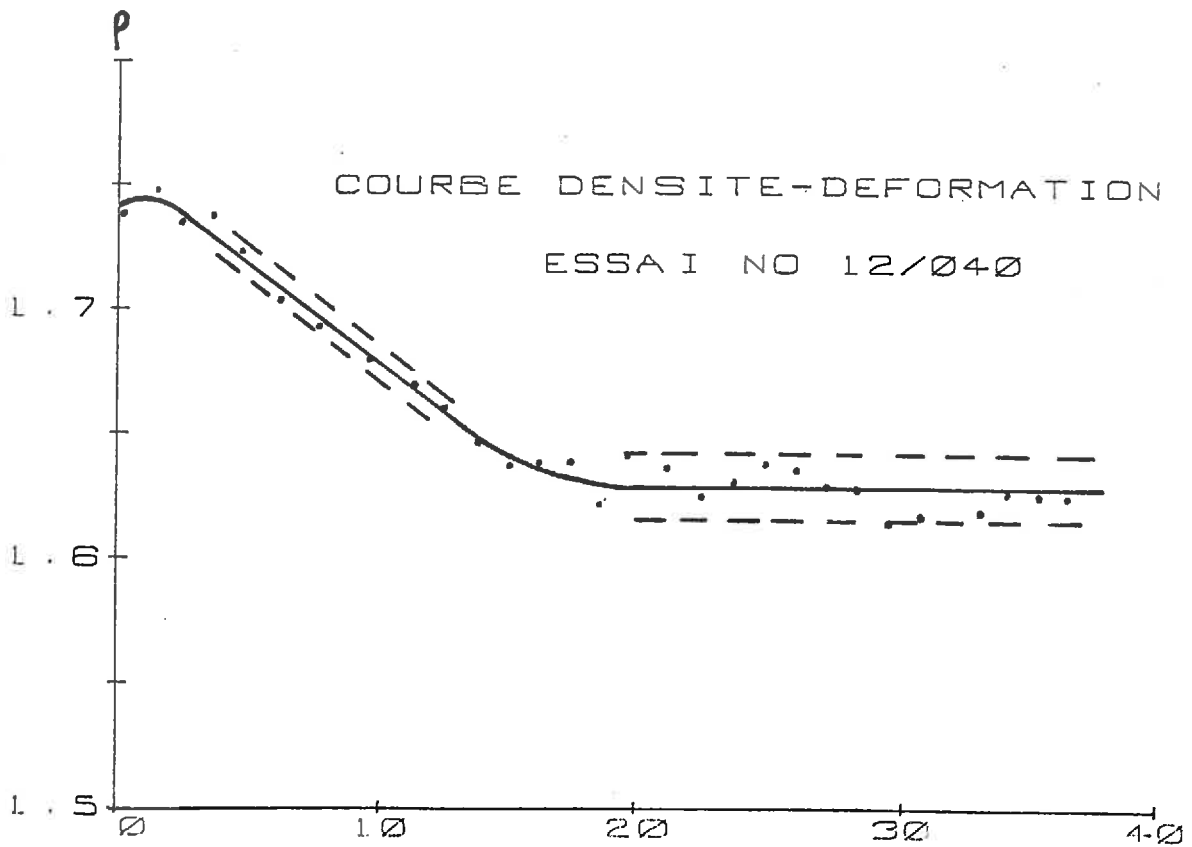
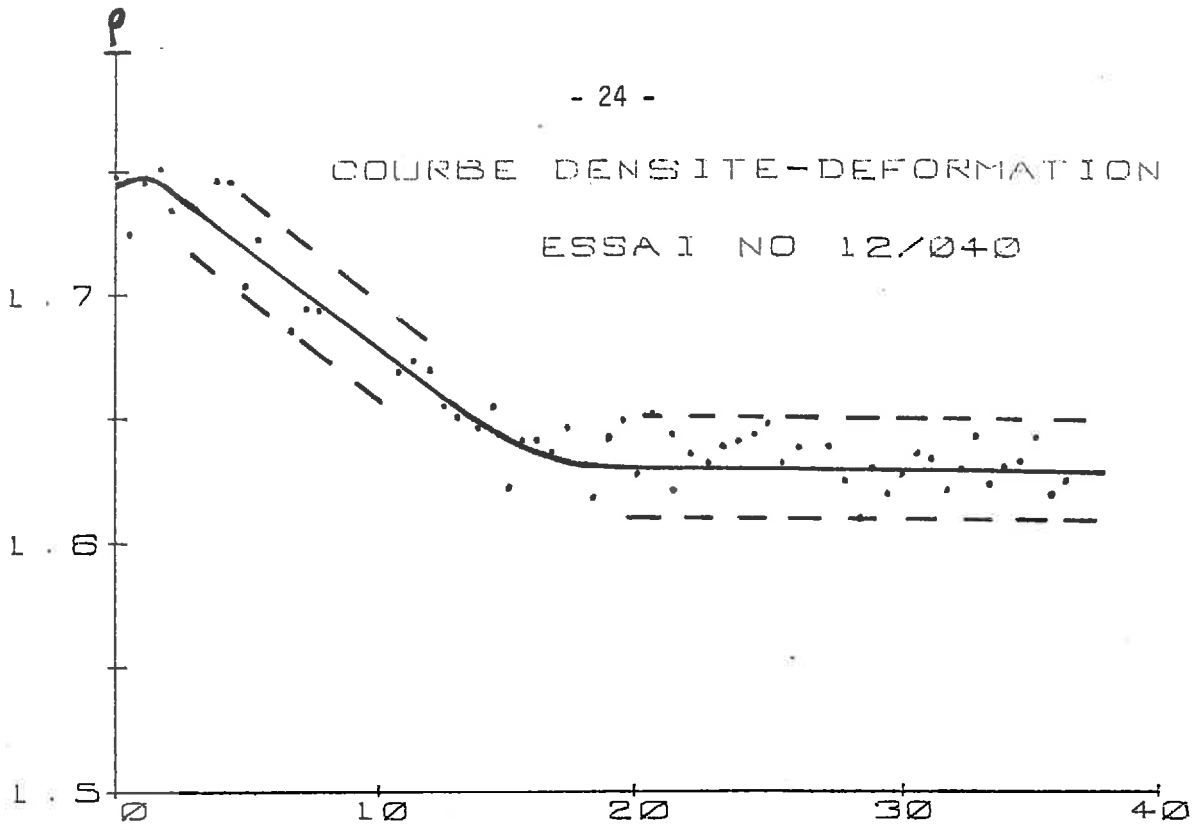


FIGURE I.8

Exemple de détermination d'une courbe de densité

a) en gardant tous les points de mesure

b) en faisant les moyennes de 2 mesures successives

CHAPITRE B : ETUDE DES CONDITIONS EXPERIMENTALES
DE L'ESSAI TRIAXIAL DE COMPRESSION

L'essentiel de cette étude a été menée en effectuant, sur un matériau composé de billes de verre de 1 mm de diamètre, des essais de compression triaxiale de révolution, à pression latérale constante, égale à 0,3 MPa. L'utilisation de ce matériau est pratique : sa granulométrie étant constante, au cours de l'essai et d'un essai à l'autre, puisque les billes ne se brisent pas comme des grains de sable, on peut le réutiliser indéfiniment ; sa mise en place est facile. Le seul inconvénient est que la fourchette de densité disponible est étroite, entre 1,7 et 1,8 pour les billes de 1 mm. Etant donnée la précision de nos mesures gammamétriques, les informations sur l'évolution de la densité ne sont pas très bonnes. C'est pourquoi lorsqu'on s'est intéressé aux problèmes de densité, on a préféré utiliser le sable d'Hostun, qui permet de fabriquer des échantillons de densité initiale comprise entre 1,6 et 1,8.

1) Le dispositif d'application de la charge axiale

Robinet [24] a étudié récemment l'effet de têtes rotulées analogues à celles qui ont été présentées au chapitre précédent. Les essais ont été réalisés sur des échantillons cylindriques de rapport hauteur sur diamètre égal à 2. Lorsqu'il n'y a pas de rotules, Robinet a noté l'apparition systématique d'un plan de rupture, et un pic de contrainte très marqué. Avec les têtes rotulées au contraire, il n'y avait plus de plan de rupture et le pic était beaucoup plus doux, ou même inexistant (figure I.9). Notons que Robinet n'utilisait pas de dispositif d'antifrettage aux extrémités de l'échantillon, et que ses essais ne sont pas poursuivis après 25 % de déformation axiale.

Lors de l'étude effectuée sur l'appareil Phogadense, nous n'avons pas du tout obtenu ces résultats. En particulier nous n'avons jamais observé de plan de rupture, même en grandes déformations (40 %), avec ou sans têtes rotulées. D'autre part, les niveaux de contrainte ne semblent pas affectés de façon sensible par le dispositif d'application de la charge, même pour un rapport d'élancement

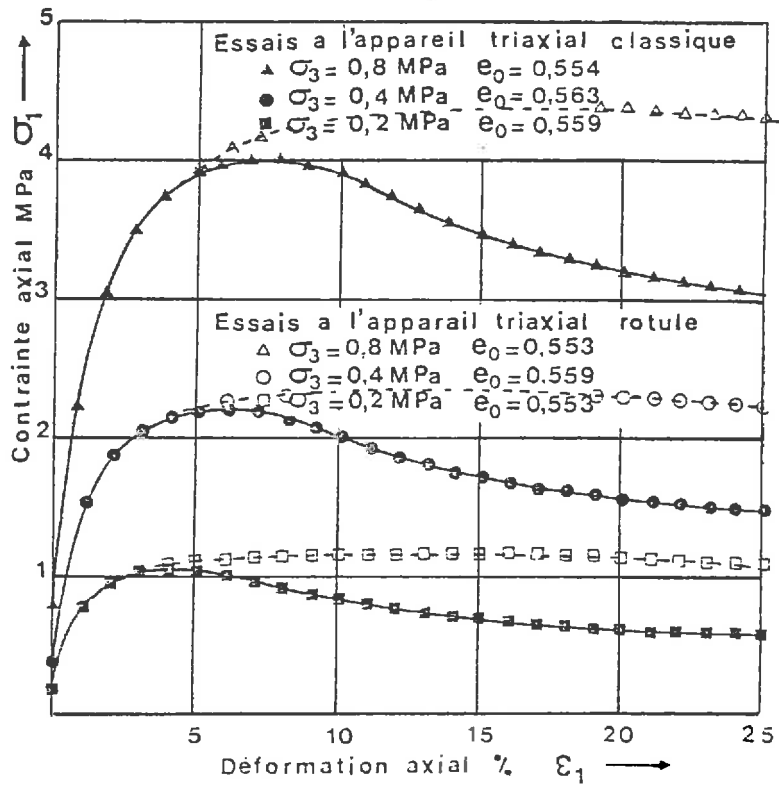


FIGURE I.9

Comparaison entre les essais à l'appareil triaxial classique et les essais à l'appareil triaxial rotulé sur des échantillons de sable, de rapport 2, sans antifrettage. (D'après Robinet).

égal à 2 ; le pic ne disparaît pas. Le seul problème rencontré concerne les échantillons de rapport 2 très antifrettés, qui ont tendance à glisser hors des têtes de compression, lorsque celles-ci sont rotulées, et que la force appliquée est importante (essais à forte pression latérale). Il semble donc qu'il y ait bien des efforts transversaux parasites, pouvant apparaître avec des échantillons élancés, mais ils ne sont pas très importants sur notre appareil triaxial, dont le dispositif de chargement est très bien aligné par rapport à l'axe de l'échantillon. Les essais de Robinet tendent à prouver que ce n'est pas toujours le cas sur les cellules triaxiales habituelles, pour lesquelles les rotules sont particulièrement efficaces. Pour notre part, avec le matériel dont nous disposons, nous considérons que le problème de l'antifrettage est, de beaucoup, le plus important.

2) Élancement et antifrettage

L'élancement de l'échantillon est caractérisé par le rapport hauteur sur diamètre, noté α , que nous prenons égal à 1 ou 2.

Habituellement, au cours de l'essai de compression triaxiale, l'échantillon cylindrique prend une forme galbée, caractéristique, de tonneau, parce que les sections extrêmes se sont très peu déformées, ou même parfois pas du tout. Ce phénomène entraîne une hétérogénéité de déformation le long de l'axe de l'échantillon, et l'apparition, dans les parties extrêmes, de coins rigides, ainsi que l'ont montré Kirkpatrick et Belshaw [14], en déterminant les déformations radiales locales grâce à des billes de plomb disséminées dans le matériau, dont les déplacements sont mesurés à l'aide de rayons X. Dans le cas de la déformation en tonneau, la cinématique n'est plus de révolution, les déformations radiales et tangentielles étant différentes. On peut mettre en évidence des zones non déformées aux extrémités de l'échantillon (figure I.10). La répartition des contraintes dans la section médiane de l'échantillon est également affectée par la formation du tonneau, ainsi que la contrainte moyenne mesurée, comme on le montrera, plus loin, avec des résultats expérimentaux et un calcul théorique. Les profils de densité tracés par Wack [37] pour des échantillons sans antifrettage, à l'aide de mesures gammamétriques, confirme l'hétérogénéité de tels échantillons

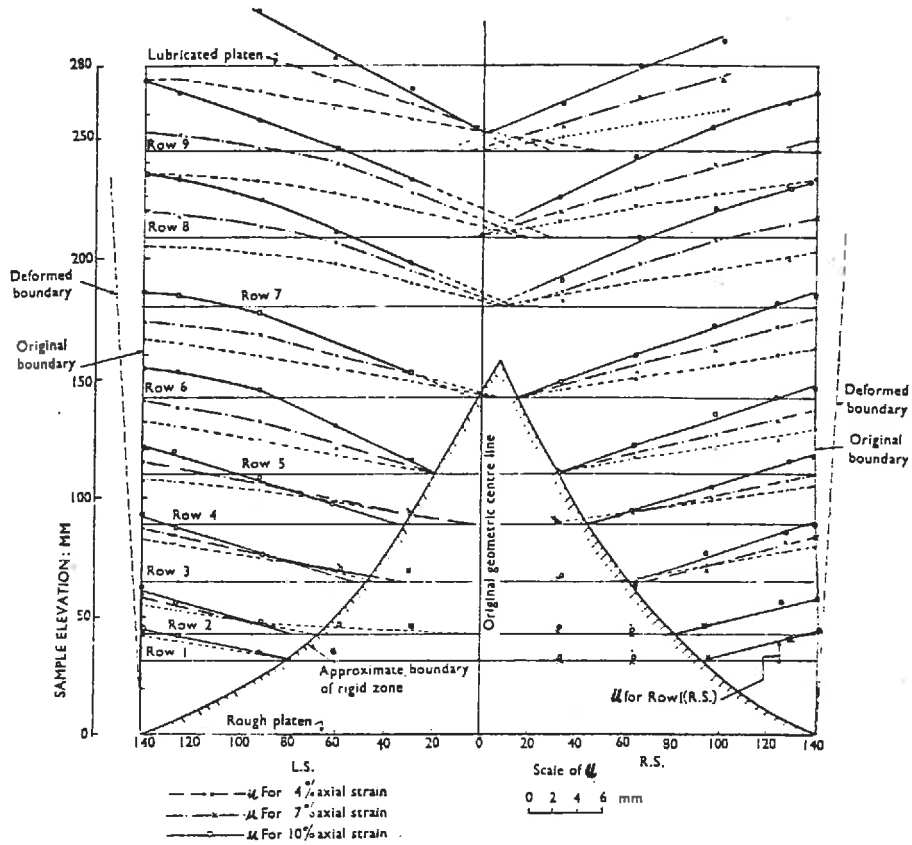


FIGURE I.10

Evolution du déplacement radial u en fonction du rayon r , à différentes valeurs de la déformation axiale, au cours d'un essai réalisé avec une tête de compression rugueuse, et l'autre lubrifiée. (D'après Kirkpatrick et Belshaw).

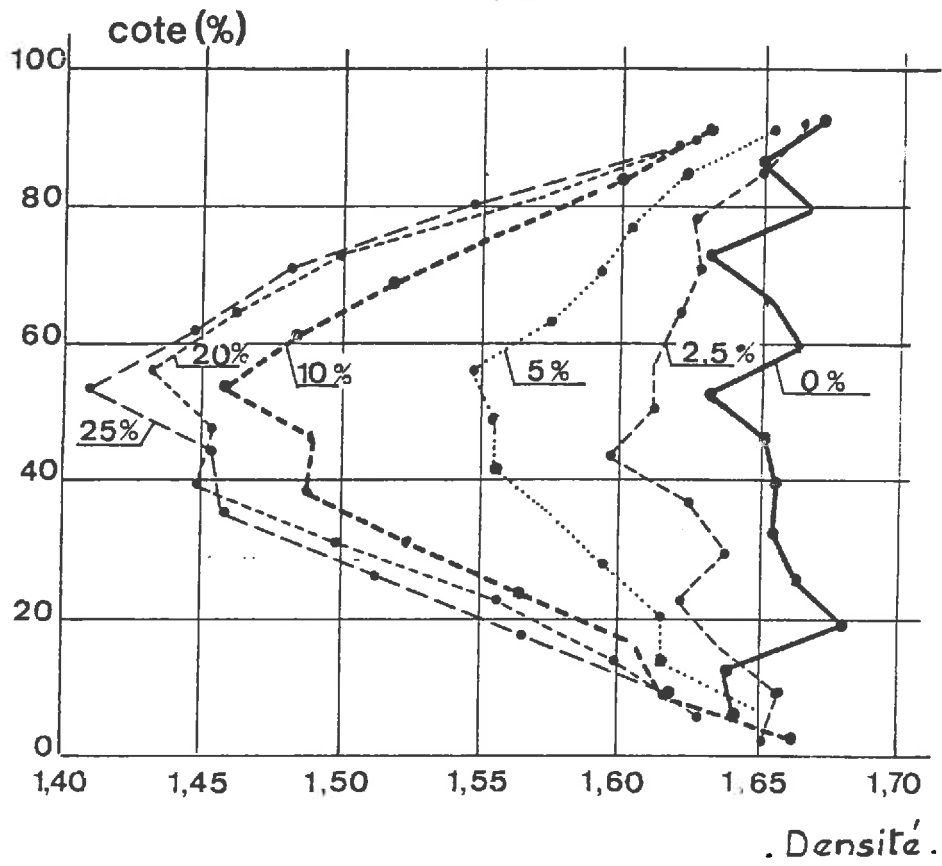


FIGURE I.11

Evolution du champ de densité dans le plan méridien MM' , pour différentes valeurs de la déformation axiale. (D'après Wack).

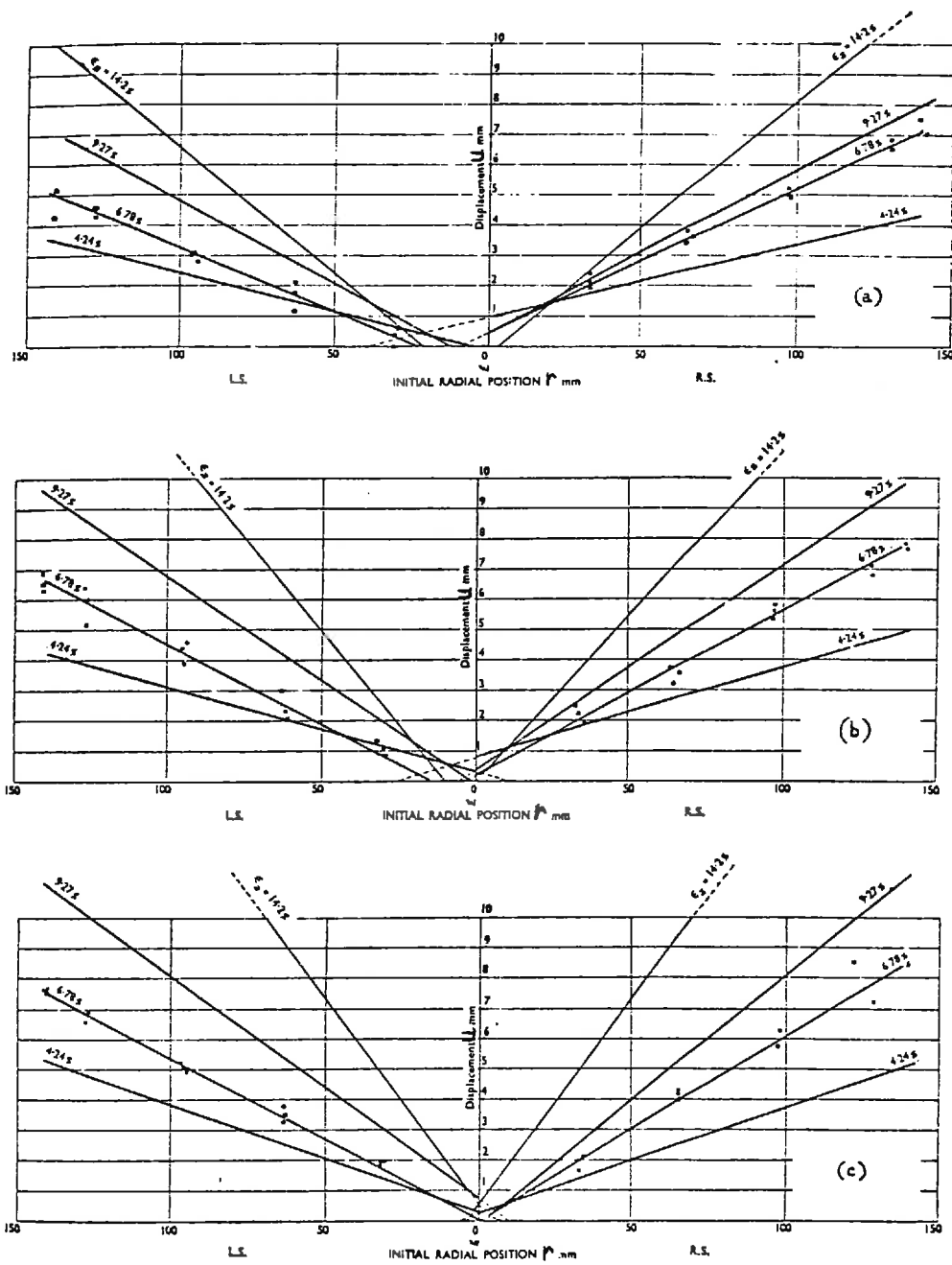


FIGURE I.12

Evolution du déplacement radial u en fonction du rayon r à différentes valeurs de la déformation axiale,

- a) dans le tiers supérieur
- b) au milieu
- c) dans le tiers inférieur de l'échantillon,

au cours d'un essai avec 2 têtes de compression lubrifiées.

(D'après Kirkpatrick et Belshaw)

(figure I.11). Au contraire, si l'on diminue, de façon suffisante, le frottement des extrémités de l'échantillon, il n'y a plus de coin rigide et les déformations sont à peu près homogènes et de révolution, comme on le voit sur la figure I.12 tirée de l'étude de Kirkpatrick et Belshaw, et sur la figure 19a.

Le dispositif d'antifretage que nous avons utilisé est composé de rondelles de caoutchouc enrobées de graisse, et disposées sur les têtes de compression dont le diamètre de 100 mm est très supérieur au diamètre initial de l'échantillon (70 mm). Il semble que si l'on utilise exactement le même dispositif aux deux extrémités de l'échantillon, sa partie inférieure se déforme plus que sa partie supérieure. Bishop et Green [3] ont montré que ce phénomène est dû au mode de préparation. On a donc employé un système d'antifretage plus efficace en tête d'échantillon. Finalement, le dispositif donnant les meilleurs résultats est le suivant : à la base de l'échantillon, une rondelle pleine, enrobée de graisse, surmontée d'une seconde rondelle, découpée suivant des arcs de cercle concentriques facilitant son extension radiale ; en tête, une rondelle pleine, et deux rondelles découpées. Ce système a permis d'obtenir des échantillons de rapport 1 encore cylindriques après 40 % de déformation (figure I.13), et des tonneaux très peu marqués pour les échantillons de rapport 2, au même niveau de déformation (figure I.14). Cependant, le dosage de la graisse entre les différentes rondelles est délicat ; on arrive fréquemment à des déformations en cône, lorsqu'on a favorisé l'extension d'une extrémité par rapport à l'autre. (Ces échantillons semblent pourtant donner des résultats corrects, lorsque le cône est peu marqué). Autre problème : lorsque l'antifretage est trop efficace, et surtout lorsqu'on travaille, avec des têtes rotulées, à forte pression, l'échantillon a tendance à glisser hors des têtes de compression. Pour empêcher ce glissement, on ne met pas de graisse sur une petite zone autour du centre des têtes de compression. Pour les échantillons de rapport 2, à une pression supérieure à 0,5 MPa, on doit également réduire le nombre de rondelles de caoutchouc.

On présente sur la figure I.15 les courbes contrainte - déformation obtenues avec des échantillons de rapport 1 ou 2, antifrettés ou non, initialement lâches ou denses. La contrainte axiale est calculée en moyennant la force mesurée, sur la section médiane de l'échantillon. Pour un rapport d'élanement égal à 1, l'antifretage produit des courbes douces, avec un pic peu marqué, pour

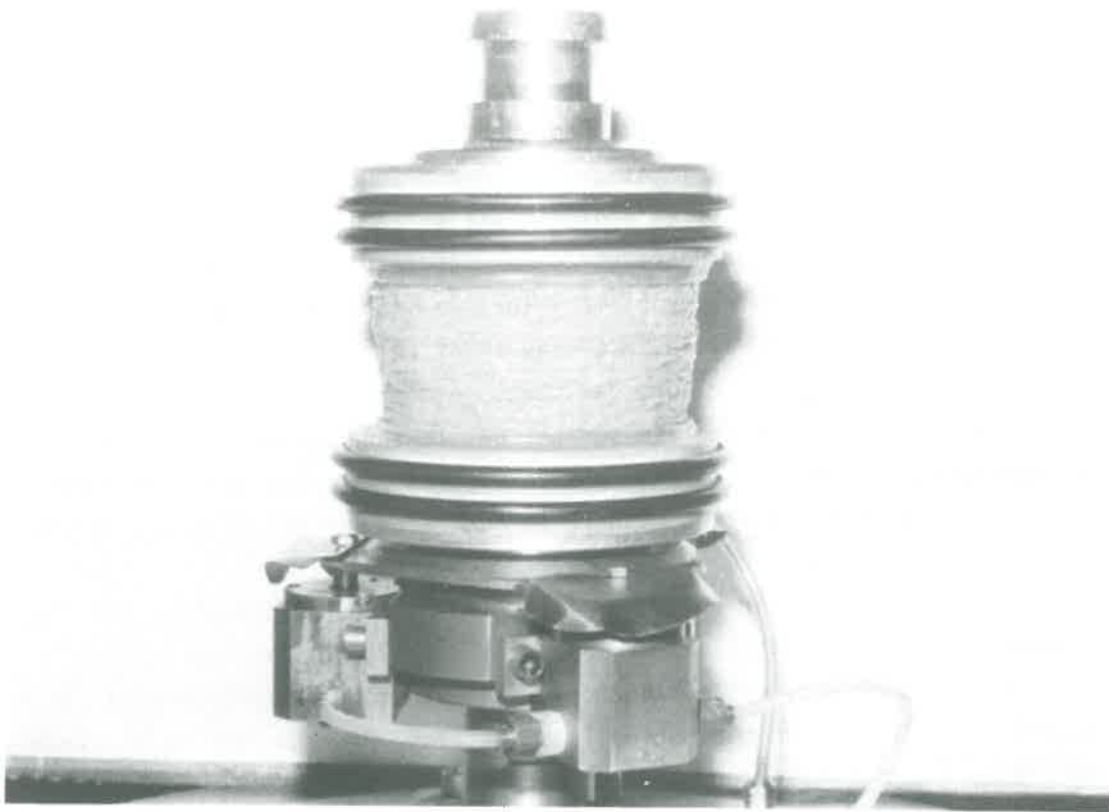
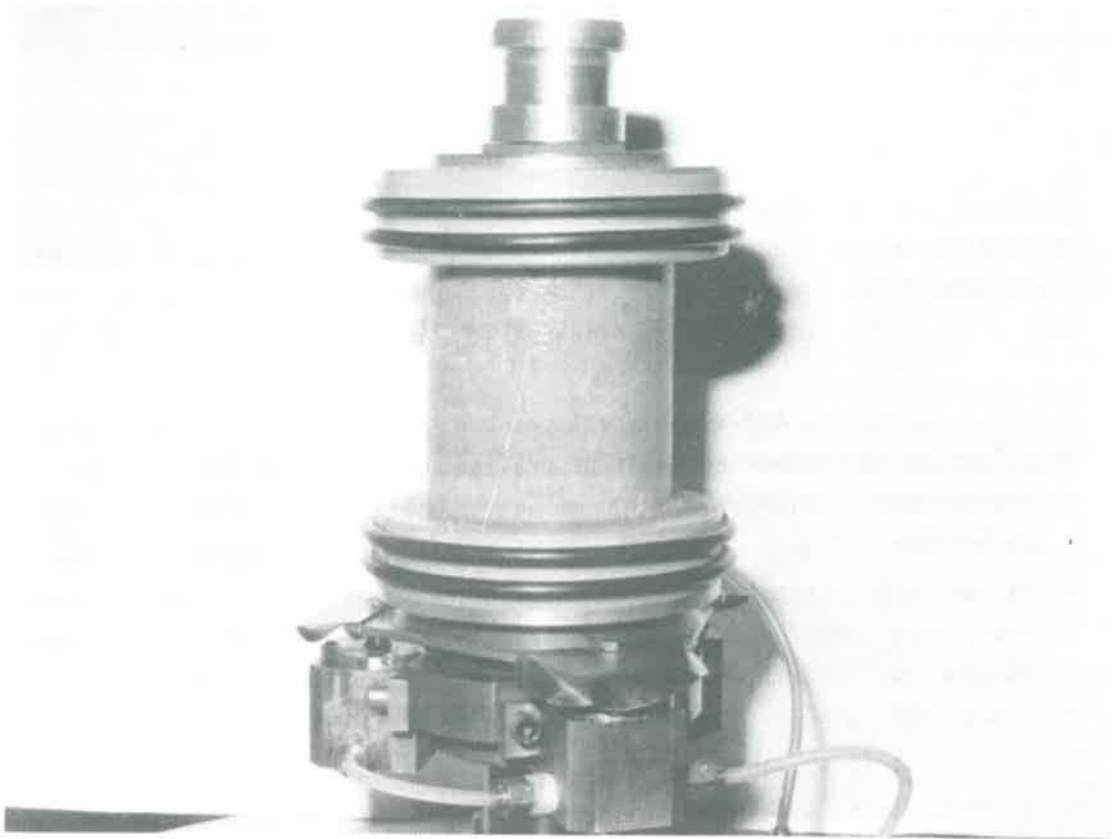


FIGURE I.13

Vues d'un échantillon de rapport 1, antifretté, à l'état initial et après 40% de déformation.

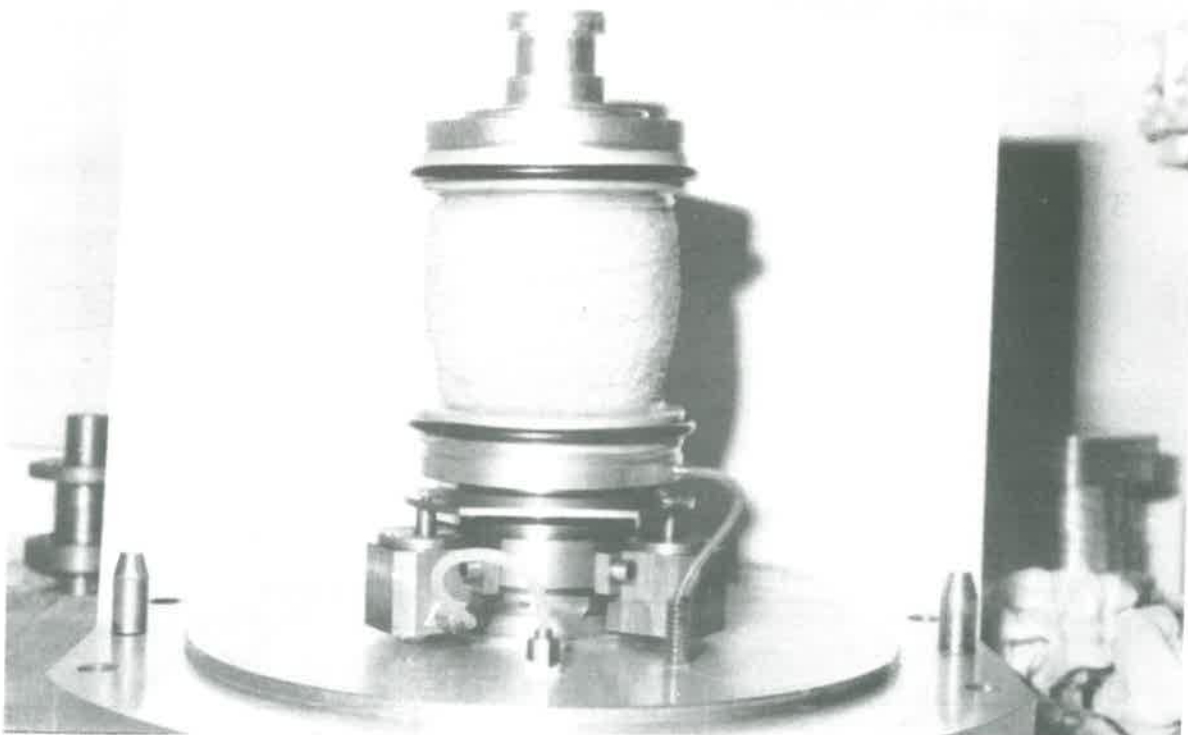
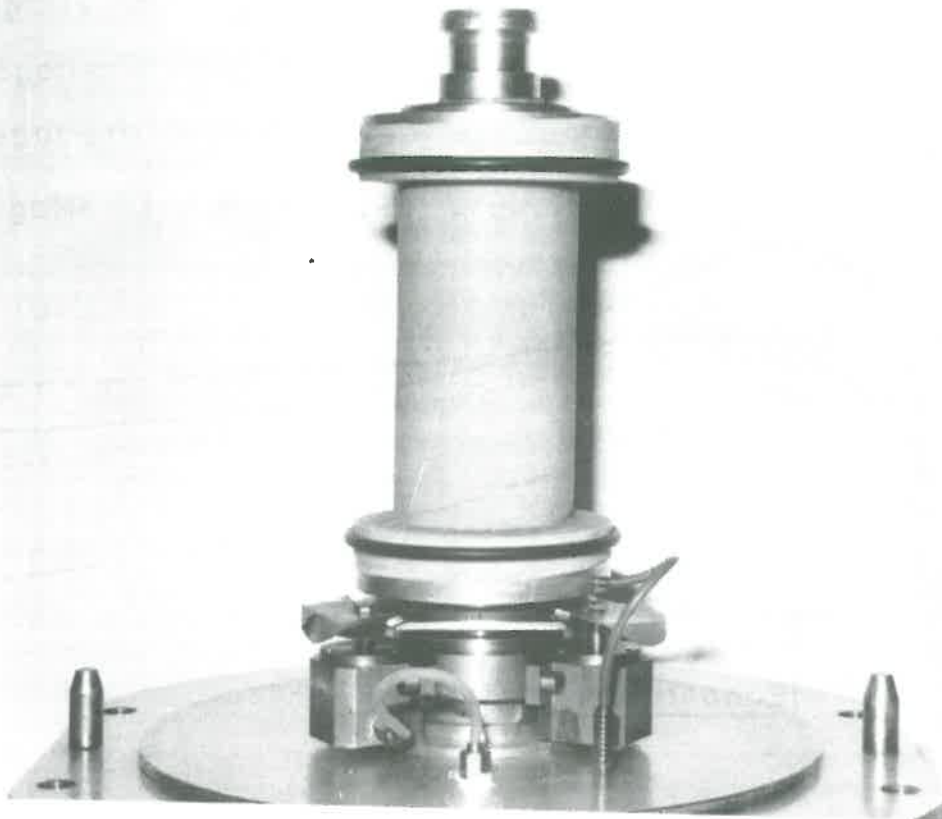


FIGURE I.14

Vues d'un échantillon de billes de verre, de rapport 2, antifretté, à l'état initial et après 40% de déformation.

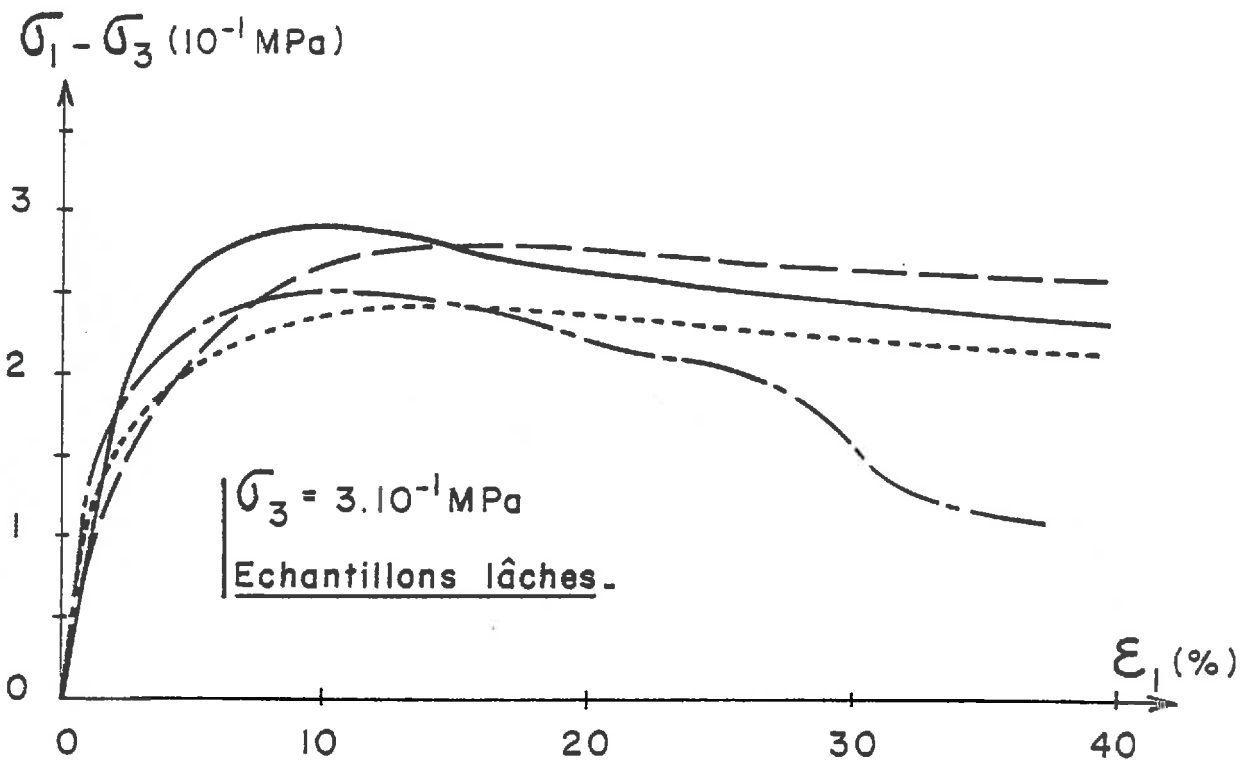
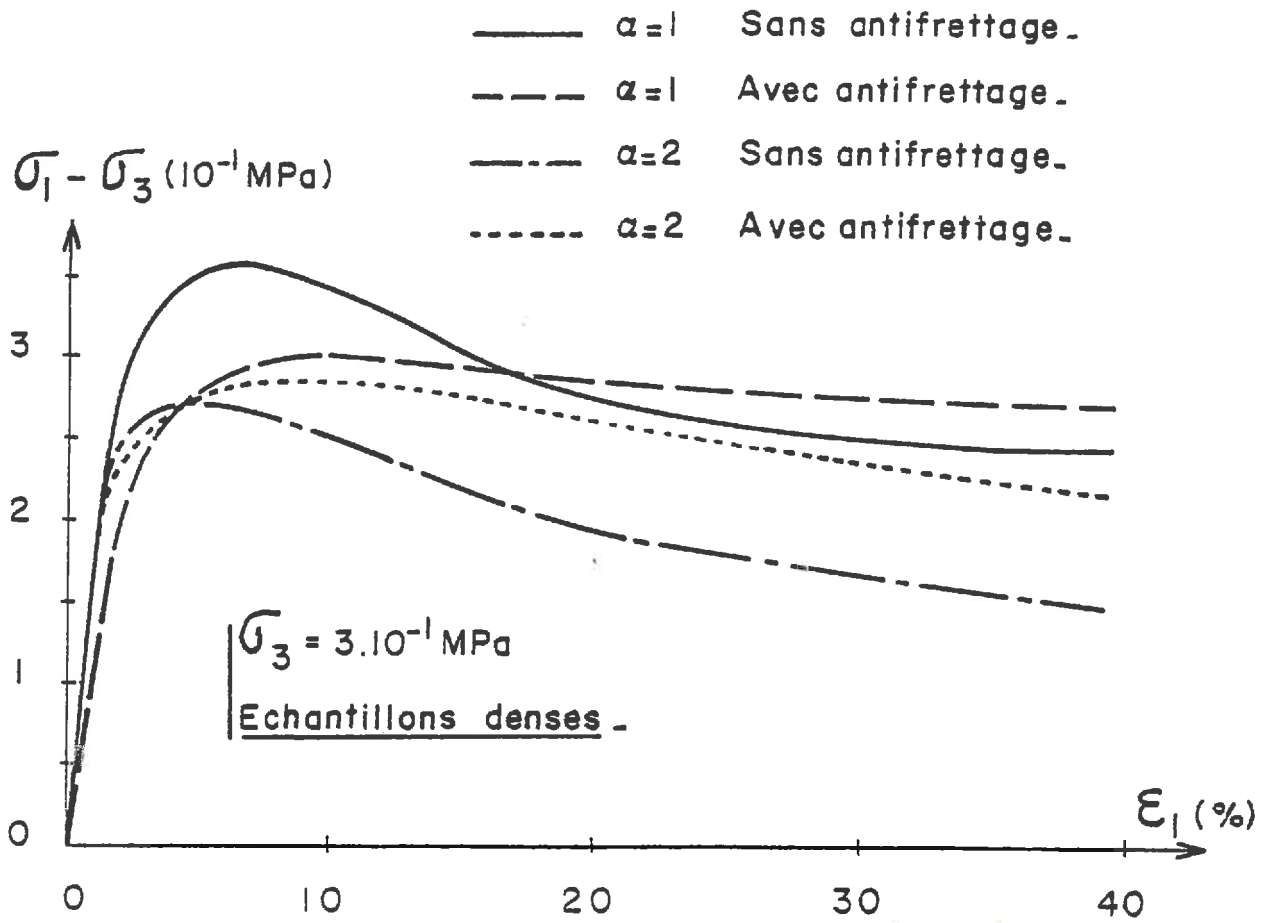


FIGURE I.15

Billes de verre : influence du rapport d'élanement et de l'antifrettage sur l'évolution de la contrainte

les échantillons denses, et surtout pour les échantillons lâches. Les échantillons frettés donnent toujours un pic, plus marqué et plus haut, et un palier de contrainte plus bas. On peut penser que cette rigidité initiale est due à la formation de deux coins rigides qui se rencontrent au milieu de l'échantillon, alors que la chute de contrainte provient de la formation du tonneau, qui est particulièrement important, puisqu'on a empêché, dans ce type d'essai, toute extension des sections extrêmes, en utilisant des têtes de compression de même diamètre que le diamètre initial de l'échantillon. Pour les échantillons de rapport 2, le tonneau apparaît rapidement, il est très marqué, le niveau de contrainte est toujours plus bas. Les coins rigides n'affectent pas beaucoup le milieu de l'échantillon, le pic est donc peu élevé, même pour les échantillons sans antifretage. Ces échantillons sont instables et peuvent présenter des chutes importantes de contrainte, à partir de 25 % de déformation. La figure 1. 16 montre l'évolution du diamètre médian dans chaque type d'essai, les valeurs les plus grandes correspondant aux tonneaux les plus marqués.

Le fait que les échantillons antifrettés de rapport 2 donnent des paliers de contrainte plus faible que les échantillons de rapport 1, semble provenir d'un problème expérimental : le tonneau est beaucoup plus difficile à supprimer pour les échantillons élancés. En effet, sur quelques échantillons de rapport 2 ayant un antifretage particulièrement réussi, on a retrouvé exactement les courbes de contrainte des échantillons antifrettés de rapport 1 (figure I.17). Ce sont ces courbes qui pourraient donc représenter le mieux le comportement réel du matériau.

Cette étude montre bien que l'élancement et l'antifretage de l'échantillon sont des facteurs prépondérants, déterminant l'évolution des contraintes mesurées au cours d'un essai de compression triaxiale de révolution. A la précision de nos mesures, les courbes de densité semblent très peu affectées par ces conditions expérimentales. On peut penser que la densité est toujours à peu près homogène dans la section médiane, même lorsque la répartition de contrainte est hétérogène.

- $\alpha = 1$ Sans antifrettage.
- - - - $\alpha = 1$ Avec antifrettage.
- . - . $\alpha = 2$ Sans antifrettage.
- $\alpha = 2$ Avec antifrettage.

Diamètre (mm)

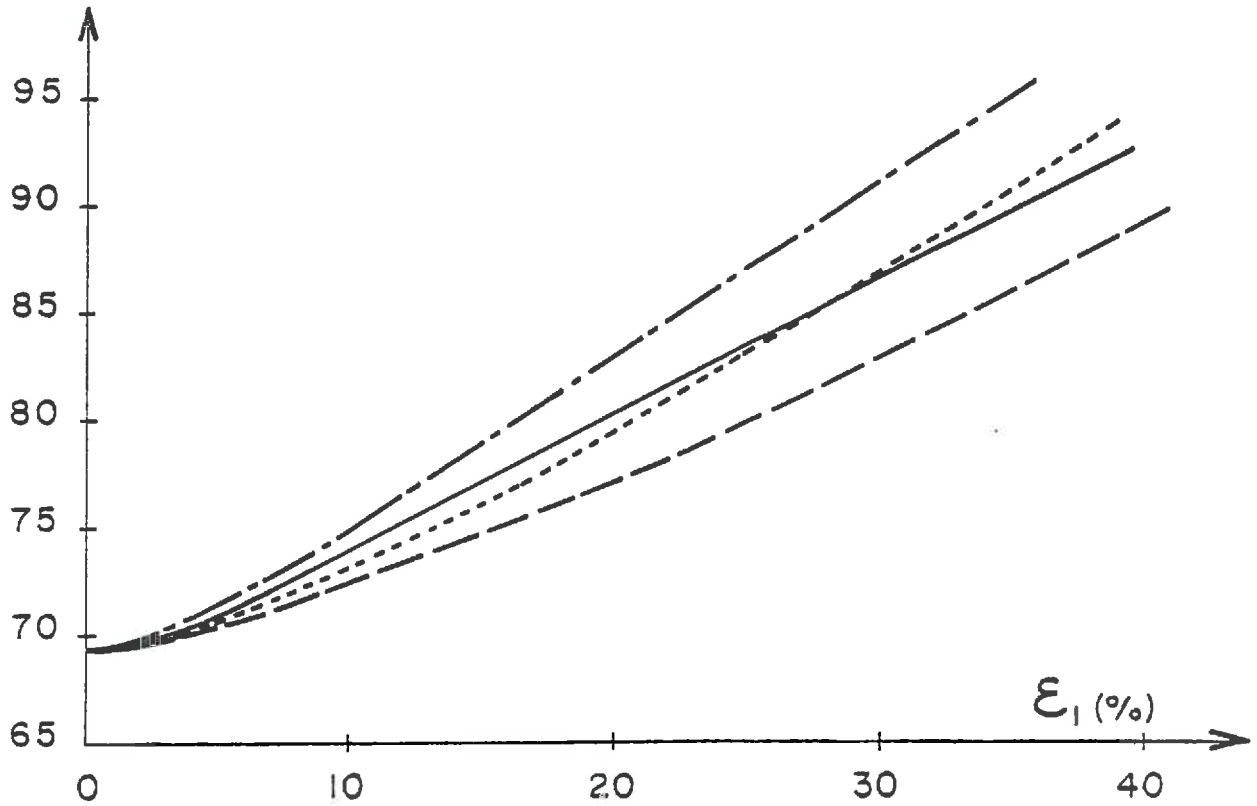


FIGURE I.16

Billes de verre : influence du rapport d'élongement et de l'antifrettage sur l'évolution du diamètre médian.

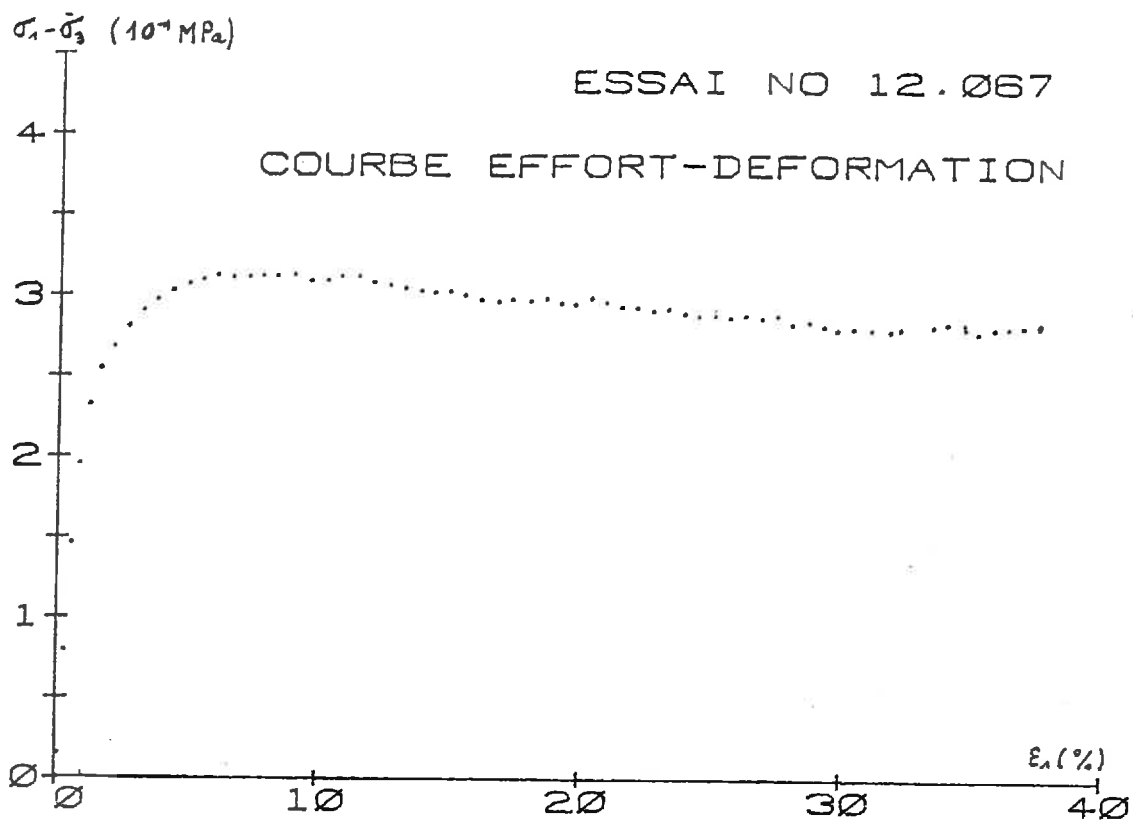
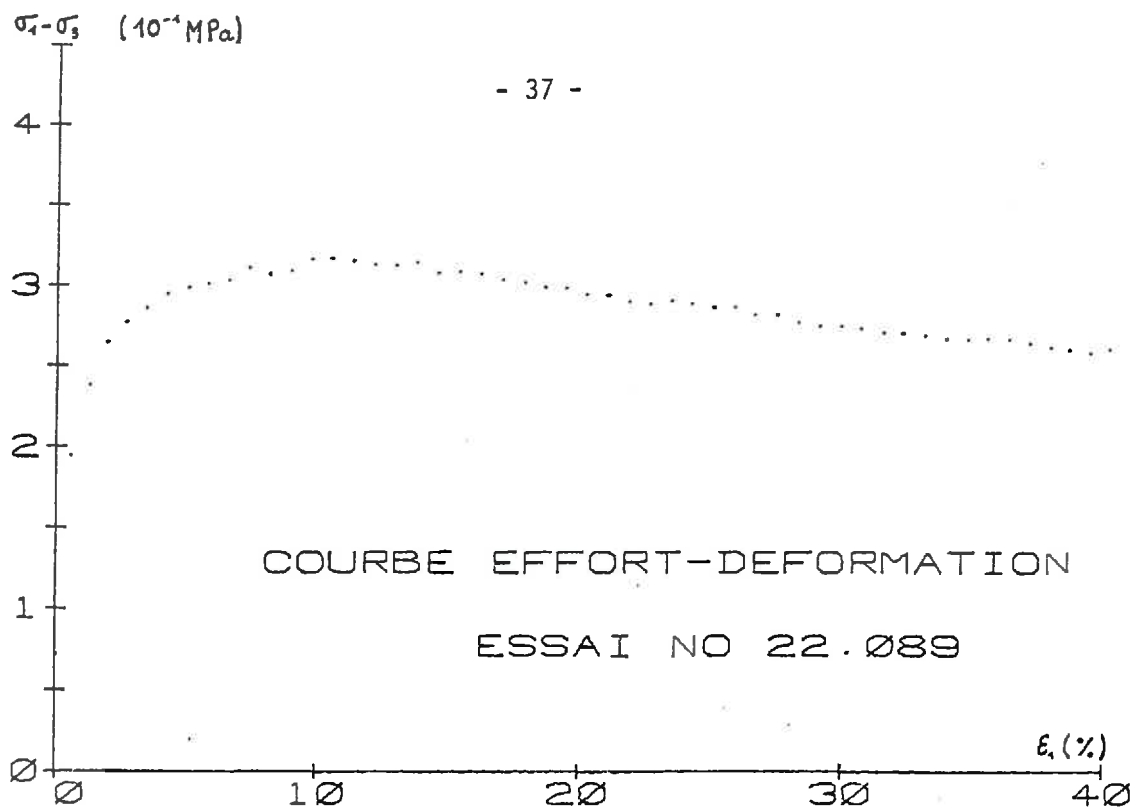


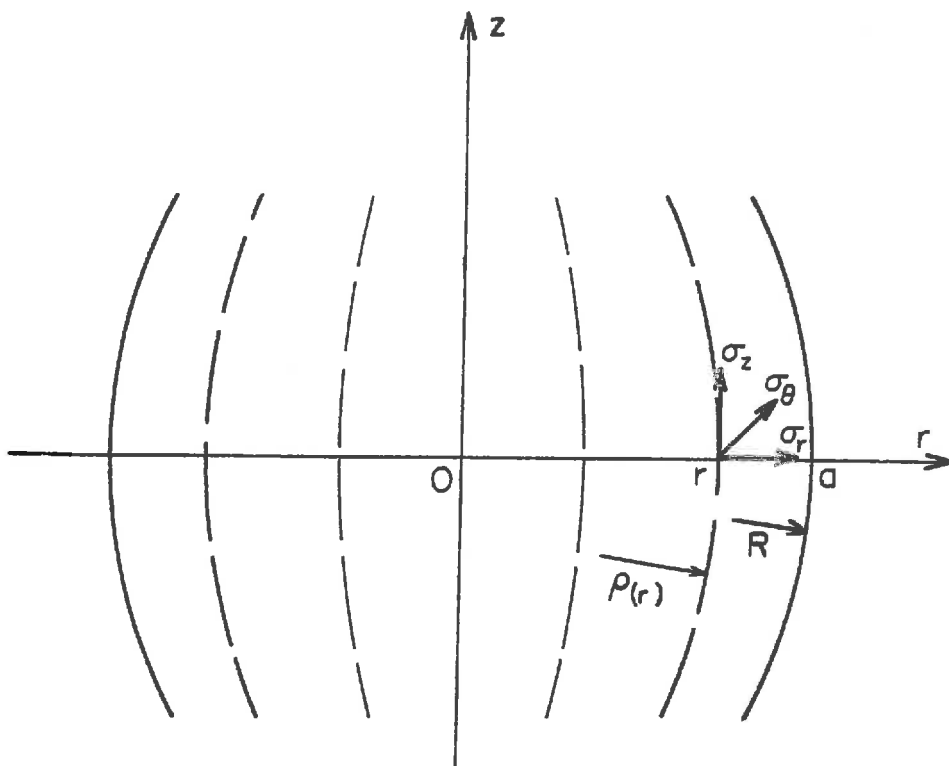
FIGURE I.17

Billes de verre : résultats de deux essais de compression réalisés sur deux échantillons, l'un de rapport 1 (essai 67), l'autre de rapport 2 (essai 89), antifrettés.

3) Etude théorique de la déformation en tonneau

On cherche à déterminer, par un calcul théorique, la répartition des contraintes dans la section médiane en plasticité, lors d'un essai de compression triaxiale, quand l'échantillon cylindrique se déforme en tonneau. Etant données les hypothèses que l'on va faire, ce calcul n'a pas la prétention de résoudre le problème exact ; il s'agit seulement d'avoir une idée de la répartition de contrainte, pour expliquer les résultats présentés précédemment.

On considère la famille des lignes isostatiques qui coupent à angle droit le plan médian de l'échantillon, qui est une isostatique particulière.



On se place dans le plan médian ($z = 0$), où σ_θ , σ_r et σ_z sont les contraintes principales. On suppose que les contraintes sont de révolution ($\sigma_r = \sigma_\theta$), et que toute la section est en plasticité, avec un critère de Coulomb :

$$\sigma_z = \alpha \sigma_r$$

$\rho(r)$ est le rayon de courbure des lignes isostatiques dans le plan méridien. Il est positif lorsque la concavité est tournée vers les r positifs. On choisit :

$$\frac{1}{\rho(r)} = -\frac{1}{R} \times \frac{r}{a}$$

a étant le rayon de la section médiane, et R la courbure de la surface libre, qui est une isostatique particulière. (On a effectué le calcul avec d'autres formes de la fonction ρ , l'allure de la répartition de contrainte reste la même). Les équations d'équilibre donnent :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_z - \sigma_r}{\rho(r)} = 0$$

Puisque l'on a :

$$\sigma_z = \alpha \sigma_r$$

et

$$\frac{1}{\rho(r)} = -\frac{r}{R a}$$

on trouve :

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = \frac{\alpha - 1}{a R} r dr$$

équation que l'on intègre facilement :

$$\sigma_r = A e^{\frac{\alpha - 1}{2aR} r^2}$$

Sur la surface libre, σ_r est égale à la pression de confinement P_0

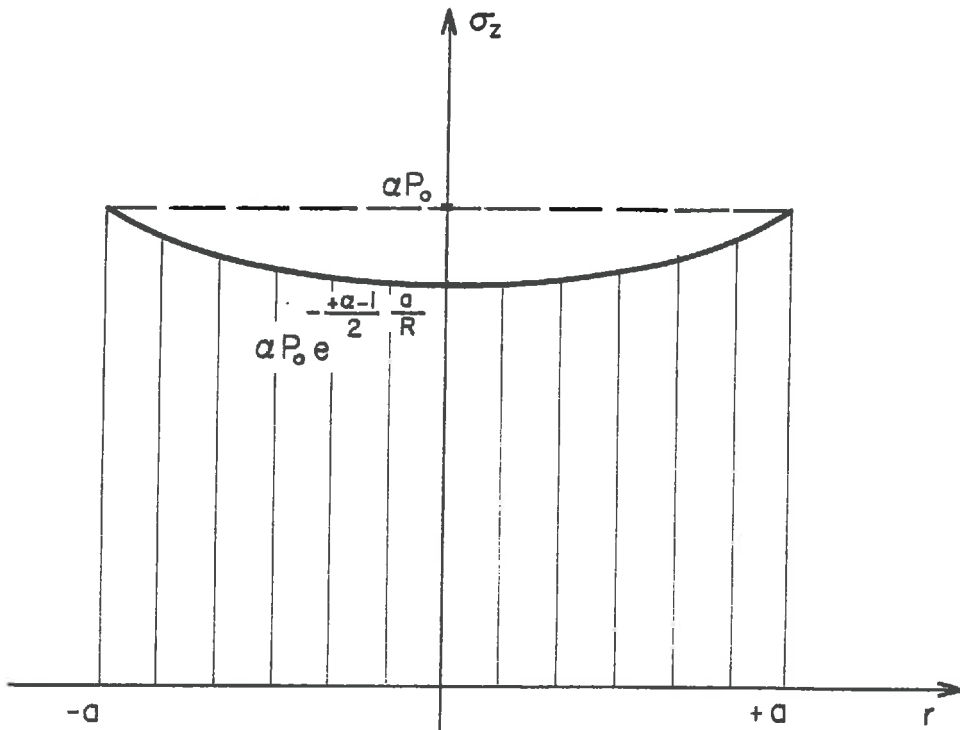
D'où

$$\sigma_r = P_0 e^{\frac{\alpha - 1}{2} \frac{a}{R} \left(\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1\right)}$$

et

$$\sigma_z = \alpha P_0 e^{\frac{\alpha - 1}{2} \frac{a}{R} \left(\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1\right)}$$

ce qui donne la forme de la répartition de σ_z dans la section médiane :



Appliquons ce résultat à un essai à 0,3 MPa de pression latérale réalisé sur un échantillon de billes de verre, de rapport 1, sans antifretage. On peut prendre, à 40 % de déformation, par exemple :

$$a = 45 \text{ mm} \quad \text{et} \quad R = 180 \text{ mm}$$

Sur les échantillons antifrettés on a trouvé un angle de frottement de 18 degrés, ce qui correspond à $\alpha = 1,9$. D'après le calcul précédent, la contrainte axiale σ_z varie entre 0,51 et 0,57 MPa. La valeur moyenne $\bar{\sigma}_z$, qui est la valeur mesurée expérimentalement est égale à 0,53 MPa ; c'est-à-dire que le

déviateur de contrainte que l'on mesure, celui que l'on a tracé sur la figure I.15, est égal à 0,23 MPa, ce qui correspond à un angle de frottement de 16 degrés. On retrouve, à peu près, le niveau du palier expérimental pour les échantillons sans antifretage de rapport 1. Pour les essais de rapport 2, le terme a/R étant plus grand, le palier sera encore plus bas.

Un calcul analogue sera effectué au chapitre D pour estimer l'influence de la striction, au cours des essais d'extension.

4) Préparation de l'échantillon

Les échantillons lâches sont obtenus en déposant les grains continûment, avec une hauteur de chute quasi-nulle. On arrive ainsi à obtenir une bonne homogénéité en densité le long de la hauteur : l'intervalle de variation ne dépasse pas 1 % autour de la valeur moyenne (figure I.18).

La préparation des échantillons denses est plus délicate. La densification est effectuée à l'aide d'une dame de diamètre très inférieur au diamètre de l'échantillon. On dame successivement des couches de matériau d'environ 10 mm d'épaisseur, les interfaces entre les couches étant scarifiées pour éviter une stratification trop importante. Ce procédé permet d'obtenir des échantillons très denses, en particulier avec du sable. Leur homogénéité dépend de la vigueur avec laquelle on a damé les couches successives. Si, par exemple, on densifie chaque couche avec le même nombre de coups, on obtient une répartition de densité presque linéaire, le bas de l'échantillon étant beaucoup plus dense que le haut, puisqu'il a supporté les coups donnés successivement à toutes les couches. On peut voir, sur la figure I.19c l'allure d'un tel échantillon après écrasement. La figure I.19b montre l'évolution du profil de densité. La déformation s'est concentrée dans la partie supérieure, plus lâche, donc moins rigide. Le bas de l'échantillon n'a pratiquement pas évolué, après 20 % de déformation totale. La figure I.19a montre les variations de densité d'un échantillon présentant un profil initial de densité plus resserré, et surtout non monotone. Dans ce cas, le profil se déplace vers les faibles densités, en conservant la même

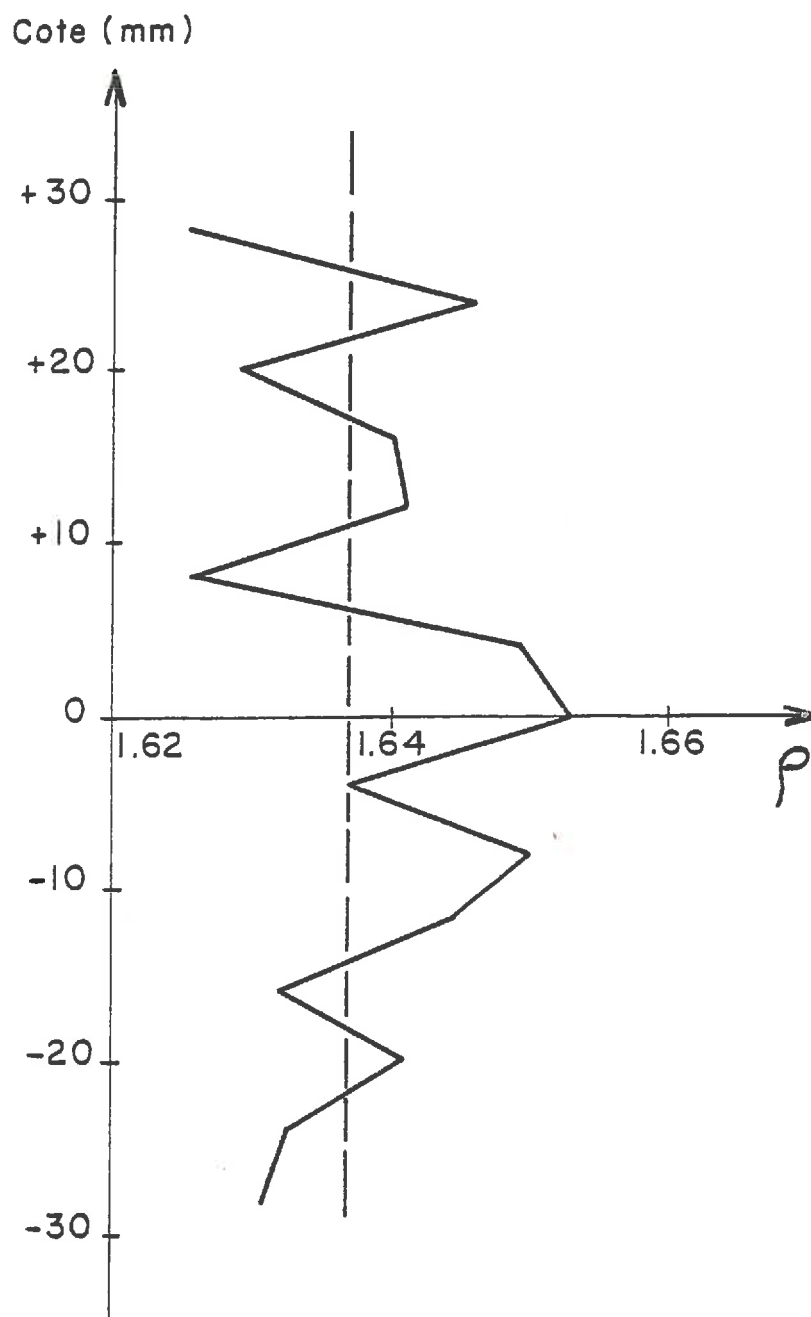


FIGURE I.18

Exemple de profil initial de densité d'un échantillon de sable lâche

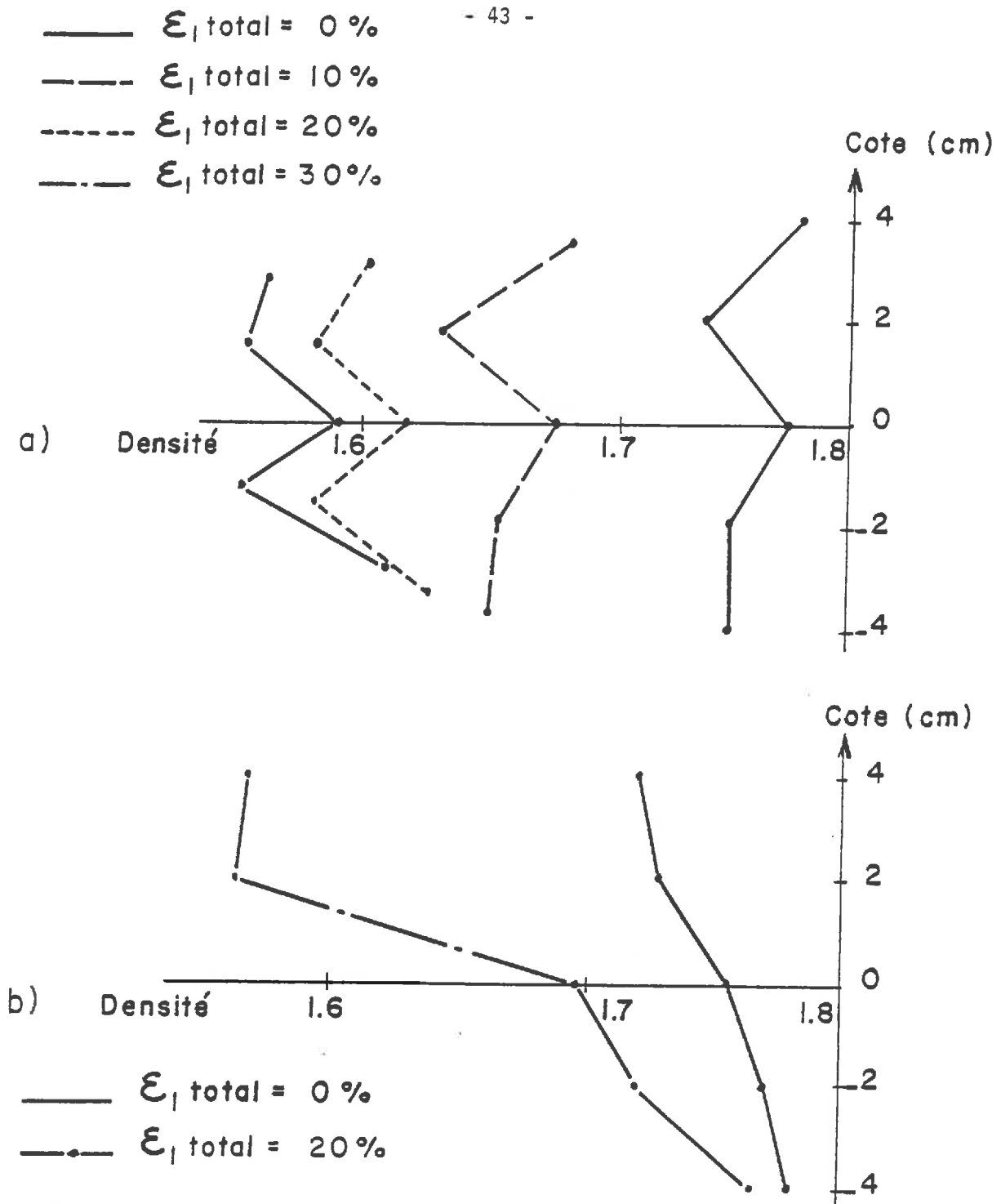


FIGURE I.19

Exemples d'évolution du profil de densité
pour deux échantillons de sable denses



FIGURE I.19c

Exemple de déformation d'un échantillon de sable de rapport 2, antifretté, après 20% d'écrasement.

forme. La formation du tonneau semble bloquer la déformation de l'extrémité inférieure de l'échantillon, à partir de 20 % de déformation. Précisons qu'il s'agit, dans les deux exemples précédents, d'échantillons antifrettés de rapport 2. La comparaison de la figure I.19a avec la figure I.1f concernant un échantillon sans antifrettage se passe de commentaires !

Ainsi, l'existence d'une zone importante plus lâche que le reste de l'échantillon, entraîne la localisation de la déformation dans cette zone. Dans le cas contraire, la déformation reste homogène, même si le profil initial de densité est assez irrégulier.

5) Forme de l'échantillon

Nous avons mis au point un moule permettant de fabriquer des échantillons à section carrée, de rapport hauteur sur côté égal à 1 ou 2. Il était intéressant pour nous d'observer le comportement d'un échantillon cubique, puisque nous comparons plus loin, les résultats obtenus avec l'appareil triaxial de révolution et avec une presse véritablement triaxiale, qui utilise des échantillons cubiques.

Un système d'antifrettage, analogue à celui décrit précédemment, avec des membranes de caoutchouc carrées, a permis une déformation convenable des échantillons, qui restent parallélépipédiques, après 40 % de déformation (figure I.20). Le calcul de la section médiane est cependant toujours très délicat. La seule longueur que l'on peut mesurer correctement est la diagonale. Mais les angles du carré étant légèrement arrondis, d'autant plus, d'ailleurs que l'échantillon a été écrasé, supposer que la dimension mesurée est exactement la diagonale conduit à des erreurs importantes sur la valeur de la section ; la correction à effectuer est difficile à évaluer. On ne se trouve pas non plus dans les meilleures conditions pour faire les mesures de densité : lorsqu'on se place à un point anguleux, un petit décalage entre l'axe du faisceau radioactif et l'axe du système télémétrique provoque une erreur non négligeable sur la mesure.

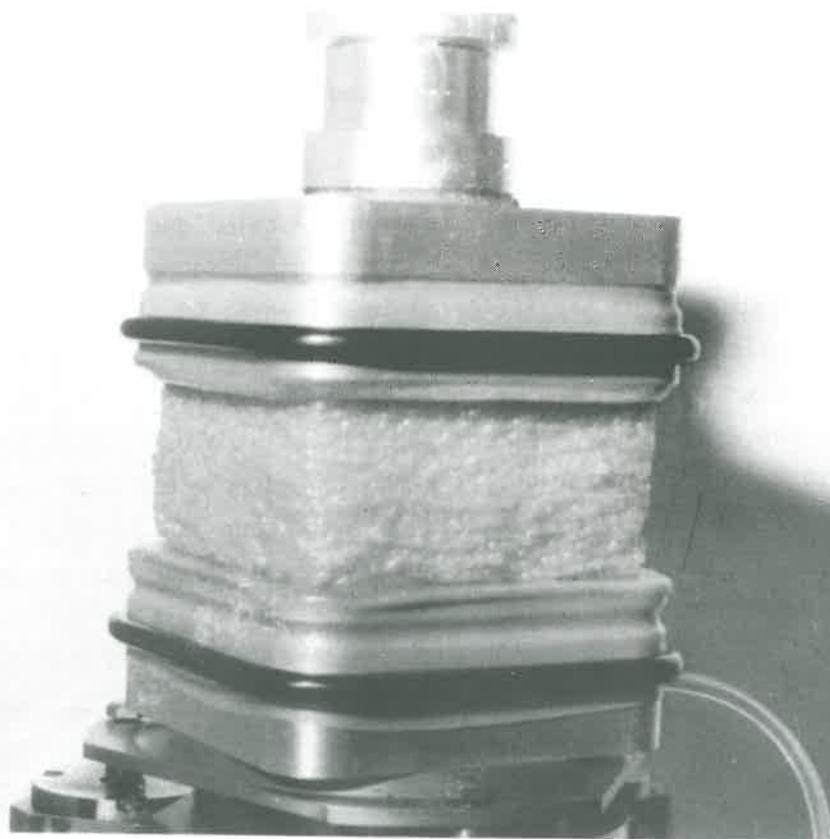
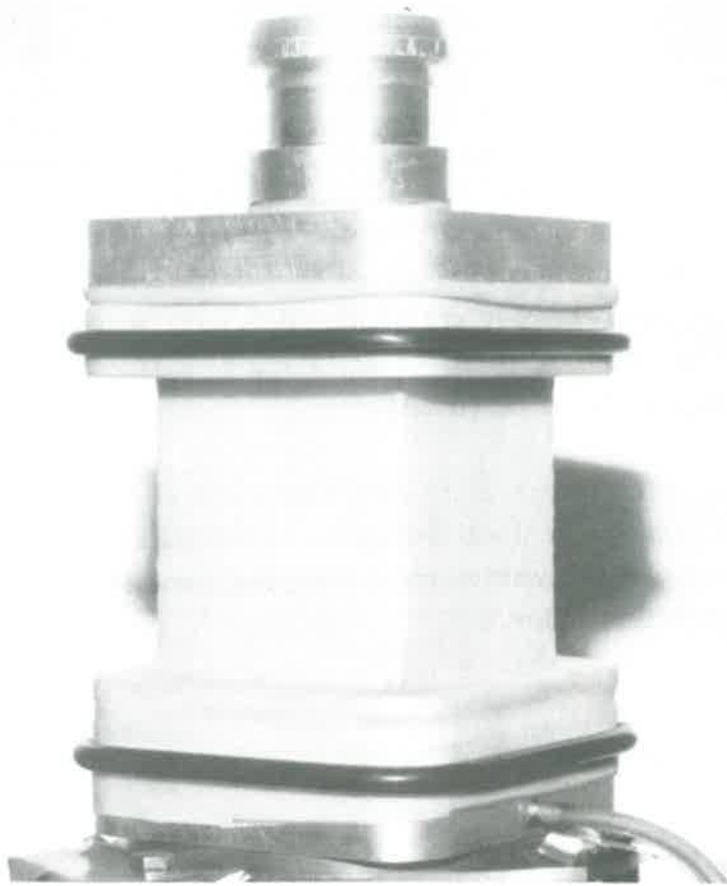


FIGURE I.20

Vues d'un échantillon de billes de verre, de section carrée, de rapport 1 anti-fretté, à l'état initial et après 40% de déformation.

Malgré ces réserves sur la précision des mesures, les résultats évalués pour les échantillons ayant gardé une section carrée au cours de l'essai ont fait apparaître une très bonne concordance avec les résultats de compression des échantillons antifrettés à section circulaire, à la fois en contrainte et en densité. Les figures I.21 et I.22 montrent les courbes obtenues avec des échantillons antifrettés respectivement cubiques, et cylindriques de révolution, pour deux densités initiales.

Il semble donc que la forme de la section de l'échantillon n'affecte pas les essais de compression.

6) Conclusion : les conditions expérimentales optimales

Notre étude a permis de mettre en évidence que les deux facteurs déterminants sont l'élanement de l'échantillon et le système d'antifrettage. Les essais de compression que l'on présente dans le chapitre suivant sont donc tous effectués sur des échantillons de rapport d'élanement égal à 1, et antifrettés avec le dispositif le plus efficace.

L'influence des têtes rotulées n'a pas paru évidente ; on les a utilisées puisqu'elles améliorent le centrage de la force axiale.

Les échantillons cubiques ne permettent pas d'obtenir une bonne précision sur les résultats ; on a toujours travaillé avec des échantillons cylindriques de révolution.

Enfin, la préparation des échantillons a toujours été très soignée pour éviter qu'une répartition de densité trop hétérogène n'entraîne une localisation de la déformation.

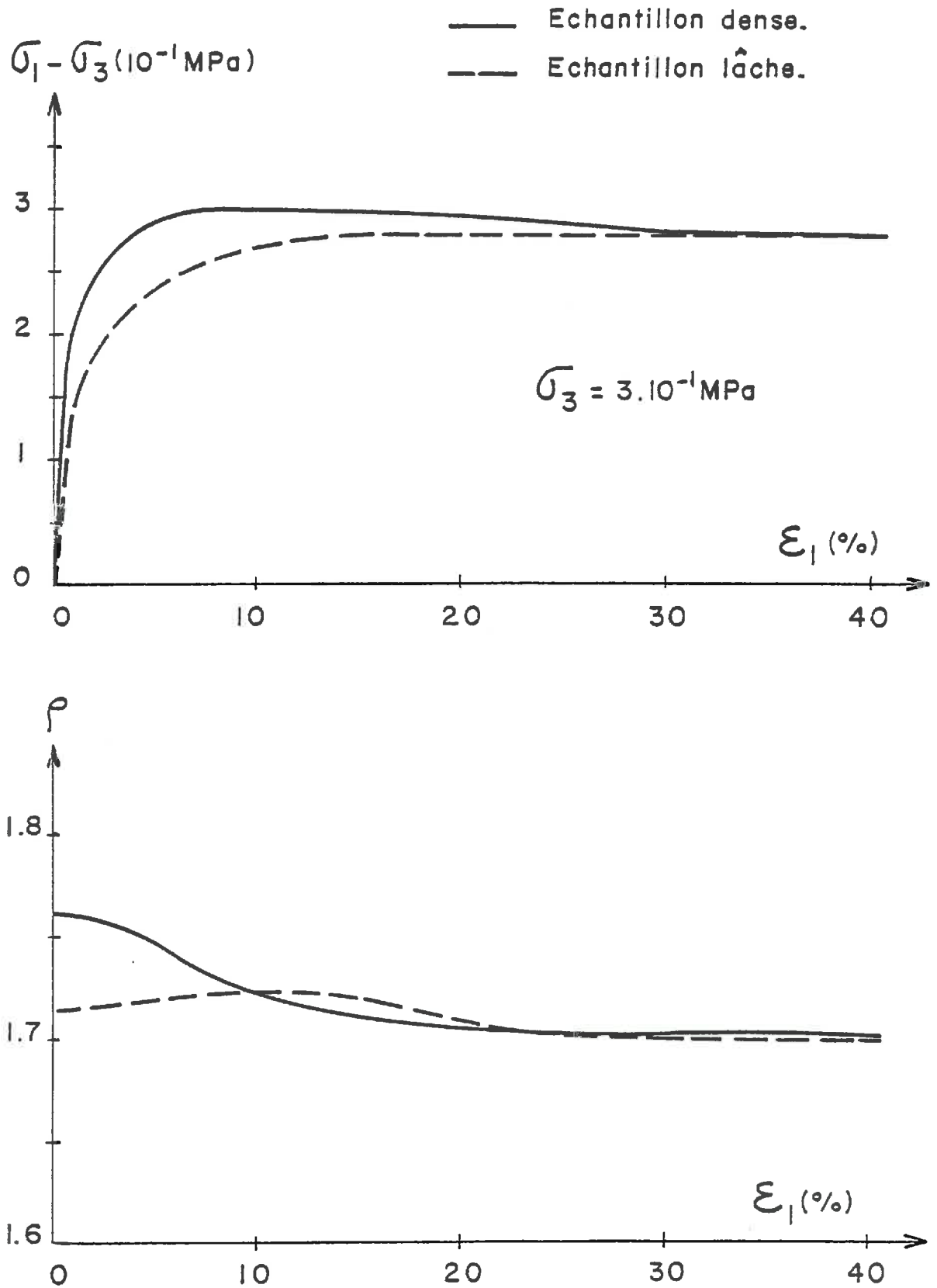


FIGURE I.21
Billes de verre ; échantillons de rapport 1
antifrettés, à section carrée

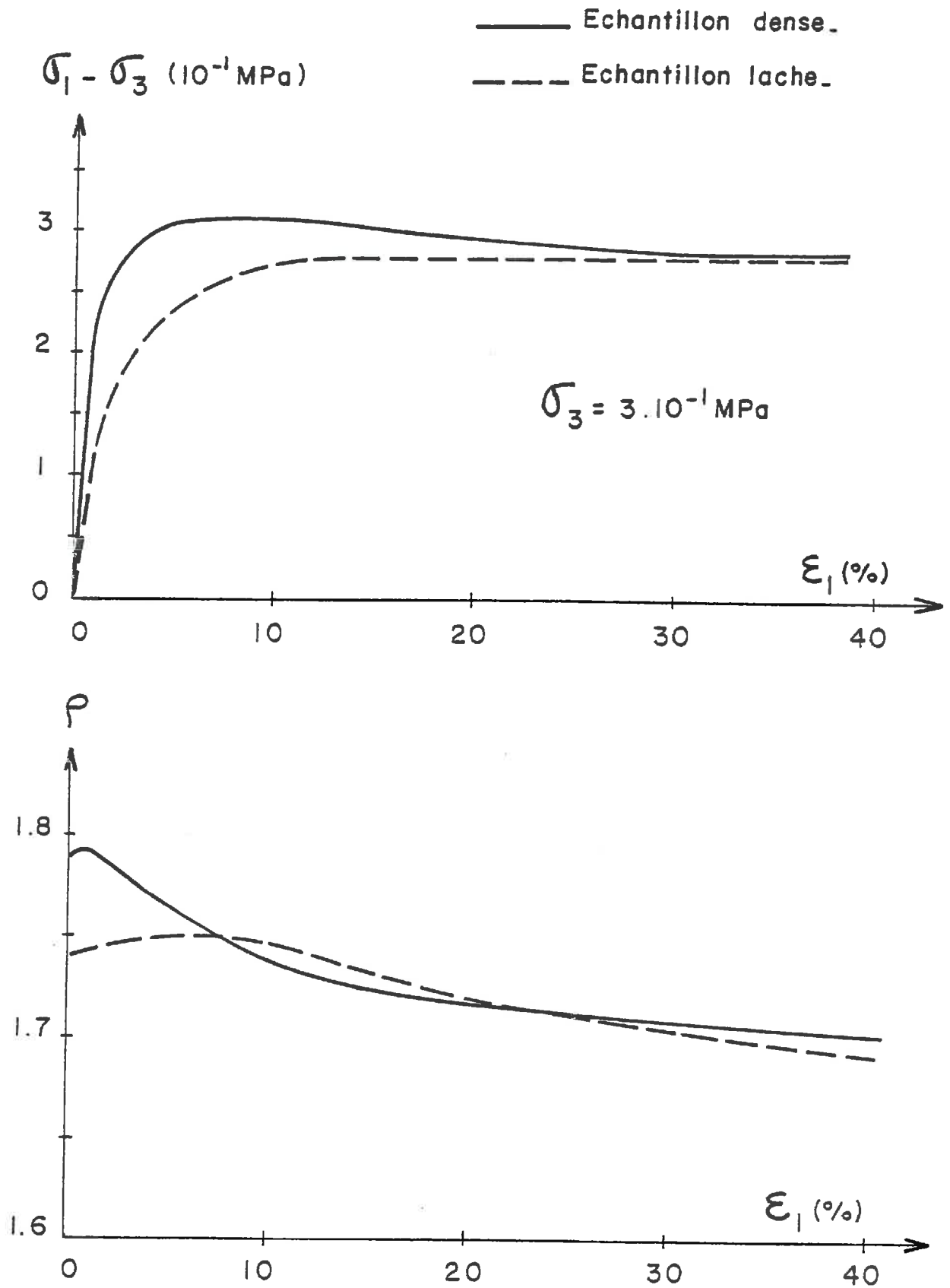


FIGURE I.22

Billes de verre ; échantillons de rapport 1, antifrettés,
à section circulaire

CHAPITRE C : RESULTATS DES ESSAIS DE
COMPRESSION TRIAXIALE DE REVOLUTION

1) Présentation de l'étude

Les essais ont été réalisés avec l'appareil triaxial décrit dans le chapitre A, sur du sable d'Hostun, dont la courbe granulométrique est présentée sur la figure I.23. Les conditions expérimentales sont celles décrites dans la conclusion du chapitre B. La vitesse d'écrasement, constante au cours de l'essai est égale à 0,4 mm/mn ou 0,2 mm/mn, suivant le type de régulation effectué. L'essai est arrêté, en principe, après 40 % de déformation axiale. L'échantillon ne présentant jamais de ligne de rupture visible, cette valeur est arbitraire. Il est cependant difficile de conserver un échantillon cylindrique après 35 à 40 % de déformation.

La mesure de densité s'effectue le long d'un diamètre de la section médiane de l'échantillon, ce diamètre étant mesuré grâce au système télémétrique. Afin d'améliorer la précision, on fait la moyenne de deux mesures successives. La force axiale est également rapportée à la section médiane. La déformation axiale portée en abscisse des différentes courbes est égale au rapport de la variation de hauteur de l'échantillon sur sa hauteur initiale.

Trois types d'essais ont été effectués :

- essais à pression latérale constante
- essais à pression moyenne constante
- essais à déviateur de contrainte constant.

On a tracé sur la figure I.24, les trajets correspondants, dans le plan $p - q$ (p étant la pression moyenne et q la différence des contraintes principales extrêmes).

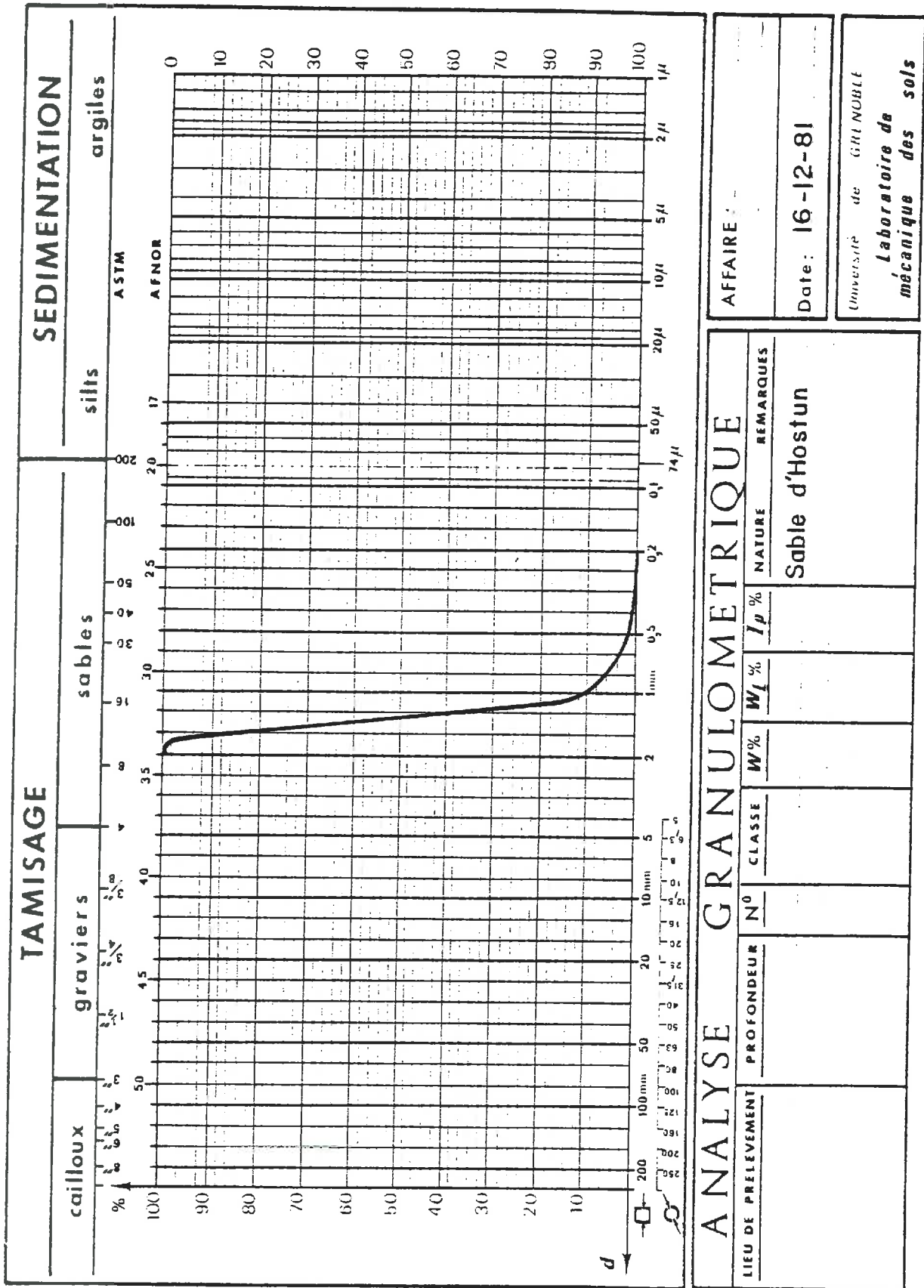


FIGURE I. 23

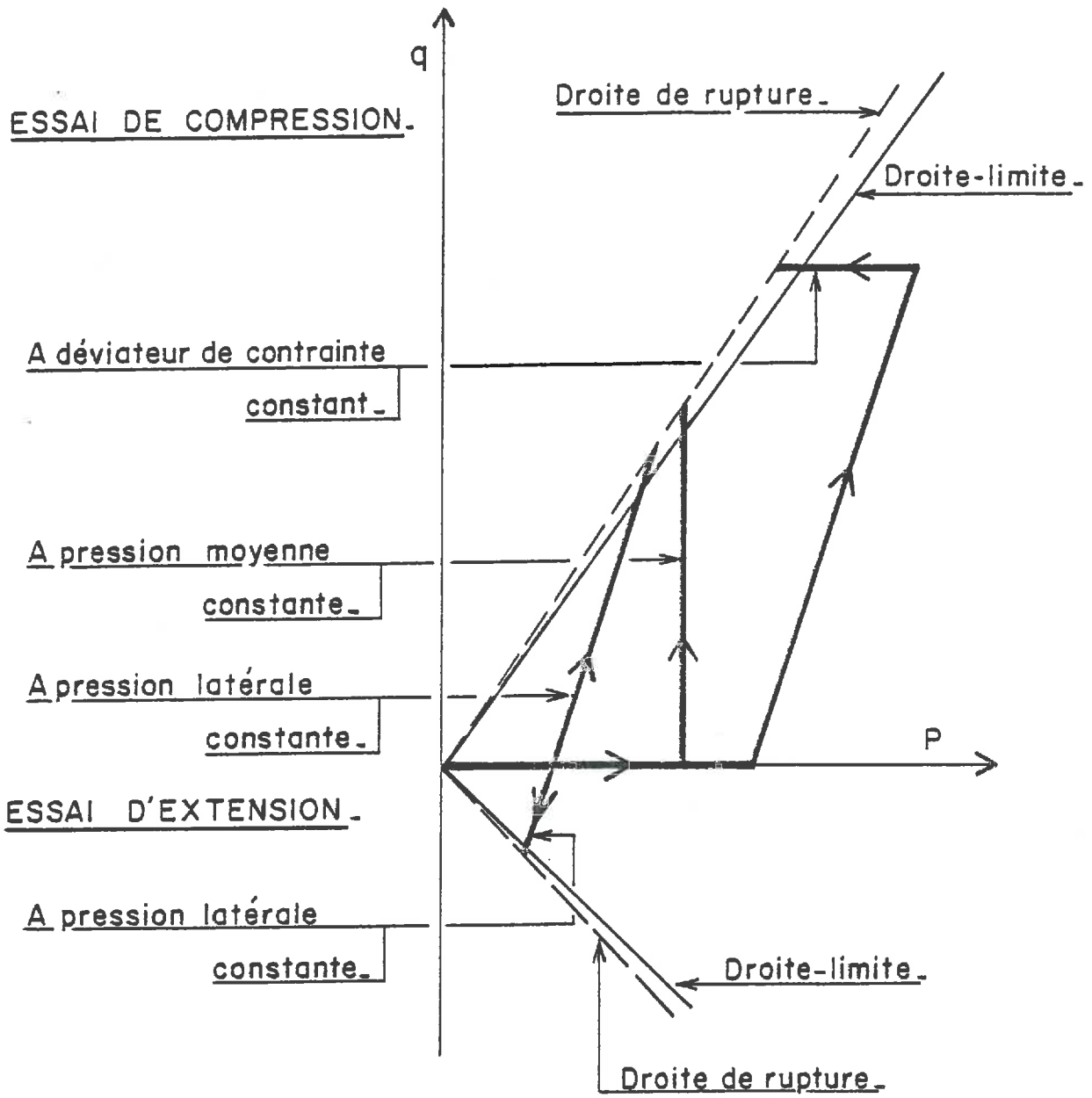


FIGURE I.24

Représentation dans le plan p - q des trajets de charge effectués

2) Essais à pression latérale constante

On a effectué des essais à 3 pressions σ_3 différentes (0,1 MPa, 0,3 MPa et 0,8 MPa), sur des échantillons de densités initiales diverses, qu'on a classés en échantillons "lâches" et échantillons "denses", suivant le mode de préparation, la fourchette de densité correspondant à chaque catégorie étant assez large : entre 1,58 et 1,67 pour les échantillons lâches, entre 1,75 et 1,80 pour les échantillons denses. Les caractéristiques des essais sont présentées dans le tableau suivant :

Essai	Type	Régulation	Pression latérale initiale	Densité initiale
61	Compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,1 MPa	1,77
60	Compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,1 MPa	1,67
85	Compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,80
86	Compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,60
59	Compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,8 MPa	1,78
29	Compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,8 MPa	1,57

Les courbes de contrainte et de densité obtenues sont rassemblées sur les figures I.25 et I.26.

- Palier de densité

Les courbes de densité présentent toutes un palier très net à partir de 3.0 % de déformation. Le niveau de ce palier dépend de la valeur de la pression

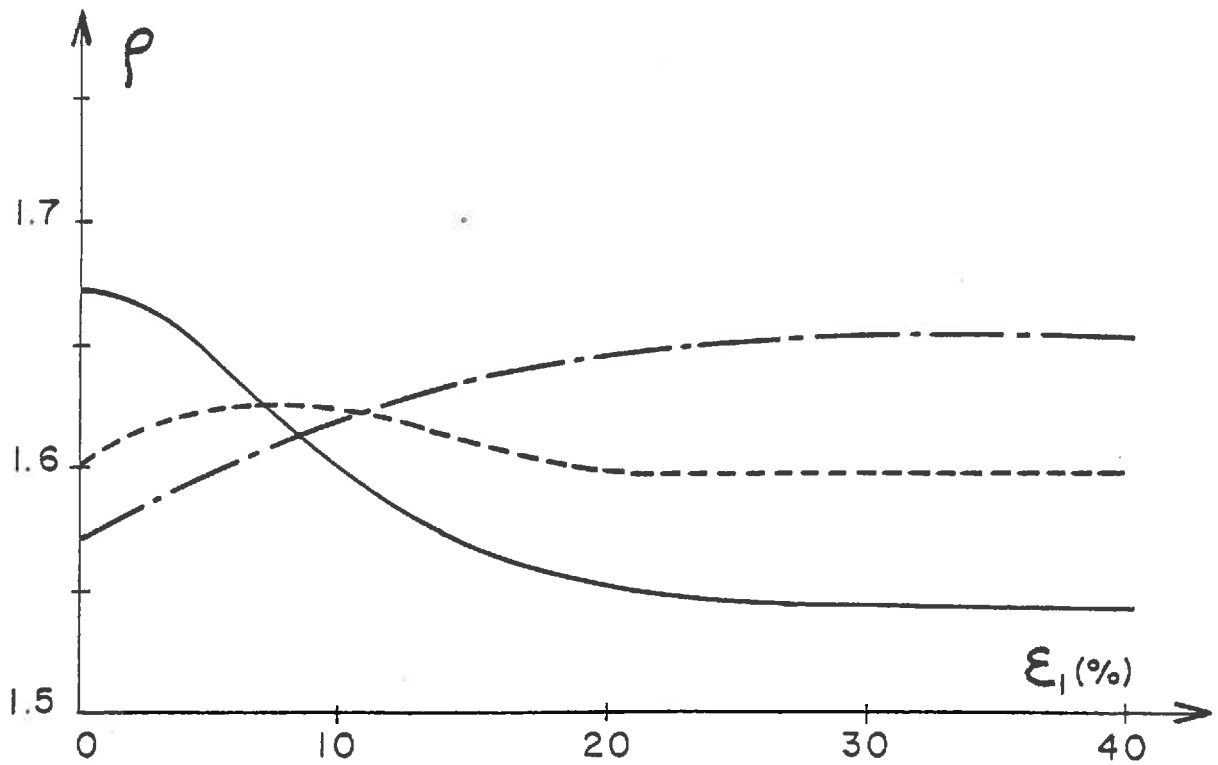
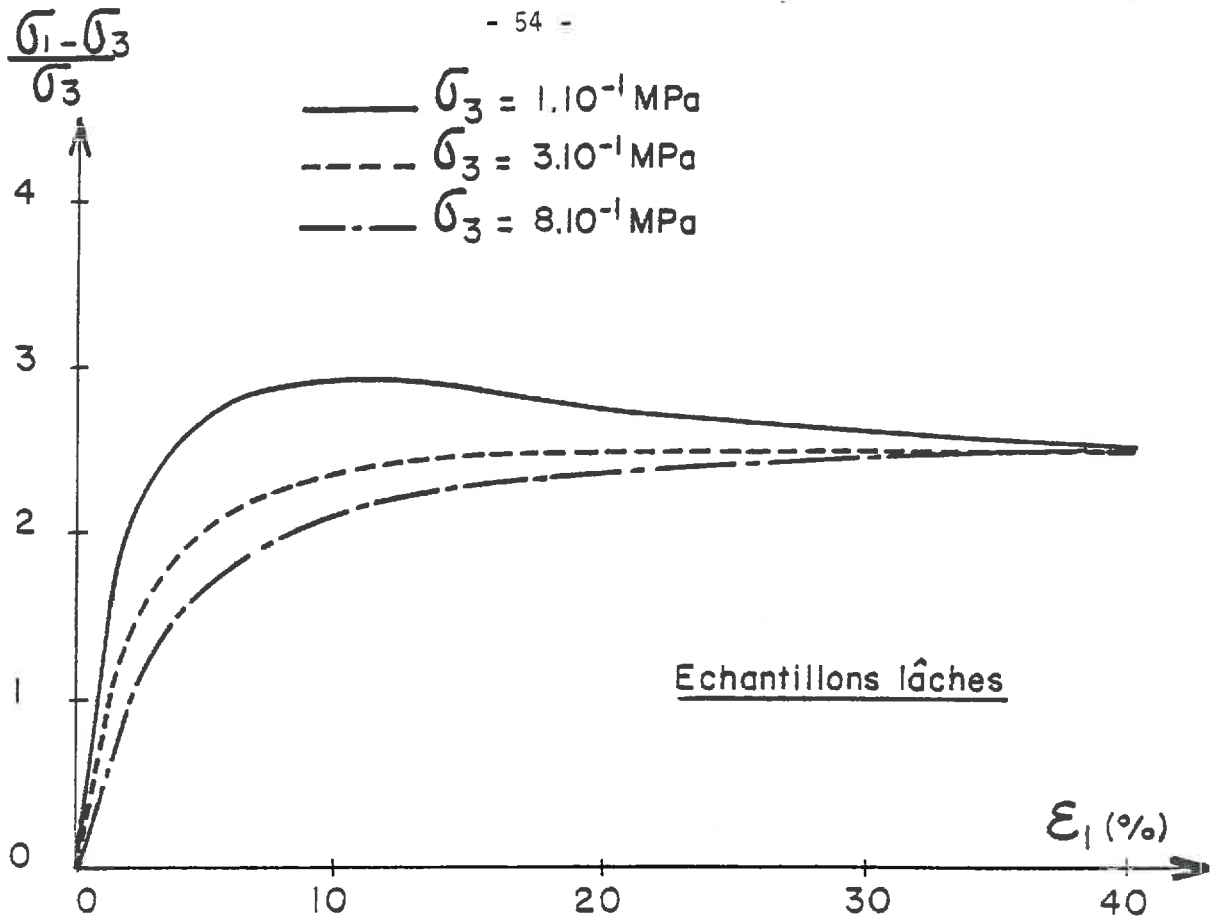


FIGURE I.25

Sablé lâche : résultats des essais de compression à pression latérale constante

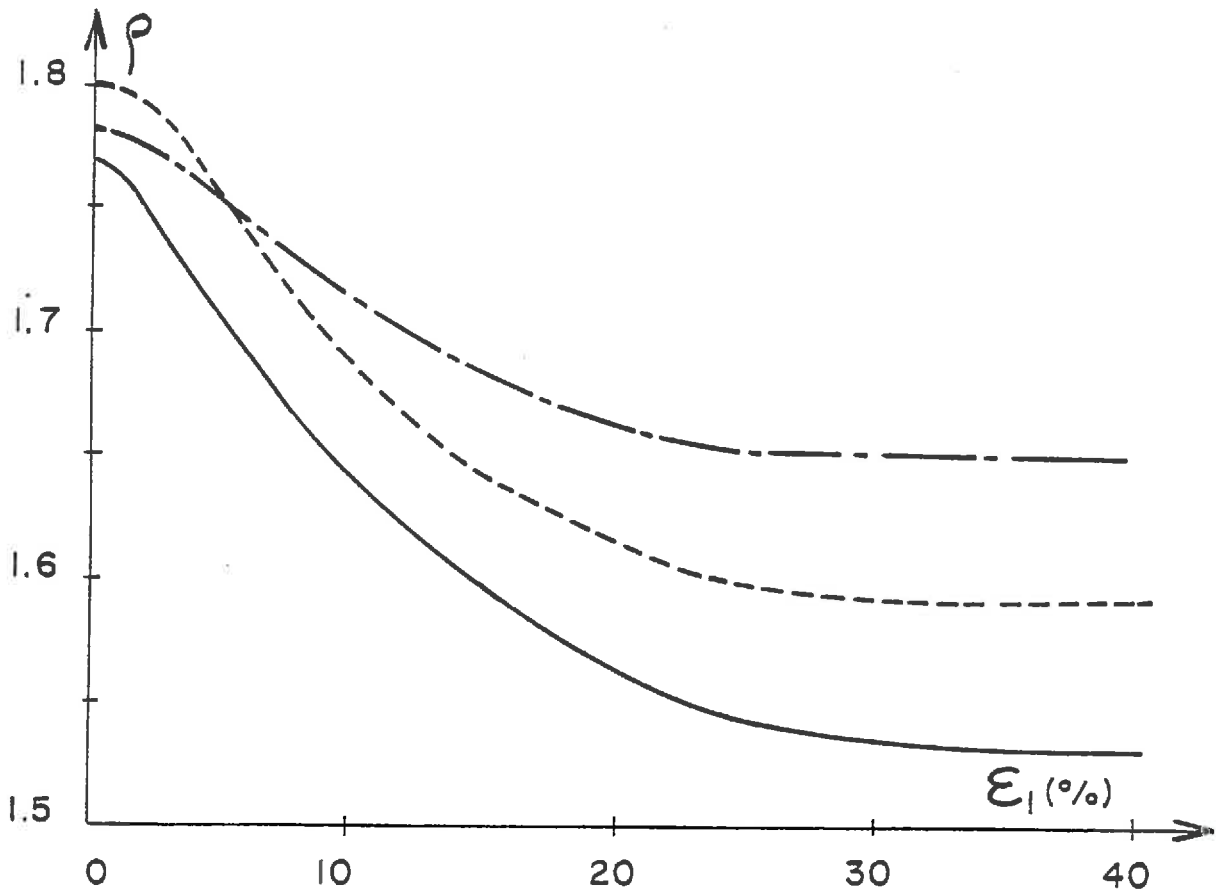
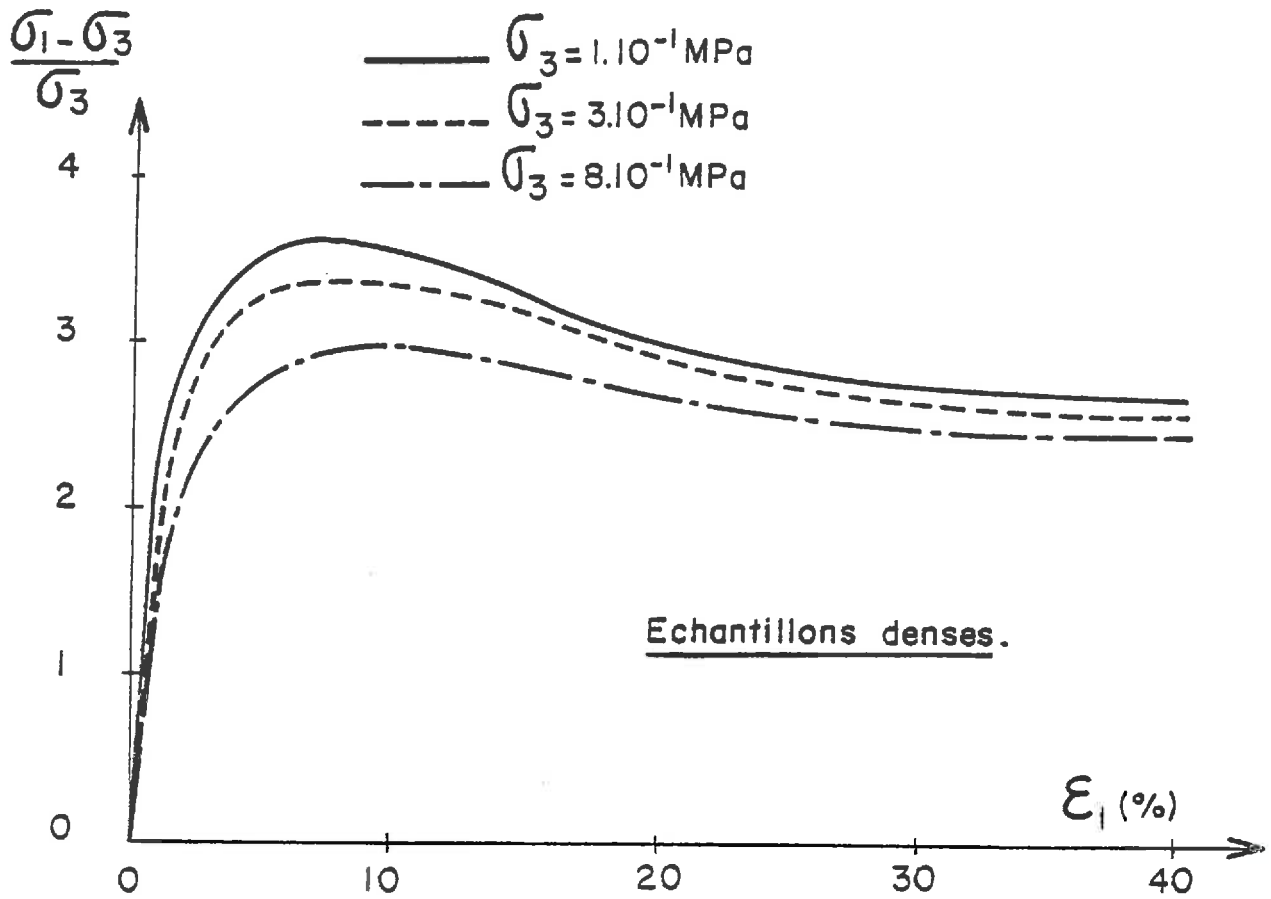


FIGURE I.26

Sable dense : résultats des essais de compression à pression latérale constante

de confinement. Mais pour une pression donnée, la densité au palier est indépendante de la densité initiale. On peut donc conclure, pour ces essais, à l'existence d'une densité-limite ρ_l dont la valeur ne dépend que de σ_3 . On verra par la suite qu'elle ne dépend que de la pression moyenne p .

- Allure des courbes de densité

Les échantillons très lâches, à forte pression (essai 29), dont la densité initiale est inférieure à la densité-limite, sont toujours compactants.

Les échantillons peu denses (essai 86) présentent un compactage faible, mais mesurable, qui est dû à la fois à l'augmentation de la pression moyenne, et à l'augmentation du déviateur de contrainte, puis se dilatent avant d'atteindre le palier.

Pour les échantillons denses (essais 61, 60, 85 et 59), les mesures ne sont pas assez fines pour qu'on soit sûr du compactage initial. Les mesures globales de variations de volume font classiquement apparaître un petit compactage, mais peut-on faire confiance à ce type de mesures, alors que la diminution de volume que l'on trouve est très faible ? La courbe de densité est presque linéaire jusqu'au palier. Pour caractériser cette dilatance, on utilise le rapport d des deux premiers invariants du tenseur des déformations, $-E_1$ et \bar{E}_2 , calculés au niveau de déformation correspondant au pic de contrainte. On remarque que d croît avec $\rho - \rho_l$ (cf. tableau en fin de paragraphe).

- Courbes de contrainte

Afin de pouvoir comparer le comportement du matériau à différentes pressions latérales σ_3 , on a rapporté la quantité $\sigma_1 - \sigma_3$ à la pression σ_3 .

On constate que l'on obtient pratiquement la même valeur de palier, quelle que soit la pression latérale, et quelle que soit la densité initiale.

Au contraire le niveau du pic dépend de la densité et de la pression de confinement. Les échantillons lâches à forte pression (essais 86 et 29) ne présentent pas de pic.

Le comportement d'un échantillon dense à forte pression (essai 59) est semblable au comportement d'un échantillon lâche à faible pression (essai 60) : les courbes $(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$ sont les mêmes, sur la figure I.27. Si l'on compare les variations de $\rho - \rho_L$ en fonction de la déformation axiale, on trouve également une courbe unique (figure I.28). Il semble donc que le comportement en contrainte soit conditionné par la valeur de $\rho - \rho_L$. Toutes les courbes de contrainte des figures I.25 et I.26 peuvent être paramétrées uniquement par la différence entre la densité initiale et la densité limite.

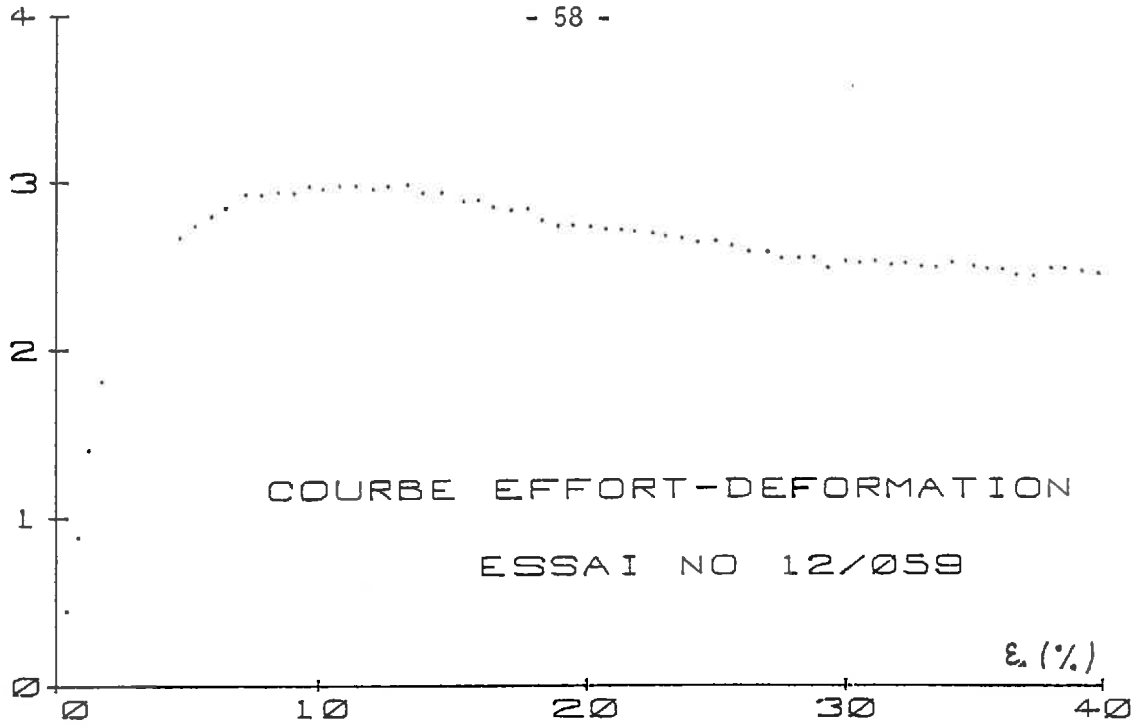
Les différents paramètres mesurés sont rassemblés sur le tableau suivant :

ESSAI	Densité limite	Dilatance au pic	Angle de frottement au palier	Angle de frottement au pic
61	1,535	0,49	35°	40°
60	1,545	0,3	33,6°	36,4°
85	1,595	0,48	34,4°	39,4°
86	1,60	/	33,5°	/
59	1,65	0,3	33,6°	36,8°
29	1,65	/	33,5°	/

Signalons enfin la très bonne reproductibilité des résultats. Deux essais de mêmes caractéristiques initiales donnent des courbes superposables en contrainte, et très voisines en densité, comme sur l'exemple présenté aux

$(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$

- 58 -



$(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$

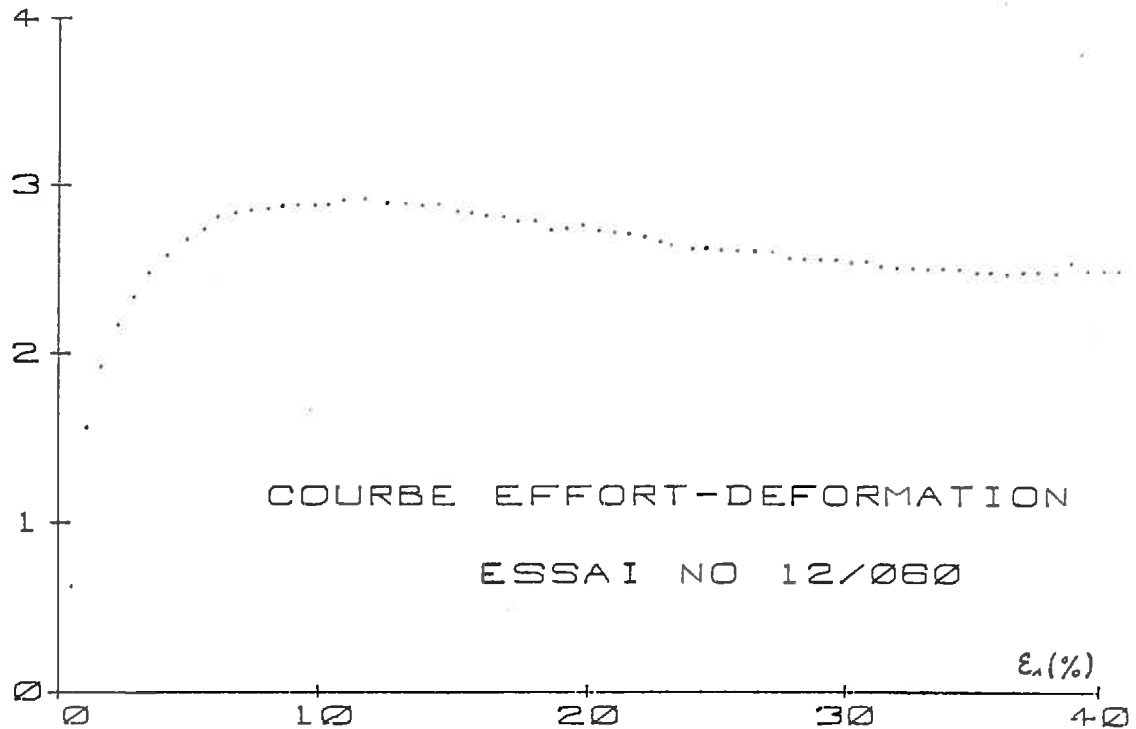


FIGURE I.27

Sable : courbes de contrainte des essais 59 (pression latérale 0,8 MPa) et 60 (pression latérale 0,1 MPa).

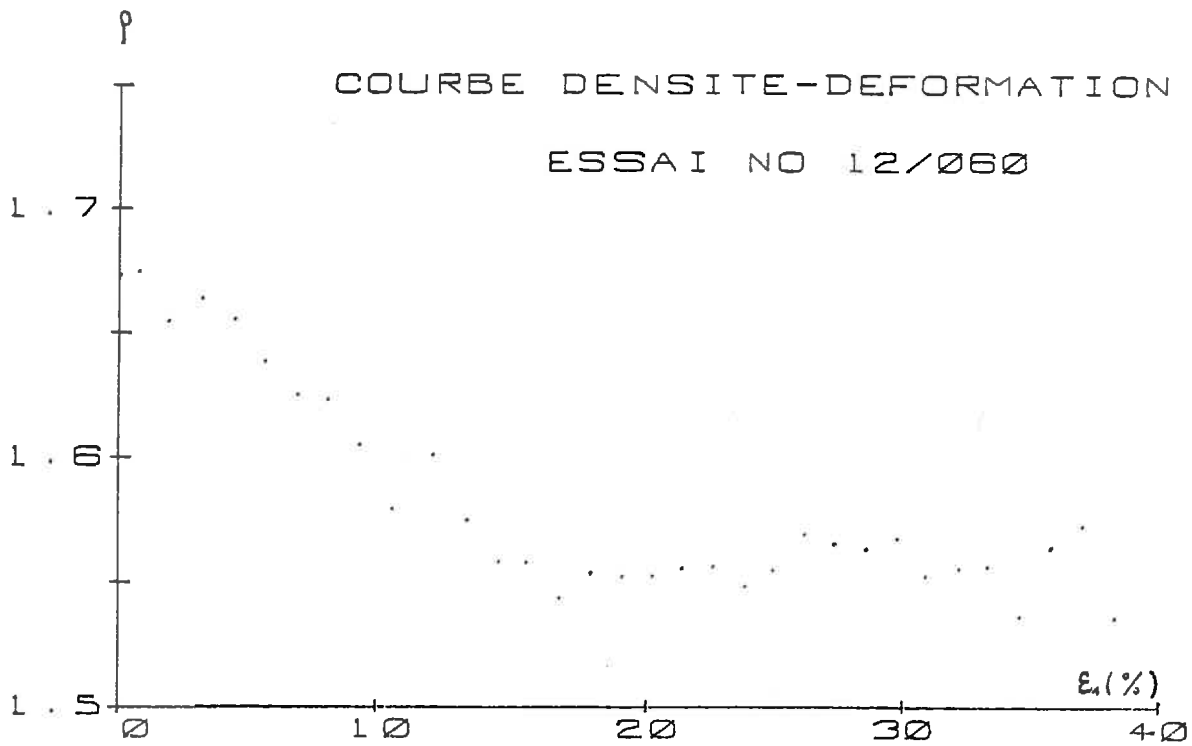
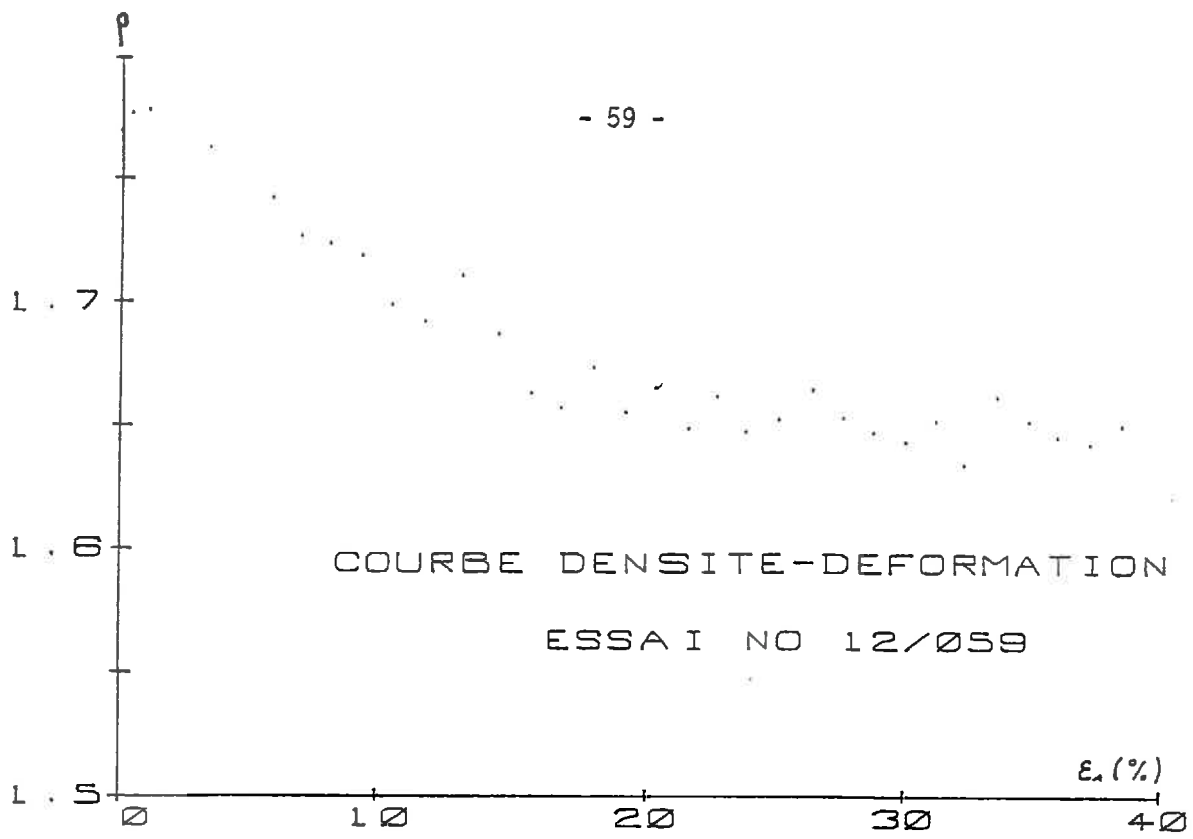


FIGURE I.28

Sable : courbes de densité des essais 59 (pression latérale 0,8 MPa) et 60 (pression latérale 0,1 MPa).

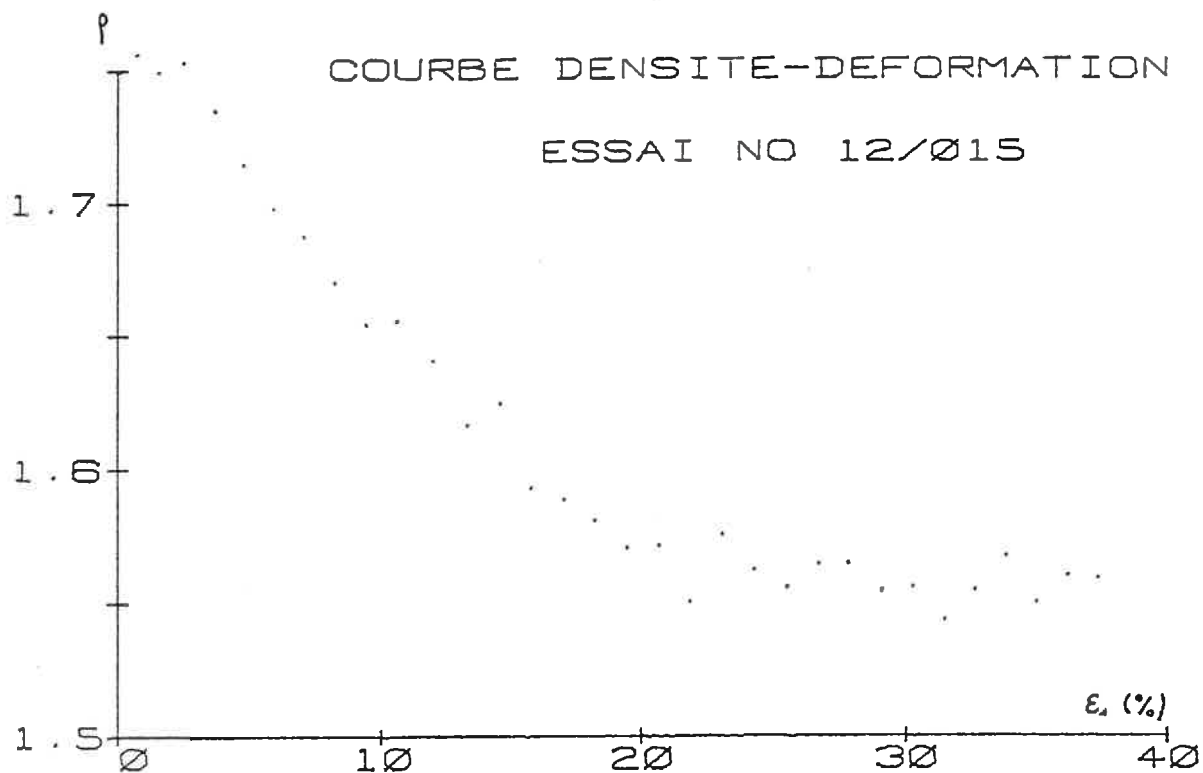
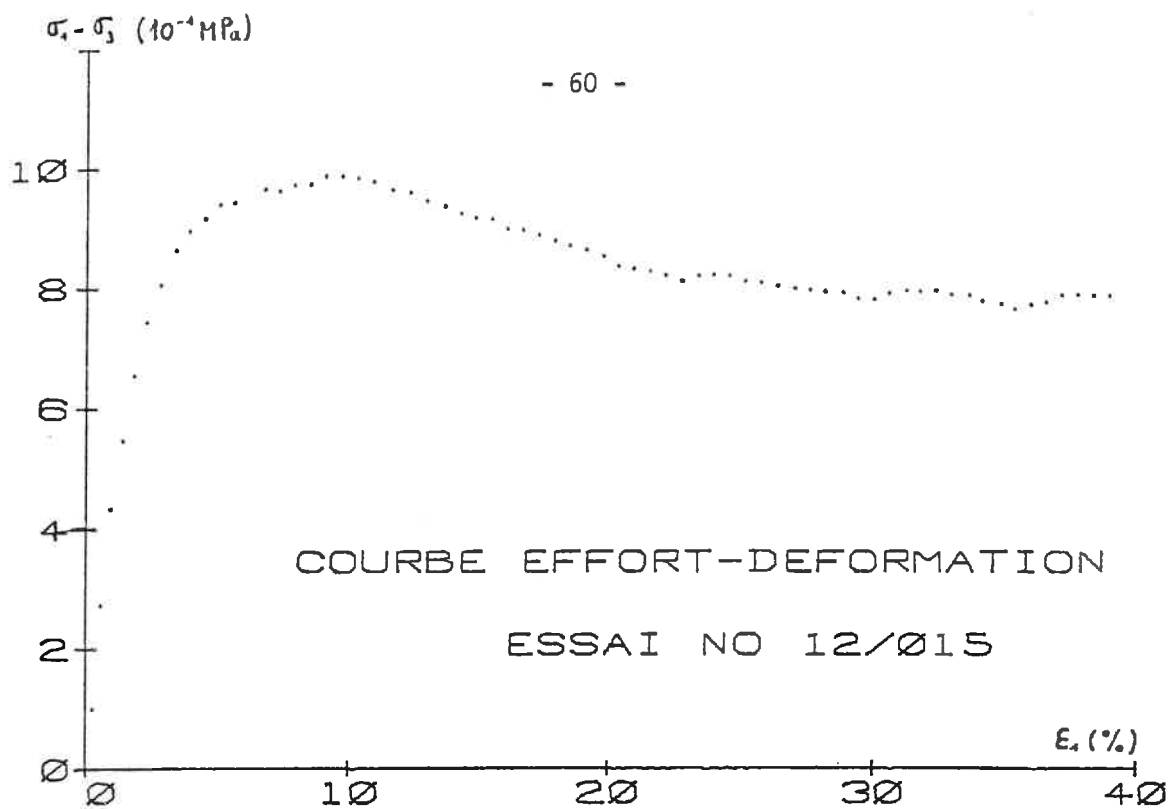


FIGURE I.29

Sable : résultats de l'essai 15, à pression latérale constante (0,3 MPa).

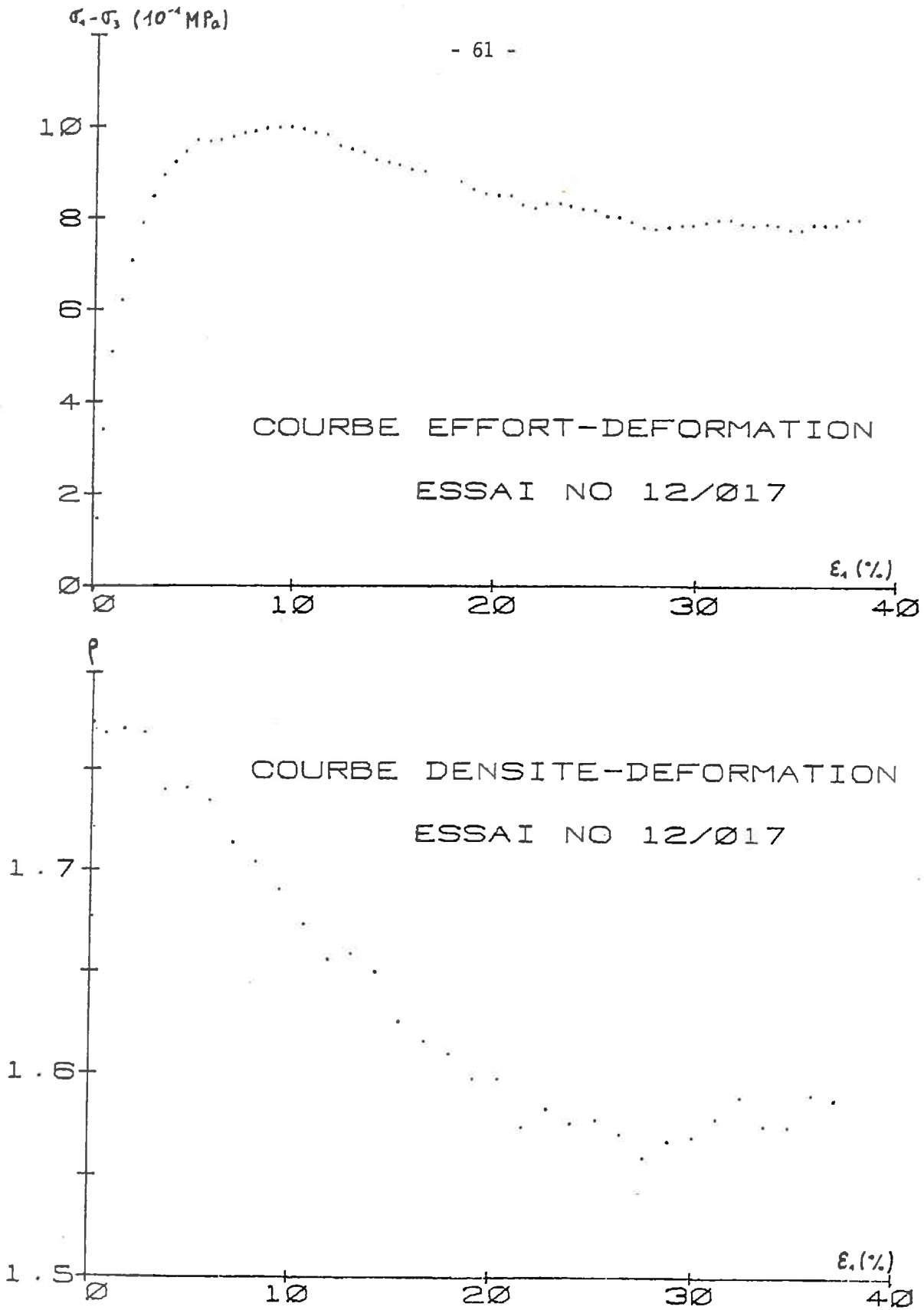


FIGURE I.30

Sable : résultats de l'essai 17 à pression latérale constante (0,3 MPa).

figures I.29 et I.30 (Ces essais ont été effectués avec un sable d'une granulométrie un peu différente de celle du sable utilisé pour les essais présentés précédemment, ce qui explique la différence de densité-limite).

3) Essais à pression moyenne constante

La régulation est effectuée à l'aide d'une calculatrice programmable Sharp : on entre, à la fin de chaque cycle, les mesures de force axiale et de dimensions affichées par la centrale, et la calculatrice donne la pression qu'il faut établir dans la cellule. Cette pression est alors réglée manuellement avec un détendeur. Grâce à une vitesse d'écrasement assez lente (0,2 mm/mn) et des cycles de mesure de 1 minute, on obtient une très bonne régulation, comme le montre la figure I.31, sur laquelle on a tracé, pour l'essai n° 90, l'évolution de la pression moyenne et du déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale. Le seul écart sensible avec la pression de régulation se situe en début d'essai, lorsque l'accroissement de la contrainte axiale est très rapide ; mais grâce à la vitesse d'écrasement choisie, cet écart reste faible.

Le tableau suivant présente les essais que l'on a réalisés.

ESSAI	TYPE	REGULATION	PRESSION LATERALE INITIALE	DENSITE INITIALE
88	compression	p = Cte	0,3 MPa	1,76
84	compression	p = Cte	0,3 MPa	1,615
87	compression	p = Cte	0,5 MPa	1,75
79	compression	p = Cte	0,5 MPa	1,63
89	compression	p = Cte	1 MPa	1,775
90	compression	p = Cte	1 MPa	1,65

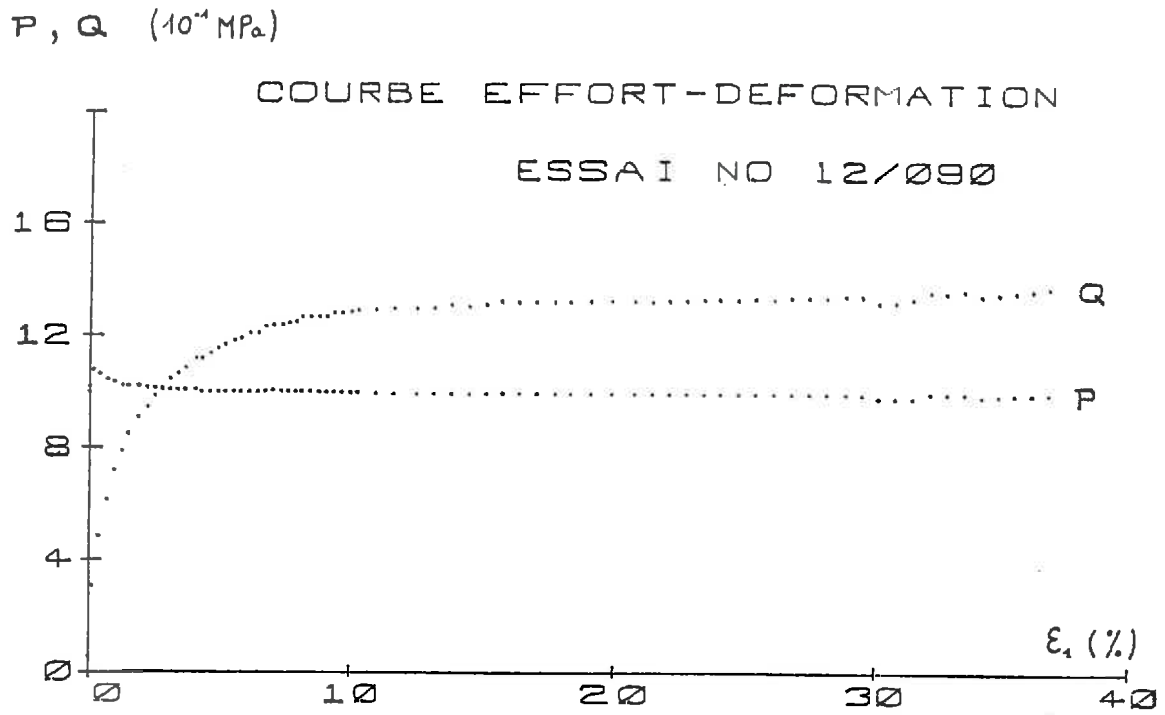


FIGURE I.31

Exemple de régulation à pression moyenne constante

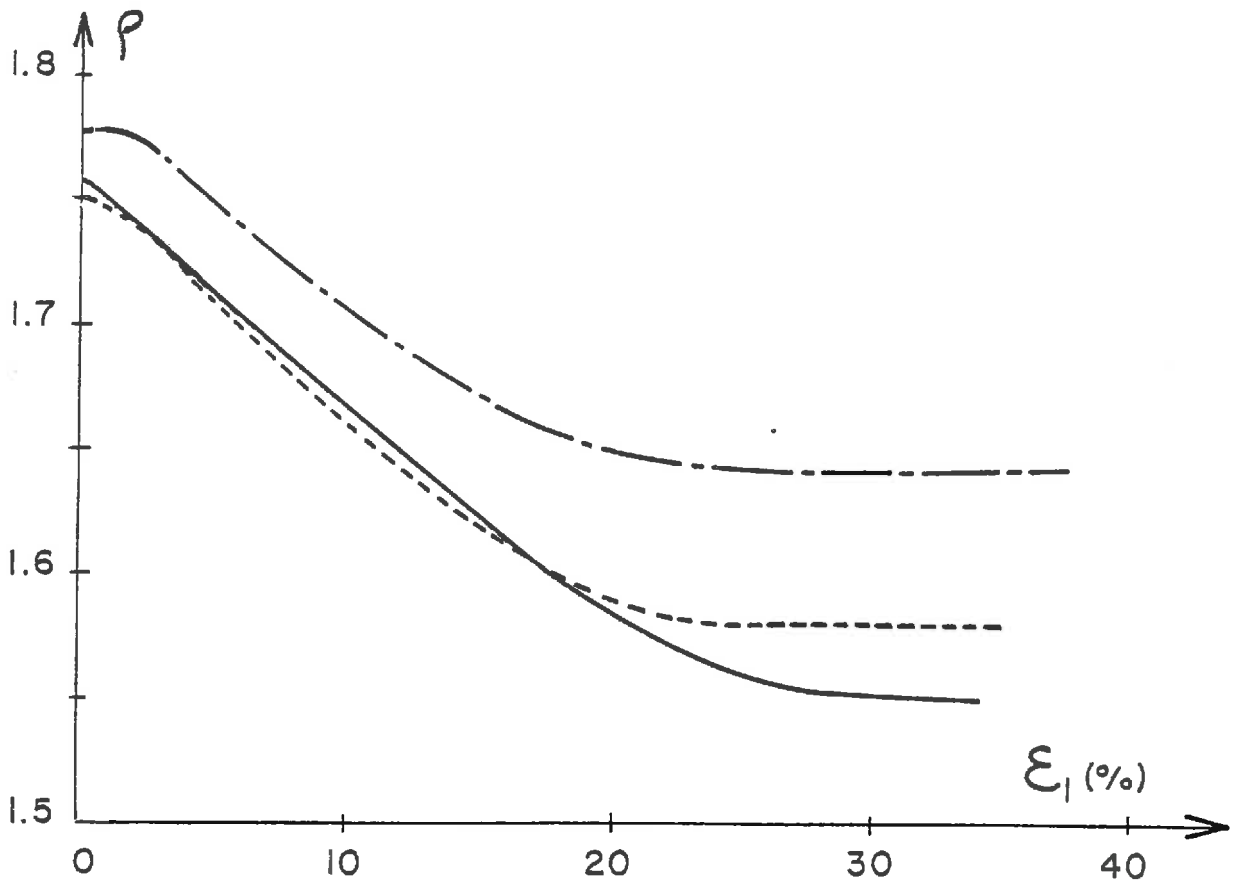
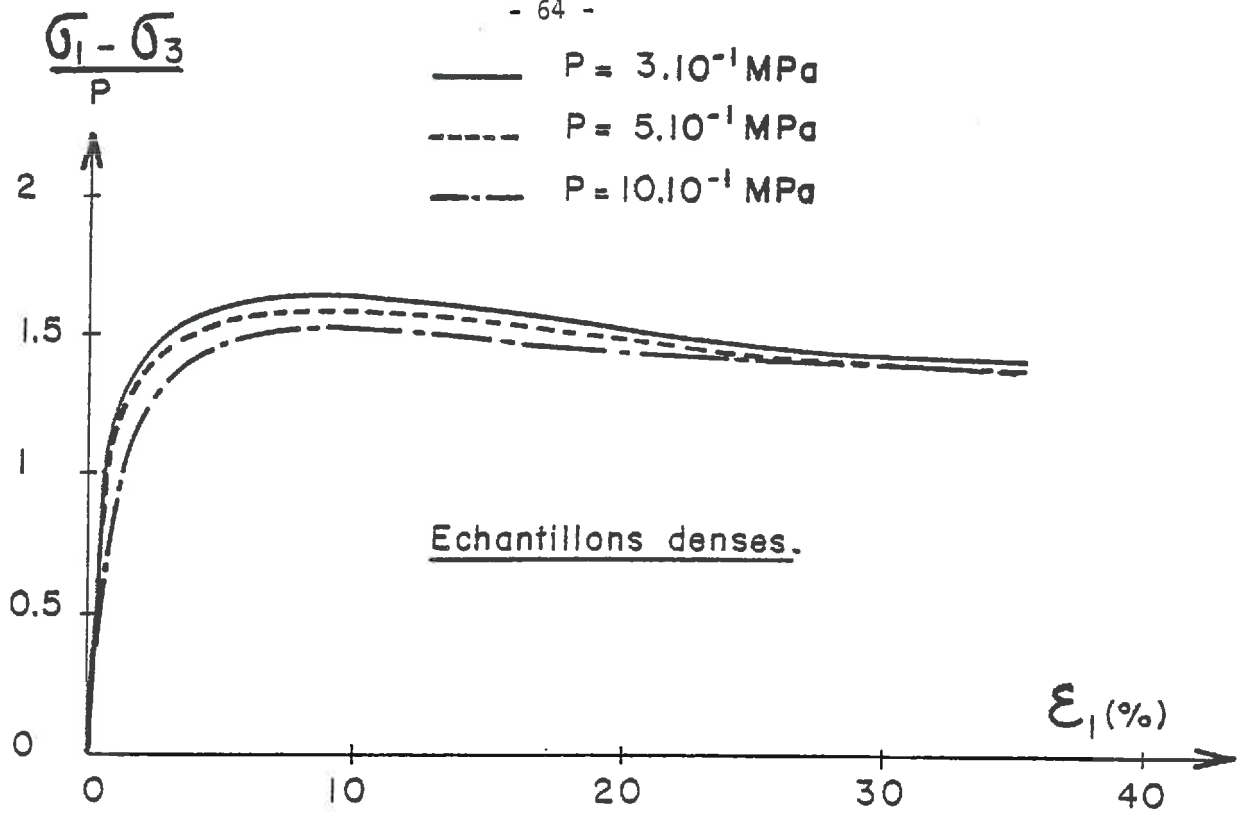
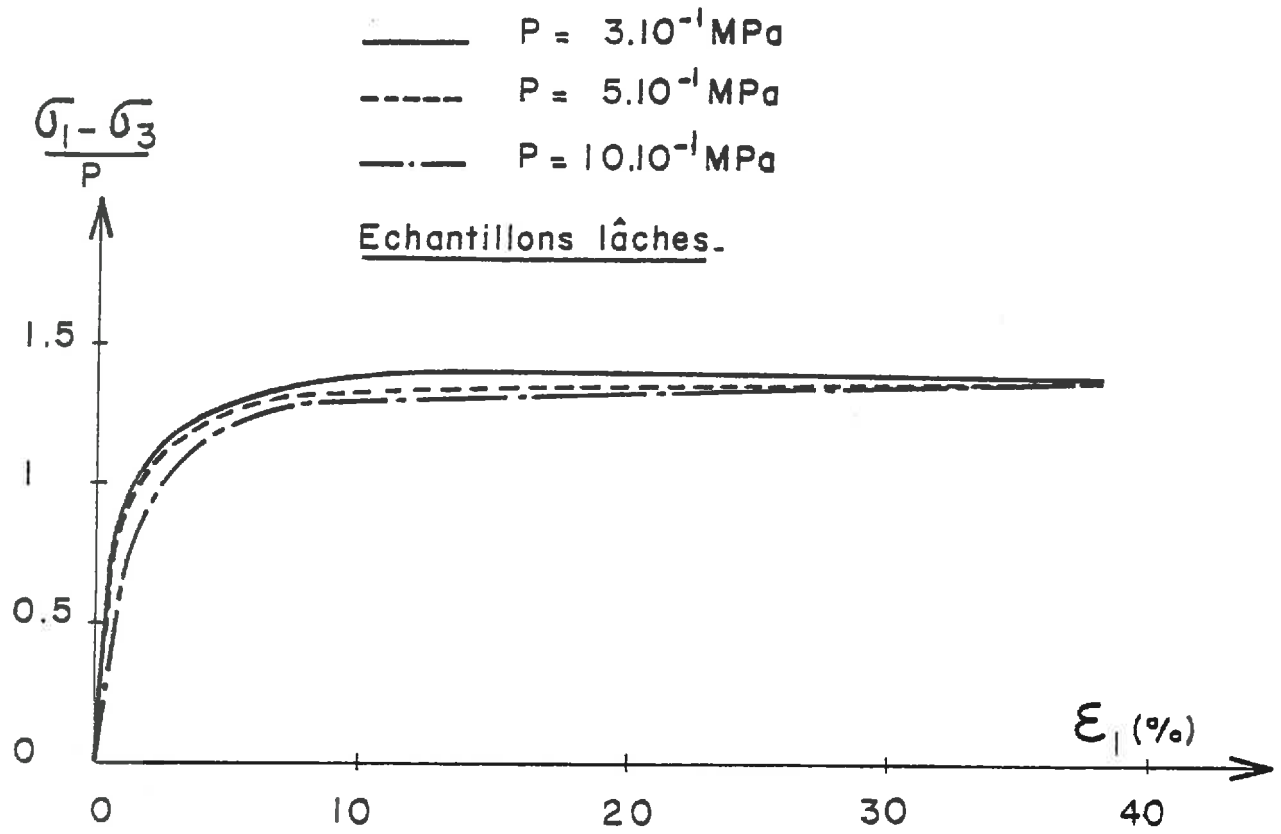


FIGURE I.32
Sable dense : résultats des essais de compression
à pression moyenne constante



Echantillons lâches.

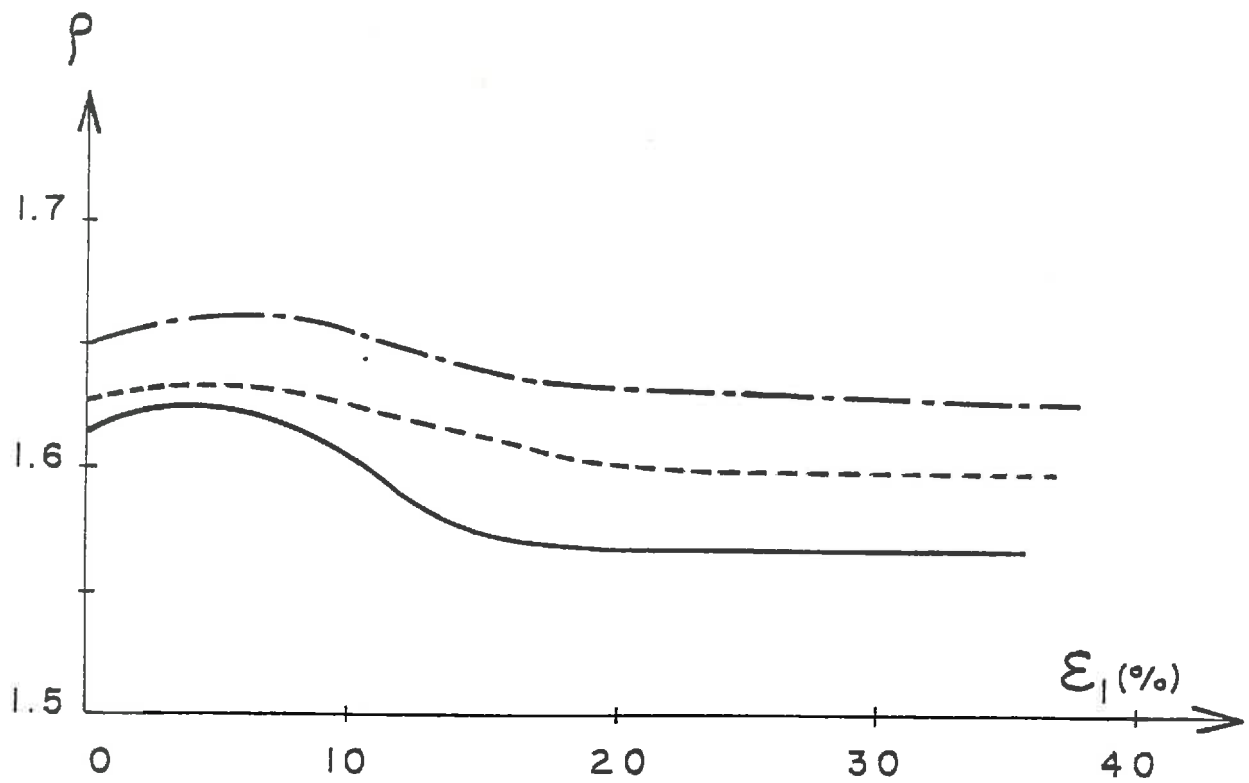


FIGURE I.33

Sable lâche : résultats des essais de compression
à pression moyenne constante

Les courbes obtenues sont présentées sur les figures I.32 et I.33.

- Courbes de densité

On retrouve la notion de densité-limite, dont la valeur ne dépend que de la pression moyenne

Les échantillons lâches ont un comportement contractant sur quelques % de déformation, puis dilatant, avant d'atteindre le palier de densité. Notons que le compactage initial n'est dû ici qu'à l'augmentation du déviateur de contrainte.

Le compactage des échantillons denses n'est pas mis clairement en évidence. La dilatance est forte ; elle augmente avec la valeur de $\rho - \rho_l$.

- Courbes de contrainte

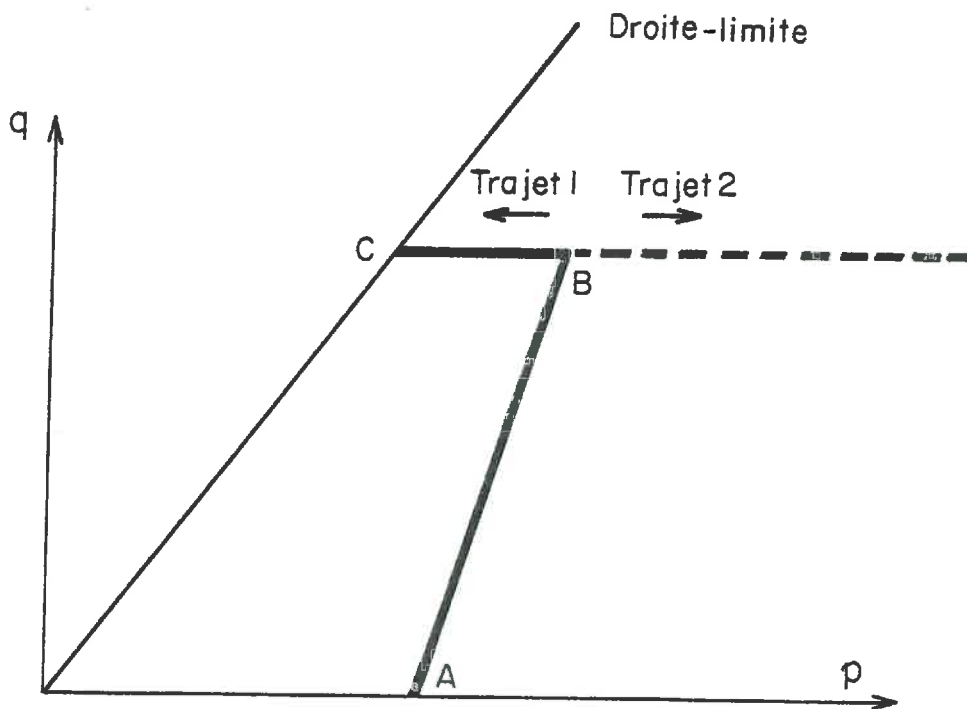
Le palier de contrainte est indépendant de la pression moyenne et de la densité initiale, et l'angle de frottement correspondant est, à peu près, le même que celui calculé pour les essais à pression latérale constante (34 degrés). Le niveau du pic, pour les échantillons denses, varie avec la pression et la densité initiale. Il croît avec la différence entre la densité initiale et la densité-limite.

On retrouve donc sur ces essais l'importance du paramètre $\rho - \rho_l$.

On montre ci-dessous les différentes caractéristiques mesurées. On comparera globalement, en fin de chapitre, les mesures faites sur l'ensemble des essais de compression.

ESSAI	Densité limite	Dilatance au pic	Angle de frottement au palier	Angle de frottement au pic
88	1,55	0,38	35°	40°
84	1,56	0	34,2°	34,8°
87	1,58	0,38	34°	38,2
79	1,59	/	33,6°	/
89	1,645	0,32	34,3	37,8°
90	1,635	/	33,8°	/

3) Essais à déviateur de contrainte constant



Il s'agit, pour suivre le trajet A B C, représenté sur la figure ci-dessus, d'effectuer un essai à pression latérale constante pour atteindre le point B, et de maintenir le déviateur de contrainte au niveau atteint, en diminuant la pression moyenne, de façon à se rapprocher de la droite d'écoulement plastique. Notre appareil triaxial, contrôlé en déformation axiale, n'est pas adapté à ce genre de régulation. Si le point B n'est pas trop loin de la droite-limite, les deux trajets 1 et 2 correspondent à une déformation axiale positive, l'un avec accroissement de pression moyenne, l'autre avec diminution de p . Au contraire, si le point B est plus éloigné, vers l'intérieur du domaine admissible, le comportement du matériau est analogue à celui observé au cours d'un essai isotrope (déformation axiale positive si p augmente, et négative si p diminue). Ainsi, partant d'un point B assez éloigné de la droite-limite, pour suivre un trajet à q constant, dans le sens des p décroissants, il faudra nécessairement à un moment, à priori inconnu, inverser le sens de la déformation axiale. Pour ce type d'essai, le contrôle de la déformation radiale est satisfaisant ; on l'a vérifié sur la presse véritablement triaxiale (cf. chapitre E). Avec l'appareil Phogadense, c'est bien sur impossible !

Si le point B est suffisamment proche de la droite-limite, le trajet 1, jusqu'au point C, s'effectue à vitesse d'écrasement constante. Le point B étant atteint par un essai triaxial classique, on ajuste par tâtonnement la pression latérale, de façon à maintenir le déviateur constant. L'effort axial fourni par le capteur de force est rapporté à la section médiane de l'échantillon, qui est calculée à chaque cycle de mesures. Pour partir dans le sens 1, il faut systématiquement diminuer la pression de la cellule. Un exemple de régulation ainsi obtenue est présenté sur la figure I.34.

Les caractéristiques des essais effectués sont données dans le tableau suivant, et les courbes obtenues rassemblées sur la figure I.35 .

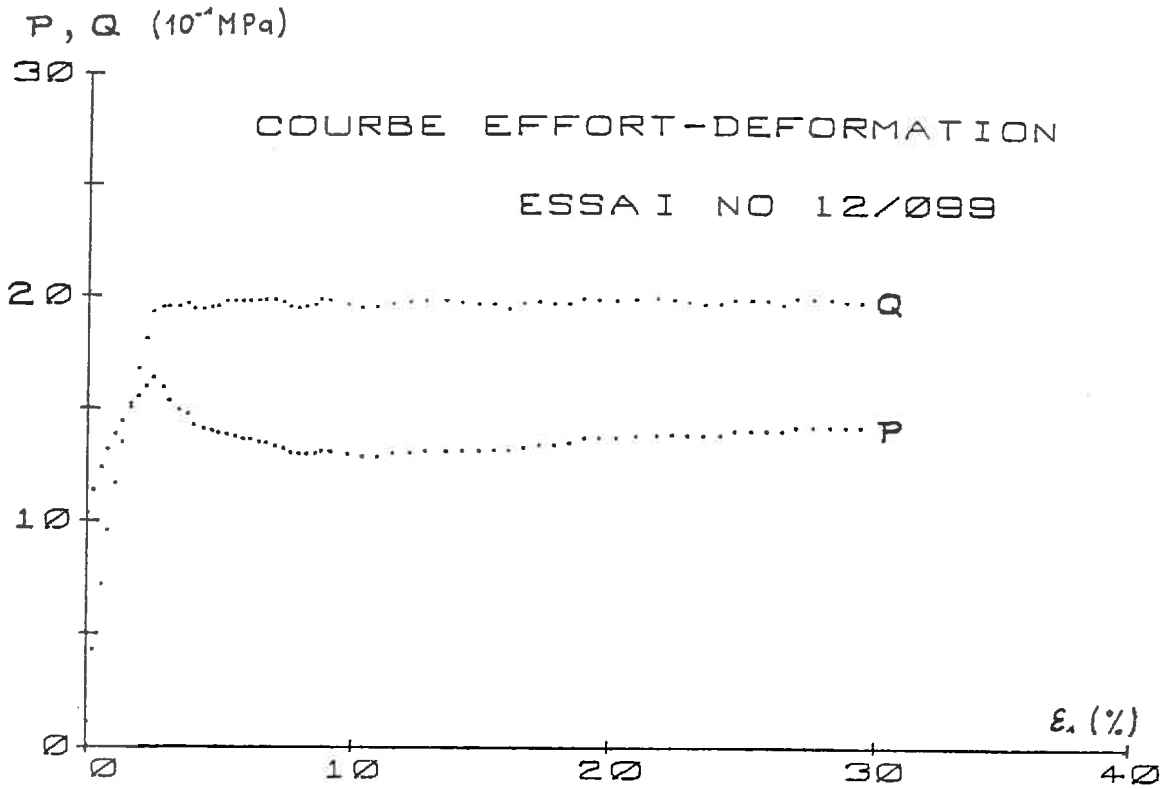


FIGURE I.34

Exemple de régulation à déviateur de contrainte constant

Essai	Type	Régulation	Pression latérale initiale	Densité initiale
98	Compression	q = 1 MPa	0,5 MPa	1,76
97	Compression	q = 1 MPa	0,5 MPa	1,59
99	Compression	q = 2 MPa	1 MPa	1,77
100	Compression	q = 2 MPa	1 MPa	1,61

- Courbes de densité

La cinématique ne semble pas beaucoup affectée par le changement de régulation en contrainte. On observe l'évolution habituelle de la densité : compactage (très faibles pour les essais denses) au cours du triaxial classique, puis dilatation et stabilisation à un palier, dont le niveau dépend du déviateur de contrainte, c'est-à-dire du point C que l'on atteint sur la droite-limite ; la densité-limite est indépendante de la densité initiale.

- Courbes de contrainte

On a tracé l'évolution de la pression moyenne, rapportée à la valeur du déviateur de régulation. On retrouve les notions de pic et de palier, le pic correspondant à un minimum de pression moyenne, minimum d'autant plus bas que le terme $\rho - \rho_l$ est grand. Le niveau du palier est indépendant du déviateur de contrainte et de la densité initiale. Les courbes de contrainte peuvent être paramétrées par la différence entre densité initiale et densité limite.

Les différents paramètres calculés figurent sur le tableau ci-après.

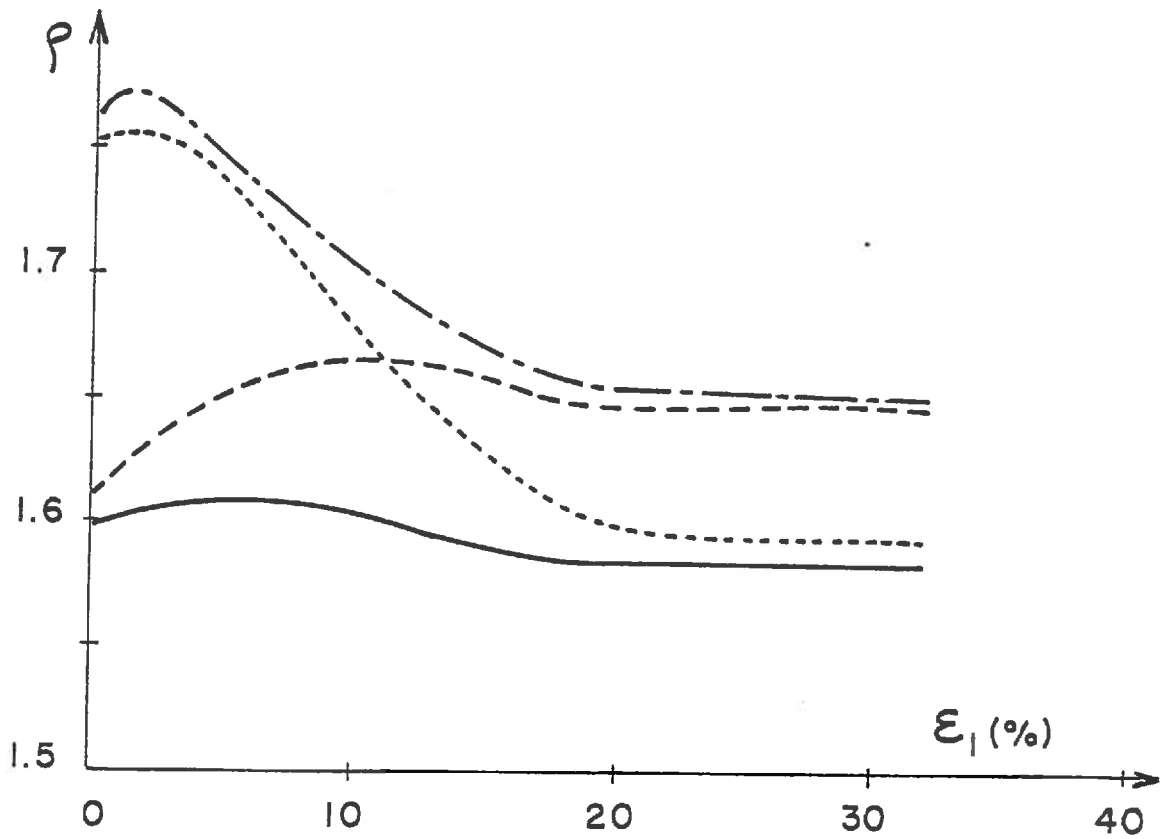
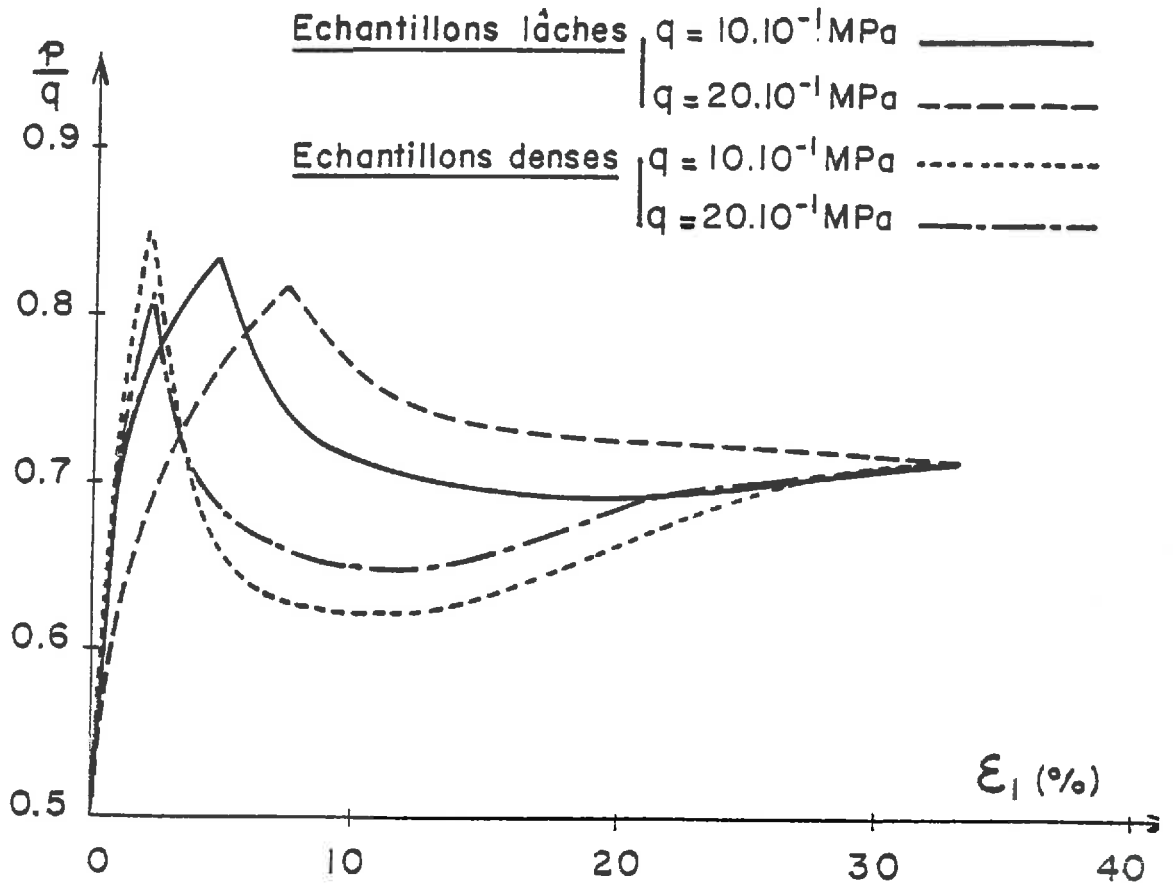


FIGURE I.35

Sable : Résultats des essais de compression à déviateur de contrainte constant

Essai	Densité-limite	Dilatance au pic	Angle de frottement au palier	Angle de frottement au pic
98	1,595	0,44	34,8	39,4
97	1,59	/	34,8	/
99	1,655	0,31	34,5	38
100	1,65	/	34,9	/

5) Conclusions

Tous les essais effectués font apparaître un palier de densité. Le niveau de ce palier ne dépend que du point atteint sur la droite-limite, indépendamment du trajet de contrainte suivi, et de la densité initiale de l'échantillon. La densité-limite est donc une fonction de la pression moyenne seule. La figure I.37 donne les valeurs expérimentales de la densité-limite, en fonction de p , ainsi que l'incertitude sur ces valeurs, étant donné que plusieurs essais ont été effectués pour déterminer chaque valeur. La concordance des résultats est très bonne, d'autant que l'on a réalisé trois types d'essais différents. Une forme analytique de la densité-limite en fonction de la pression moyenne sera proposée dans la seconde partie de cette étude.

Les angles de frottement à l'état-limite, mesurés après 35 % ou 40 % de déformation axiale, sont compris entre 33,5 et 35 degrés. On peut en déduire que l'angle de frottement limite est une caractéristique intrinsèque du matériau, indépendante de la contrainte et de la densité. Pour le calcul théorique, on a choisi la valeur moyenne, 34 degrés.

<u>Essais de Compression</u>	à pression latérale constante	+
	à pression moyenne constante	o
	à déviateur de contrainte constant	⊠
<u>Essais d'extension</u>	à pression latérale constante	.
<u>Courbes théoriques</u>	en compression	—
	en extension	- - -

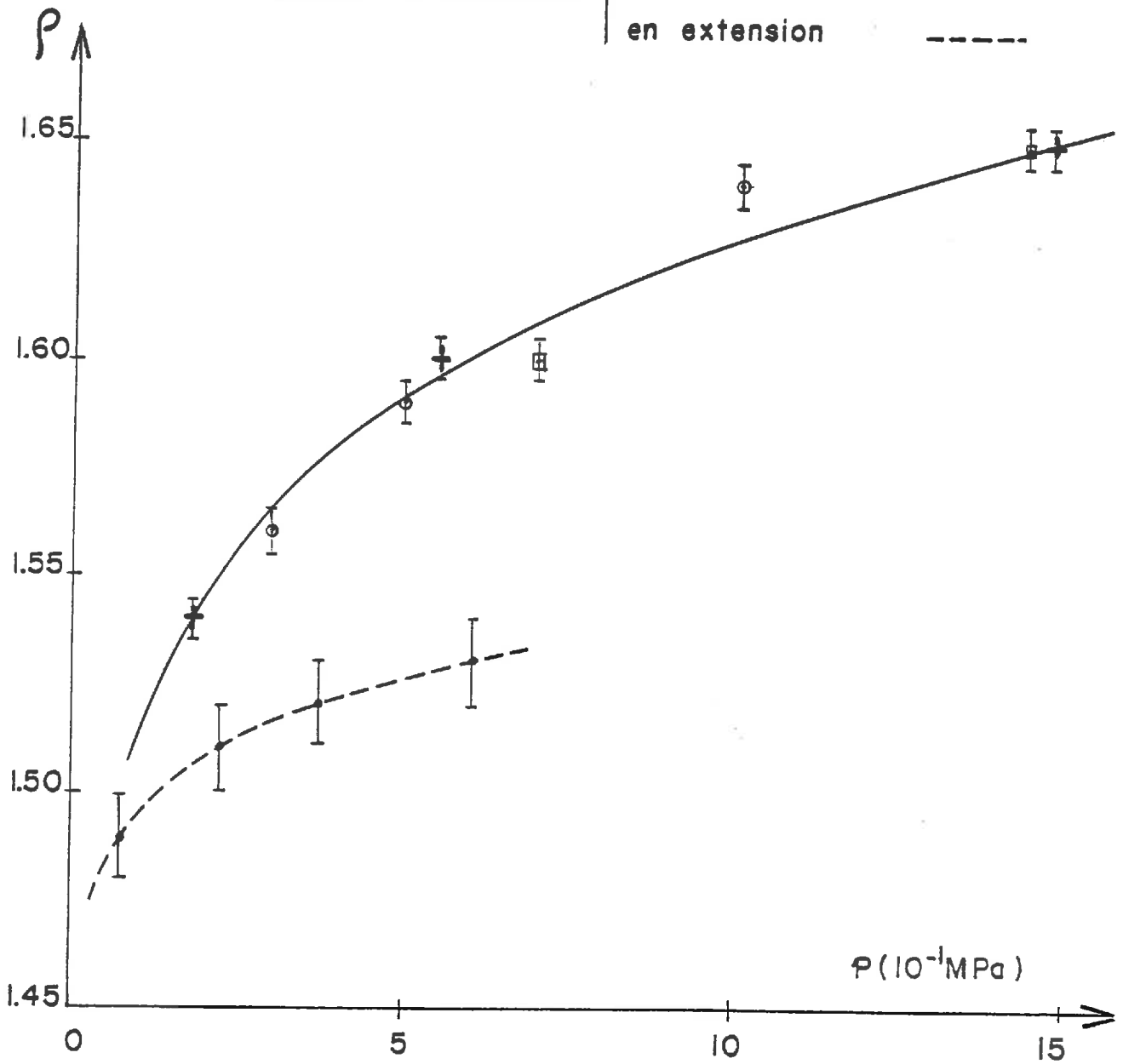


FIGURE I.37

Evolution de la densité-limite en fonction de la pression moyenne, pour les essais d'extension et de compression sur le sable d'Hostun

Les valeurs de la dilatance (définie comme le rapport des deux premiers invariants de déformation) et de l'angle de frottement au niveau du pic sont tracées sur la figure I.38, en fonction de la différence entre la densité au pic et la densité-limite calculée avec la pression moyenne au pic, ce qui permet des comparaisons entre les différents types d'essais. Le paramètre $\rho - \rho_l$ est encore une bonne variable pour caractériser la résistance du matériau (qui est mesurée par l'angle de frottement au pic), même si les deux essais denses à q constant présentent des angles au pic un peu plus fort que les autres essais, pour une même valeur de $\rho - \rho_l$. En ce qui concerne la dilatance, ce sont les essais à p constants qui ont des valeurs plus faibles, mais grossièrement la formulation en $\rho - \rho_l$ est valable.

La parfaite cohérence des résultats obtenus, en particulier à l'état limite (angle de frottement limite paramètre intrinsèque du matériau, densité-limite fonction de la pression moyenne) indiquent bien que l'évolution après le pic n'est pas le fait d'une instabilité qui serait provoquée par la localisation de la déformation le long de lignes de rupture, mais correspond vraiment à un phénomène rhéologique, caractéristique du comportement des milieux pulvérulents. S'il y avait une telle localisation à partir du pic, la densité moyenne d'une section horizontale n'évoluerait presque plus, et le palier de densité ne serait pas alors indépendant de la densité initiale. Sur nos essais, au contraire, les échantillons denses dilatent beaucoup, après le pic de contrainte, avant d'atteindre la densité-limite. D'autre part, nos échantillons restent très homogènes le long de l'axe de chargement (cf. figure I.19 a.).

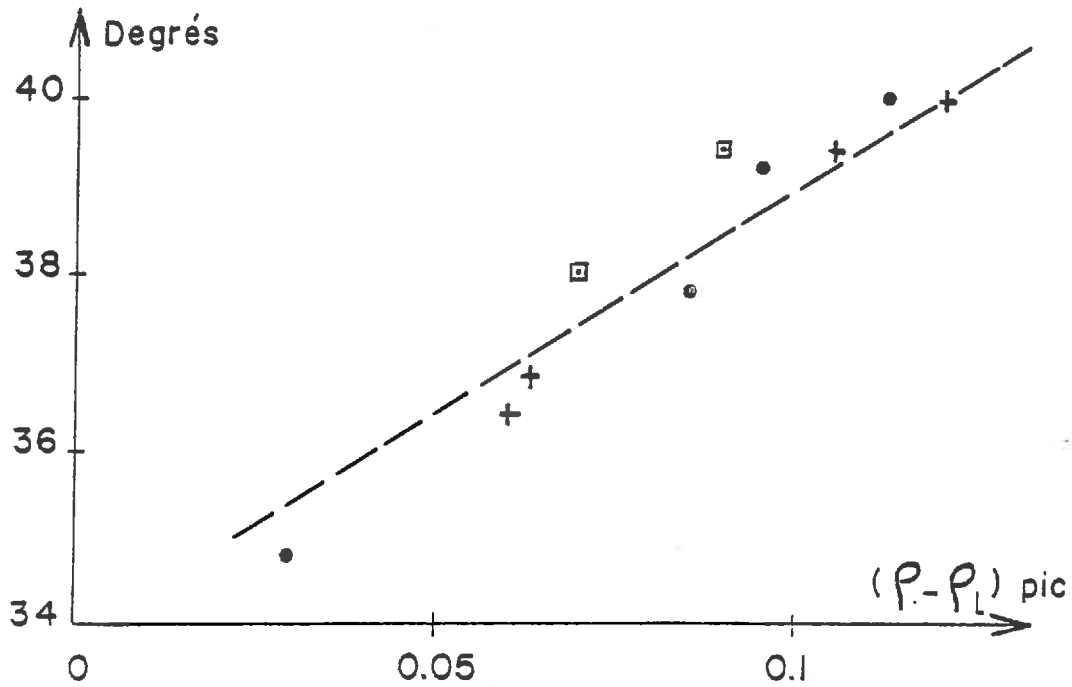
Enfin, il semble que le paramètre $\rho - \rho_l$ soit un facteur prépondérant pour l'évolution des contraintes.

Les résultats que l'on vient d'énoncer, en particulier ceux concernant la densité-limite sont valables lorsque la granulométrie du matériau est à peu près constante au cours d'un essai, ce qui est le cas avec le sable utilisé, dans la gamme de pression étudiée.

- + Essais à pression latérale constante.
- Essais à pression moyenne constante.
- Essais à déviateur de contrainte constant.

Angle au pic.

— — — Courbe théorique.



Dilatance au pic.

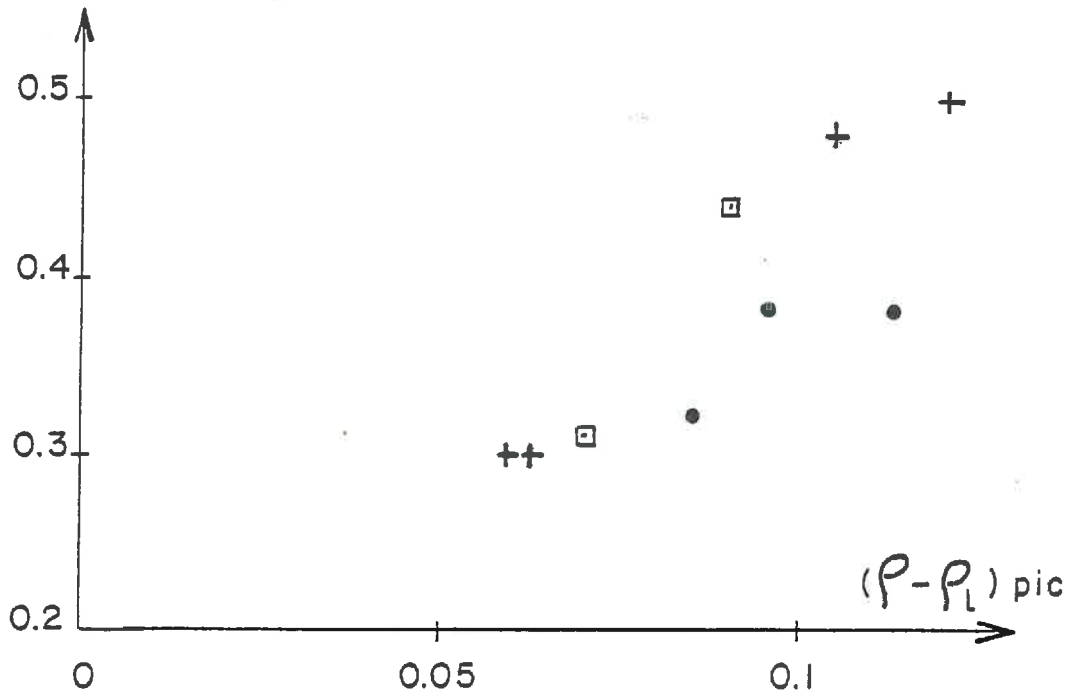


FIGURE I. 38

Caractéristiques de pic au cours des essais de compression

CHAPITRE D : ESSAIS D'EXTENSION TRIAXIALE
DE REVOLUTION

1) Méthode expérimentale

Tous les essais ont été effectués avec une vitesse d'étirement constante, et à pression latérale constante.

Dès 10 % de déformation axiale, apparaît le phénomène de striction, qui traduit l'hétérogénéité du processus. La déformation se localise dans une petite partie de l'échantillon, où la section décroît, alors que le reste du matériau ne se déforme plus. On montrera plus loin que cette hétérogénéité existe en fait systématiquement dès le début de l'essai, même si elle n'est visible qu'un peu plus tard. Entre 15 et 20 % de déformation apparaissent des lignes de rupture dans la zone de striction. Elles peuvent être actives assez tôt comme pour l'échantillon représenté sur la figure I.39 a) après 20 % de déformation totale. Au contraire, l'échantillon de la figure I.39 b) n'a pas commencé de processus de rupture après 30 % de déformation, malgré les lignes de rupture qui se dessinent au sommet de la zone de striction.

Les mesures de diamètre et de densité sont faites dans la section la plus faible. Ceci pose des problèmes lorsque la striction apparaît à une extrémité de l'échantillon, car les faisceaux optiques et radioactif risquent alors de rencontrer la tête de compression, ce qui fausserait complètement les mesures. Un des thèmes du paragraphe suivant sera d'étudier comment on peut prévoir la section de striction avant de commencer l'essai.

Ajoutons enfin que l'on a toujours travaillé sur des échantillons de rapport 1, sans antifretage : la striction étant systématique et localisée, l'élançement de l'échantillon n'a pas d'importance ; et l'antifretage ne peut que favoriser la localisation de la striction aux extrémités de l'échantillon.

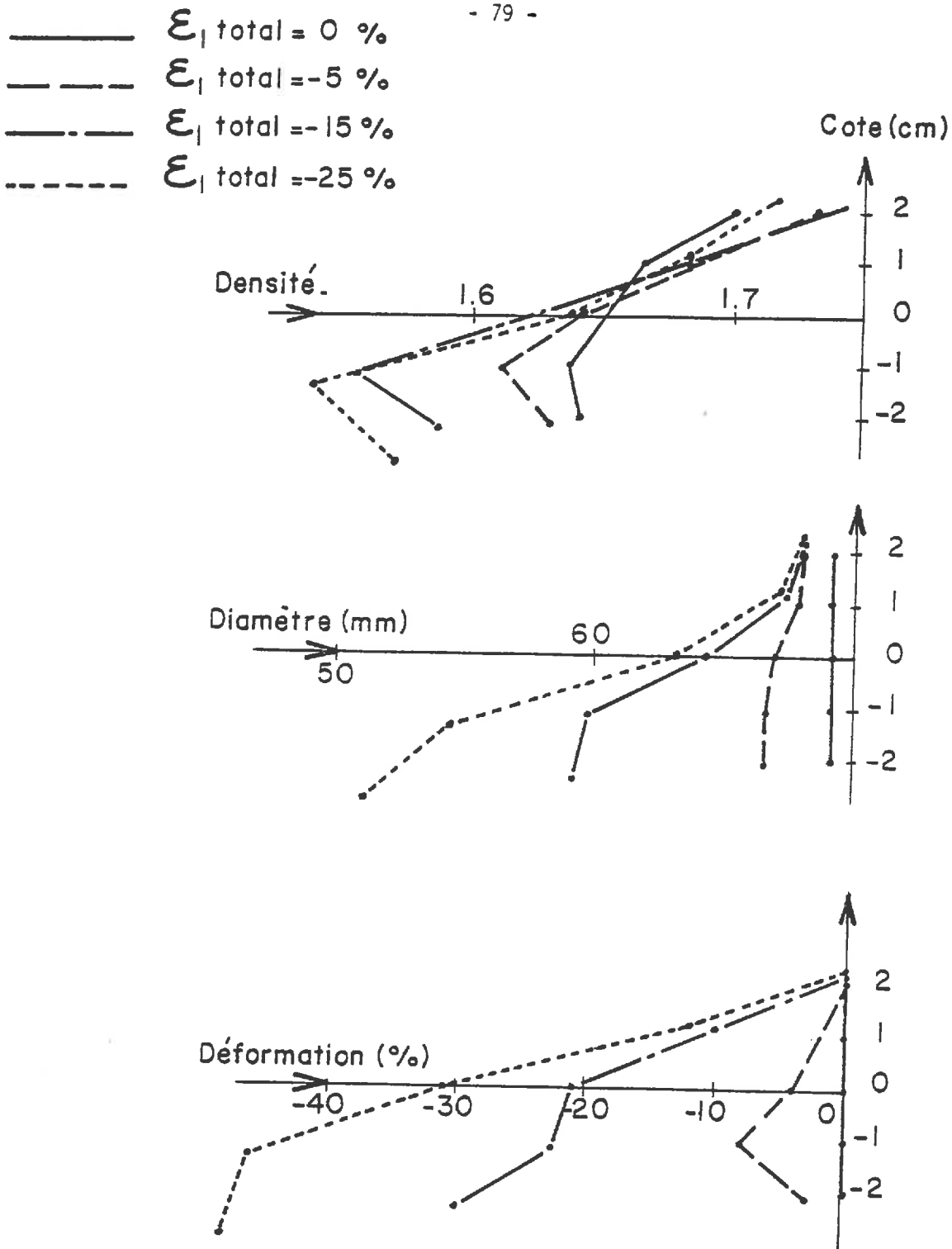


FIGURE I.40

Exemple d'évolution des caractéristiques locales au cours d'un essai d'extension sur un échantillon de sable lâche

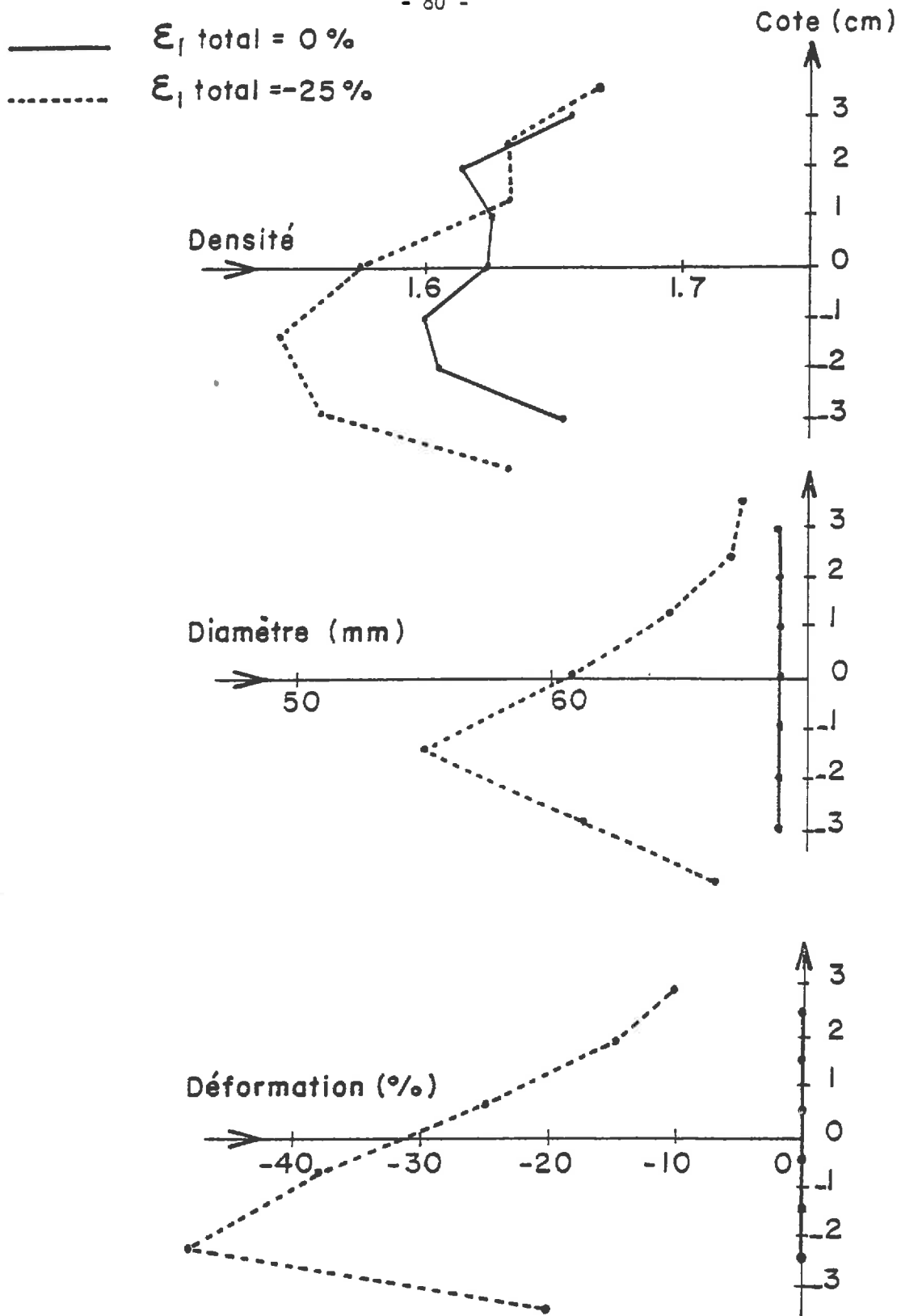


FIGURE I.41

Exemple d'évolution des caractéristiques locales au cours d'un essai d'extension sur un échantillon de sable lâche

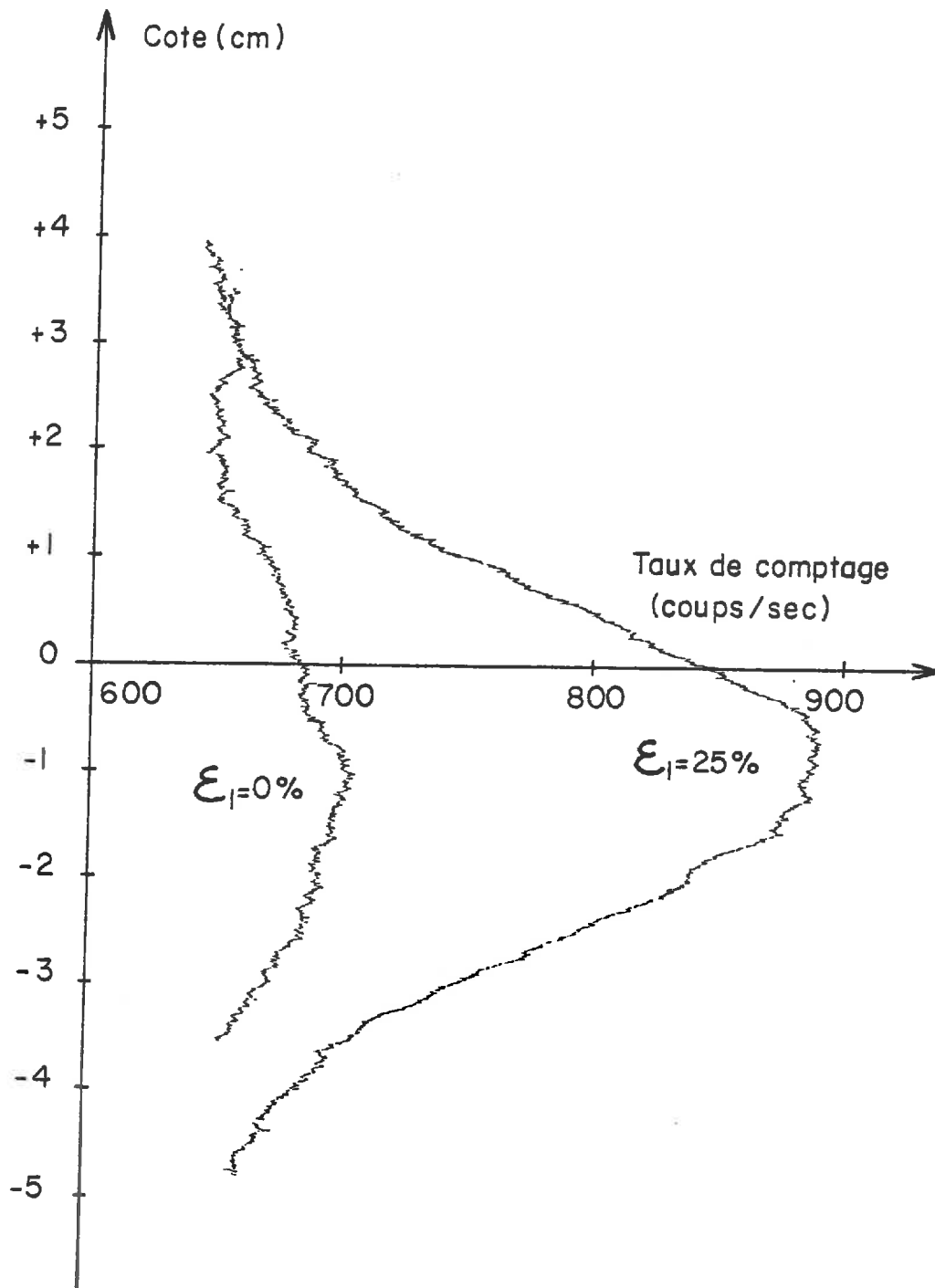


FIGURE I.42

Evolution du taux de comptage radioactif le long de l'axe de l'échantillon :
prévision de la section de striction.

3) Le problème théorique de la striction

Il s'agit par un calcul analogue à celui effectué au chapitre B pour la déformation en tonneau, d'évaluer la répartition de contrainte dans la section de striction, lors d'un essai d'extension triaxiale de révolution. On peut émettre, à priori, les mêmes réserves quant à la validité des résultats quantitatifs que l'on va obtenir. Mais, étant donné la bonne concordance avec les résultats expérimentaux pour le problème du tonneau, on espère, ici aussi, avoir une idée correcte de la répartition de contrainte.

Les notations sont les mêmes qu'au chapitre B. On se place dans la section de diamètre minimal, où l'on suppose que les contraintes sont de révolution. On admet que toute la section vérifie le critère de Coulomb :

$$\sigma_z = \alpha' \sigma_r$$

Le plan $z = 0$ est une isostatique particulière, et les isostatiques qui lui sont perpendiculaires ont des rayons de courbures $\rho(r)$, avec la même convention de signe que précédemment.

On prend :

$$\rho(r) = R \times \frac{a}{r}$$

a étant le rayon de la section de striction et $R = \rho(a)$ la courbure de la surface libre.

L'équation d'équilibre dans le plan $z = 0$ reste :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{\rho(r)}$$

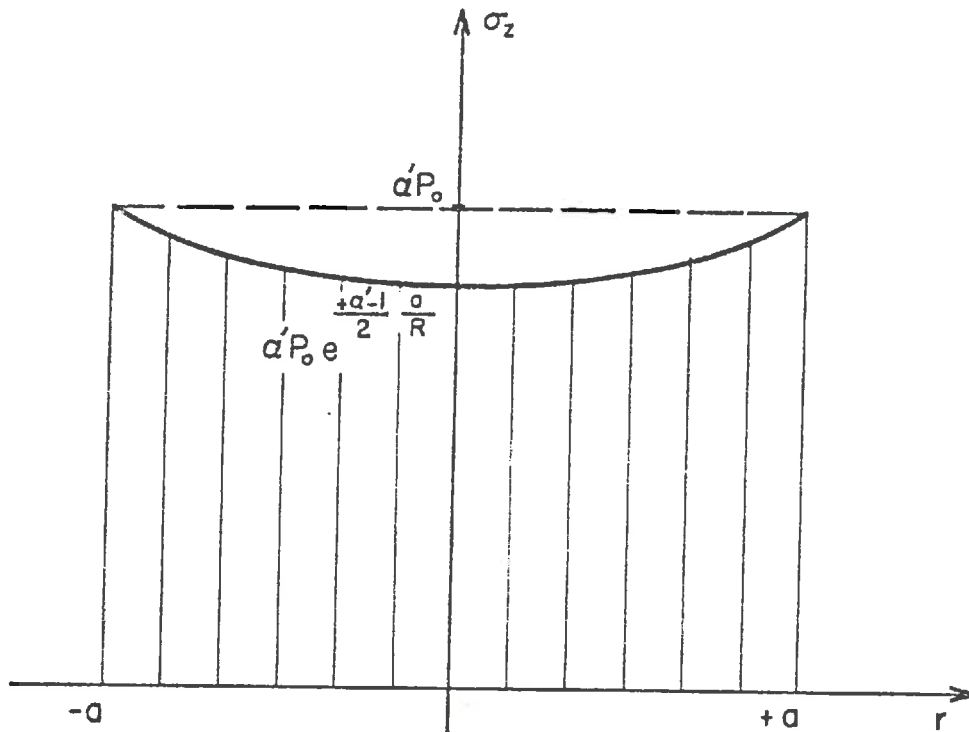
d'où l'on tire :

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r} = \frac{1 - \alpha'}{a R} r dr$$

qui s'intègre en $\sigma_r = P_0 e^{\frac{(1-\alpha')a}{2R} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}$

et $\sigma_z = \alpha' P_0 e^{\frac{(1-\alpha')a}{2R} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}$

On obtient ainsi la répartition de contrainte axiale suivante.



L'angle de frottement expérimental est calculé avec un rapport de contrainte σ_z / σ_r égal à σ_z / P_0 , inférieur au rapport réel en plasticité qui vaut α' . L'angle de frottement réel est donc plus faible que l'angle mesuré expérimentalement. Le calcul précédent prévoit un écart de plusieurs degrés. Prenons par exemple :

$$a = R = 27 \text{ mm}$$

$$P_0 = 0,3 \text{ MPa}$$

et $\alpha' = 1 / \alpha = 1/3,6$, qui correspond à un angle de frottement de

34 degrés. On trouve alors que σ_2 varie entre 0,083 et 0,058 MPa dans la section de striction, et l'angle de frottement limite mesuré est égal à 39 degrés.

4) Résultats des essais d'extension

Ci-dessous les caractéristiques des essais effectués.

Essai	Type	Régulation	Pression latérale	Densité initiale
67	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,1 MPa	1,75
66	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,1 MPa	1,65
58	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,78
65	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,64
74	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,5 MPa	1,74
71	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,5 MPa	1,66
69	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,8 MPa	1,78
68	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,8 MPa	1,60

L'effort mesuré expérimentalement est la somme de la résistance du matériau et de la tension de la capote de latex qui entoure l'échantillon. Cette tension n'est pas négligeable, en grandes déformations, surtout pour les essais à faible pression latérale. On a supposé que la tension de la capote est proportionnelle à sa déformation locale maximale, c'est-à-dire à la déformation axiale au centre de la zone de striction. Des mesures de déformation locale (figures I.40 et I.41) nous ont permis d'évaluer la déformation locale maximale à deux fois la déformation totale. Cette hypothèse n'est certainement pas correcte pendant tout l'essai, mais les mesures effectuées ne permettent pas d'obtenir une précision convenable. Cependant, cette approximation a donné des résultats cohérents. Le module d'élasticité de la capote a été pris constant, égal à 1,92 MPa, ce qui fait pour une capote de diamètre 70 mm et d'épaisseur 6/10 mm, un effort égal 25,4 N pour une déformation de 10 %.

On présente, sur les figures I.43 et I.44, l'évolution de $(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$ et de la densité ρ , mesurés au centre de la zone de striction, en fonction de la déformation locale calculée avec l'hypothèse précédente. On retrouve un comportement voisin de celui observé en compression, avec une dispersion des résultats plus importante, à cause des incertitudes sur la position de la zone de striction, sur la valeur de la déformation locale, qui permet en particulier de calculer la tension de la capote, et de la précision moindre des mesures de diamètre (le diamètre est faible en fin d'essai).

- Courbes de densité

Elles présentent toutes un palier à partir de 30 % de déformation. Le niveau de ce palier dépend de la pression latérale. L'indépendance vis-à-vis de la densité initiale n'est pas évidente, les résultats sont très dispersés. Mais, à pression moyenne égale, la densité-limite en extension est plus faible que la densité-limite en compression ; l'écart est suffisamment important pour qu'on ne puisse pas l'imputer à la qualité des mesures. Le diagramme limite en extension est porté sur la figure I.37.

Les courbes sont pratiquement stationnaires dans les premiers % de déformation, puis le matériau dilate, d'autant plus que l'écart entre la densité

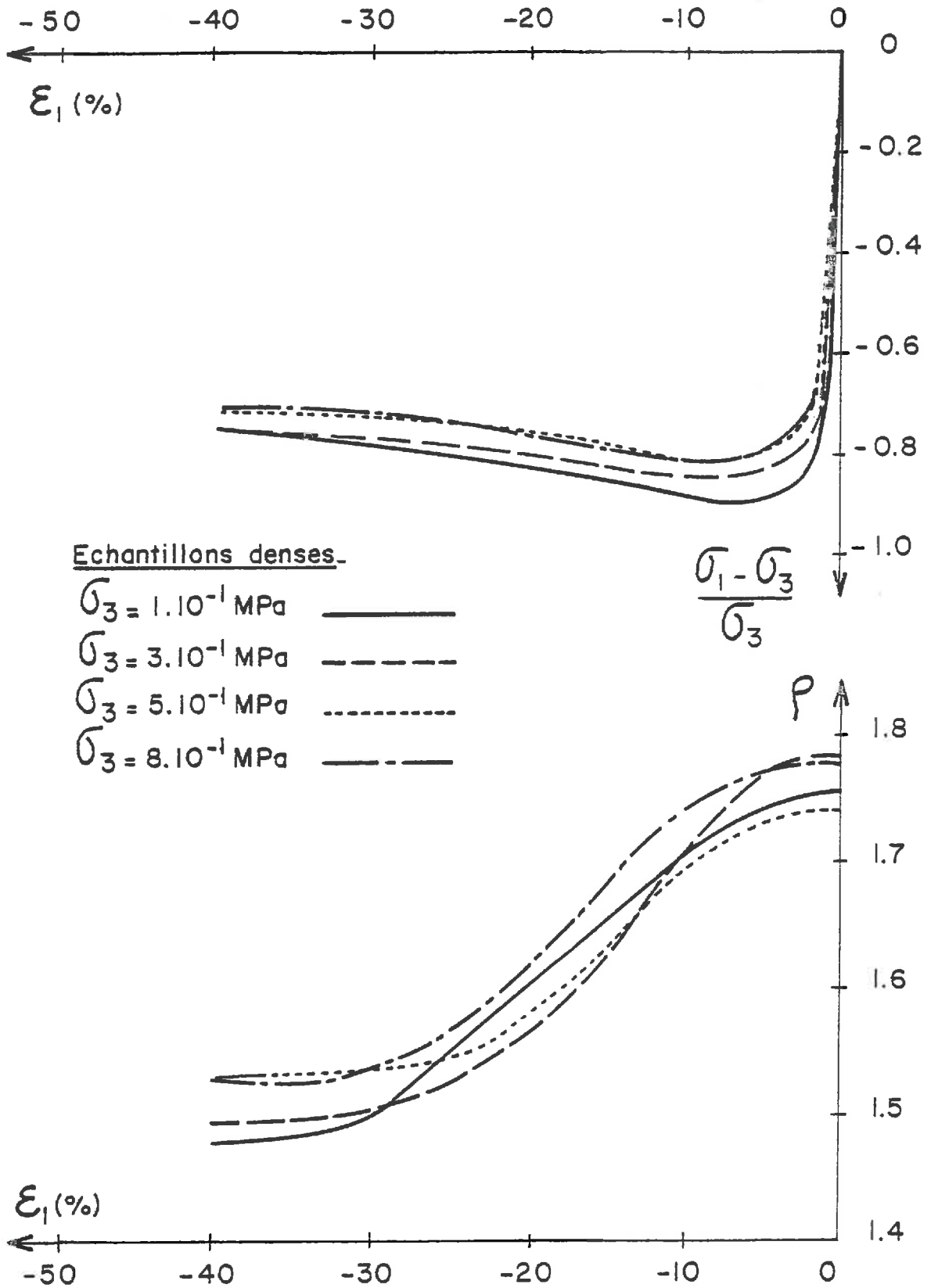


FIGURE I.43

Sable dense : résultat des essais d'extension
à pression latérale constante

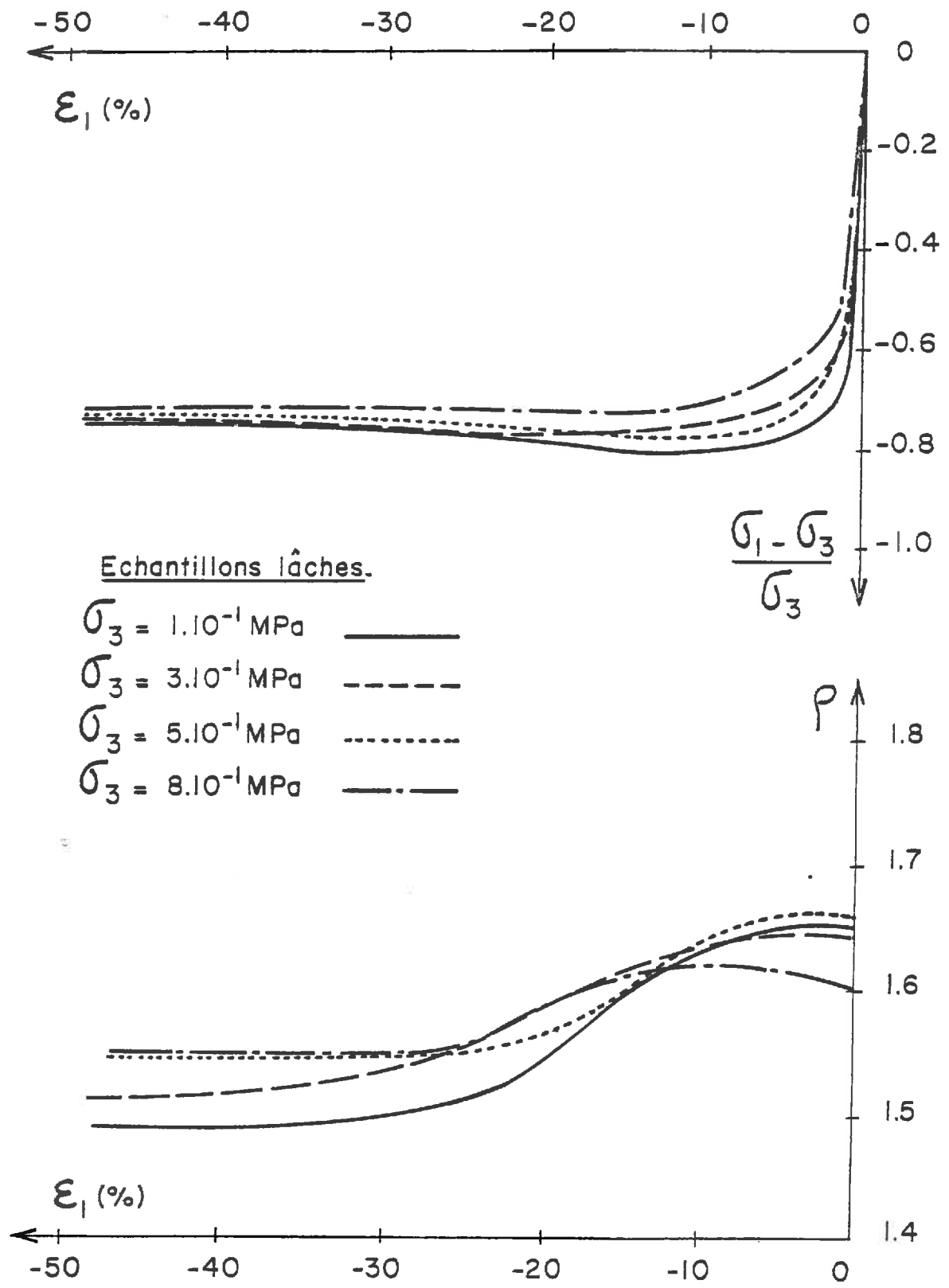


FIGURE I.44

Sable lâche : résultats des essais d'extension à pression latérale constante

initiale et la densité limite est important. Il est difficile de savoir si l'on effectue la mesure exactement dans la zone de striction dès le début de l'essai. Il n'est pas exclu qu'un matériau dense dilate dès le début de l'extension.

- Courbes de contrainte

Les courbes de contrainte présentent toutes un pic, dont le niveau dépend de l'écart entre la densité initiale et la densité-limite. On trouve des angles de frottement très élevés, dépassant 50 degrés pour un matériau dense à faible pression. (La valeur de la tension de la capote a peut-être été sous-estimée). Ceci explique peut-être le fait que de nombreux auteurs, qui ne vont pas en grandes déformations, choisissent un angle-limite d'extension très supérieur à celui de compression. Sur nos essais, au contraire, les angles de frottement au palier sont dispersés entre 33 et 37 degrés. Le calcul effectué au paragraphe précédent nous fait penser que l'angle de frottement réel est plus faible. La précision sur les mesures du module tangent initial n'est pas assez bonne pour que l'on puisse dire si les modules sont identiques aux modules de compression. AUBRY [1], qui faisait cette hypothèse, avait des résultats encore plus dispersés sur ces essais d'extension. Les résultats de THANOPOULOS [33], qui travaille uniquement en petites déformations, sont bien meilleurs, mais pas vraiment concluants à ce sujet.

On a rassemblé dans le tableau suivant les valeurs de paramètres mesurés au cours des essais d'extension. (On n'a pas calculé les dilatances, l'incertitude sur la déformation axiale étant trop grande).

Essai	Densité limite	Angle de frottement au palier	Angle de frottement au pic
67	1,48	37,3°	54,9°
66	1,49	36,1°	42,7°
58	1,50	37,3°	47,4°
65	1,52	35,5°	37,9°
74	1,52	33,8°	43,4°
71	1,53	34,7°	39,2°
69	1,52	32,7°	43,4°
68	1,54	33,8°	34,7°

CHAPITRE E : COMPORTEMENT CYCLIQUE

L'appareil triaxial Phogadense permet de solliciter les échantillons sous chargement cyclique, l'amplitude des cycles étant contrôlée en déformation axiale. Le procédé de mesure de la densité ne permettant pas d'obtenir des résultats exploitables pour les cycles de faible amplitude, on s'est surtout intéressé aux cycles d'amplitude supérieure à 5 % de déformation axiale. Afin d'obtenir des informations plus précises sur les variations de densité, en particulier aux changements de sens de déformation, on a effectué les mêmes essais sur une presse véritablement triaxiale, que l'on présente dans le paragraphe suivant. Il semblait très intéressant de pouvoir ainsi comparer les résultats donnés par deux appareils triaxiaux de conceptions très différentes.

1) Présentation de la presse tridimensionnelle " TRI-TRI "

Cette presse, conçue et réalisée à l'Institut de Mécanique de Grenoble, a pour but d'étudier le comportement des matériaux sous chargement véritablement triaxial, en grandes déformations (figure I. 45). Elle est particulièrement adaptée à l'étude du comportement des milieux pulvérulents.

L'échantillon est un parallélépipède rectangle maintenu par six plaques. Le mouvement de deux faces opposées est symétrique par rapport au centre qui reste fixe (figure I. 46 a). Pour effectuer cette cinématique, chaque face doit posséder trois degrés de liberté en translation, qui sont réalisés par l'empilement de trois plaques ; deux plaques montées sur des glissières orthogonales et deux vérins hydrauliques permettent la fermeture de la boîte (figure I. 46 b). Un moteur électrique, synchronisé avec celui de la face opposée assure l'avance ou le recul.

Les dimensions d'arêtes peuvent varier entre 50 mm et 150 mm. La vitesse maximale des plaques est de $\pm 2,5$ mm / mn, réglable de façon continue. La force maximale est de 100 kN ; dans chaque direction, les contraintes sont limitées à 10 MPa.

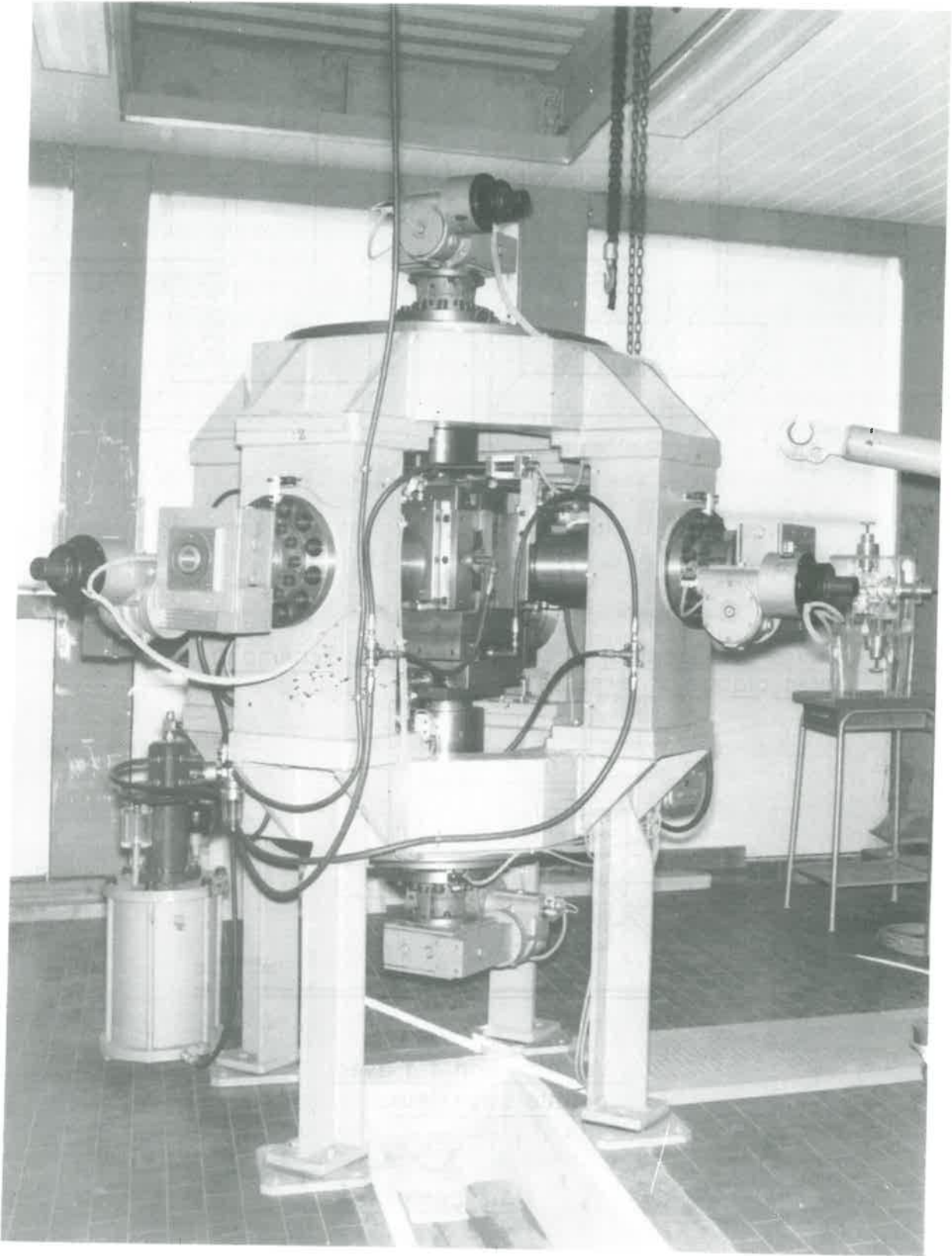
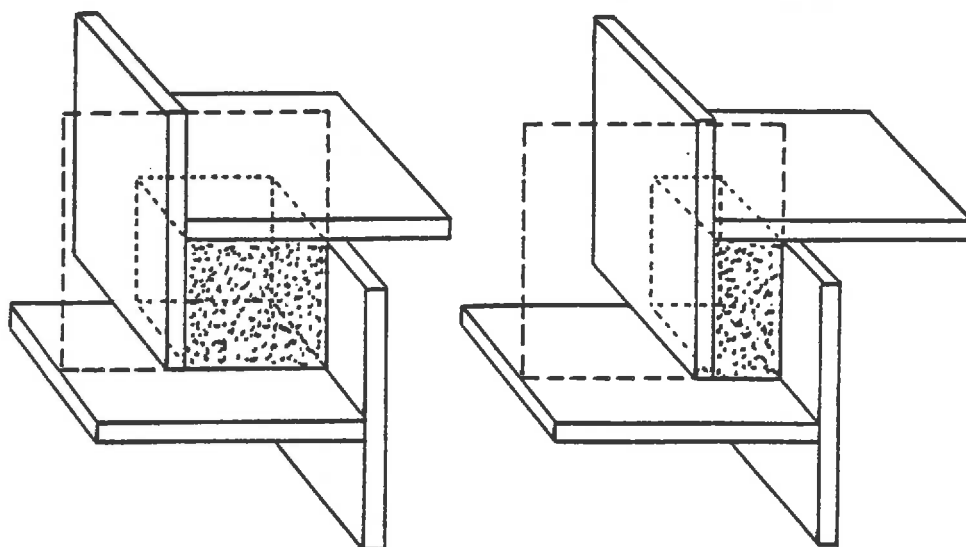


FIGURE I.45
Vue de la presse véritablement triaxiale "TRI-TRI"

- Schéma a.



Vérin de contact
avec plaque arrière.

- Schéma b -

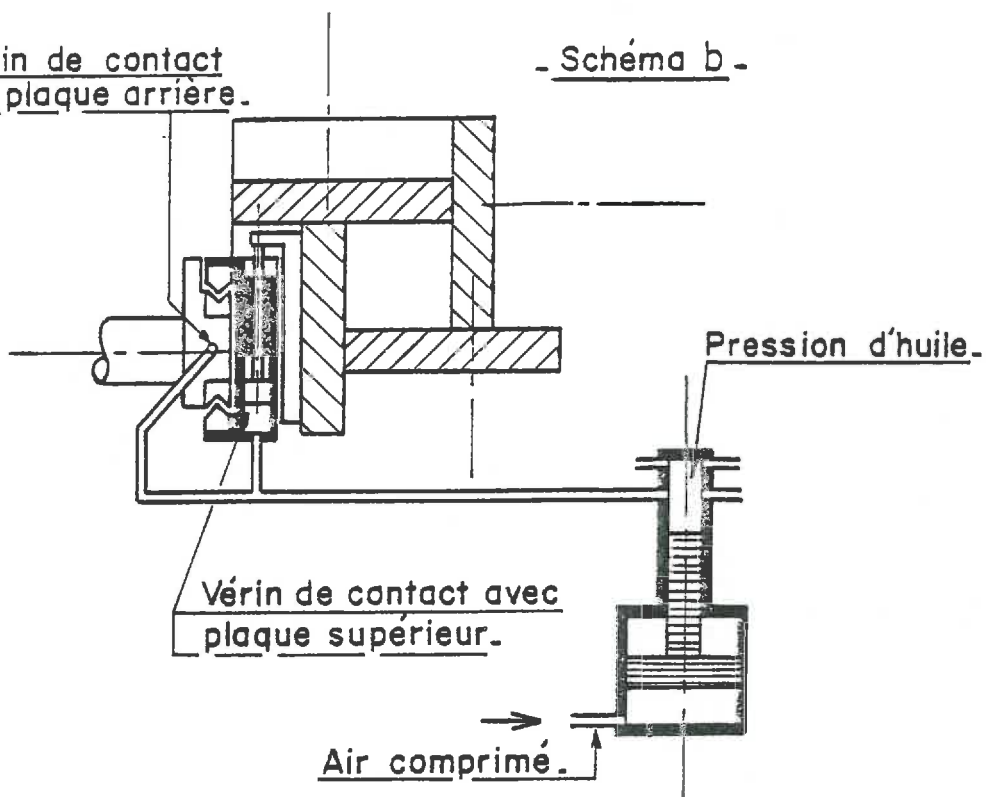


FIGURE I.46

Principe de fonctionnement de la presse
véritablement triaxiale "TRI-TRI"

Trois capteurs à induction mesurent les dimensions d'arête à la précision du $1/100^e$ de millimètre. La mesure des contraintes normales se fait directement sur les faces de l'échantillon grâce à trois capteurs noyés dans les plaques, qui ont une précision de 1 kPa. Les sept points de mesures (3 dimensions, 3 contraintes et le temps) sont scrutés simultanément en $1\mu s$, et enregistrés, pour un dépeuillement automatique, à une fréquence choisie par l'opérateur.

La régulation, entièrement électronique, permet d'imposer à chaque instant et indépendamment sur les trois directions :

- la vitesse d'avancement des plaques
- la dimension
- la contrainte
- une relation entre les quantités mesurées (par exemple, somme de contraintes = Cte)

Le type et les constantes de régulations peuvent être modifiés presque instantanément, au cours de l'essai.

Le matériau testé est enveloppé d'une capote en latex de 0,5 mm d'épaisseur, dont les faces extérieures sont lubrifiées avec une graisse au silicone ; le frottement a alors une valeur comprise entre 0,5 et 2 %.

L'intérêt d'un tel appareil pour l'étude des matériaux pulvérulents est clair : mesure à chaque instant de toutes les variables mécaniques de l'échantillon, possibilité de faire des cycles, chemins de sollicitation variés, permettant d'étudier l'influence de la contrainte principale intermédiaire et l'effet de mémoire du matériau. Cependant, on a peu d'informations sur l'homogénéité des échantillons en grandes déformations, et les mesures de variations de volume sont des mesures globales, fournissant une densité moyenne. C'est pourquoi on évite de dépasser 25 à 30 % de déformation en compression, et 10 à 15 % en extension.

Les figures I. 47 et I. 48 représentent les courbes de contrainte et de densité obtenues lors de deux essais monotones, respectivement de compression et d'extension, dans le cas d'un chargement triaxial de révolution, à 0,3 MPa de pression latérale, avec la presse tridimensionnelle.

ESSAI	TYPE	REGULATION	PRESSION LATERALE	DENSITE INITIALE
T 14	compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,73
T 15	extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,73

En compression, le comportement est pratiquement identique à celui observé avec l'appareil Phogadense. Un petit compactage est mis en évidence (la densité passe de 1,732 à 1,736 entre 0 et 0,6 % de déformation), puis le matériau dilate et la densité commence à se stabiliser à partir de 20 % de déformation. L'essai ayant été arrêté à 24 %, on ne met pas clairement en évidence le palier de densité, mais la valeur atteinte à 24 % de déformation (1,585) correspond bien à la densité-limite pour un essai à 0,3MPa de pression latérale. (On avait trouvé 1,595 dans le chapitre B).

La contrainte passe par un pic, avec un angle de frottement de 39,8 degrés et redescend vers un angle de 36 degrés, à 24 % de déformation. Pour pouvoir comparer les caractéristiques de pic avec celles trouvées au chapitre C, on calcule le terme $\rho - \rho_L$ au pic, qui vaut 0,08. La dilatance au pic est égale à 0,35, ce qui est correct, par rapport à la figure I. 38. Mais l'angle de frottement au pic est trop fort, il devrait être de 38 degrés environ, toujours si l'on se réfère aux essais du chapitre C.

En extension, le module tangent initial est égal au module de compression. La contrainte se stabilise à un niveau correspondant à un angle de frottement de 50 degrés. Après une contractance très faible, le matériau dilate. A 10 % de déformation, il est encore très loin de la densité-limite mesurée au chapitre D (1,51). Il semble que l'on se heurte assez vite à des problèmes d'hétérogénéité, les mesures effectuées ne pouvant être des mesures locales dans la zone où le matériau se déforme le plus.

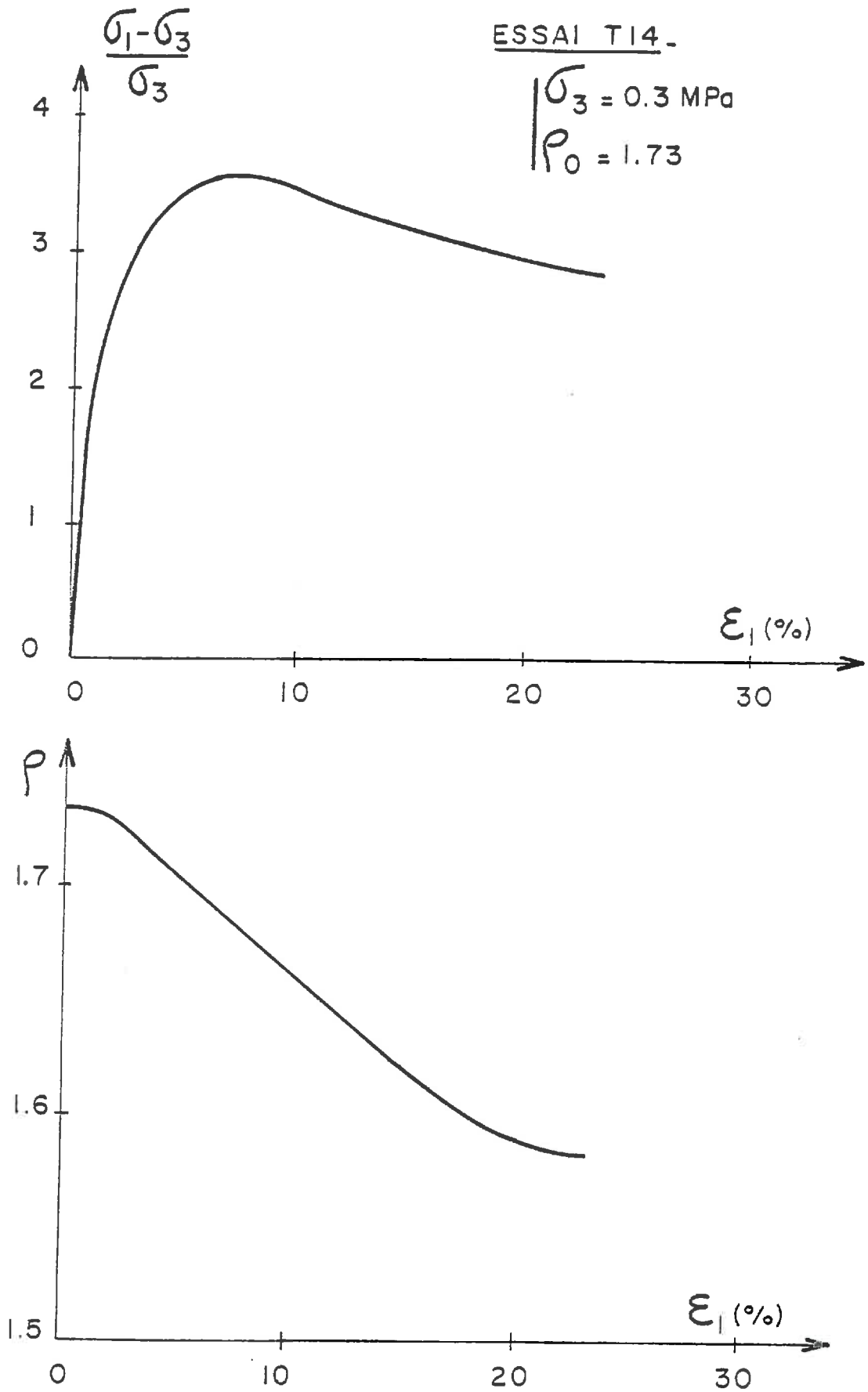


FIGURE I.47

Résultat d'un essai de compression à pression latérale constante sur un échantillon de sable à l'appareil TRI-TRI

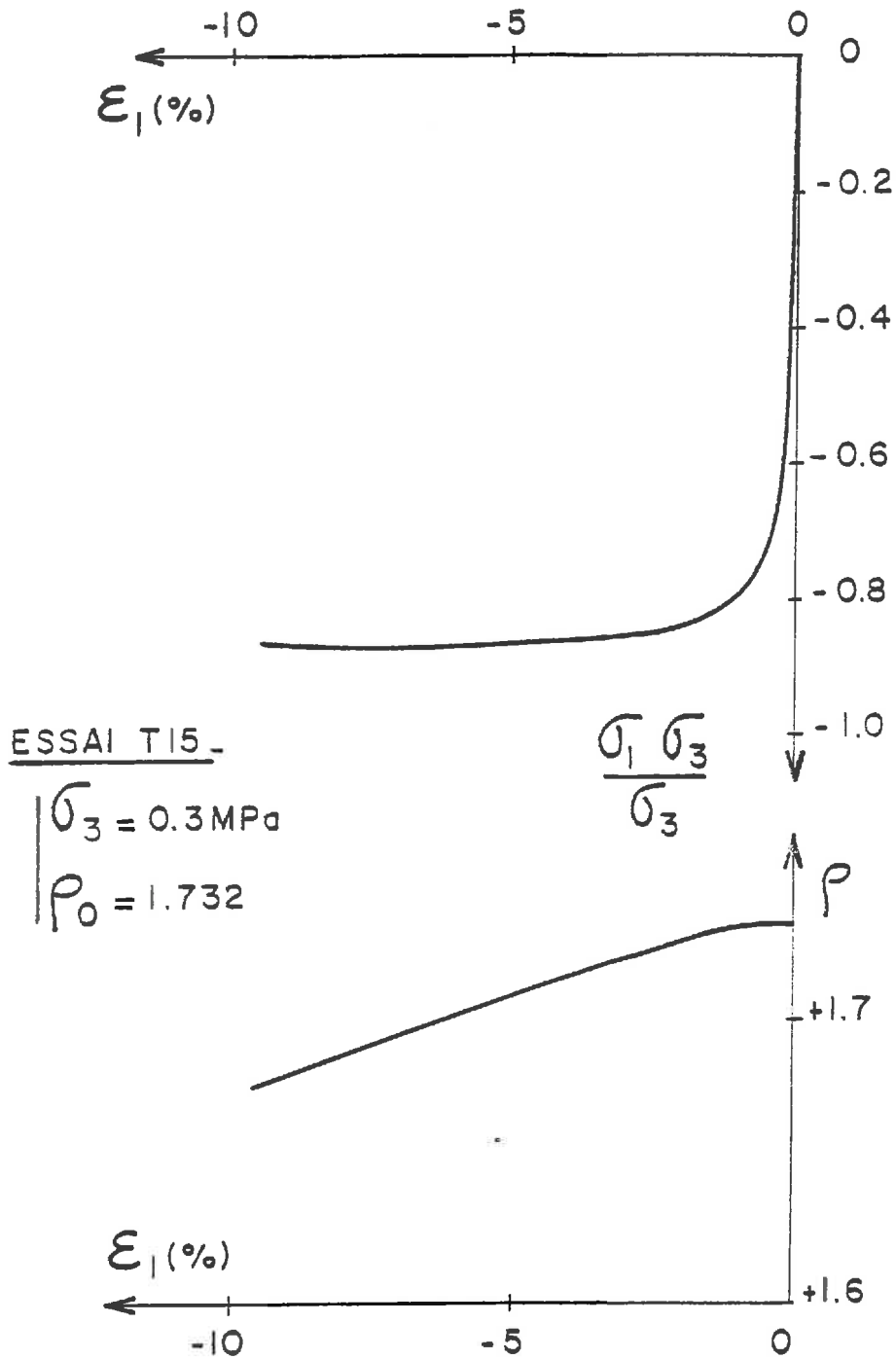


FIGURE I.48

Résultat d'un essai d'extension à pression latérale constante d'un échantillon de sable à l'appareil TRI-TRI

2) Essais cycliques à pression latérale constante

On a réalisé des essais cycliques simultanément avec l'appareil Phogadense et avec la presse tridimensionnelle Tri-Tri, deux contraintes étant égales et constantes, la troisième direction étant réglée en vitesse de déformation. L'appareil triaxial classique ne permet pas d'effectuer un nombre élevé de cycles en extension, à cause du phénomène de striction, qui perturbe l'essai dès que la déformation en extension atteint 10 %. Avec la presse véritablement triaxiale, on n'a pas ce problème ; on a pu réaliser des essais plus longs.

Les caractéristiques des essais effectués sont rassemblées dans le tableau suivant. (Les essais effectués avec l'appareil Tri-Tri ont un numéro précédé de la lettre T.)

ESSAI	TYPE	REGULATION	PRESSION LATERALE	DENSITE INITIALE
26	compression (+1 petit cycle)	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,65
50	Cyclique avec départ en extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,5 MPa	1,59
40	compression (+1 cycle)	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,5 MPa	1,75
34	Cyclique avec départ en extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,76
93	Cyclique avec départ en compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,81

tableau (suite)

ESSAI	TYPE	REGULATION	PRESSION LATERALE	DENSITE INITIALE
95	Cyclique avec départ en extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,73
T 12	Cyclique avec départ en compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,69
T 17	Cyclique avec départ en extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,3 MPa	1,75
T 18	Cyclique avec départ en extension	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,8 MPa	1,74
T 19	Cyclique avec départ en compression	$\sigma_3 = \text{Cte}$	0,8 MPa	1,74

Au cours de l'essai 26, on a effectué un petit cycle-décharge-recharge, le déviateur de contrainte restant positif. (figure I. 49 a). On observe une petite boucle d'hystérésis, les modules de décharge et de recharge étant plus forts que le module tangent initial. Une mesure très fine de variation de volume ferait apparaître un petit compactage. Une répétition de petits cycles de ce type entraîne une densification du matériau, dans la mesure où ces cycles sont centrés sur un niveau de contrainte pas trop élevé, comme l'ont montré LUONG [20] et THANOPOULOS [33] .

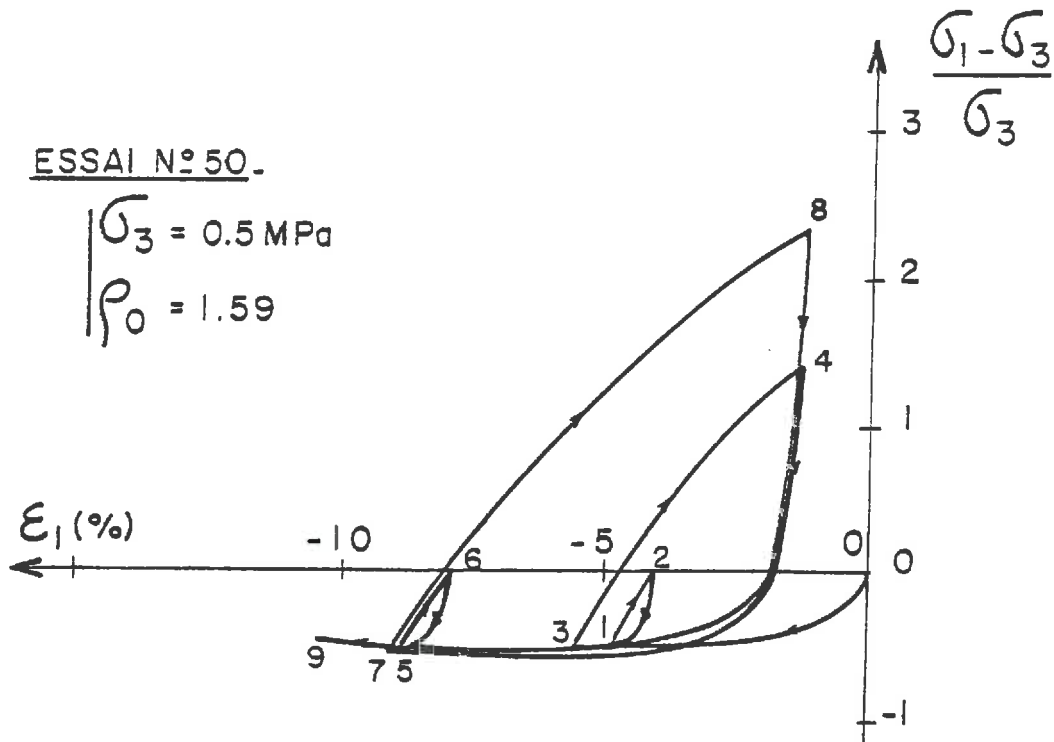
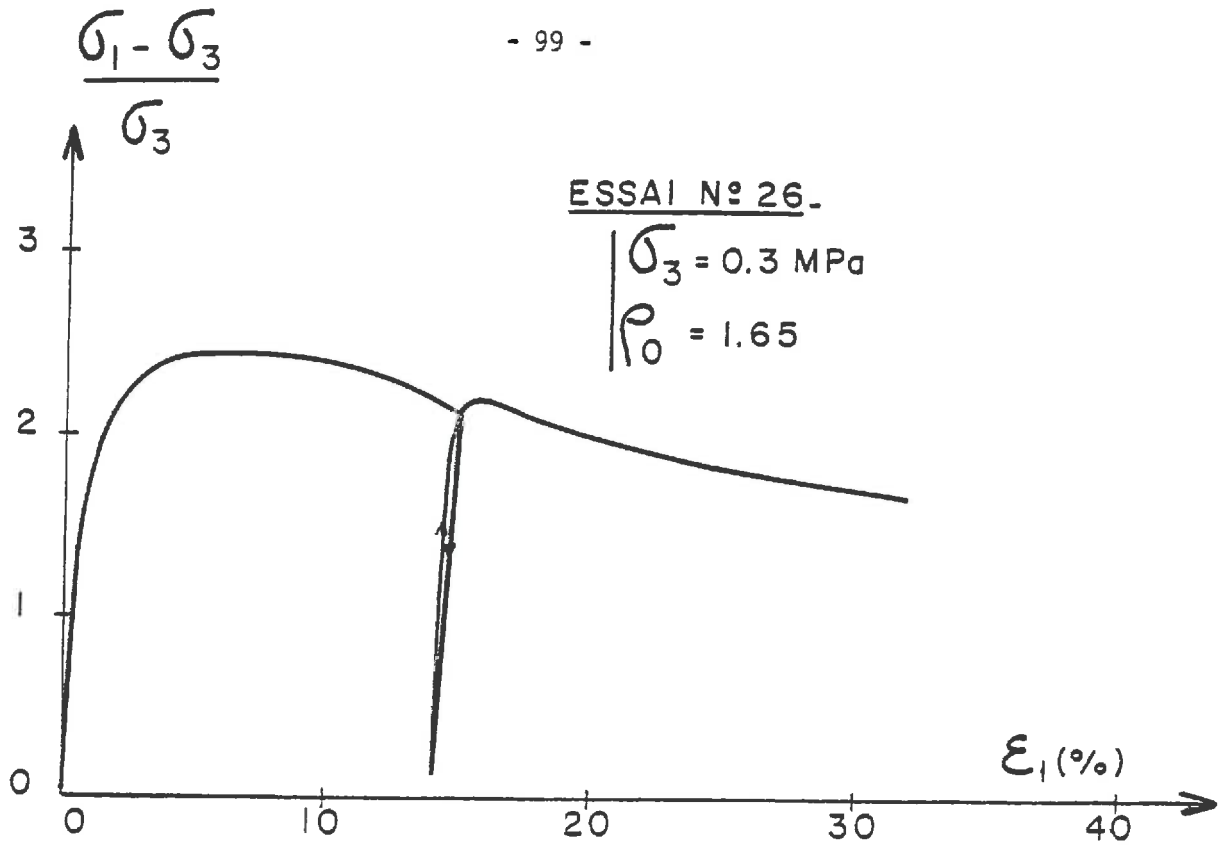
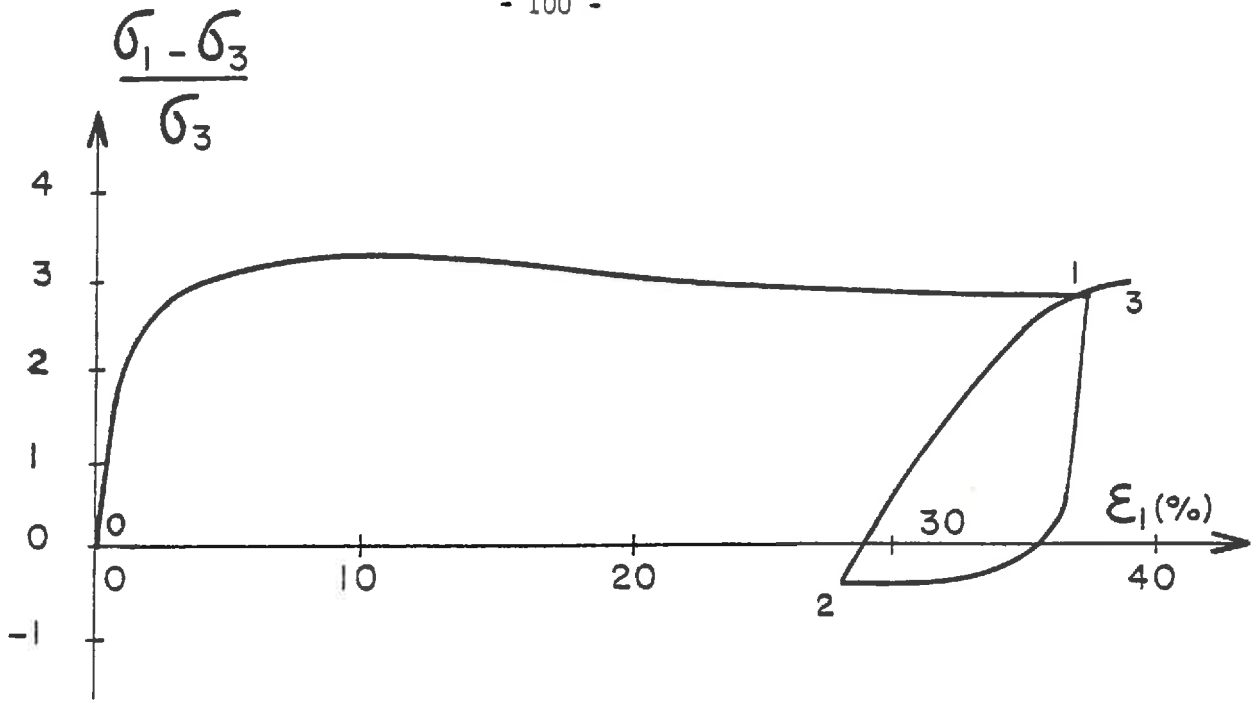


FIGURE I.49

Essais cycliques à pression latérale constante effectués sur l'appareil PHOGADENSE



ESSAI N° 40 -

$$\left| \sigma_3 = 0.5 \text{ MPa} \right.$$

$$\left| p_0 = 1.95 \right.$$

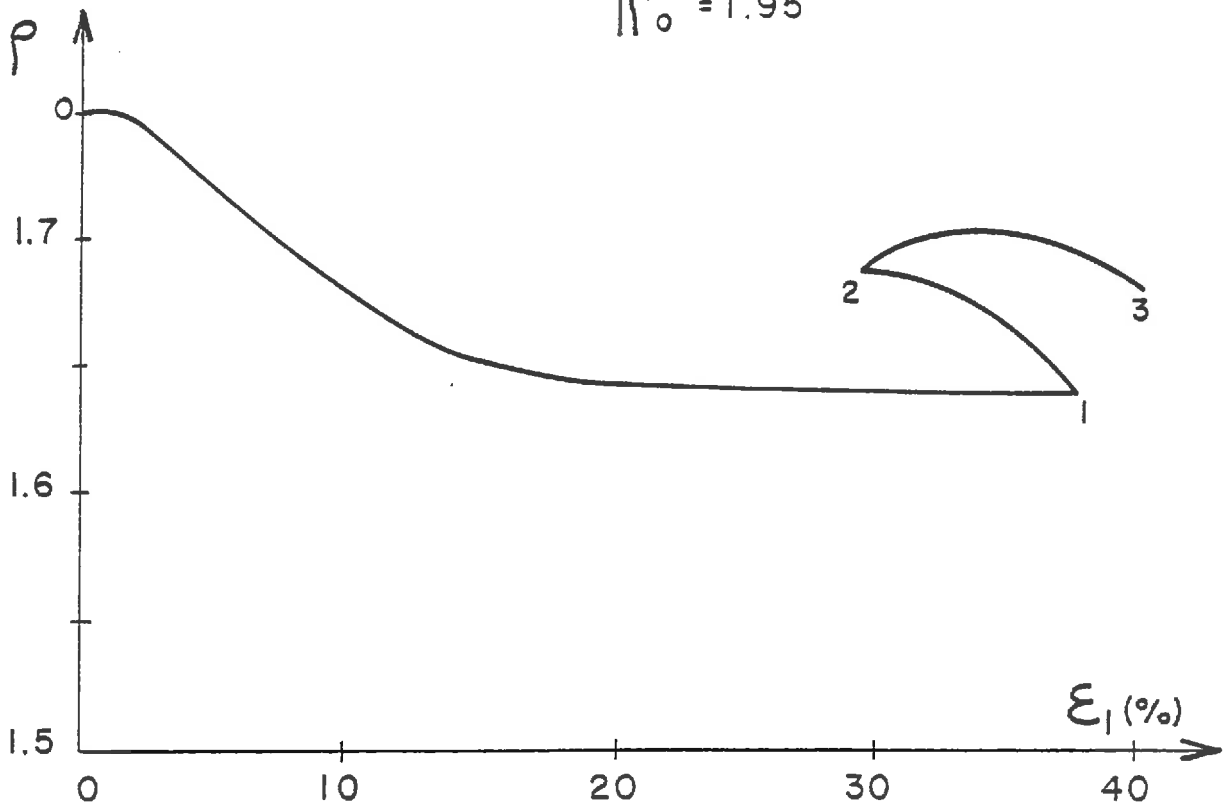


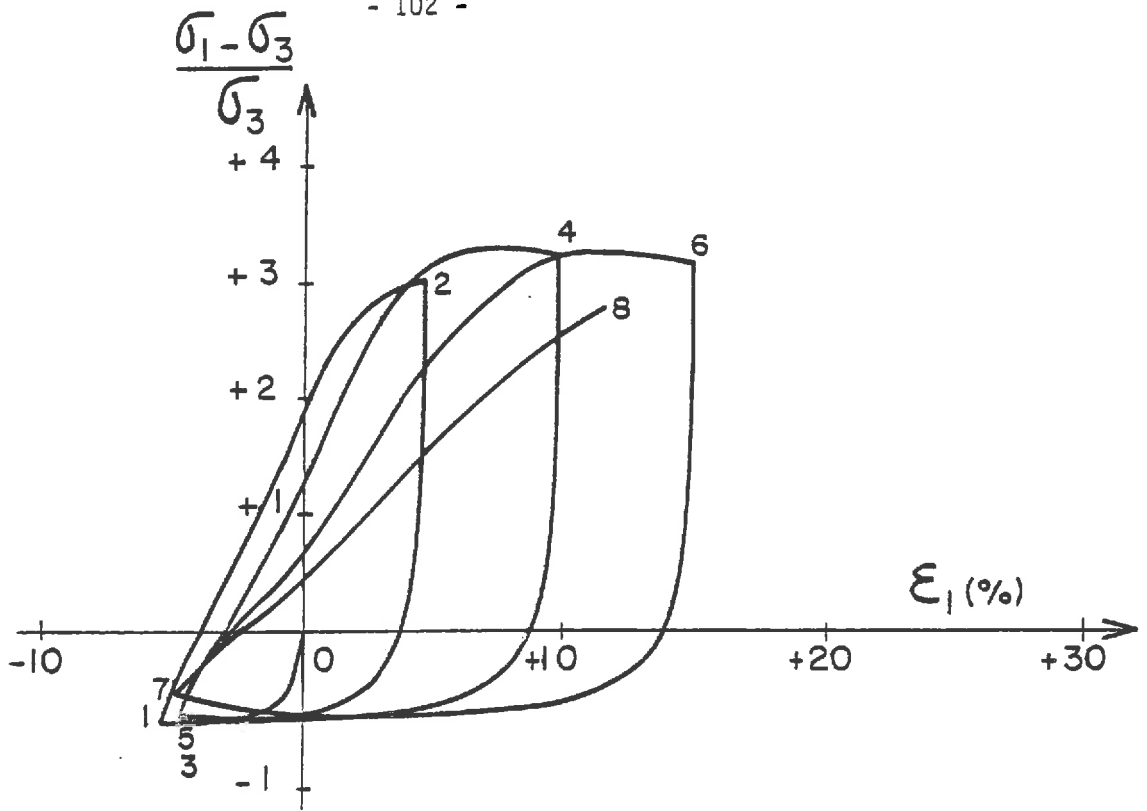
FIGURE I.50

Essai cyclique à pression latérale constante
effectué sur l'appareil TRI-TRI

Si l'on continue la décharge pour passer en extension (figure I. 50), le compactage se poursuit, jusqu'à ce que le déviateur de contrainte ait atteint une valeur proche du palier de plasticité. A partir de là, le matériau dilate. Lorsqu'on recharge, la densité évolue de la même façon : compactage puis dilatation. La recharge est particulièrement douce, le module tangent étant d'autant plus faible que le matériau a été écroui en extension. On repasse pratiquement par le point d'inversion, dans le diagramme contrainte-déformation axiale. La courbe $\sigma_1 = f(\epsilon_1)$ pour cette recharge est presque une droite, ce qui donne, pour l'ensemble du cycle une allure triangulaire : décharge rigide, écoulement en extension à contrainte constante, recharge linéaire.

Dans l'essai 50 (figure I. 49 b), on a effectué des cycles d'amplitude différente à partir d'un état d'écoulement plastique en extension. On retrouve un comportement doux à la recharge et raide à la décharge, même sur les petits cycles (1-2 et 5-6) qui présentent ainsi des courbes d'hystérésis très larges. Le module de recharge au point 7 est plus faible que celui au point 3 : l'anisotropie créée par la première charge en extension n'a pas été effacée par la recharge 3-4, et a été au contraire augmentée par l'écrouissage supplémentaire réalisé entre 3 et 7. La courbe de densité n'est pas exploitable, car les variations sont trop faibles.

Pour étudier le module de recharge, on a réalisé, dans l'essai 95, des cycles d'amplitude de plus en plus grande, en essayant de repasser en extension par le même point du diagramme contrainte-déformation (figure I. 51). Sur l'appareil Phogadense, l'apparition de la striction en tête d'échantillon a un peu faussé les résultats du 4ème cycle. On observe au point 7 une chute du déviateur de contrainte et une stabilisation de la densité. Autre problème : la mesure de densité fournit un nuage de points qu'il est difficile d'interpréter. La courbe de densité présentée a été en fait, intuitée à partir des résultats d'un essai analogue réalisé sur la presse véritablement triaxiale (figure I. 52). Les courbes de contrainte obtenues avec les deux appareils sont presque superposables. Les angles de frottement au pic sont presque égaux en compression (38,5 et 39 degrés). En extension, les valeurs sont assez différentes (41 et 49 degrés), ce qui n'est pas étonnant, étant donné les problèmes



ESSAI N° 95

$$\begin{cases} \sigma_3 = 0.3 \text{ MPa} \\ p_0 = 1.73 \end{cases}$$

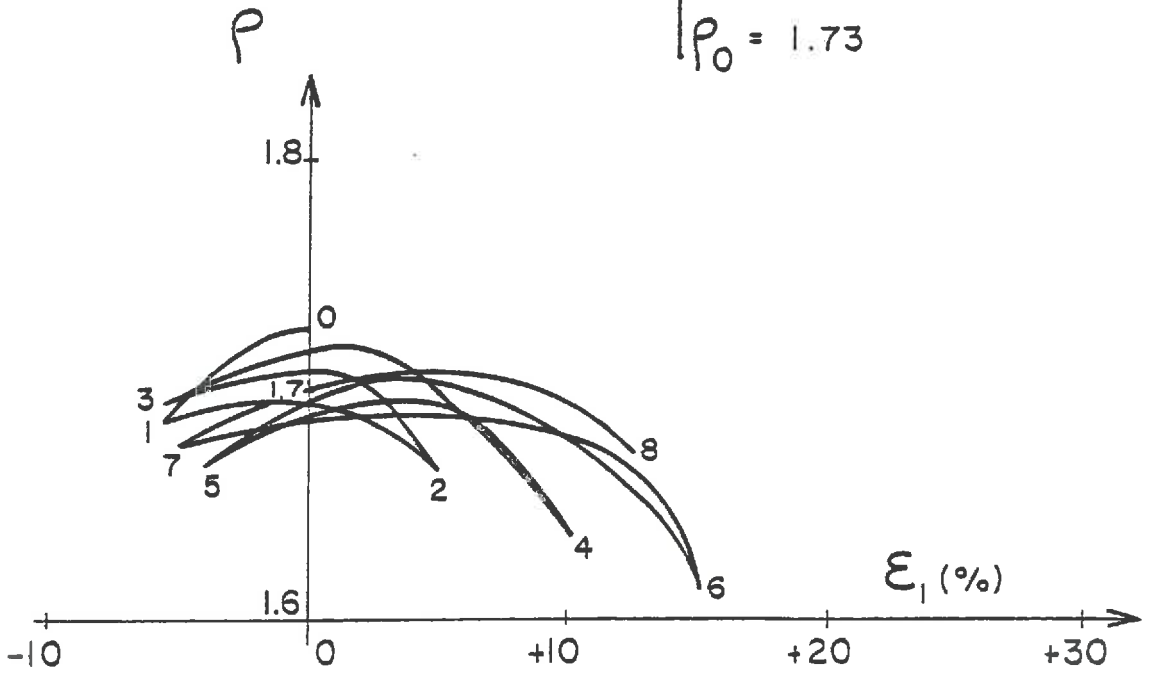
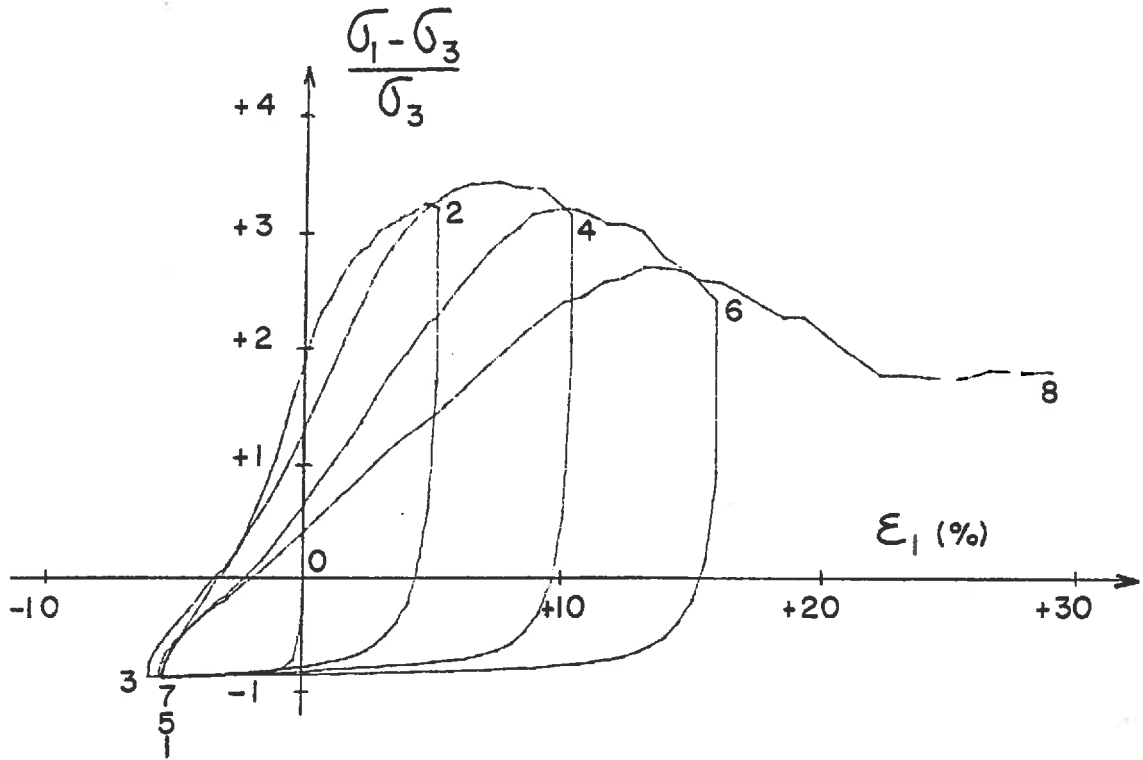


FIGURE I.51

Essai cyclique à pression latérale constante
effectué sur l'appareil PHOGADENSE



ESSAI T 17-

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_3 = 0.3 \text{ MPa} \\ p_0 = 1.75 \end{array} \right.$$

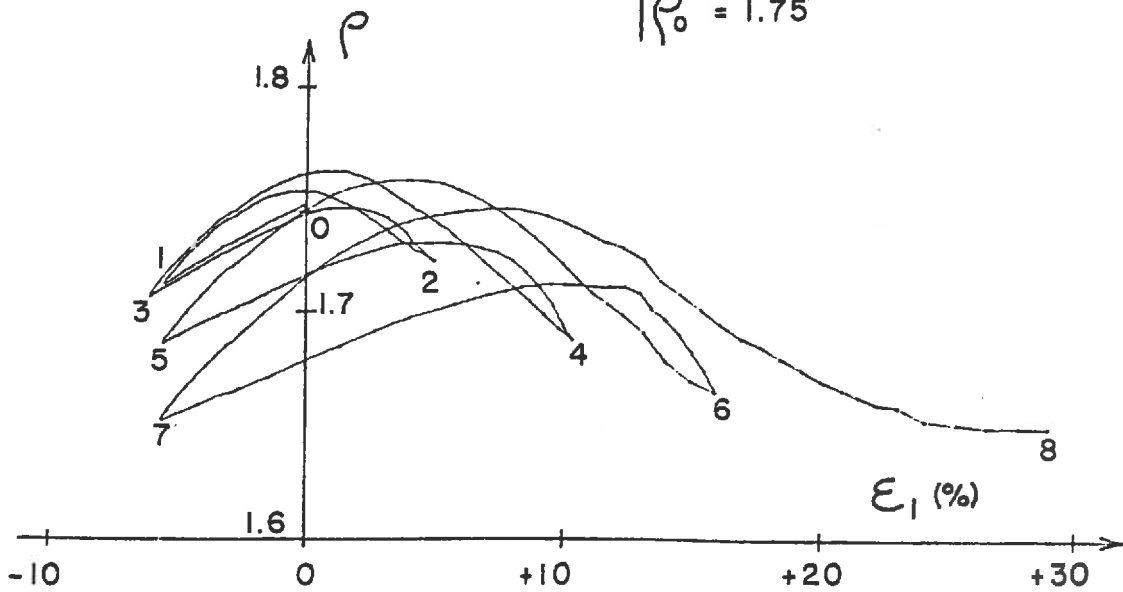


FIGURE I.52

Essai cyclique à pression latérale constante effectué sur l'appareil TRI-TRI

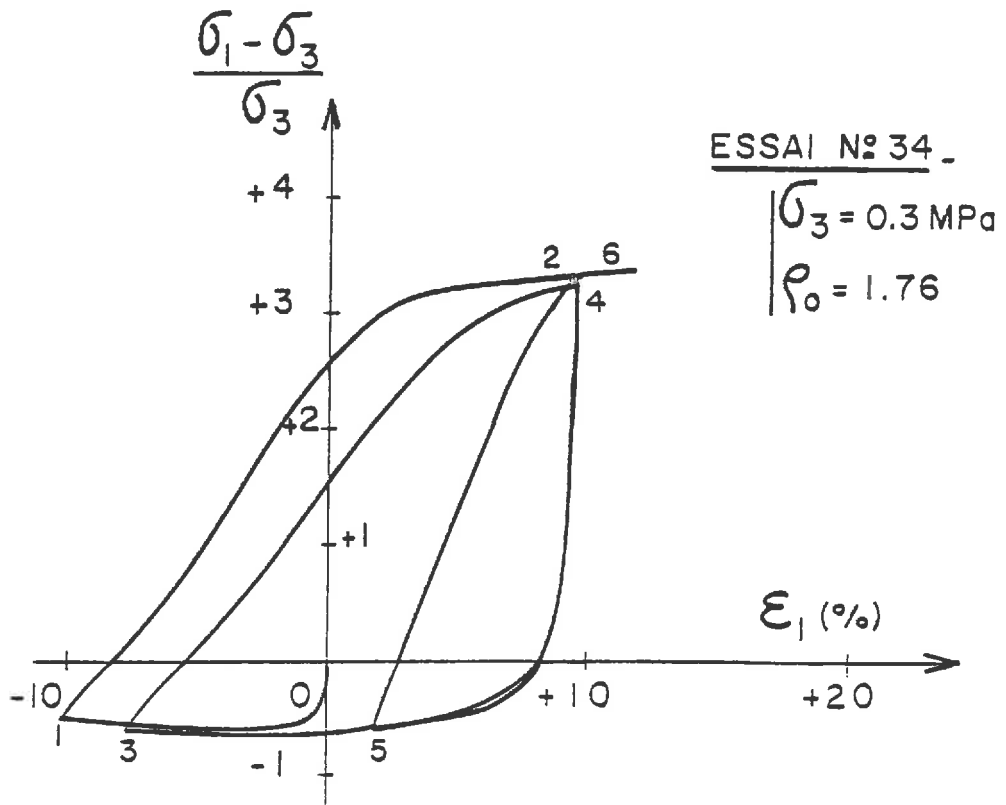


FIGURE I.53

Essai cyclique à pression latérale constante
effectué sur l'appareil PHOGADENSE

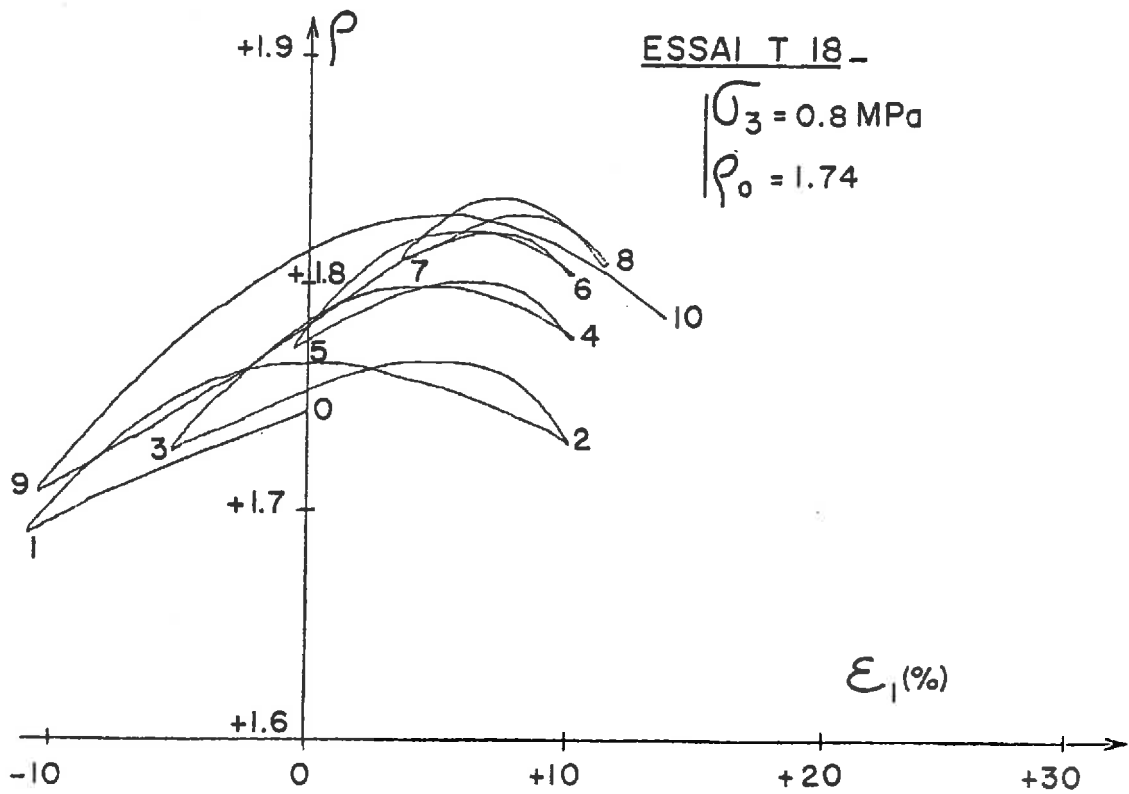
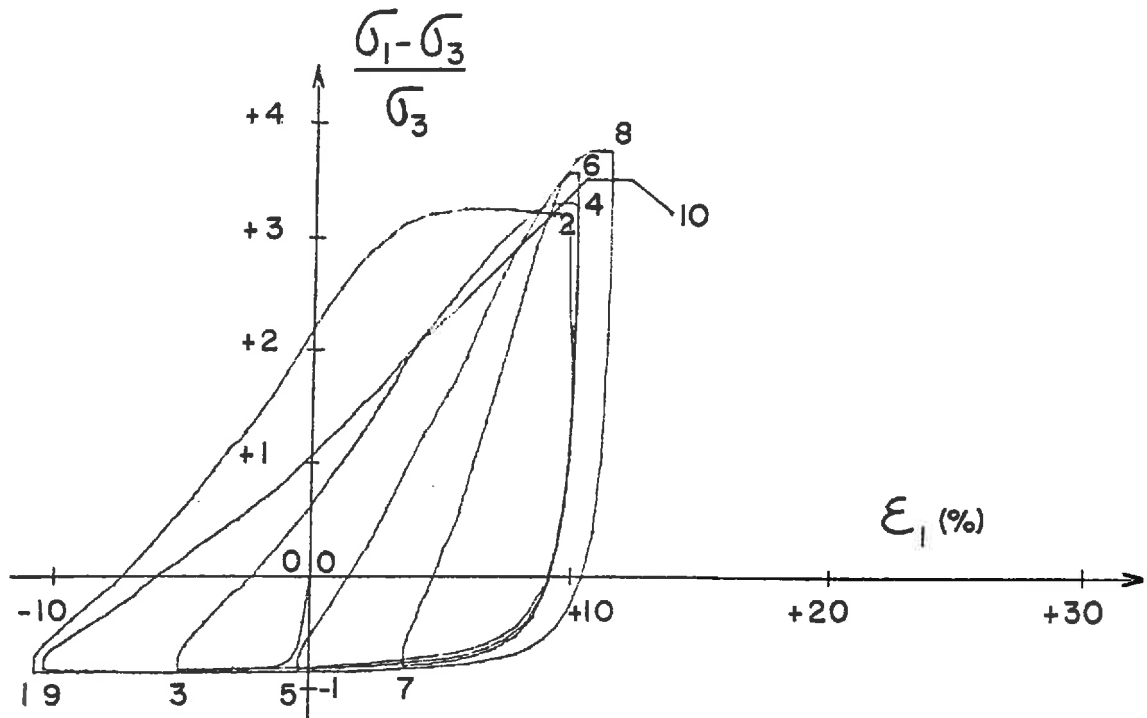
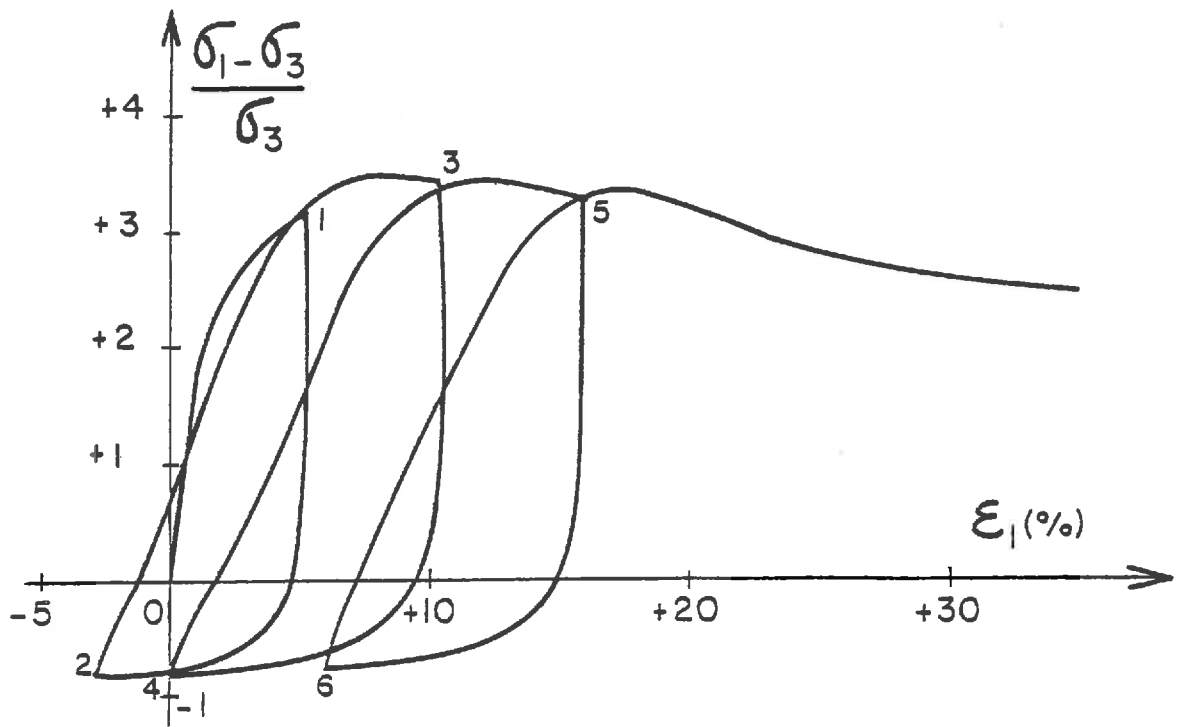


FIGURE I.54

Essai cyclique à pression latérale constante
effectué sur l'appareil TRI-TRI



ESSAI N° 93.

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_3 = 0.3 \text{ MPa} \\ \rho_0 = 1.81 \end{array} \right.$$

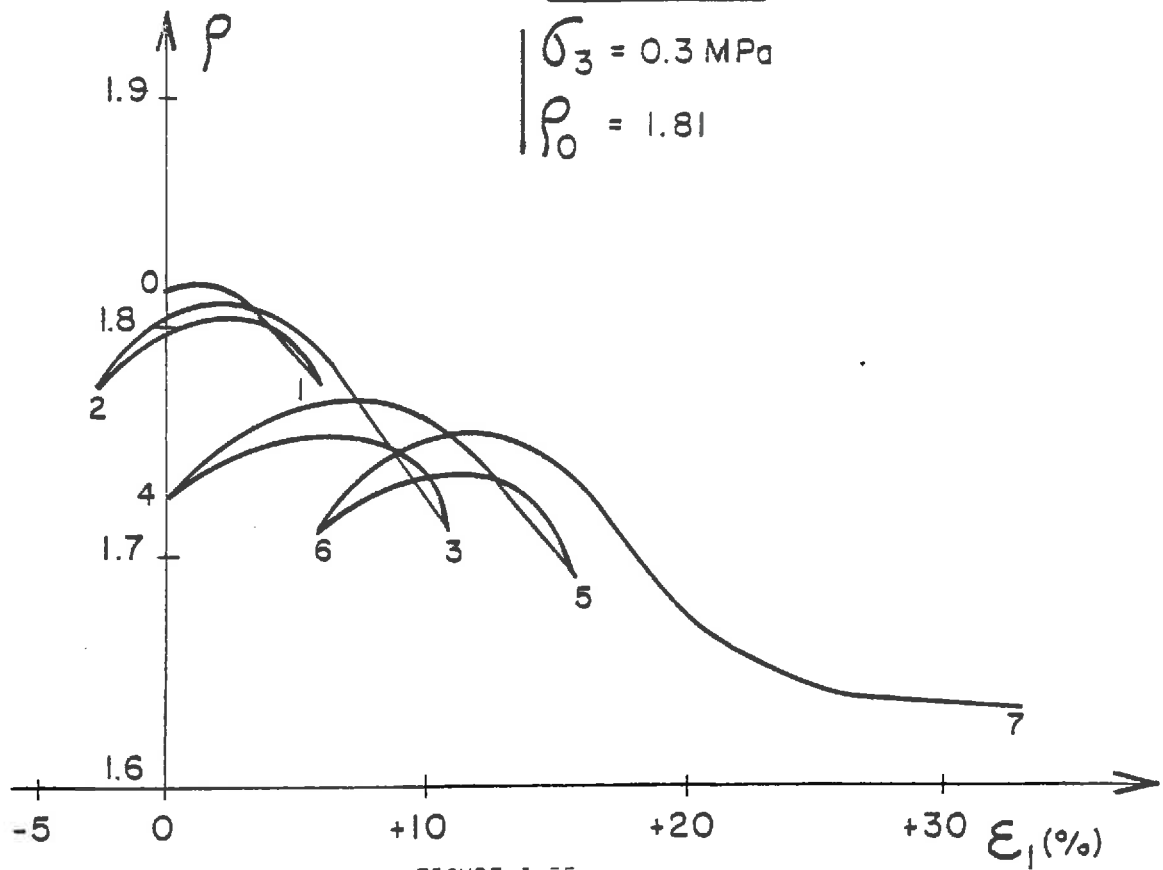
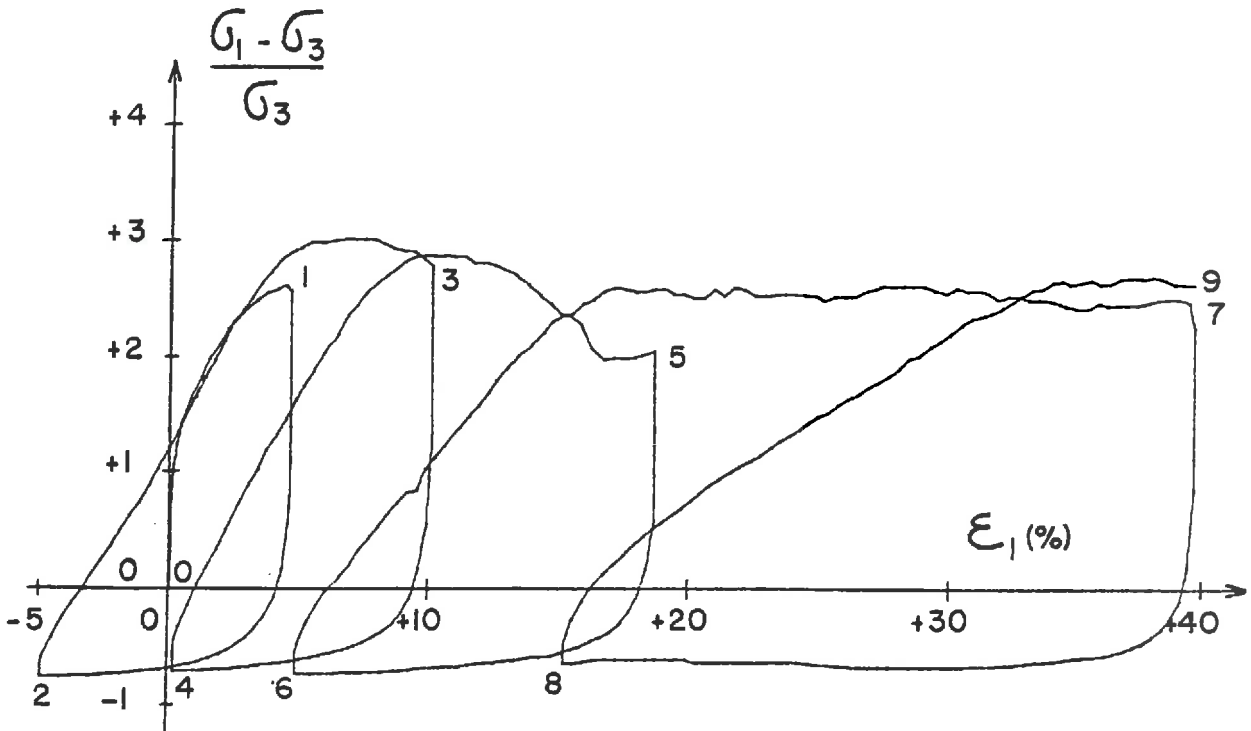


FIGURE I.55

Essai cyclique à pression latérale constante
effectuë sur l'appareil PHOGADENSE



ESSAI T 12.

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_3 = 0.3 \text{ MPa} \\ \rho_0 = 1.69 \end{array} \right.$$

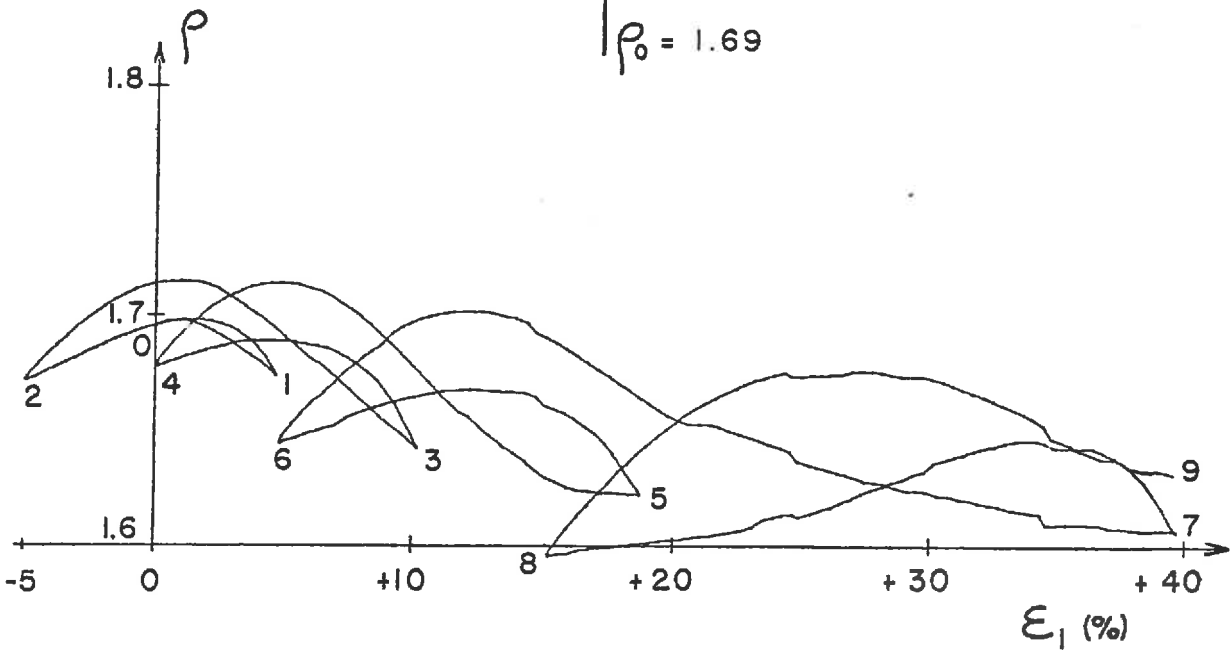


FIGURE I.56

Essai cyclique à pression latérale constante
effectué sur l'appareil TRI-TRI

d'hétérogénéités dont on a parlé. Les pentes moyennes de recharge aux points 1,3,5 et 7 valent respectueusement 17,3 ; 14,5 ; 9,5 et 5,9 MPa pour la presse Tri-Tri et 15,2 ; 14,9 ; et 6,5 MPa pour l'appareil Phogadense. Elles sont d'autant plus faible que l'amplitude du cycle est plus grande, c'est à dire que l'écrouissage en extension est plus important. Cet écrouissage est lié à une dilatance du matériau, et on peut remarquer, sur la figure I. 52, que les modules de recharge décroissent avec la densité. Sur la figure I. 51, ce n'est pas vérifié, la précision des mesures n'est pas suffisante. On constate enfin qu'à tous les points d'inversion, en extension ou en compression, la contractance qui apparait est toujours plus forte que la dilatance précédant l'inversion.

Les figures I. 53 et I. 54 représentent les essais 34 et T 18, réalisés sur chaque presse, avec plusieurs cycles d'amplitude différente passant par le même point en compression. L'essai effectué sur Phogadense n'est pas très bon du point de vue des mesures de densité. En contrainte, la concordance est très bonne. Sur l'essai T 18, qui est plus complet, on remarque que les modules de recharge aux points 1 et 3 sont presque égaux (8,5 et 8,9 MPa), pour un écrouissage égal, alors que les modules en 5 et 7 sont plus forts (13,8 et 22 MPa), correspondant à des cycles plus petits et que le module en 9 qui traduit l'écrouissage le plus important est le plus faible (6,4 MPa). Les pentes moyennes de recharge sont d'autant plus faibles que l'écrouissage en extension est plus fort. On remarque également que la pente de recharge augmente avec la densité aux points 9, 3, 5 et 7. Le point 1, correspondant à une première charge, ne suit pas cette règle.

Les figures I. 55 et I. 56 correspondent aux essais 93 et T 12, au cours desquels on a voulu réaliser des cycles de même amplitude. Les densités initiales (respectivement 1,81 et 1,69) sont trop différentes pour qu'on puisse comparer les courbes. Cependant, on peut remarquer qu'on arrive à 40 % de déformation à des densités-limite voisines. Sur la figure I. 55 les pentes de recharge aux points 2, 4 et 6 (16,3 ; 14,8 ; et 14 MPa) sont presque égales pour des cycles de même amplitude, donc des écrouissages identiques. C'est la même chose sur la figure I. 56 pour les points 2 et 4.

Au contraire, les modules en 6 et 8 sont plus faibles, correspondant à des écrouissages plus forts, et à des densités plus faibles.

Pour vérifier les hypothèses faites, on présente sur la figure I. 57 un essai plus complexe, réalisé sur la presse tridimensionnelle. On constate que les recharges à partir des points 2, 4, 8 et 10 (de pentes moyennes respectives 4,7 ; 4,6 ; 5 et 4,5 MPa) sont pratiquement identiques. Les trajets en extension précédant ces points ont été de longueurs différentes, mais suffisamment longs pour avoir produit le même écrouissage. Les densités en 2, 4 et 10 (le point 8 fait exception) sont égales ; elles ne sont pas égales à la densité-limite déterminée au chapitre C, probablement à cause de l'hétérogénéité de l'échantillon. Le point 6 a un module plus fort (10,2 MPa), et une densité plus élevée, puisqu'il a été atteint après un écrouissage plus court.

Il apparait donc que le comportement du matériau n'est pas symétrique en compression et en extension. En compression les décharges sont très raides, vis à vis de la déformation axiale ; en extension, les recharges sont beaucoup plus douces, le module de recharge étant d'autant plus faible que l'écrouissage en extension a été plus long. On a tracé sur la figure I. 58, les valeurs des pentes moyennes de recharges (rapportées à la pression latérale σ_3), en fonction de la longueur du trajet en extension précédant l'inversion, pour l'ensemble des essais réalisés avec les deux appareils. On peut constater une bonne cohérence des résultats, malgré l'incertitude sur les calculs de la pente moyenne. On a déterminé une forme analytique pour cette pente E, en fonction de la déformation en extension précédant l'inversion, ϵ_1 .

$$E = \sigma_3 [12 + 72,2 e^{-11\epsilon_1}]$$

La dissymétrie des courbes dans le diagramme contrainte- déformation axiale peut s'expliquer par des phénomènes d'anisotropie. L'essai triaxial de compression induit une anisotropie de structure qui rigidifie la direction axiale, qui est la direction de contrainte principale majeure. Cette anisotropie est annulée lorsque le matériau passe en extension ; l'écrouissage en extension produit une nouvelle anisotropie : c'est la direction latérale correspondant alors à la contrainte principale majeure, qui est la plus rigide.

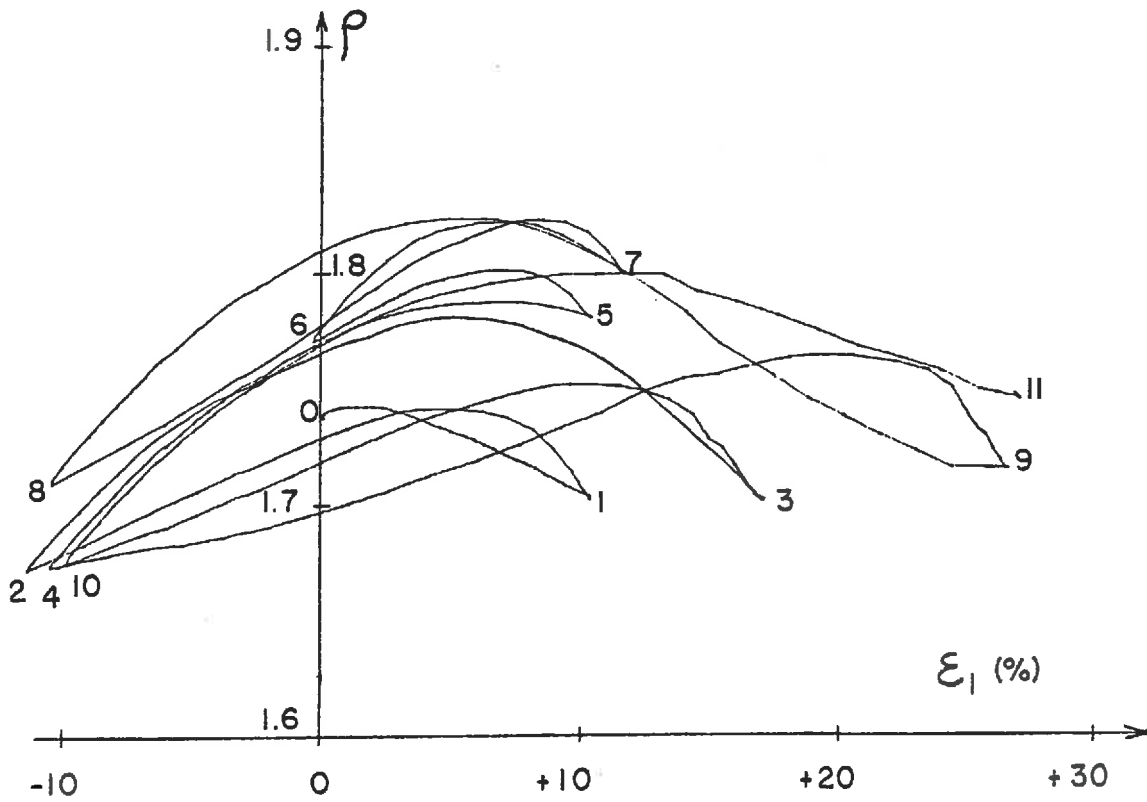
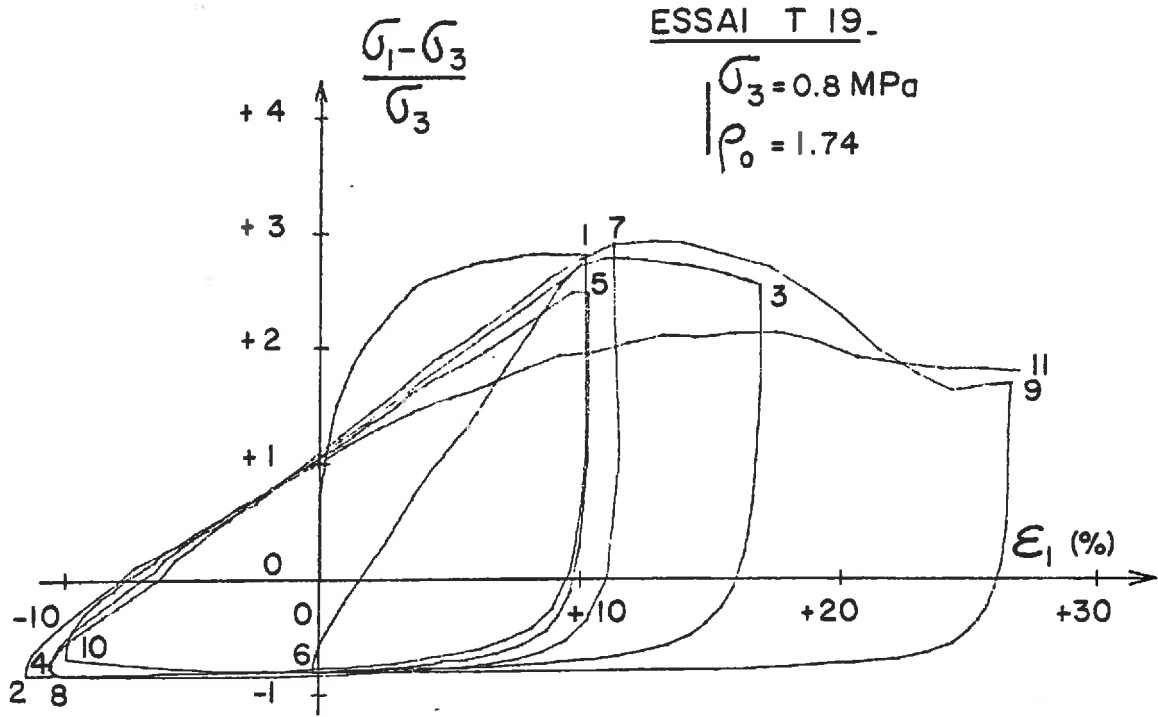


FIGURE I.57

Essai cyclique à pression latérale constante
effectué sur l'appareil TRI-TRI

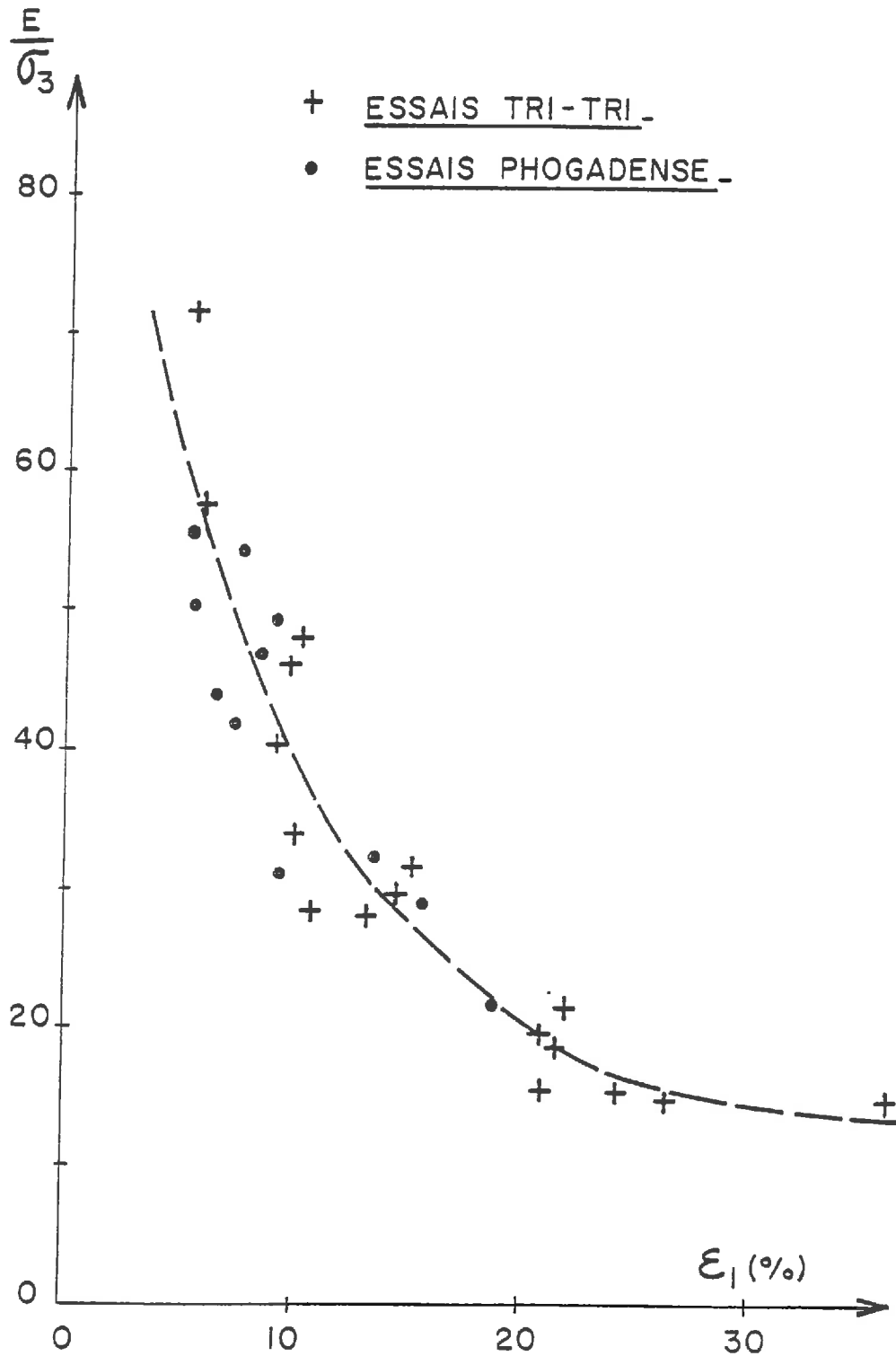
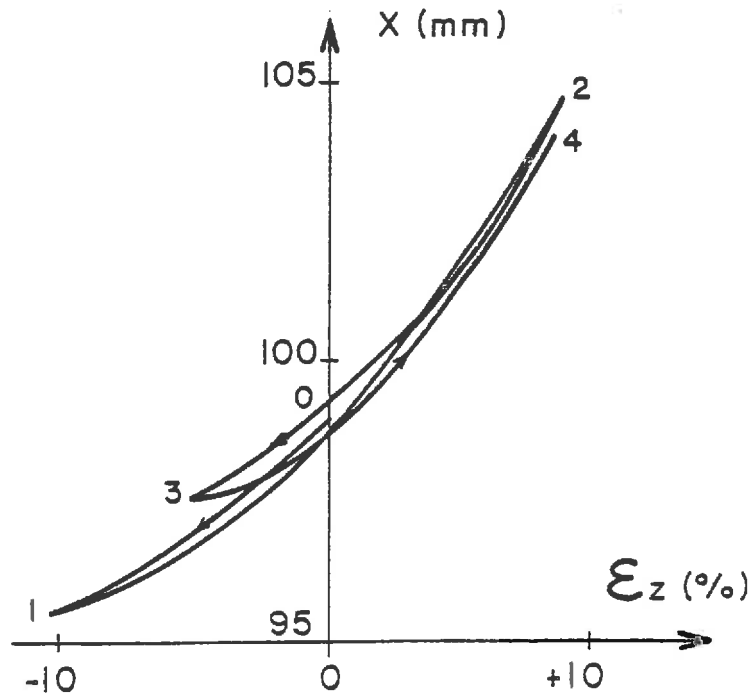


FIGURE I.58

Essais cycliques à pression latérale constante :
évolution de la pente moyenne de recharge en fonction de la longueur du trajet
en extension précédant l'inversion



ESSAI T18.

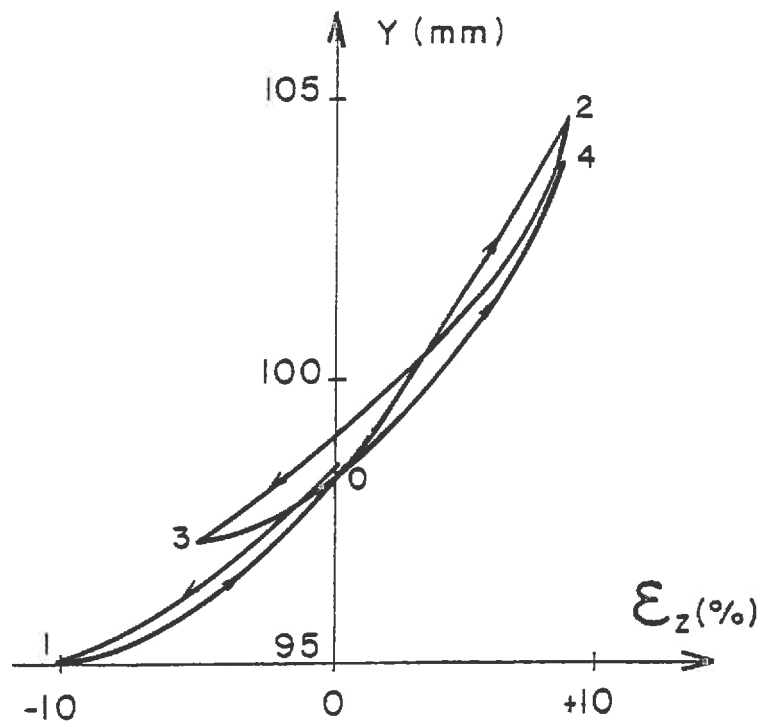


FIGURE I.59

Evolution des dimensions latérales au cours des deux premiers cycles de l'essai T 18

Ce phénomène apparaît clairement sur la figure I. 59 où l'on a tracé, pour les premiers cycles de l'essai T 18, l'évolution des dimensions latérales X et Y en fonction de la déformation axiale . On remarque qu'en décharge, aux points 2 et 4, les tangentes sont beaucoup plus raides qu'en recharge, aux points 1 et 3. On retrouve ainsi le comportement mis en évidence par LANIER [17], qui étudie l'anisotropie induite par un essai triaxial de révolution, en effectuant des essais isotropes en contrainte ; il trouve que la cinématique correspondante n'est pas isotrope, la direction sollicitée en compression étant plus rigide que les autres.

3) Essai cyclique à déviateur de contrainte constant

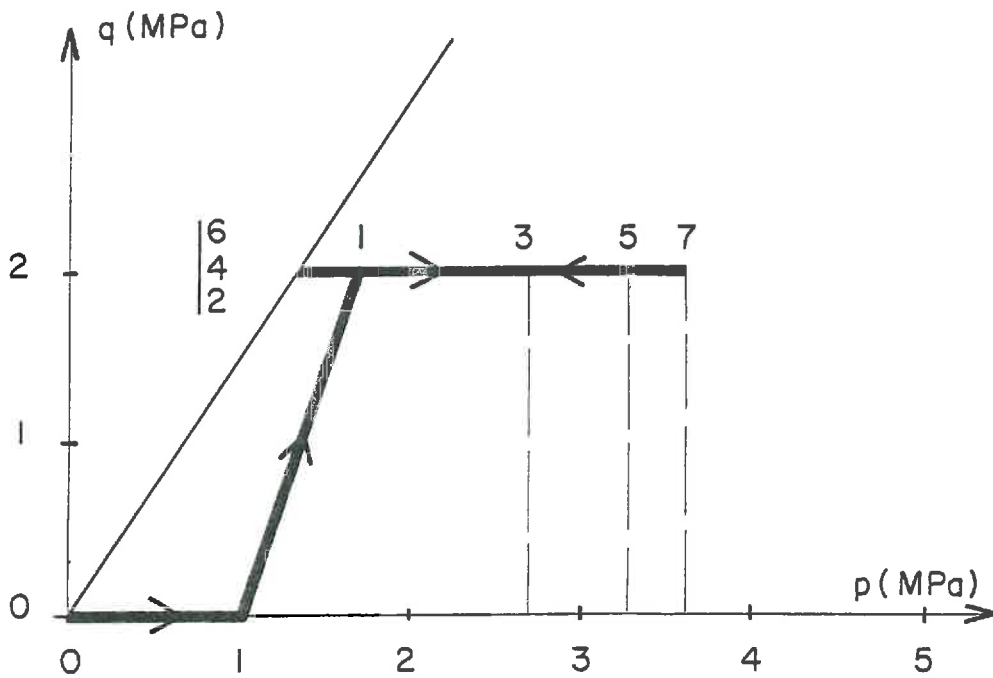
ESSAI	TYPE	REGULATION	PRESSION LATERALE INITIALE	DENSITE INITIALE
T 20	Cyclique avec départ en compression	q = 2 MPa	1 MPa	1,746

On a vu qu'un essai cyclique de ce type ne peut être contrôlé en déformation axiale. Avec la presse tridimensionnelle, on peut imposer une déformation latérale, dans la direction X, par exemple, et réguler en contraintes les deux autres directions, de telle façon que :

$$\sigma_y = \sigma_x$$

et
$$\sigma_z = \sigma_x + Cte$$

On a représenté ci-dessous le trajet suivi dans le plan p - q au cours de l'essai T 20, du point 0 au point 8.



Les courbes de contraintes et de densité, en fonction de la déformation axiale ϵ_z , sont tracées sur la figure I. 60.

L'essai commence par un chargement triaxial à pression latérale constante, égale à 1 MPa ; à partir du point 1 qui correspond à un angle de frottement de 30 degrés, on suit la droite $q = Cte$, jusqu'à l'écoulement plastique. Le matériau dilate, puis la densité se stabilise à une valeur proche de 1,70. En contrainte, on a le pic à 36 degrés, et le palier à 31 degrés, qui sont des valeurs plutôt faibles, si l'on se réfère aux résultats obtenus avec l'appareil Phogadense (chapitre C). Lorsqu'on change le sens de la déformation (trajets 2 - 3, 4 - 5, et 6 - 7), on retrouve les caractéristiques d'une charge isotrope : les trois directions se contractent faiblement sous l'effet de l'augmentation de la pression moyenne, qui est prépondérante. La direction axiale, qui correspond à la contrainte principale majeure est un peu plus rigide que les autres. (Malheureusement, à cause du type de régulation qui n'est pas symétrique sur les 2 directions latérales, la cinématique n'est pas exactement de révolution, ce qui ne permet pas de conclure à ce sujet).

Les trajets dans les sens des p décroissants (trajets 3 - 4, 5 - 6, 7 - 8), sont analogues à

ESSAI T 20.

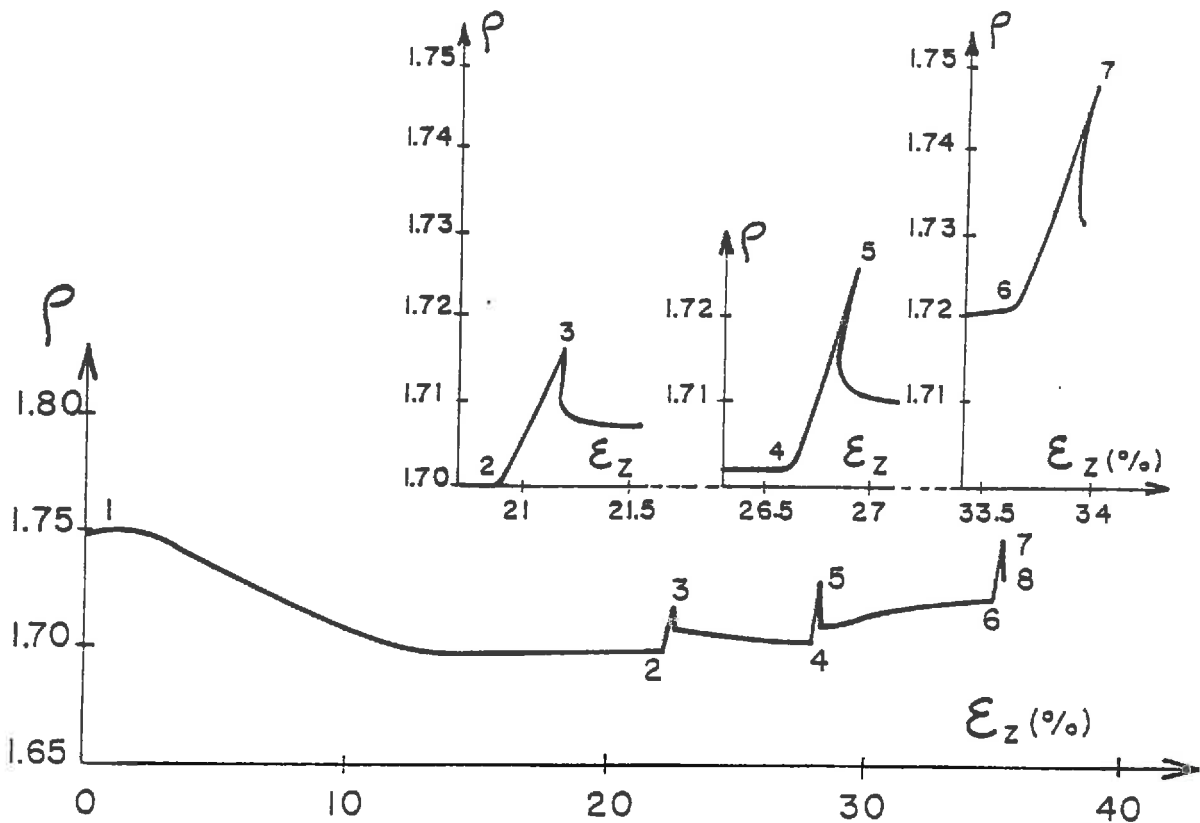
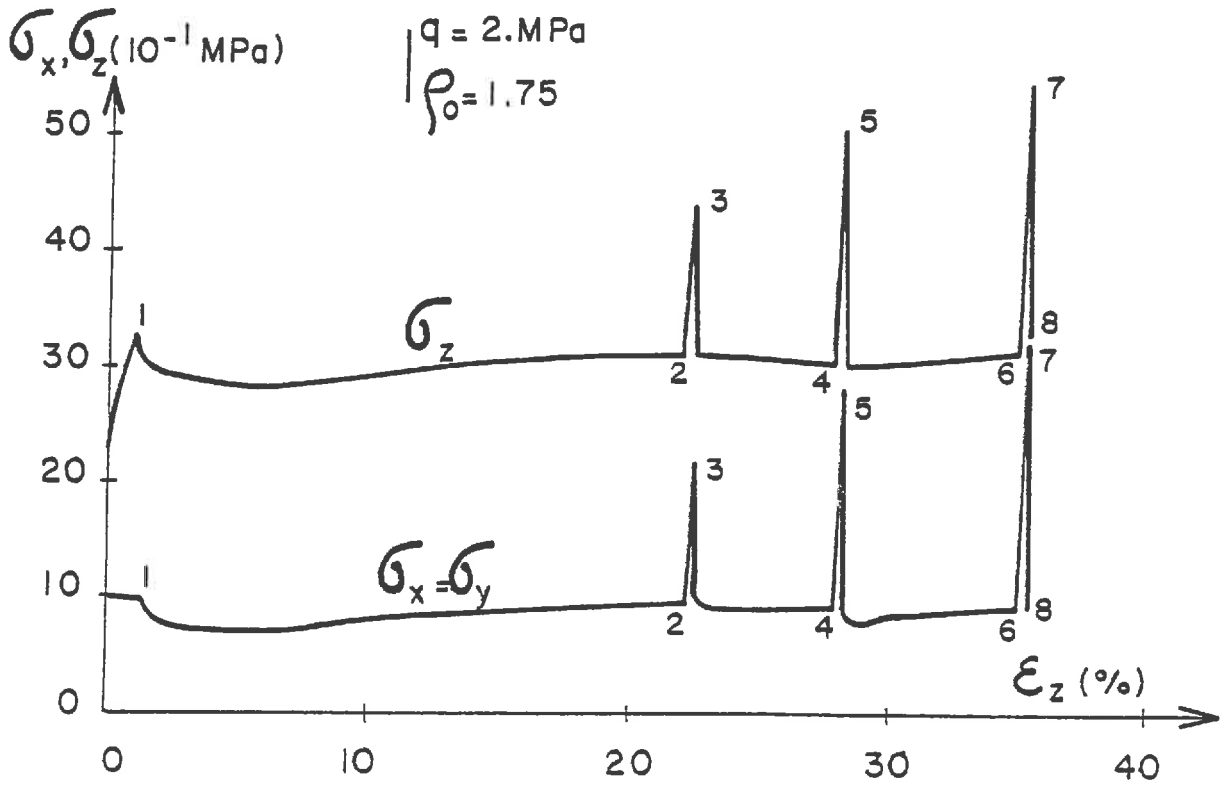


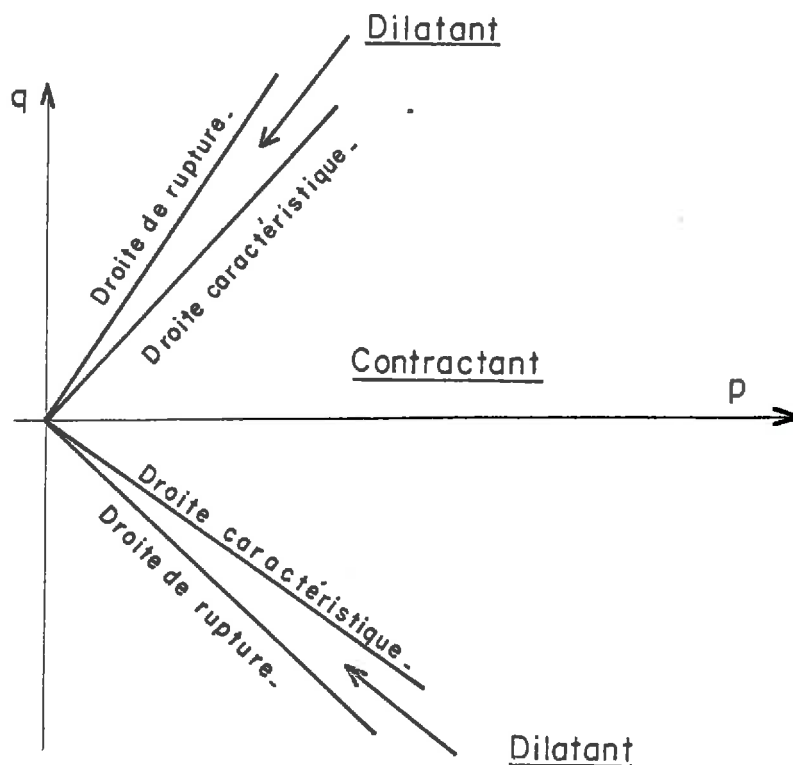
FIGURE I.60

Essai cyclique à déviateur de contrainte constant effectué à l'appareil TRI-TRI

des charges isotropes, lorsque la pression moyenne est assez grande : toutes les déformations dilatent, la densité diminue légèrement, à cause de la diminution de pression moyenne. A partir d'un certain seuil de p , la déformation change de sens, et le matériau commence à s'écouler. L'angle de frottement correspondant à ce seuil se situe entre 28 et 29 degrés sur les trois trajets considérés. Remarquons que tout le long de ces trajets la densité diminue constamment, avant de se stabiliser au palier d'écoulement. (L'augmentation de densité précédant le point 6 est certainement due à un problème d'hétérogénéité : la déformation ϵ_z dépasse 30 %).

4) L'état caractéristique :

Proposé par KIRKPATRICK [13] , et repris récemment par LUONG [20] , le concept d'état caractéristique est très utilisé pour l'étude des chargements cycliques. On le définit habituellement comme l'état de contrainte correspondant, dans un essai triaxial, à une vitesse de variation de volume nulle. Il est représenté, dans le plan $p - q$, par deux droites (en compression et en extension), partageant le domaine des contraintes admissibles en un domaine subcaractéristique correspondant à un comportement contractant, et en deux domaines, situés entre les droites de rupture et caractéristiques, correspondant à un comportement dilatant.



LUONG et SIDANER [31] , après avoir étudié différents trajets de charge, considèrent que l'angle de frottement caractéristique est un paramètre intrinsèque du matériau, caractérisant sa capacité d'enchevêtrement, indépendant, en particulier, de la densité, et du type de chargement effectué.

S'il est clair que ce concept traduit effectivement un aspect du comportement des sables, sur les trajets classiques tout du moins, la détermination précise du niveau de contrainte correspondant au passage contractant-dilatant n'est pas facile, car le compactage initial est souvent faible et il est lié à une évolution rapide de la contrainte. Luong propose une méthode indirecte : lorsqu'on dépasse le niveau caractéristique au cours d'un petit cycle, il apparaît une boucle sur la courbe contrainte-densité. Il n'est pas sur que la précision soit ainsi bien meilleure, car il s'agit toujours de mesurer des variations de volume faibles.

Pour notre part, nous avons tenté de vérifier la théorie de l'état caractéristique sur les quatre essais cycliques à pression latérale constante réalisés avec la presse tridimensionnelle. (La précision des mesures gammamétriques ne nous a pas permis d'utiliser les résultats fournis par l'appareil triaxial classique). Les angles de frottement correspondant aux maxima de densité, mesurés en une vingtaine de points en compression, et autant en extension, sont compris entre 25 et 31 degrés en compression, et entre 27 et 35 degrés en extension, la précision sur chaque point de mesure étant de l'ordre de 1 à 2 degrés en compression, et de 2 à 3 degrés en extension. Les valeurs moyennes, 28 et 31 degrés sont de toute façon très inférieures aux valeurs des angles-limite. (La valeur plus élevée en extension peut s'expliquer par le fait que l'on n'a pas corrigé la contrainte en enlevant la tension de la capote, comme on l'avait fait pour les essais monotones du chapitre D.) On n'a pas pu mettre en évidence une variation de l'angle caractéristique avec la densité actuelle du matériau. Si l'on admet qu'un échantillon très lâche est toujours contractant, jusqu'à la densité-limite correspondant au palier de contrainte, l'angle caractéristique devrait être égal, alors, à l'angle-limite. Nous n'avons pas pu vérifier cette hypothèse, les échantillons préparés n'étant pas assez lâches. Cependant, on peut remarquer que les deux essais à pression latérale forte (0,8 MPa) ont donné des valeurs moyennes plus fortes que les essais à 0,3 MPa de pression latérale : respectivement 29 et 30 degrés, 26 et 28 degrés. Il serait intéressant d'étudier plus précisément une éventuelle variation du niveau caractéristique avec la pression moyenne.

L'essai à déviateur de contrainte constant a mis en évidence un comportement un peu différent. On retrouve un seuil de contrainte, qui correspond à un changement de sens de la déformation axiale. Au cours d'un trajet à p décroissant, le matériau est toujours dilatant, passant, au niveau de ce seuil d'un comportement très rigide de type décharge isotrope, à un comportement d'écoulement plastique. L'angle de frottement au seuil, mesuré entre 28 et 29 degrés, est très voisin de l'angle caractéristique déterminé sur les essais à pression latérale constante.

Outre son intérêt évident dans la modélisation des trajets cycliques, la notion d'état caractéristique semble bien correspondre à un changement de comportement du matériau pulvérulent qui, contractant et assez rigide lorsque le rapport de contrainte q / p faible ne permet pas le glissement des grains, devient dilatant à partir d'un certain niveau de q / p , cette dilatance aboutissant à un écoulement plastique à état de contrainte et de densité constants. Cependant il est difficile d'affirmer que cette transition, qui est progressive, est effectivement caractérisée par un rapport de contraintes indépendant de la densité, de la pression moyenne et du trajet de chargement. Nos essais ont montré que l'angle caractéristique est inférieur à l'angle de frottement limite, que l'on considère comme un paramètre intrinsèque du matériau.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE THEORIQUE

CHAPITRE A : EVOLUTION DES LOIS DE COMPORTEMENTS
PROPOSEES POUR LES MILIEUX PULVERULENTS

On distingue habituellement deux approches différentes pour représenter le comportement des sols. La première, qui aboutit à des lois de type élastoplastique, consiste à représenter les divers aspects du comportement rhéologique par autant de variables internes, à la signification physique plus ou moins claire. La seconde, issue de l'hypoélasticité, correspond à une démarche globalisante : il s'agit de relier sollicitation et réponse par une fonction tensorielle unique. L'école incrémentale n'en est qu'une variante, qui tend d'ailleurs à se confondre avec la théorie hypoélastique générale, depuis que l'idée de représenter la fonction tensorielle constitutive sous forme matricielle simple a été abandonnée. Récemment est apparue une troisième approche totalement phénoménologique, qui se rapproche plutôt de l'hypoélasticité, l'endochronisme.

On s'efforcera, ici, d'examiner brièvement l'évolution des différents types de lois proposés, au cours des dix dernières années, pour les matériaux pulvérulents, en soulignant les difficultés qui apparaissent dans chaque modèle.

1) Les modèles élastoplastiques

Les lois élastoplastiques classiques décomposent la déformation en deux parties, une partie élastique réversible et une partie plastique irréversible. A chaque état de contrainte du domaine plastique, on définit une surface de charge telle qu'à l'intérieur de cette surface les déformations soient purement élastiques. Une loi d'écoulement, dérivant généralement du potentiel plastique, donne l'orientation de l'incrément de déformation plastique. La loi est dite associée si cet incrément est normal à la surface de charge. L'évolution des paramètres d'écrouissage détermine l'amplitude de l'incrément de déformation plastique.

Après les travaux de l'Ecole de Cambridge (ROSCOE [27]), qui a développé un modèle utilisant la déformation volumique plastique comme paramètre d'écrouissage, et la règle de normalité, modèle plus adapté aux argiles qu'aux sables, la première théorie représentant assez convenablement la réalité expérimentale est celle de LADE et DUNCAN [16], présentée en 1975. Dans ce modèle non associé, les surfaces de charge ont pour équation :

$$\frac{I_1^3}{I_3} = f$$

avec : $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

f ne dépendant que de la densité du matériau. La surface de rupture est une surface de charge particulière, d'équation :

$$\frac{I_1^3}{I_3} = K_1 = \text{Cte}$$

Le potentiel plastique vaut :

$$g(\sigma_{ij}) = I_1^3 - K_2 I_3$$

K_2 étant fonction linéaire de f .

La loi d'écoulement s'écrit donc :

$$\Delta \epsilon_{ij}^P = \Delta N \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

Le paramètre d'écrouissage est le travail plastique w_p , dont la variation en fonction de f est déterminée expérimentalement à partir d'essais de compression véritablement triaxiale.

Le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\Delta N = \frac{\Delta w_p}{3g}$$

On a finalement 9 paramètres à déterminer, pour un sable de densité initiale donnée, paramètres dont la signification physique n'apparaît pas clairement. Ce modèle semble décrire assez bien les essais monotones à trajet de charge simple.

Pour un trajet radial, par exemple, f restant constant, le modèle ne prédit que des déformations élastiques, ce qui est infirmé par l'expérience.

Le modèle de NOVA et WOOD [22] , de 1979, est un modèle élastoplastique, également à une surface de charge. Il intègre la théorie de l'état critique, et décompose la surface de charge en deux parties, d'équation différente, suivant la valeur du rapport $\eta = q/p$; pour les faibles valeurs de η , il considère que l'écrasement des grains est prédominant par rapport au glissement. Dans ce cas, la loi de normalité est supposée s'appliquer, et le potentiel plastique s'écrit :

$$\eta \cdot d = c$$

où d est la dilatance, c'est-à-dire le rapport entre les taux de déformation plastique volumique et déviatoire, et c une constante. Lorsque η est grand, les surfaces de charge sont définies par :

$$\eta = M - m \text{Log} \frac{P}{P_u}$$

et la surface de rupture par :

$$\eta = M - B \text{Log} \frac{P}{P_f}$$

p étant la pression moyenne, et M , m , p_u et p_f des constantes. L'équation de la droite critique est :

$$\eta = M$$

Le potentiel plastique provient d'une relation sur la dilatance d :

$$\eta = M - \mu d$$

Ce modèle permet de décrire un écrouissage négatif, mais on observe un point anguleux sur les courbes de contrainte au passage durcissement - radoucissement. D'autre part, la théorie ne s'applique qu'au cas biaxial ($\sigma_2 = \sigma_3 < \sigma_1$).

Dans la série des modèles à une surface de charge, citons encore les "cap models", dans lesquels les surfaces de charge s'appuient sur la surface de rupture, et sont fermées par une courbe généralement elliptique, le "cap". Parmi eux le modèle de SANDLER, DIMAGGIO et BALADI [28], à loi d'écoulement associée, utilise la déformation volumique plastique comme paramètre d'écrouissage. Plus récemment, celui de YAMADA et ABOU SAYED [38], qui postule également la loi de normalité, détermine l'équation du "cap" par des considérations énergétiques, le paramètre d'écrouissage étant une pseudo-énergie complémentaire :

$$dw_p'' = \sum_i \sigma_i'' d \epsilon_i^p$$

avec

$$\sigma_i'' = \sigma_i - \frac{k}{3}$$

où k est un facteur géométrique déterminant l'allure du "cap".

Les derniers modèles élastoplastique de LADE [15] (1977) et de LORET [19] (1981) sont assez proches l'un de l'autre. Ils modélisent l'écrouissage par deux surfaces de charge, chacune d'elles représentant un mécanisme de déformation précis : déformation de consolidation et déformation de distorsion. Les paramètres d'écrouissage sont les travaux plastiques dans chacun des mécanismes, et il y a deux potentiels plastiques, le potentiel de consolidation étant associé et celui de distorsion non associé.

Loret définit les déformations de distorsion par :

- Les surfaces de charge, d'équation :

$$\text{avec } f_d(\sigma, S) = F_d(\sigma) - S = 0$$

$$F_d(\sigma) = \varphi_1(\eta) \times \varphi_2(P)$$

S étant le travail plastique normalisé dû aux déformations de distorsion.

φ_1 est une fonction hyperbolique de η , et

$$\varphi_2 = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n$$

où p_0 et n sont des constantes.

(Les surfaces de charge sont des courbes passant par l'origine, et inclinées sur l'axe hydrostatique).

- le potentiel plastique, qui dérive de l'équation :

$$-\frac{q}{p} = \mu (\eta_c - \eta)$$

$\eta = \eta_c$ étant la droite caractéristique, qui correspond à une variation de volume nulle.

(Cette équation est analogue à celle de Nova et Wood).

En ce qui concerne les déformations de consolidation, Loret applique la règle de normalité, le potentiel plastique de consolidation valant :

$$f_c(\sigma, W_c^P) = \psi(p^2 + r^2 + q^2) - W_c^P$$

où W_c^P est le travail plastique de consolidation, et ψ une fonction de $p^2 + r^2 + q^2$

(Les surfaces de charge sont des courbes elliptiques dans le plan $p - q$).

Les huit paramètres intervenant dans la loi sont calculés, pour une densité initiale donnée, à partir d'essais isotropes de charge et décharge, et d'essais triaxiaux classiques et à q constant.

Le modèle de Lade (1977) est une amélioration du modèle de 1975, qui ne prenait en compte que les déformations de cisaillement. Il ne diffère de celui de Loret que par les expressions choisies pour les deux surfaces de charge et le potentiel plastique de cisaillement. Les calages sont effectués seulement avec des essais de compression isotrope et des essais triaxiaux classiques. Ce modèle permet, en particulier, de décrire un écrouissage négatif, alors que celui de Loret ne s'intéresse qu'au comportement avant le pic de contrainte.

Enfin, dans le modèle élastoplastique avec écrouissage anisotrope, de MROZ [21], la règle d'écoulement dépend du chemin suivi antérieurement, grâce à des familles de surfaces de charge emboîtées, évoluant avec l'anisotropie induite dans le matériau.

2) Les modèles hypoélastiques

La notion d'hypoélasticité, inventée par TRUESDELL [34], pour les matériaux dont le taux d'accroissement de contrainte dépend non seulement de la vitesse de déformation, mais aussi de la contrainte elle-même, a été appliquée aux sols dès 1956 par GREEN [11].

Les lois les plus évoluées dans ce domaine introduisent comme paramètre, dans l'équation de comportement, la densité, et postulent l'existence d'un état critique correspondant à un écoulement du matériau à contrainte constante. Les notions de charge et décharge, qui déterminent la forme de relations de comportement, sont définies à l'aide d'un ou plusieurs critères. La première formulation de ce type a été présentée en 1972 par STUTZ [29]. C'est une formulation analogue que l'on proposera dans la suite de notre travail (chapitre B).

La loi présentée par ROMANO [25] en 1974 est un cas particulier des relations hypoélastiques de Stutz. La relation fondamentale se décompose en partie isotrope et partie déviatoire :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{P}} &= \Gamma \frac{\dot{\rho}}{\rho} + C \operatorname{tr}(\bar{T} \bar{D}) \\ \dot{\bar{T}} &= 2 \mu \bar{D} - B \operatorname{tr}(\bar{T} \bar{D}) \bar{T}\end{aligned}$$

\bar{T} et \bar{D} étant les parties dévatoires des tenseurs contrainte et vitesse de déformation, et Γ , C , μ et B des fonctions de la pression moyenne \bar{P} , du module de \bar{T} , q et de la densité ρ .

Ces relations ne donnent pas d'effet déviatoire lors d'un processus isotrope, même si l'état de contrainte initial n'est pas isotrope.

L'état-limite est défini par les relations :

$$q = \psi \bar{P} \quad (\text{critère de plasticité})$$

$$k(\rho) = \psi \rho \quad (\text{diagramme limite})$$

où k est une fonction strictement croissante de la densité ρ et ψ une constante positive.

L'écoulement à l'état limite se fait à contrainte et densité constantes.

La décharge est définie par la relation :

$$\operatorname{tr}(\bar{T} \bar{D}) < 0$$

k et μ sont fonctions de ρ , alors que Γ , qui dépend à la fois de \bar{P} et de ρ , prend des valeurs différentes en charge et en décharge. Ces fonctions sont déterminées empiriquement.

En charge, on prend : $C = \frac{(q - \psi p) |k(\rho) - \psi p|}{b}$

b étant une constante

et

$$B = \frac{2\mu}{k^2(\rho)}$$

En décharge, on suppose que B et C sont nuls, ce qui entraîne que le module en décharge est égal à celui en charge, et qu'il n'y a pas d'hystérésis sur les petits cycles.

Il semble que la relation constitutive ait été trop simplifiée pour que cette loi puisse décrire tous les aspects du comportement des sols.

Le modèle de DAVIS et MULLENGER [6], plus récent, part d'équations constitutives analogues :

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -(h_1 + \frac{1}{3}h_{10} - h_2 p) \frac{p}{\rho} + (h_4 - h_2) \text{tr}(\bar{T} \bar{D}) \\ \dot{\bar{T}} &= h_{10} \bar{D} + \frac{h_4}{p}\end{aligned}$$

où les h_i sont des fonctions de la densité ρ et des invariants de T.

Le critère d'écoulement plastique s'écrit :

$$\text{tr}(\bar{T}^2) = M^2$$

avec

$$M = M_1 - M_2 e^{-\beta p}$$

ce qui donne une allure incurvée dans le plan $p - q$.

Le diagramme limite , plus classique, s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{k_L} \text{Log} \frac{p}{p_0}$$

où ρ_c est la densité limite et ρ_{c0} , p_0 et K_L des constantes.

Il y a deux critères de charge-décharge : un critère utilise la puissance totale $tr TD$, dont le signe négatif correspond à une décharge "isotropique" ; l'autre utilise la puissance déviatoire $tr \bar{T} \bar{D}$, qui est négative lors d'une décharge "déviatoire".

Le coefficient h_{10} , qui est égal à 2 fois le module de cisaillement élastique, est une fonction affine de p . Le terme $(h_1 + h_{10} / 3 + h_2 p)$ est déterminé à partir d'essais de compression isotrope :

$$h_1 + \frac{1}{3} h_{10} + h_2 S_1 = K \frac{p}{\rho}$$

avec, en charge "isotropique" :

$$K = K_L \left(\frac{p_{vc}}{\rho} \right)^\lambda$$

où

$$p_{vc} = p_0 e^{K_L \left(\frac{1}{\rho_{vc}} - \frac{1}{\rho} \right)}$$

et en décharge "isotropique" :

$$K = K_u = \text{Cte}$$

D'autre part, en charge "déviatoire" :

$$h_2 = \frac{-2\mu p}{M^2}$$

et

$$h_4 = - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^\gamma \cdot \frac{2\mu p}{M^2} \quad (\gamma \text{ et } \mu \text{ étant des constantes})$$

alors qu'en décharge "déviatoire" :

$$h_2 = - b \frac{2\mu p}{M^2}$$

et

où b est une constante positive.

$$h_4 = b \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right)^\gamma \cdot \frac{2\mu p}{M^2}$$

Ainsi les variations de volume dues à la partie déviatoire de la contrainte sont proportionnelles à $\rho - \rho_c$, ce qui paraît acceptable. En décharge "déviatorique" apparaît un coefficient correcteur, b.

Au total, on dénombre 9 à 13 paramètres, qui sont déterminés par des essais de compression isotrope et des essais triaxiaux classiques. Les identifications présentées, concernant seulement des essais classiques, sont médiocres pour un matériau dense ; le pic de contrainte est mal représenté. Les auteurs n'identifient pas des essais plus complexes, ni des décharges simples.

Enfin, le modèle de GUDEHUS et KOLYMBAS [12] exprime une relation non linéaire assez compliquée, entre accroissement de contrainte et vitesse de déformation, la construction de cette relation étant faite, nous dit-on, à l'aide d'arguments physiques, qui ne semblent pas évidents.

Si T est le tenseur des contraintes de Cauchy, \bar{T} le tenseur vitesse de contrainte en axe rhéologique, et D le tenseur vitesse de déformation, on a la relation :

$$\bar{T} = f(T, D),$$

qui est décomposée en partie déviatoire et partie isotrope :

$$\bar{f} = h(C_1 \frac{\sqrt{\text{tr } \bar{D}^2}}{3} \cdot \delta + \bar{D} - C_1 \frac{\bar{D}^2}{\sqrt{\text{tr } \bar{D}^2}})$$

$$\text{tr } f = h(C_2 \text{tr } D + C_3 \frac{\text{tr}(\bar{T} \bar{D})}{\text{tr } T} + C_4 \frac{\text{tr}(\bar{T} \bar{D})}{\text{tr } T \sqrt{\text{tr } \bar{D}^2}})$$

avec

$$h = \text{tr } T \cdot (C_5 + C_6 \frac{\text{tr}(\bar{T} \bar{D})}{\text{tr } T \sqrt{\text{tr } \bar{D}^2}} + C_7 \frac{\text{tr}(\bar{T} \cdot \bar{D}^2)}{\text{tr } T \text{tr } \bar{D}^2})$$

C_1, C_2, \dots, C_7 étant fonctions de l'indice des vides actuel. En petites déformations, on peut les prendre constantes, et les déterminer expérimentalement.

3) Les lois incrémentales

Afin de disposer d'une loi rhéologique valable sur une vaste gamme de chemins de sollicitation, et s'explicitant sous forme globale simple, ce qui permet une utilisation pratique dans les programmes de calcul faisant appel à la Méthode des Eléments Finis, certains auteurs écrivent la relation hypoélastique sous forme incrémentale : la loi s'exprime sous la forme d'une relation matricielle entre incrément de contrainte et incrément de déformation :

$$d\mathcal{E} = [M] d\sigma$$

Le tenseur $[M]$ dépendant des états de contrainte et de déformation actuels, de l'histoire de la sollicitation antérieure et de la direction d

DARVE [7] a proposé, en 1974, une loi dite octo-linéaire, orthotrope dans le repère des contraintes principales. Il distingue 8 "zones tensorielles" dans l'espace des contraintes (limitées par la compression et l'extension dans chaque direction d'orthotropie) ; le tenseur M prend une valeur constante dans chaque zone. Pour déterminer les différentes valeurs de M , Darve utilise le principe de superposition, qui permet de se ramener à l'identification de transformés de sollicitations triaxiales simples. Dans le repère d'orthotropie, la forme générale de la loi est :

$$\begin{bmatrix} d\mathcal{E}_{11} \\ d\mathcal{E}_{22} \\ d\mathcal{E}_{33} \\ d\mathcal{E}_{23} \\ d\mathcal{E}_{31} \\ d\mathcal{E}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E & 0 & 0 & 0 \\ F' & B & D & 0 & 0 & 0 \\ E' & D' & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

On applique successivement au matériau les trois sollicitations élémentaires :

$$d\sigma^1 = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d\sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\sigma^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur réponse $d\epsilon^i$ à $d\sigma^i$ s'écrit, à l'aide de "pseudo-modules" U et de "pseudo-coefficients de Poisson" ν_i^j :

$$d\epsilon^1 = \begin{bmatrix} d\epsilon_{11}^1 \\ d\epsilon_{22}^1 \\ d\epsilon_{33}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/U_1 \\ -\nu_1^2/U_1 \\ -\nu_1^3/U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\sigma_{11}$$

Par superposition, le vecteur $\begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ provoquera la déformation :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M (U_i, V_i^j).$$

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients U_i et V_i^j dérivent des relations contrainte-déformation, et indice des vides-déformation déterminées le long de chemins triaxiaux, en compression et en extension. A partir de données expérimentales, Darve propose des formulations analytiques de ces relations ; ces formulations nécessitent un nombre élevé de paramètres de calage, et négligent l'effet de la contrainte principale intermédiaire.

Les fonctions G_i peuvent être exprimées à l'aide des neuf autres éléments de la matrice, grâce à une hypothèse physique sur le comportement du matériau.

Plus élaborée est la loi à non-linéarité continue du même DARVE [8], dans laquelle le tenseur M varie de façon continue avec la direction de l'incrément de contrainte. On a :

$$d\mathcal{E} = [N(u)] d\sigma \quad \left(u = \frac{d\sigma}{\|d\sigma\|} \right)$$

où N est la restriction de M à $d\sigma$, vecteur des composantes principales de d .

En prenant N linéaire en u :

$$N(u) = [A] + [B] [\delta_{ij} u_j]$$

On obtient :

$$d\mathcal{E} = [A] d\sigma + \frac{[B]}{\|d\sigma\|} d\sigma^2$$

On a ainsi ajouté un terme du second ordre en $d\sigma$. Les matrices A et B sont déterminées de la même façon que dans la première loi de Darve, avec de nouvelles formulations pour les courbes d'essais triaxiaux : ces formulations ne s'intéressent plus au comportement après le pic de contrainte, qui est considéré comme une instabilité due à l'hétérogénéité de l'échantillon.

Pour résoudre les problèmes de discontinuité existant dans les lois de Darve, CHAMBON [5] propose de déterminer l'incrément de contrainte par une double interpolation très complexe, à partir des images des 6 incréments de déformations élémentaires, ces images étant calculées avec les mêmes formules que la seconde loi de Darve.

La loi de ROBINET [24], incrémentale non linéaire, s'inscrit dans la même démarche. Mais la matrice M est supposée orthotrope dans le repère des déformations principales. Pour faire son interpolation, Robinet considère le vecteur dont les composantes dans les axes d'orthotropie sont les trois valeurs principales du tenseur incrément de contrainte. Il est bien évident que ce vecteur ne peut représenter le tenseur incrément de contrainte. Or, les pseudo-modules et pseudo-coefficients de Poisson sont considérés comme des fonctions de l'angle de ce vecteur avec les axes d'orthotropie. Le sens physique de cette hypothèse ne semble pas clair.

4) Les modèles endochroniques

Récemment, reprenant la démarche proposée en 1965 par PI et RIVLIN [23], plusieurs auteurs ont proposé une approche assez différente, dans laquelle le temps est remplacé par un "temps intrinsèque", fonction de la déformation subie par le matériau au cours de son histoire, et des fonctions-mémoire effacent progressivement cette histoire.

Le premier modèle proposé est celui de VALANIS [35], qui définit successivement une "mesure de temps intrinsèque" ξ , et une "échelle de temps intrinsèque" Z , qui est une fonction strictement croissante de ξ . Il prend :

$$d\xi^2 = P_{ijkl} dC_{ij} dC_{kl}$$

où P_{ijkl} est un tenseur du quatrième ordre, et C_{ij} le tenseur des déformations de Cauchy-Green. La loi endochronique s'écrit sous forme incrémentale :

$$d\mathcal{E} = d\sigma + \sigma \frac{dZ}{GZ}$$

On peut rapprocher cette relation de la relation élastoplastique parfaite ; mais ici, dZ est toujours positif, lorsque le matériau se déforme, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais réversibilité des déformations.

Après intégration, on obtient :

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^Z \lambda(Z-Z') \frac{\partial \mathcal{E}_{kk}}{\partial Z'} dZ' + 2 \int_0^Z \mu(Z-Z') \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}}{\partial Z'} dZ'$$

avec :

$$\lambda(Z) = \lambda_\infty + \sum_{r=1}^n \lambda_r e^{-\alpha_r Z}$$

$$\mu(Z) = \mu_\infty + \sum_{r=1}^n \mu_r e^{-\alpha_r Z}$$

L'expression choisie pour Z ($Z = \text{Log}(1 + \beta \xi) / \beta$) ne semble pas adaptée aux sols.

BAZANT [2] reprend la théorie de Valanis, pour l'appliquer aux sols. Il ne fait intervenir, dans son temps intrinsèque, que la partie déviatoire de la déformation ; il cherche ainsi à caractériser l'évolution du réarrangement du matériau par la seule variable scalaire ξ . Par l'adjonction de

nombreux paramètres et fonctions sans signification physique, il réussit à simuler assez correctement certains phénomènes du comportement cyclique. Mais ce modèle, très lourd, n'est guère satisfaisant. Par exemple, il suppose l'absence de variation de volume sous chargement isotrope, et ne considère pas de contrainte-limite d'écoulement.

La théorie endochronique développée par LANIER [18] semble, de ce point de vue, plus susceptible de représenter le comportement des milieux granulaires. Elle a, de plus, l'avantage d'être formellement simple. Il est à craindre, cependant, qu'elle se complique assez vite, lorsqu'on voudra rendre compte de tous les aspects du comportement des sols.

Lanier définit simplement le temps intérieur s :

$$ds = (\text{tr } D^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (D \text{ tenseur vitesse de déformation})$$

La contrainte s'écrit classiquement :

$$\sigma(s_0) = \int_0^{s_0} X(s_0 - s) f(\sigma(s), d(s)) ds$$

X étant une fonction-mémoire décroissante, avec les propriétés :

$$X(u) \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow +\infty)$$

et

$$\int_0^{+\infty} X(u) du = 1$$

X peut être approchée par une somme d'exponentielles :

$$X(u) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-b_i u} \quad (a_i \text{ et } b_i \text{ strictement positifs})$$

$f(\sigma, D)$ est une fonction tensorielle symétrique isotrope de σ et D , homogène de degré 0 par rapport à D .

Un comportement limite, correspondant à un écoulement à contrainte σ_p et vitesse de déformation d_p constantes, est défini par la relation :

$$\sigma_p = f(\sigma_p, d_p)$$

qui représente, de façon implicite la loi d'écoulement limite. Lanier choisit :

$$f(\sigma, d) = \frac{1}{3} \psi \cdot \delta + \psi_1 \bar{d}$$

ψ_0 et ψ_1 étant des fonctions scalaires des invariants de $\bar{\sigma}$ et \bar{d} .

En dehors de l'état-limite, σ peut s'écrire sous la forme de somme des n "contraintes cachées" σ_i .

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

avec

$$\sigma_i(s_0) = \int_0^{s_0} a_i e^{-b_i(s_0-s)} f(\sigma, d) ds$$

Chaque fonction σ_i est ainsi définie par une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d\sigma_i}{ds} = a_i f(\sigma, d) - b_i \sigma_i$$

La fonction X peut être déterminée à partir d'une courbe expérimentale de décharge, à pression moyenne et phase du tenseur d constantes.

Les courbes de première charge sont ainsi correctement représentées ; pour les petits cycles, le phénomène de "rochet" semble difficile à supprimer.

5) Conclusion

La recherche théorique sur le comportement des sols n'est pas encore très avancée. Faute de comprendre le comportement du matériau au niveau granulaire, on est amené, pour essayer de représenter les différents aspects du comportement macroscopique, à introduire de nombreuses variables sans signification

physique, et à compliquer ainsi, de plus en plus, les divers modèles, qui procédaient pourtant tous, à l'origine, de démarches simples et attrayantes. Finalement, au prix de raisonnements pas toujours très clairs, ou de calculs numériques assez fastidieux, certains auteurs réussissent à modéliser correctement les trajets de charge monotones simples et quelques aspects du comportement cyclique, en cinématique de révolution. (Les chemins véritablement triaxiaux posent encore beaucoup de problèmes, de même que les trajets en cinématique rotationnelle ; on manque de résultats expérimentaux fiables). Très souvent, seul l'écrouissage positif est décrit, le comportement après le pic de contrainte n'étant pas considéré comme un phénomène rhéologique mais comme une instabilité due aux conditions expérimentales.

CHAPITRE B : PRESENTATION D'UNE LOI

HYPOELASTIQUE AVEC ECROUISSAGE EN DENSITE

1) Expression analytique de la loi

Nous résumons tout d'abord le modèle rhéologique présenté en 1972 par STUTZ [29].

En axes rhéologiques, la dérivée de Jauman du tenseur des contraintes de Cauchy est une fonction tensorielle isotrope des tenseurs vitesse de déformation d et contrainte σ , et de la densité ρ :

$$\hat{\sigma} = f(d, \sigma, \rho) \quad (1)$$

D'après les théorèmes de représentation tensorielle, la fonction symétrique f s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} f(d, \sigma, \rho) = & a_0 \delta + a_1 d + a_2 \sigma + a_3 d^2 + a_4 \sigma^2 + a_5 (d\sigma + \sigma d) \\ & + a_6 (d^2 \sigma + \sigma d^2) + a_7 (d\sigma^2 + \sigma^2 d) \\ & + a_8 (d^2 \sigma^2 + \sigma^2 d^2) \end{aligned} \quad (2)$$

où les a_i sont fonctions scalaires des 10 invariants de d et σ , et de ρ .

On retiendra la forme simplifiée :

$$\hat{\sigma} = a_0 \delta + a'_1 \bar{d} + a_2 \sigma \quad (3)$$

La relation (2) doit être homogène et de degré - 1 par rapport au temps.

On satisfait cette condition en posant, par exemple :

$$\alpha_0 = \alpha_0 \frac{E_1}{3} + \alpha_3 \bar{M} + \alpha_5 \bar{N}$$

$$\alpha'_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}$$

où

$$\bar{M} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{d}_{ij}$$

$$\bar{N} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{d}_{ki}$$

Les fonctions scalaires α_i ne dépendent que des invariants du tenseur contrainte et de la densité ρ .

$$\alpha_i = \alpha_i (S_j, \rho)$$

La relation (3) peut alors se décomposer en partie isotrope et partie déviatoire :

$$\hat{\sigma}_{ii} = (\alpha_0 + \alpha_2 S_1) E_1 + (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) \bar{M} + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{N}$$

(4)

$$\hat{\sigma}_{ij} = \alpha_1 \bar{d}_{ij} + (\alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}) \bar{\sigma}_{ij}$$

On peut constater que la vitesse de variation de volume E_1 dépend à la fois de la variation de la pression isotrope S_1 et du déviateur de contrainte, par les invariants \bar{M} et \bar{N} .

D'autre part E_1 intervient dans la partie déviatoire de la loi : la résistance du matériau dépend ainsi de la variation de la pression isotrope.

2) Définition de l'état-limite

On a vu dans la partie expérimentale de ce mémoire que le comportement en grandes déformations des milieux pulvérulents est caractérisé par un état-limite correspondant à un écoulement plastique à état de contrainte et densité constants. On peut représenter cet état par une surface limite dans l'espace des contraintes principales, et par une relation entre la densité limite et l'état de contrainte :

$$g(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3) = 0$$

$$\rho_l = \rho_l(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3)$$

On va montrer que la loi de comportement proposée permet de décrire, sous certaines conditions, cet état-limite.

La relation (4) permet d'obtenir l'expression des dérivées par rapport au temps des invariants de l'état de contrainte :

$$\hat{S}_1 = \hat{\sigma}_{ii} \quad , \quad \hat{S}_2^2 = 2 \bar{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ji} \quad , \quad \hat{S}_3^3 = 3 \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \hat{\sigma}_{ki}$$

On obtient :

$$\hat{S}_1 = (\alpha_0 + \alpha_2 S_1) E_1 + (3 \alpha_3 + \alpha_4 S_1) \bar{M} + (3 \alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{N}$$

$$\frac{\hat{S}_2^2}{2} = \alpha_2 \bar{S}_2^2 E_1 + (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2) \bar{M} + \alpha_6 \bar{S}_2^2 \bar{N} \quad (5)$$

$$\frac{\hat{S}_3^3}{3} = \alpha_2 \bar{S}_3^3 E_1 + \alpha_4 \bar{S}_3^3 \bar{M} + (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) \bar{N}$$

Ce système peut être considéré comme un système de trois relations linéaires par rapport à E_1 , \bar{M} et \bar{N} , qui sont les seuls invariants fonction de la vitesse

de déformation apparaissant dans la relation (4).

Le déterminant du système (5) est :

$$\Delta = \alpha_1 [\alpha_0 (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) + \alpha_2 (\alpha_1 S_1 - 3 \alpha_3 \bar{S}_2^2 - 3 \alpha_5 \bar{S}_3^3)] \quad (6)$$

Si Δ n'est pas nul, et si l'on connaît l'expression des α_i comme fonctions des invariants S_i et de la densité ρ , \bar{E}_1 , \bar{M} et N sont parfaitement déterminés en fonction de l'état de contrainte S_i et de sa variation instantanée \hat{S}_i . La densité est obtenue par intégration de l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = E_1$$

Les relations (4) permettent alors de connaître les composantes du tenseur d en chaque point du trajet de contrainte. Dans ce cas ($\Delta \neq 0$), l'écoulement ne peut avoir lieu à état de contrainte constant.

Dans le cas où le déterminant est nul, la donnée de l'état de contrainte ne permet plus une détermination complète de la cinématique. Un écoulement du matériau est cependant possible. La relation $\Delta = 0$ peut s'interpréter comme représentant l'équation de la surface-limite de plasticité.

Si les scalaires α_1 et α_2 ne sont pas nuls, le mineur formé par les coefficients de E_1 et \bar{N} des équations (5b) et (5c) qui vaut $\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2$, n'est nul que lorsque l'état déviatoire est nul. On retient pour équations principales du système, les équations (5b) et (5c), avec comme inconnues principales \bar{E}_1 et \bar{N} . Le système n'a de solution que si le déterminant caractéristique Δ_c est nul :

$$\Delta_c = \hat{S}_1 \alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2 - \frac{\hat{S}_2^2}{2} [\alpha_0 (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) - 3 \alpha_2 \alpha_5 \bar{S}_3^3 + \alpha_1 \alpha_2 S_1] + \frac{\hat{S}_3^3}{3} (\alpha_0 \alpha_6 - 3 \alpha_2 \alpha_5) \bar{S}_2^2 \quad (7)$$

Le système (5) admet alors comme solution :

$$E_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2} \left[-\frac{\hat{S}_3^3}{3} \alpha_6 \bar{S}_2^2 + \frac{\hat{S}_2^2}{2} (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) - \bar{M} \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) \right] \quad (8)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\alpha_1 \bar{S}_2^2} \left(-\bar{S}_3^3 \frac{\hat{S}_2^2}{2} + \bar{S}_2^2 \frac{\hat{S}_3^3}{3} + \bar{M} \alpha_1 \bar{S}_3^3 \right) \quad (9)$$

\bar{M} restant arbitraire.

Un écoulement est donc possible à l'état de contrainte constant : $S_i = 0$

Cet écoulement devra avoir lieu à volume constant : $E_1 = 0$.

La relation (8) donne alors :

$$\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2 + \alpha_6 \bar{S}_3^3 = 0 \quad (10)$$

L'équation (6) conduit à la relation :

$$\alpha_1 S_1 - 3 \alpha_3 \bar{S}_2^2 - 3 \alpha_5 \bar{S}_3^3 = 0 \quad (11)$$

Pour un écoulement à état de contrainte constant les relations (10) et (11) doivent être satisfaites simultanément. Chacune d'elles représente une hypersurface dans l'espace des S_i et de ρ , et permet d'obtenir la densité en fonction de l'état de contrainte. Ces hypersurfaces ont donc une intersection, qui représente une surface $g(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3) = 0$, qu'on peut interpréter comme étant la surface-limite, puisqu'en chacun de ces points un écoulement, à volume constant et état de contrainte constant, est possible.

A l'état-limite S_1 , \hat{S}_2 et \hat{S}_3 sont nuls, donc la relation (8) s'écrit :

$$\frac{\bar{M}}{\bar{N}} = \frac{\bar{S}_2^2}{\bar{S}_3^3}$$

On retrouve, à partir des relations (1), les relations classiques de plasticité :

$$E_i = 0$$

$$\bar{d}_{ij} = \lambda \bar{\sigma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\bar{M}}{\bar{S}_2^2} = \frac{\bar{N}}{\bar{S}_3^3}$$

3) Expression des fonctions α_i à l'état-limite

Les fonctions α_i peuvent être reliées à l'équation de la surface-limite $g(S_i) = 0$. En effet, pour tout trajet sur cette surface, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial S_1} \hat{S}_1 + \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_2^2} \hat{S}_2^2 + \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_3^3} \hat{S}_3^3 = 0 \quad (12)$$

D'où, en comparant avec la relation (7), qui indique que le trajet en contrainte est sur la surface limite :

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial S_1}}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2} = \frac{2 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_2^2}}{\alpha_0 \alpha_4 \bar{S}_2^2 + 3 \alpha_2 \alpha_5 \bar{S}_3^3 - \alpha_1 \alpha_2 S_1} = \frac{3 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_3^3}}{(\alpha_0 \alpha_6 - 3 \alpha_2 \alpha_5) \bar{S}_2^2} \quad (13)$$

Ce qui conduit, avec la relation (10), à :

$$\alpha_0 + \alpha_2 S_1 = -\alpha_2 \frac{2 \bar{S}_2^2 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_2^2} + 3 \bar{S}_3^3 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_3^3}}{\frac{\partial g}{\partial S_1}} \quad (14)$$

Si g est une fonction homogène par rapport à S_1 , \bar{S}_2 et \bar{S}_3 , on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{S}_1} S_1 + 2 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_2^2} \bar{S}_2^2 + 3 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_3^3} \bar{S}_3^3 = 0$$

La relation (14) donne alors $\alpha_0 = 0$ à l'état limite.

La relation (13) permet ainsi d'obtenir les coefficients α_3 et α_5 :

$$\alpha_3 = \frac{-\frac{2}{3} \alpha_1 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_2^2}}{\frac{\partial g}{\partial S_1}} \quad \text{et} \quad \alpha_5 = \frac{-\alpha_1 \frac{\partial g}{\partial \bar{S}_3^3}}{\frac{\partial g}{\partial S_1}} \quad (15)$$

En utilisant les relations (7) et (8) on peut exprimer la variation de volume E_1 , pour un trajet de contrainte sur la surface-limite, en fonction de la variation de la pression isotrope S_1 , et de la variation de la phase X du tenseur des contraintes. (On a $\cos 3X = \sqrt{6} (\bar{S}_3 / \bar{S}_2)^3$)

Puisque α_0 est nul, on trouve :

$$E_1 = \frac{\hat{S}_1}{\alpha_2 S_1} \frac{(3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{S}_2^3}{3\sqrt{6} \alpha_1 \alpha_2 S_1} \widehat{\text{Cos } 3X} \quad (16)$$

Si, pour une phase constante on prend α_2 constant, la relation (16) s'intègre en :

$$P_1 = P_{10} \left(\frac{S_1}{S_{10}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \quad (17)$$

L'identification de cette relation à partir des essais de compression et d'extension conduit à prendre pour ces deux types d'essais des coefficients α_2 différents. Il faut donc supposer que α_2 est fonction de la phase X . On propose une relation de la forme :

$$\alpha_2 = \beta_2 - \gamma_2 \text{Cos } 3X \quad (18)$$

où β_2 et γ_2 sont des constantes.

Si S_1 est constant, la relation (16) s'écrit

$$E_1 = \frac{-(3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{S}_2^3}{3\sqrt{6} \alpha_1 \alpha_2 S_1} \widehat{\text{Cos } 3X}$$

Si l'on suit un trajet à S_1 constant, allant de la compression à l'extension, $\cos 3X$ variant de + 1 à - 1, l'intégration de cette relation doit faire passer de la valeur de ρ_1 en compression à celle de ρ_1 en extension. On est donc conduit à poser :

$$\frac{(3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{S}_2^3}{3\sqrt{6} \alpha_1 S_1} = \gamma_2 \frac{\text{Log} \frac{S_1}{S_{10}}}{\alpha_2} \quad (19)$$

La densité-limite exprimée en (17) est ainsi une solution de l'équation (16), α_2 étant donné par la relation (18).

La relation (19) permet alors d'exprimer α_6 en fonction de α_5 :

$$\alpha_6 = \frac{-3\alpha_5}{S_1} - \frac{3\sqrt{6} \alpha_1 \gamma_2 \text{Log} \frac{S_1}{S_{10}}}{\alpha_2 \bar{S}_2^3} \quad (20)$$

En combinant les égalités (10 et (11), on trouve :

$$3\alpha_3 + \alpha_4 S_1 = -(3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{\bar{S}_3^3}{\bar{S}_2^2}$$

D'où, α_4 s'écrit en fonction de α_3 :

$$\alpha_4 = \frac{-3\alpha_3}{S_1} + \frac{3\sqrt{6} \alpha_1 \gamma_2 \bar{S}_3^3 \text{Log} \frac{S_1}{S_{10}}}{\alpha_2 \bar{S}_2^3} \quad (21)$$

Pour connaître les variables α_1 , il suffit donc maintenant de choisir la fonction g caractérisant la surface-limite. on propose, comme STUTZ [29] :

$$g = (\bar{S}_2)_1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} S_1 (K_L - 1) 2^m}{D_L^m} \quad (22)$$

avec

$$D_L = (K_L^{\frac{1}{m}} + 1) - \sqrt{6} (K_L^{\frac{1}{m}} - 1) \left[\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right]_L^3$$

$$\text{et } K_L = \frac{3 + \sin \phi_L}{3 - \sin \phi_L}$$

m et ϕ_L sont des constantes intrinsèques du matériau.

Dans le cas triaxial de révolution, on retrouve un critère du Coulomb, ϕ_L étant l'angle de frottement limite (le même en extension et en compression) :

$$(S_2)_L = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2 \sin \phi_L}{3 - \sin \phi_L} S_1 \quad (23)$$

Un critère de ce type a été étudié par VAN EEKELLEN [36]

g étant homogène par rapport à S_1 , \bar{S}_2 et \bar{S}_3 , on peut calculer α_3 et α_5 à l'aide des relations (15).

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 S_1}{3(\bar{S}_2)_L^2} \left(1 + \frac{3\sqrt{6} m (K_L^{\frac{1}{m}} - 1) \left[\frac{\bar{S}_3}{(\bar{S}_2)_L} \right]^3}{D_L} \right)$$

$$\alpha_5 = \frac{-\alpha_1 S_1}{(\bar{S}_2)_L^3} \cdot \frac{\sqrt{6} m (K_L^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_L} \quad (24)$$

Les relations (20) et (21) donnent α_4 et α_6 .

4) Expression des fonctions α_i en dehors de l'état-limite

L'état actuel, représenté par la valeur de la densité et les valeurs des invariants de contrainte S_1 , S_2 , S_3 , définit un point à l'intérieur du domaine des contraintes admissibles.

En ce point les relations (15), (20) et (21) permettent de calculer des coefficients α'_i .

(Le vecteur $(\alpha_1, \alpha'_3, \alpha'_5)$ est ainsi porté par la normale à la surface $g(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3) = \text{cte}$, au point actuel.) Pour obtenir les valeurs actuelles des α_L , on multiplie respectivement α'_4 et α'_6 , α'_3 et α'_5 , par deux fonctions F et G, après avoir remarqué que les α_i interviennent dans la relation (4) par les termes $\alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}$ et $\alpha_3 \bar{M} + \alpha_5 \bar{N}$. Ces fonctions F et G doivent permettre de prendre en compte l'influence de la densité actuelle .

On obtient ainsi :

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 S_1}{3 \bar{S}_2 \bar{S}_{2L}} \cdot \left(1 + A \frac{\bar{S}_{2L}}{S_2} \left[\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right] \right) \cdot G(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \rho)$$

$$\alpha_5 = \frac{-\alpha_1 S_1}{3 \bar{S}_2^3} \cdot A \cdot G(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \rho) \quad (26)$$

$$\alpha_4 = \frac{-\alpha_1}{\bar{S}_2 \bar{S}_{2L}} \cdot \left(1 + (A - B) \frac{\bar{S}_{2L}}{S_2} \left[\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right]^3 \right) \cdot F(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \rho)$$

$$\alpha_6 = \frac{\alpha_1}{\bar{S}_2^3} \cdot (A - B) \cdot F(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \rho)$$

où l'on a posé :

$$A = \frac{3 \sqrt{6} m (K_L^m - 1)}{D_L}$$

et

$$B = \frac{3 \sqrt{6} \gamma_2 \text{Log} \frac{S_1}{S_{10}}}{\alpha_2}$$

Le terme $(\bar{S}_2)_L$ qui intervient dans les relation (26) est calculé à partir de l'équation $g = 0$, avec les valeurs actuelles de la pression moyenne et de la phase. Il représente donc l'état-limite ayant même pression moyenne et même phase que l'état actuel. on peut lui associer une densité-limite ρ_L .

On a vu dans la partie expérimentale (chapitre C 51), que la densité intervient dans l'évolution des contraintes par la différence $\rho - \rho_L$. Pour représenter ce terme, on définit une résistance potentielle $(\bar{S}_2)_\rho$, qui est donnée

par l'équation $g_\rho = 0$, où g est une fonction analogue à la fonction g définie par (22), l'angle de frottement étant fonction de $\rho - \rho_L$. $(\bar{S}_2)_\rho$ est donc défini ainsi :

$$(\bar{S}_2)_\rho = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} S_1 (K_\rho - 1) 2^m}{D_\rho^m}$$

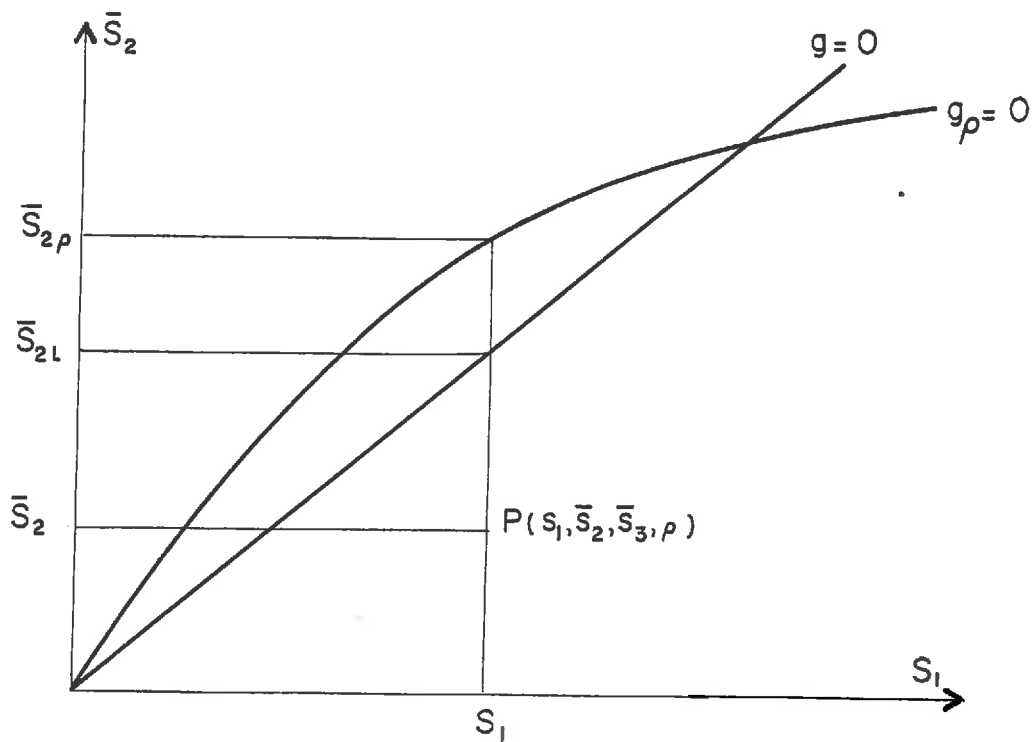
avec

$$D_\rho = (K_\rho + 1) - \sqrt{6} (K_\rho - 1) \left[\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right]^3$$

et

$$K_\rho = \frac{3 + \sin \phi (\rho - \rho_L)}{3 - \sin \phi (\rho - \rho_L)}$$

Les notations présentées précédemment sont résumées sur la figure suivante, dans le cas d'une évolution à phase de contrainte constante.



Les coefficients α_0, α_1 et α_2 sont également fonction des invariants de contrainte et de la densité ; on a vu qu'à l'état-limite, α_2 est donné par la relation (18), et α_0 est nul.

La recherche des fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, F et G sera effectuée dans le chapitre B à l'aide des résultats expérimentaux.

5) Définition du critère de charge

Les expressions précédentes ne sont valables que dans un sens du chemin de contrainte, correspondant à un trajet de charge. Pour un trajet de décharge, il faut utiliser des expressions différentes. Il s'agit donc ici de déterminer le domaine d'application des relations que nous avons proposées précédemment.

STUTZ [29] choisit comme critère de charge le signe de la fonction puissance totale M, qui est positive au cours d'un écoulement plastique sur la surface-limite. ROMANO [25] préfère utiliser le signe du travail du déviateur de contrainte $\bar{M} = \bar{tr}\sigma\bar{d}$, alors que DAVIS et MULLENGER [6] combinent les deux critères (cf. chapitre A).

Sur les chemins triaxiaux classiques, une charge est toujours caractérisée par des valeurs positives de M et \bar{M} . Mais sur un chemin à phase et déviateur de contrainte constante, un trajet à pression isotrope décroissante correspond toujours à un travail déviatoire \bar{M} positif, alors que la puissance totale M change de signe à un niveau de pression moyenne correspondant au seuil caractéristique (figure II. 1). On trouve ce phénomène à la fois en compression et en extension. D'autre part des essais radiaux dans l'espace des contraintes principales, réalisés avec la presse tridimensionnelle, ont montré que \bar{M} est positif lors d'une charge et négatif lors d'une décharge.

Il semble donc que le signe positif de la puissance déviatoire puisse être considéré comme un critère de charge correct tout au moins pour la variété de chemins qu'on a pu réaliser. Pour un état isotrope, \bar{M} étant nul on peut utiliser le signe de la puissance totale M pour définir un trajet de charge.

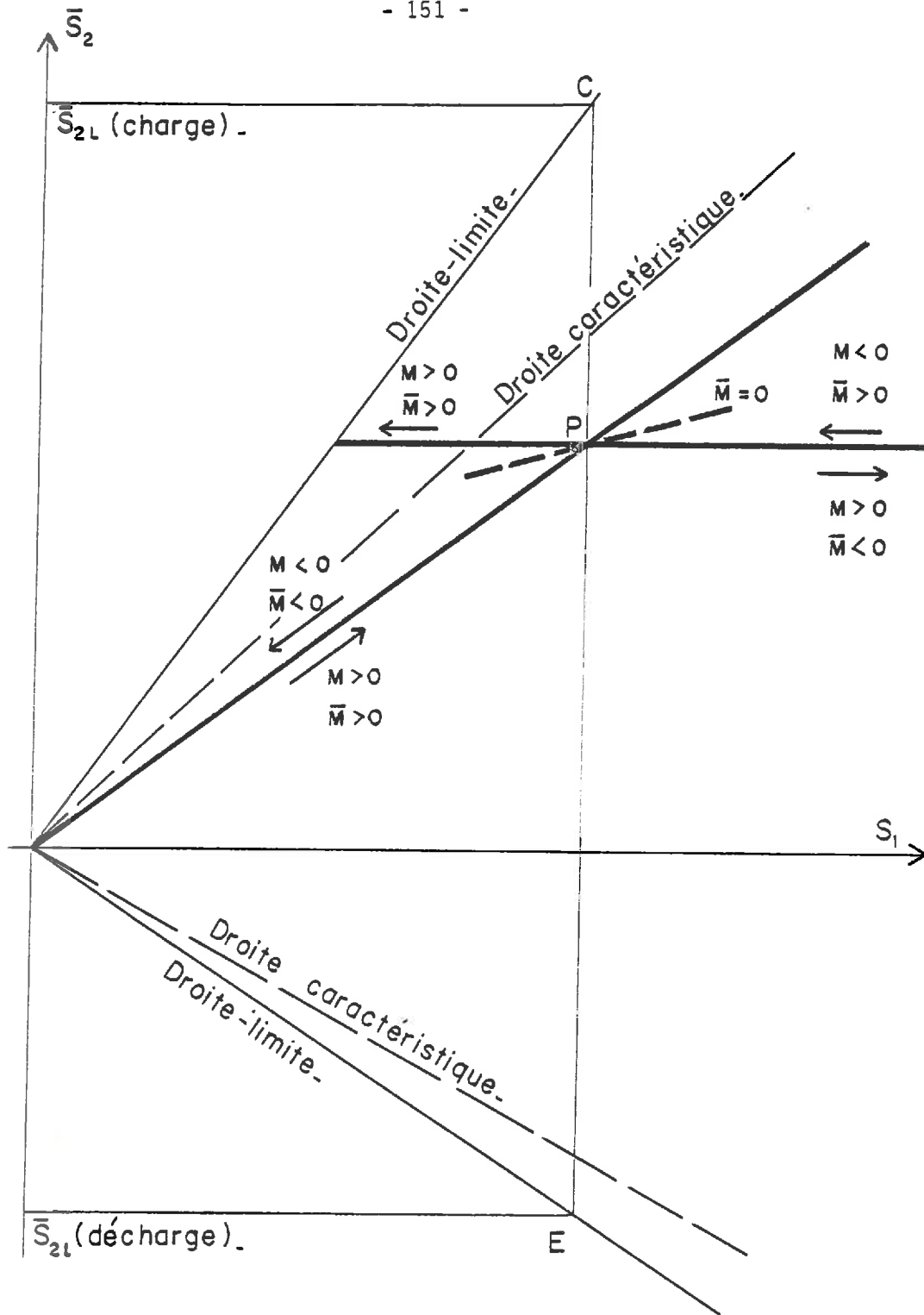


FIGURE II.1

Choix du critère de charge. Schématisation dans le plan S_1 - \bar{S}_2 des trajets de chargement étudiés.

Le système (5) permet de calculer \bar{M} en fonction des variations des invariants de contrainte, pour un point qui n'est pas sur la surface-limite :

$$\bar{M} = \frac{1}{\Delta} \left(\alpha_1 \cdot \frac{S_1^3}{2} \cdot \alpha_2 \left(\frac{\widehat{S}_2}{S_1} \right)^2 + \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \frac{\widehat{S}_2^2}{2} - (\alpha_6 \alpha_0 - 3 \alpha_2 \alpha_5) \frac{\widehat{S}_2^5}{3} \left(\frac{\widehat{S}_3}{S_2} \right) \right) \quad (27)$$

A phase constante (\bar{S}_3 / \bar{S}_2 constant), le dernier terme est nul. Pour un trajet radial, \bar{S}_2/S_1 est constant ; \bar{M} vaut alors $\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \bar{S}_2^2 / 2 \Delta$. On constate que si le coefficient α_0 était nul, les trajets radiaux seraient des trajets neutres ($\bar{M} = 0$), ce qui est infirmé par l'expérience. En réalité, le chargement neutre pour notre critère est situé entre le trajet radial de charge et le trajet à déviateur constant et pression moyenne décroissante (cf. figure II. 1).

Si l'état de contrainte se trouve sur la surface-limite, \bar{M} n'est pas déterminé par l'évolution des contraintes, pour le calculer, il faut connaître la cinématique.

Pour décrire les trajets de décharge, on utilise la même expression formelle de la loi de comportement, selon la méthode décrite par STUTZ [30]. Considérant une décharge à partir du point P de la figure II.1, qui a été atteint en compression, on calcule les coefficients α_i avec les mêmes relations qu'en charge, mais en prenant comme état neutre le point d'inversion P et comme état-limite associé à P, le point E situé sur la droite-limite d'extension. L'écrouissage sera déterminé par l'évolution de la différence entre la densité actuelle et la densité-limite en extension.

6) Application à l'essai triaxial de révolution

Dans le système des axes principaux, le tenseur vitesse de déformation s'écrit :

$$d = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\eta} \end{bmatrix} = E_1 \delta + \bar{d}$$

avec $E_1 = \dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}$

et

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\eta} - \dot{\epsilon}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\eta} - \dot{\epsilon}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma = \frac{S_1}{3} \delta + \bar{\sigma}$$

avec

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} T(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T(t)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{T(t)}{2} \end{bmatrix}$$

Le calcul des invariants mixtes donne :

$$\bar{M} = \frac{3}{2} (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) T$$

et

$$\bar{N} = \frac{3}{2} (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \frac{T^2}{2}$$

Les équations du comportement (4) conduisent à :

$$\frac{dS_1}{dt} = (\alpha_0 + \alpha_2 S_1)(\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}) + (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \left[(3\alpha_3 + \alpha_4 S) T + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{T^2}{2} \right]$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2}{3} \alpha_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) + \left[\alpha_2 (\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}) + \alpha_4 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) T + \alpha_6 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \frac{T^2}{2} \right] T$$

On prend comme variables la déformation axiale ϵ (déformation au sens de Hencky) et la densité ρ déterminée par l'équation de continuité, ce qui donne :

$$\frac{dS_1}{dt} = \left[\alpha_0 + \alpha_2 S_1 - \left(3\alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2} \right) + \left(\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} \right) S_1 \right] \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{3T}{2} \left[3\alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2} + \left(\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} \right) S_1 \right] \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \left[\alpha_2 T - \frac{\alpha_1}{3} - \left(\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} \right) \frac{T^2}{2} \right] \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left[\alpha_1 + 3 \left(\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} \right) \frac{T^2}{2} \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (28)$$

Dans l'essai de compression triaxiale de révolution $\sqrt{6} (\bar{S}_3 / \bar{S}_2)^3$ vaut 1.
Le critère de plasticité (22) s'écrit alors :

$$(\bar{S}_2)_l = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_l S_1$$

avec

$$\alpha_l = K_l - 1 = \frac{2 \sin \phi_l}{3 - \sin \phi_l}$$

De façon analogue, on pose :

$$(\bar{S}_2)_\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_\rho S_1$$

α_ρ étant fonction de $\rho - \rho_l$ (ρ_l n'est dans ce cas, fonction que de la pression moyenne).

On a d'autre part :

$$\bar{S}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} T$$

On peut alors calculer les coefficients $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ et α_6 à l'aide des relations (26). on remarque que dans les relations (28), les α_l n'interviennent que dans les expressions $\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2}$ et $\alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2}$, qui valent :

$$\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} = \frac{-\alpha_l}{\bar{S}_2 \bar{S}_{2l}} \cdot F(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_{2\rho})$$

$$\alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2} = \frac{\alpha_l S_1}{3 \bar{S}_2 \bar{S}_{2l}} \cdot G(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_{2\rho})$$

ce qui donne, en exprimant \bar{S}_2 et \bar{S}_{2l} :

$$\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} = \frac{-\alpha_l F}{\alpha_l S_1 T} \quad \text{et} \quad \alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2} = \frac{\alpha_l G}{3 \alpha_l T}$$

On peut alors simplifier les formules (28) :

$$\frac{dS_1}{dt} = \left[\alpha_0 + \alpha_2 S_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_L} (F-G) \right] \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{3\alpha_1}{2\alpha_L} (F-G) \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\alpha_2 T - \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_1 F T}{2\alpha_L S_1} \right) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\alpha_1 - \frac{3\alpha_1 F T}{2\alpha_L S_1} \right) \frac{d\varepsilon}{dt}$$

(29)

Ces relations permettent de déterminer l'évolution des contraintes et de la densité pour les essais triaxiaux de compression, qu'on veut identifier.

Essai de compression à pression latérale constante

On a la relation :

$$S_1 = 3 P_0 + \frac{3T}{2}$$

P_0 étant la pression latérale.

En prenant comme inconnues T et ρ , le système (29) s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = 2\alpha_1 \cdot \frac{(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) - \frac{3T}{2\alpha_L S_1} (\alpha_0 F + \alpha_2 S_1 G)}{2(\alpha_0 + \alpha_2 3P_0) + \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_L S_1} (3P_0 F - S_1 G)} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{3 \left[\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha_1}{\alpha_L} (F-G) \frac{d\varepsilon}{dt} \right]}{2(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) + \frac{\alpha_1}{\alpha_L} (F-G)}$$

(30)

Essai de compression à pression moyenne constante

S_1 est constant. on choisit également T et ρ comme inconnues. On a alors :

$$\frac{dT}{dt} = 2\alpha_1 \cdot \frac{(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) - \frac{3T}{2\alpha_L S_1} (\alpha_0 F + \alpha_2 S_1 G)}{2(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) + \frac{\alpha_1}{\alpha_L} (F-G)} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{3 \frac{\alpha_1}{\alpha_L} (F-G)}{2(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) + \frac{\alpha_1}{\alpha_L} (F-G)} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

(31)

Essai de compression à déviateur de contrainte constant

T est constant. Les inconnues sont S et ρ ce qui donne :

$$\frac{dS_1}{dt} = 3\alpha_1 \cdot \frac{(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) - \frac{3T}{2\alpha_1 S_1} (\alpha_0 F + \alpha_2 S_1 G)}{\alpha_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{FT}{\alpha_1 S_1}\right) - 3\alpha_2 T} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 3\alpha_1 \cdot \frac{\left(1 - \frac{3}{2} \frac{FT}{\alpha_1 S_1}\right)}{\alpha_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{FT}{\alpha_1 S_1}\right) - 3\alpha_2 T} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Pour un trajet isotherme, les formules précédentes, avec $T = 0$, se simplifient sous la forme :

$$\frac{dS_1}{dt} = 3(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varepsilon} = 3 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Le terme $\alpha_0 + \alpha_2 S_1$ est le coefficient de compressibilité isotherme.

$$dS_1 = (\alpha_0 + \alpha_2 S_1) \frac{d\rho}{\rho} \quad (33)$$

En extension triaxiale, on prend les mêmes expressions pour les tenseurs contrainte et vitesse de déformation, T et $\dot{\varepsilon}$ étant négatifs.

Le terme $\sqrt{6} \left[\bar{s}_3 / \bar{s}_2 \right]^3$ est égal à -1 ce qui donne comme critère :

$$(\bar{s}_{21}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2 \sin \phi_1}{3 + \sin \phi_1} S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{1e} S_1$$

D'autre part :

$$\bar{s}_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} T$$

On trouve ainsi :

$$\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2} = \frac{\alpha_1 F}{\alpha_{1e} S_1 T}$$

et

$$\alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2} = \frac{-\alpha_1 G}{3 \alpha_{1e} T}$$

Les relations (28) donnent :

$$\frac{dS_1}{dt} = \left[(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) - \frac{\alpha_1 (F-G)}{\alpha_{1e}} \right] \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{3 \alpha_1 (F-G)}{2 \alpha_{1e}} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \left[\alpha_2 T - \frac{\alpha_1}{3} - \frac{\alpha_1 F T}{2 \alpha_{1e} S_1} \right] \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(\alpha_1 + \frac{3 \alpha_1 F T}{2 \alpha_{1e} S_1} \right) \frac{d\varepsilon}{dt}$$

On en déduit les formules de comportement pour un trajet à pression latérale constante, qui est le seul trajet que l'on a réalisé expérimentalement.

Essai d'extension à pression latérale constante

$$\frac{dT}{dt} = 2 \alpha_1 \frac{(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) + \frac{3 T}{2 \alpha_{1e} S_1} (\alpha_0 F + \alpha_2 S_1 G)}{2(\alpha_0 + 3 P_0 \alpha_2) + \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{1e} S_1} (3 P_0 F - S_1 G)} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

(34)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{3 \left[\frac{dT}{dt} - \frac{\alpha_1 (F-G)}{\alpha_{1e}} \frac{d\varepsilon}{dt} \right]}{2(\alpha_0 + \alpha_2 S_1) - \frac{\alpha_1 (F-G)}{\alpha_{1e}}}$$

CHAPITRE C : IDENTIFICATION DES ESSAIS REALISES

1) Calage de la loi

- Caractéristiques de l'état-limite :

Cinq paramètres décrivent l'écoulement plastique sur la surface-limite. Deux déterminent l'équation de la surface-limite. Les essais triaxiaux de révolution nous ont permis de trouver l'angle de frottement limite que l'on prendra égal à 34 degrés. Le coefficient m est déterminé grâce à des essais véritablement triaxiaux ; la valeur choisie doit assurer la convexité de la surface-limite (cf. STUTZ [30] et VAN EEKELLEN [36]). On prend $m = 0,3$.

Les trois autres paramètres déterminent les variations de volume au cours d'un trajet sur la surface-limite. On a choisi une évolution du type :

$$\rho_1 = \rho_{10} \left(\frac{S_1}{S_{10}} \right)^{\frac{1}{\alpha_{21}}}$$

avec

$$\alpha_{21} = \beta_2 - \gamma_2 \cos 3X$$

Les essais triaxiaux de compression et d'extension nous donnent alors

$$\beta_2 = 53,6 \quad , \quad \gamma_2 = 23,3 \quad \text{et} \quad \rho_{10} = 1,49 \quad (\text{avec } S_{10} = 0,2 \text{ MPa})$$

- Chargement isotrope :

Pour assurer la continuité de α_2 au passage à l'état isotrope, où la phase n'est pas définie, on prend :

$$\alpha_2 = (\beta_2 - \gamma_2 \cos 3X) \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_{21}} \quad (35)$$

Ainsi α_2 est nul à l'état-isotrope, et le coefficient de compressibilité isotrope se réduit à $1/\alpha_0$. On prend α_0 de la forme :

$$\alpha_{0 \text{ iso}} = \beta_0 e^{\gamma_0 (P - P_1)} \cdot S_1$$

On obtient une bonne identification des essais de charge isotrope (figure II. 2) en prenant $\beta_0 = 60$ et $\gamma_0 = 5,5$.

- Ecrouissage :

Afin de pouvoir identifier de la même façon les courbes $(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$ et $\rho - \rho_1$ des essais 50 et 60 (cf. 1ère partie chapitre C), les relations :

$$\frac{dT}{d\varepsilon} = f(S_1, \bar{S}_2, \rho - \rho_1)$$

et

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varepsilon} = f'(S_2, \bar{S}_2, \rho - \rho_1)$$

doivent être homogènes, respectivement de degré 1 et 0 et par rapport aux invariants de contrainte S_1 et \bar{S}_2 . Ceci exige que les coefficients α_0 et α_1, α_2 , F et G soient homogènes respectivement de degré 1 et 0 par rapport à S_1 et \bar{S}_2 . L'expression (35) choisie pour α_0 est donc correcte, de ce point de vue.

On remarque que les trois équations déterminant l'évolution des contraintes pour les trois types de chargement que l'on considère, ont le même numérateur N (on peut vérifier que ce terme est exactement le déterminant du système (5)). Ce numérateur s'annule au pic de contrainte. Puisque l'on constate dans la partie expérimentale (chapitre C.5) que le niveau de pic ne dépend que de la valeur de $\rho - \rho_1$ pour tous les essais réalisés, on prend N de la forme :

$$N = 2 \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_2 S_1) \left(1 - \left(\frac{\bar{S}_2}{\sqrt{\bar{S}_{21} \bar{S}_{2\rho}}} \right)^n \right) \quad (36) \quad (n \text{ constante positive})$$

Ainsi le niveau du pic est déterminé par l'équation :

$$\bar{S}_2 = \sqrt{\bar{S}_{21} \times \bar{S}_{2\rho}}$$

$\bar{S}_{2\rho}$ est une fonction de $\rho - \rho_1$; une forme exponentielle peut convenir :

$$\bar{S}_{2\rho} = e^{K(\rho - \rho_1)} \cdot S_{21}$$

La constante K peut être déterminée à partir des angles de frottement au pic

S_1 (MPa)

ESSAI ISOTROPE

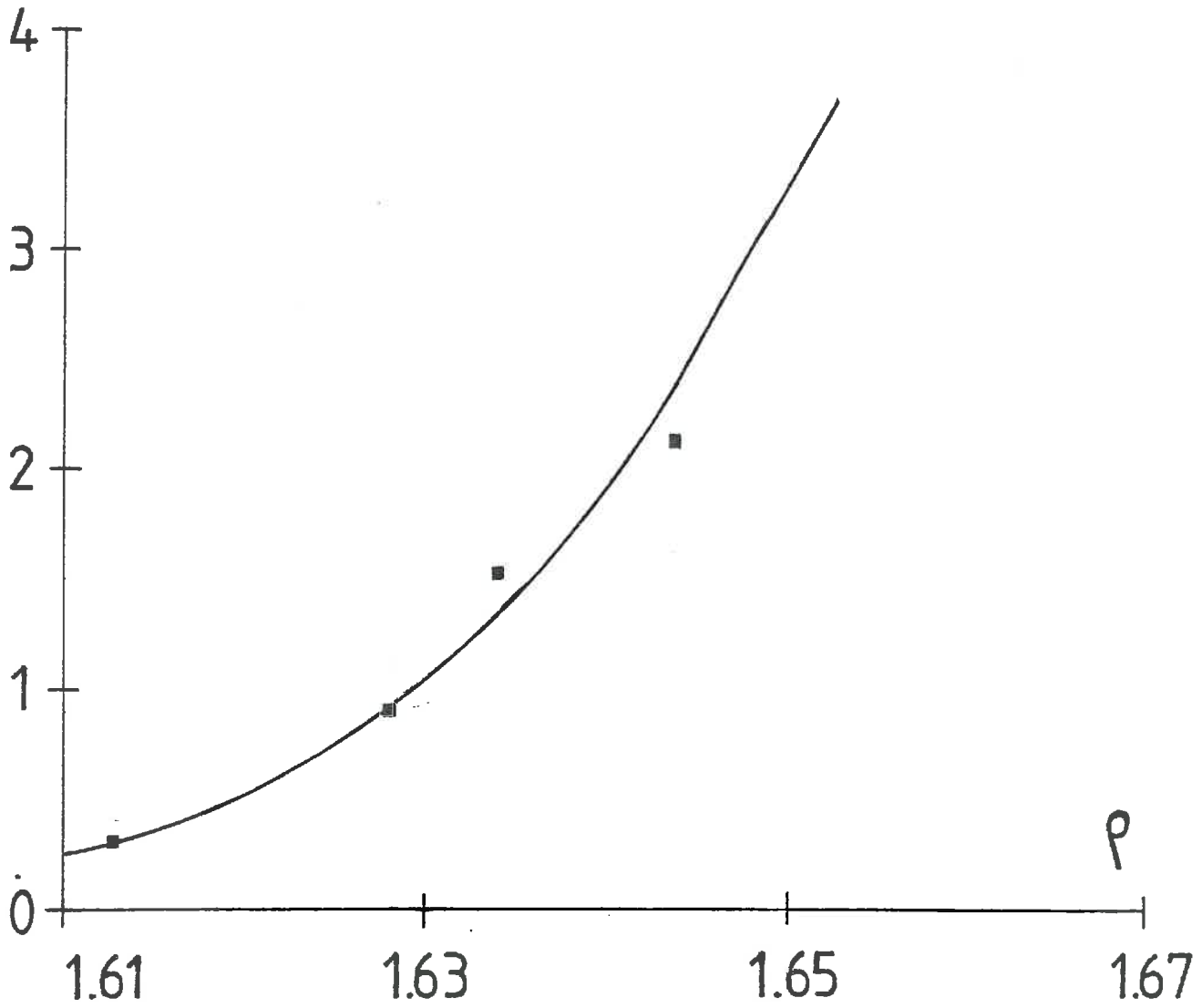


FIGURE II.2

Identification d'un essai effectué sur un échantillon de sable, avec l'appareil Phogadense.

- Courbe théorique
- Points expérimentaux

(figure I 38). La valeur $K = 2,9$ est satisfaisante. L'exposant n influence la forme des courbes de contrainte, en particulier la valeur de la déformation axiale au pic de contrainte. On choisit $n = 0,5$.

Dans les essais à pression moyenne constante, le passage contraction-dilatance se fait lorsque $F = G$ (relation 31). On peut prendre par exemple :

$$F - G = \alpha_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_2 \bar{S}_{2\rho}^2}{\bar{S}_{21}^3} \right) \quad (37)$$

Ainsi le maximum de densité S correspond à un niveau de contrainte $\bar{S}_2 = \bar{S}_{21} (\bar{S}_{21} / \bar{S}_{2\rho})^2$, qui est situé entre 0 et \bar{S}_{21} .

Les relations (36) et (37) déterminent complètement F et G :

$$F = \frac{S_{21}}{S_2} \left(\frac{\bar{S}_2}{\sqrt{\bar{S}_{21} \bar{S}_{2\rho}}} \right)^n + \frac{\alpha_1 \alpha_2 S_1}{\alpha_0 + \alpha_2 S_1} \left(1 - \frac{\bar{S}_2 \bar{S}_{2\rho}^2}{\bar{S}_{21}^3} \right) \quad (38)$$

$$G = \frac{S_{21}}{S_2} \left(\frac{\bar{S}_2}{\sqrt{\bar{S}_{21} \bar{S}_{2\rho}}} \right)^n - \frac{\alpha_1 \alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_2 S_1} \left(1 - \frac{\bar{S}_2 \bar{S}_{2\rho}^2}{\bar{S}_{21}^3} \right)$$

Ainsi les modules tangents initiaux $2/3 E$ et $1 - 2\nu$ aux courbes de contrainte et de densité pour les essais à pression latérale constante prennent des formes simples :

$$\frac{2E}{3} = \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1} \quad \text{et} \quad 1 - 2\nu = \frac{3\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1}$$

D'où on peut tirer :

$$\alpha_1 = \frac{E}{1 + \nu}$$

$$\alpha_2 = \frac{2E}{1 - 2\nu}$$

α_1 est donc l'analogue d'un coefficient élastique de Lamé et $2/\alpha_0$ un coefficient de compressibilité initiale (défini comme $d(\sigma_1 - \sigma_3) / E_1$).

On connaît α_0 à l'état isotrope ; on peut déterminer α_{1iso} à partir des modules tangents aux courbes de contrainte des essais à pression latérale constante. On choisit ainsi :

$$\alpha_{1iso} = \beta_1 e^{\gamma_1(\rho - \rho_1)} S_1$$

β_1 et γ_1 étant égaux respectivement à 37 et 3,8.

(On peut raisonner de la même façon sur les essais à pression moyenne constante. On trouvera alors un coefficient de compressibilité (toujours défini comme la valeur initiale de $d(\sigma_1 - \sigma_3) / E_1$) deux fois plus faible, ce qui est normal puisque dans les essais à pression latérale constante, la contractance initiale est due à la fois à l'augmentation du déviateur et à celle de la pression moyenne).

Il nous reste à choisir l'allure des fonctions α_0 et α_1 en dehors de l'état isotrope, sachant que α_0 est nul à l'état-limite. On prend :

$$\alpha_1 = \beta_1 \cdot e^{\gamma_1(\rho - \rho_1)} \cdot S_1 \cdot (2 - (\frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_{2l}})^2) / 2$$

et

$$\alpha_0 = \beta_0 \cdot e^{\gamma_0(\rho - \rho_1)} \cdot S_1 \cdot (1 - (\frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_{2\rho}})^2)$$

Ainsi le modèle est entièrement défini par 11 paramètres, dont les valeurs choisies sont résumées sur le tableau suivant :

β_0	γ_0	β_1	γ_1	β_2	γ_2	ρ_{10}	α_1	m	K	n
60	5,5	37	3,8	53,6	23,3	1,49	0,46	0,3	2,9	0,5

- α_1 et m représentent la surface-limite de plasticité
- ρ_{10} , β_2 et γ_2 sont calculés à partir des diagrammes-limite en extension et compression.
- β_0 et γ_0 sont déterminés par des essais de charge isotrope
- β_1 et γ_1 sont déterminés par les modules tangents initiaux aux courbes de contraintes des essais à pression latérale constante (ou à pression moyenne constante).
- K caractérise le niveau du pic de contrainte, c'est à dire la droite de rupture.
- n influence l'allure des courbes de contrainte au cours de l'écrasement.

2) Comparaison théorie-expérience

On présente sur les figures II.3 à II.22 les courbes théoriques résultant de l'intégration de la loi sur les trajets de charge correspondant aux 16 essais de compression et à 4 essais d'extension qui ont été réalisés expérimentalement. Sur chaque graphe, on a figuré, avec des carrés, plusieurs points de la courbe expérimentale.

Les essais de compression à pression latérale constante et à pression moyenne constante sont très bien identifiés, tant en contrainte qu'en densité, pour toute la gamme de pression et densité initiales étudiée. Ce sont ces essais qui ont été utilisés pour la détermination des paramètres β_1, γ_1, n et K .

Sur les essais à déviateur constant, la concordance est moins bonne. Les courbes de contrainte expérimentales sont plus douces que les courbes théoriques ; en particulier, les modules tangents prévus par la loi aux changements de régulation sont trop grands. Pour améliorer l'indentification, il faudrait plus tenir compte de ce type d'essais lors de la détermination des différents coefficients de la loi. On ne disposait pas de suffisamment de résultats pour le faire. Cependant, l'évolution de la densité est correctement représentée,

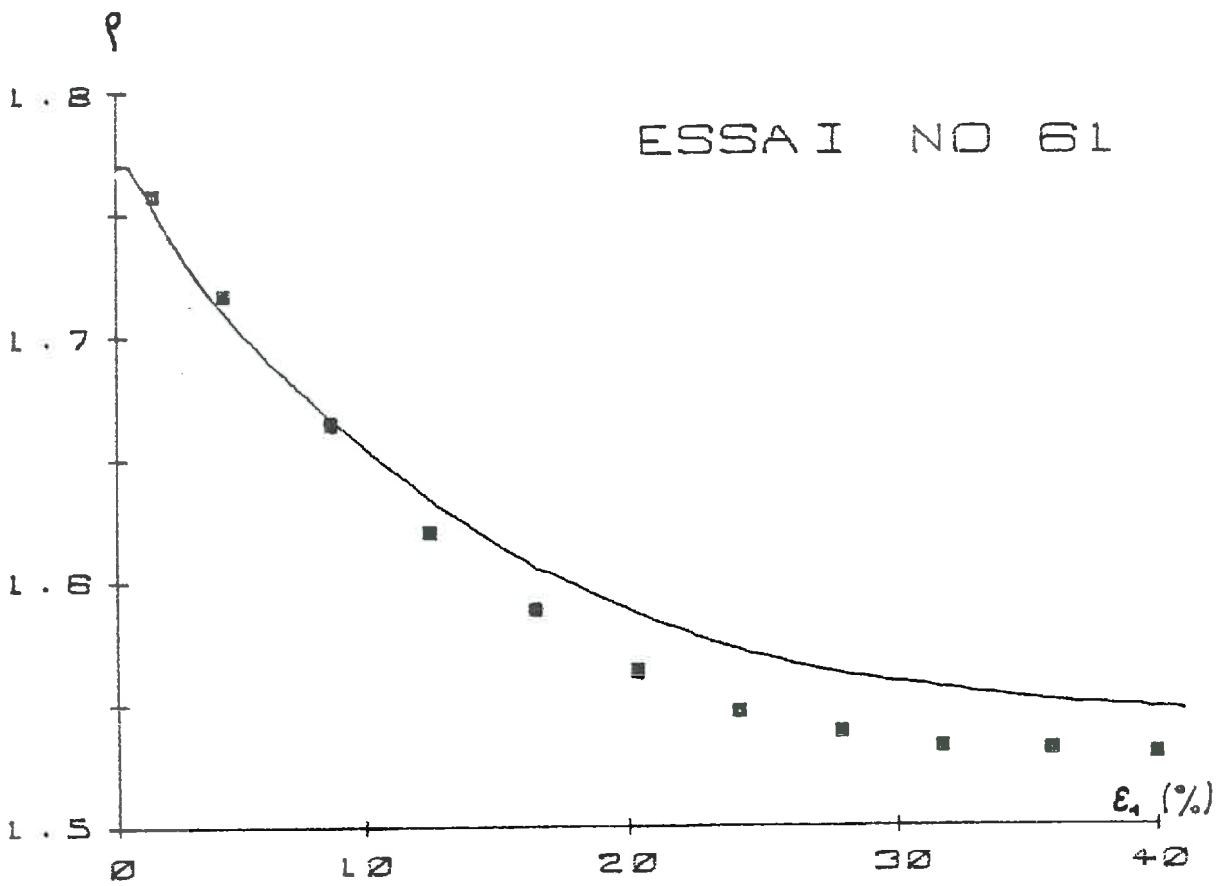
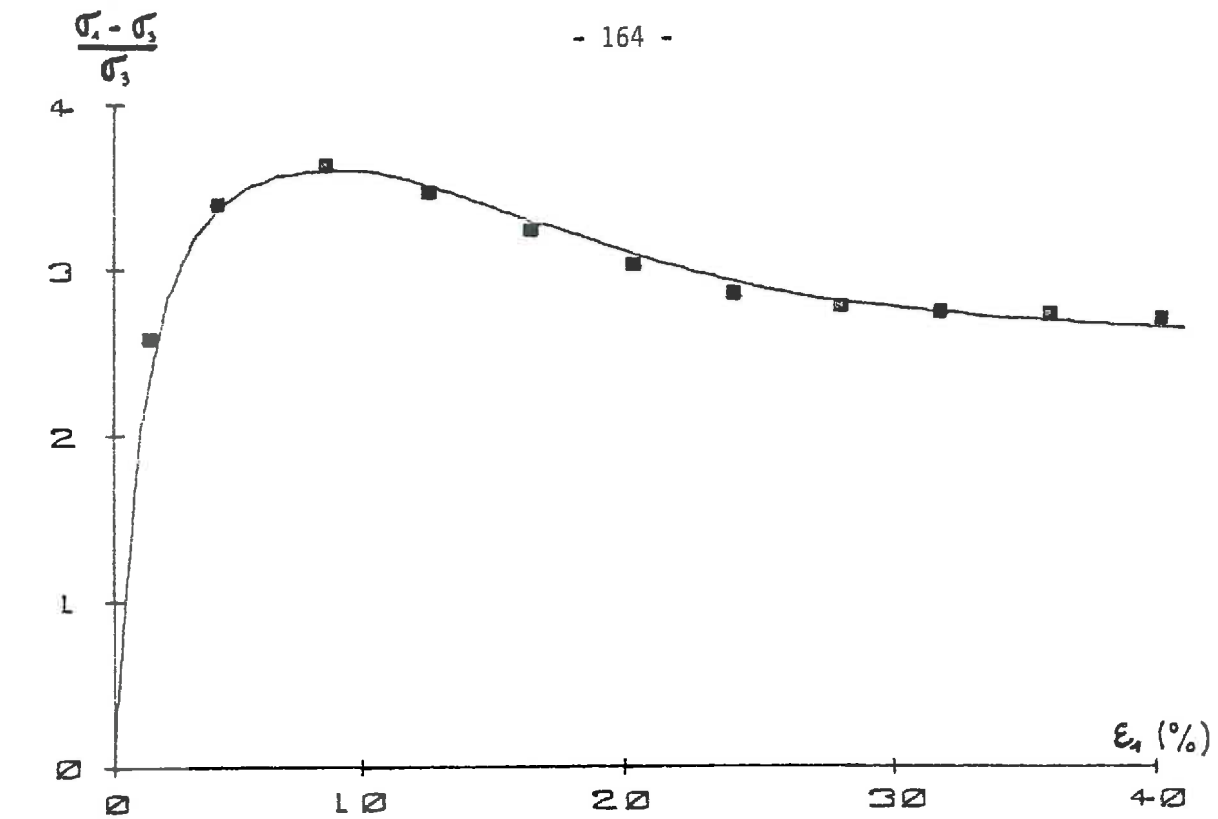


FIGURE II.3

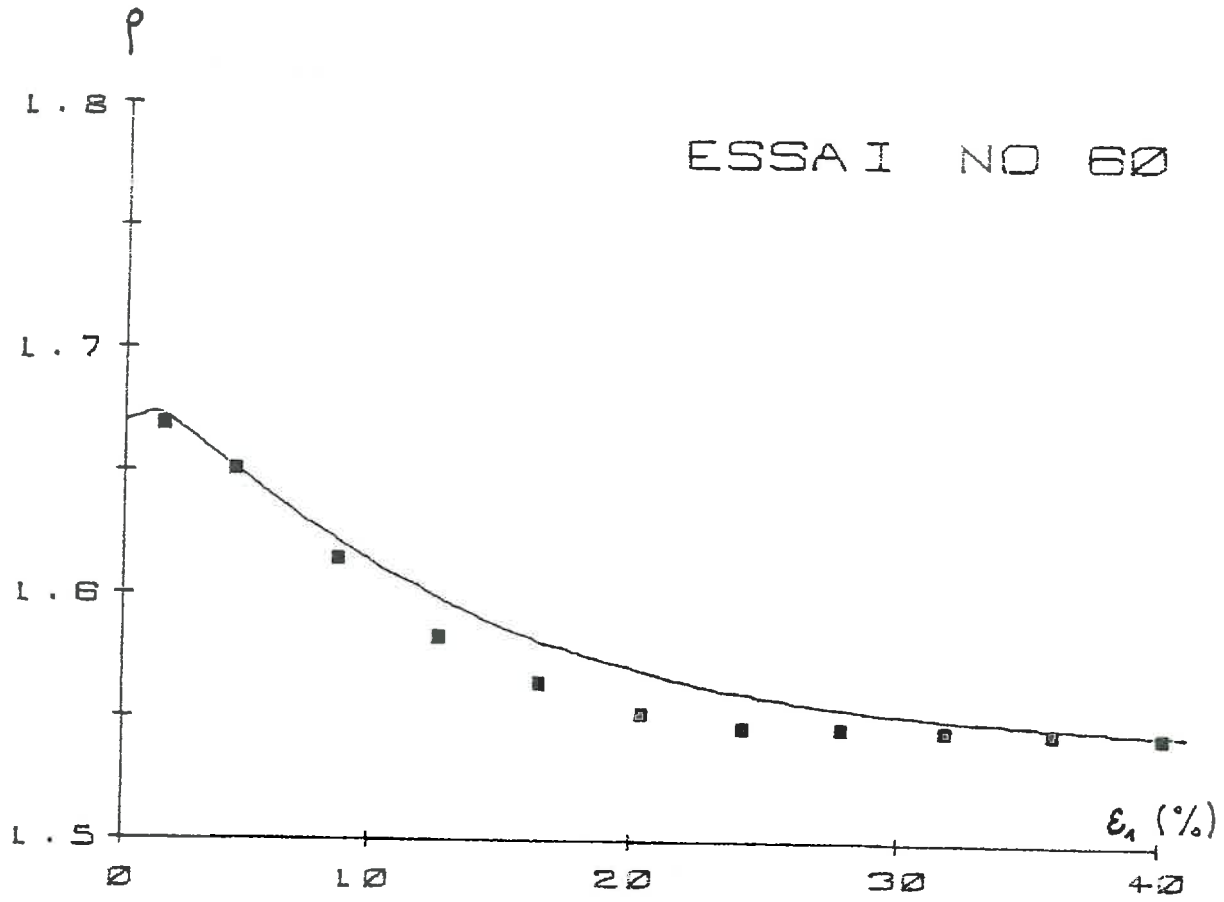
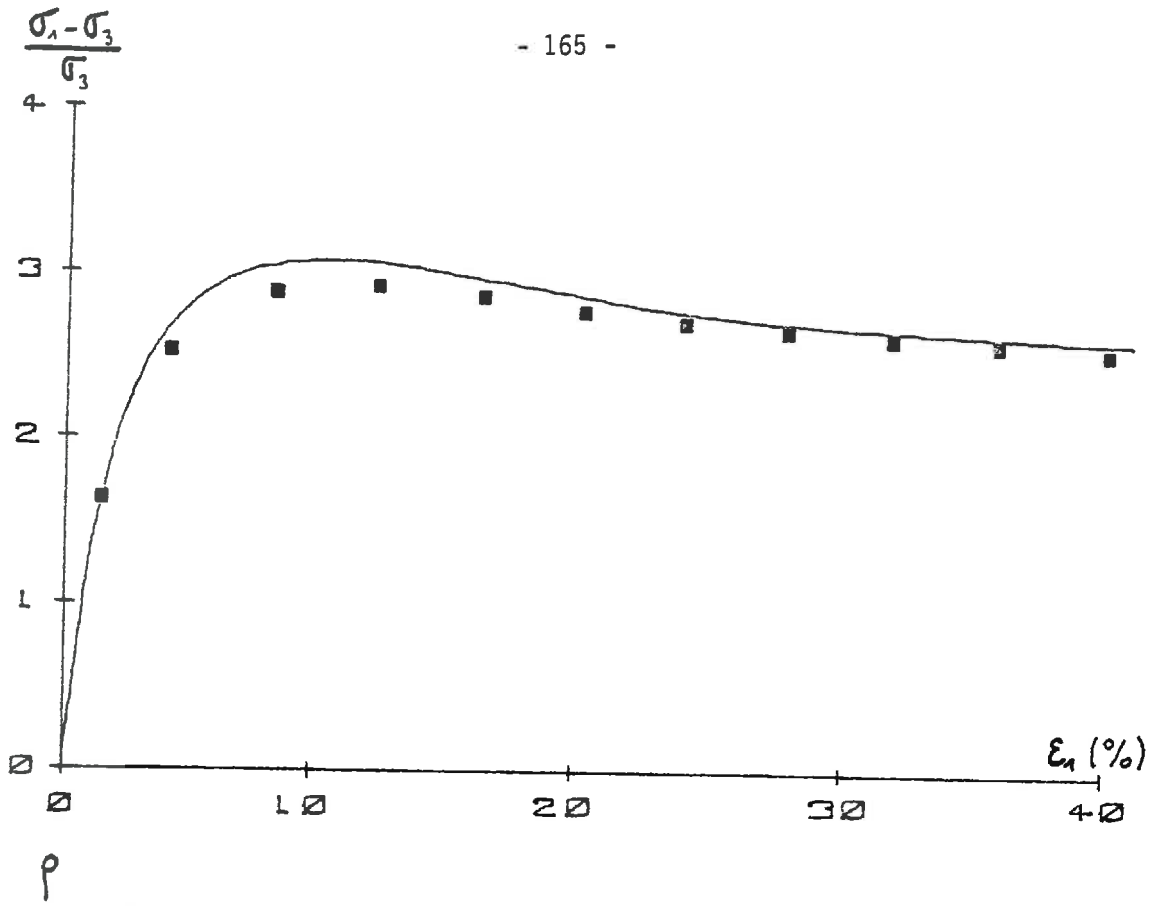


FIGURE 11.4

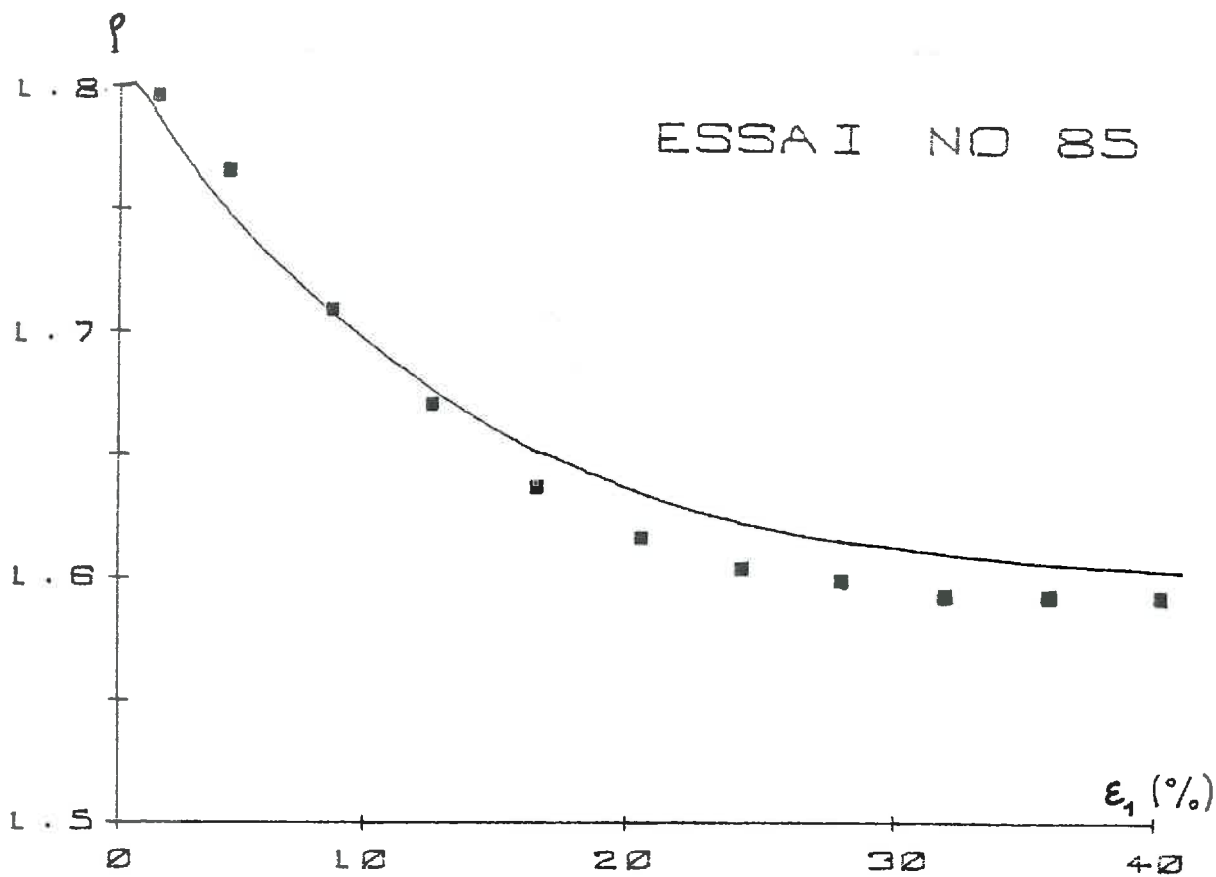
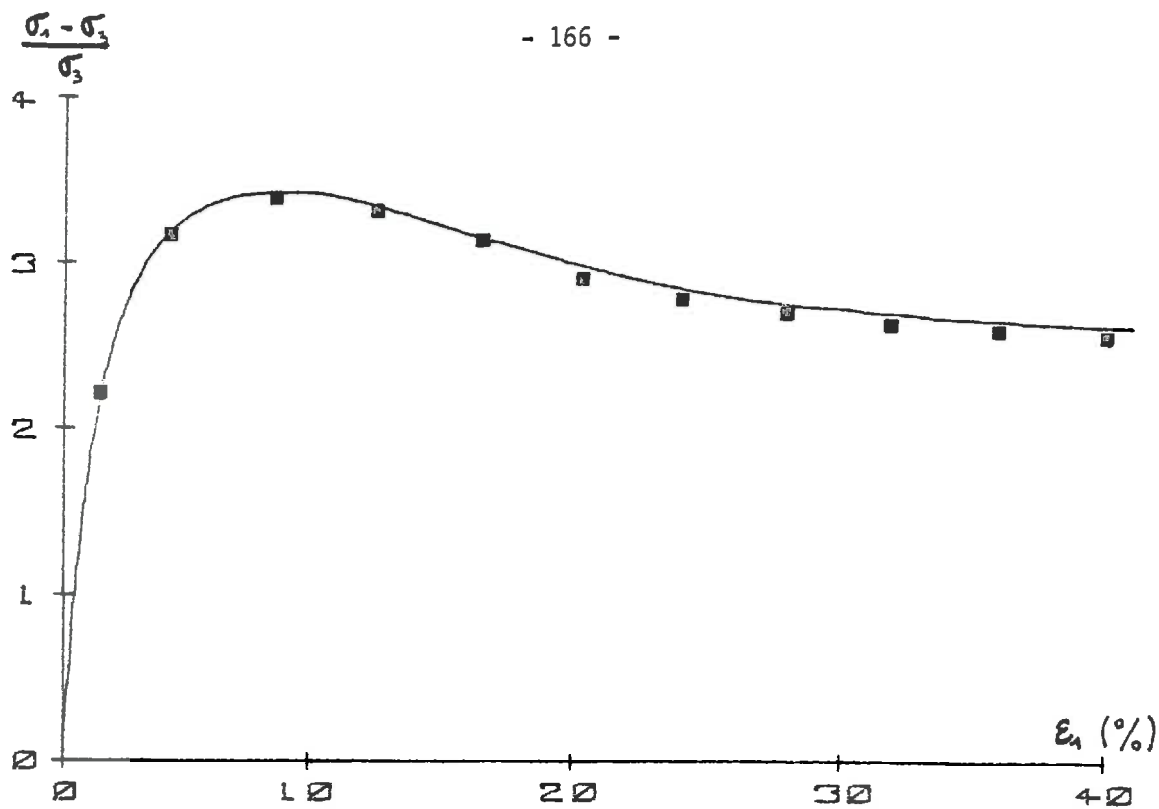


FIGURE II.5

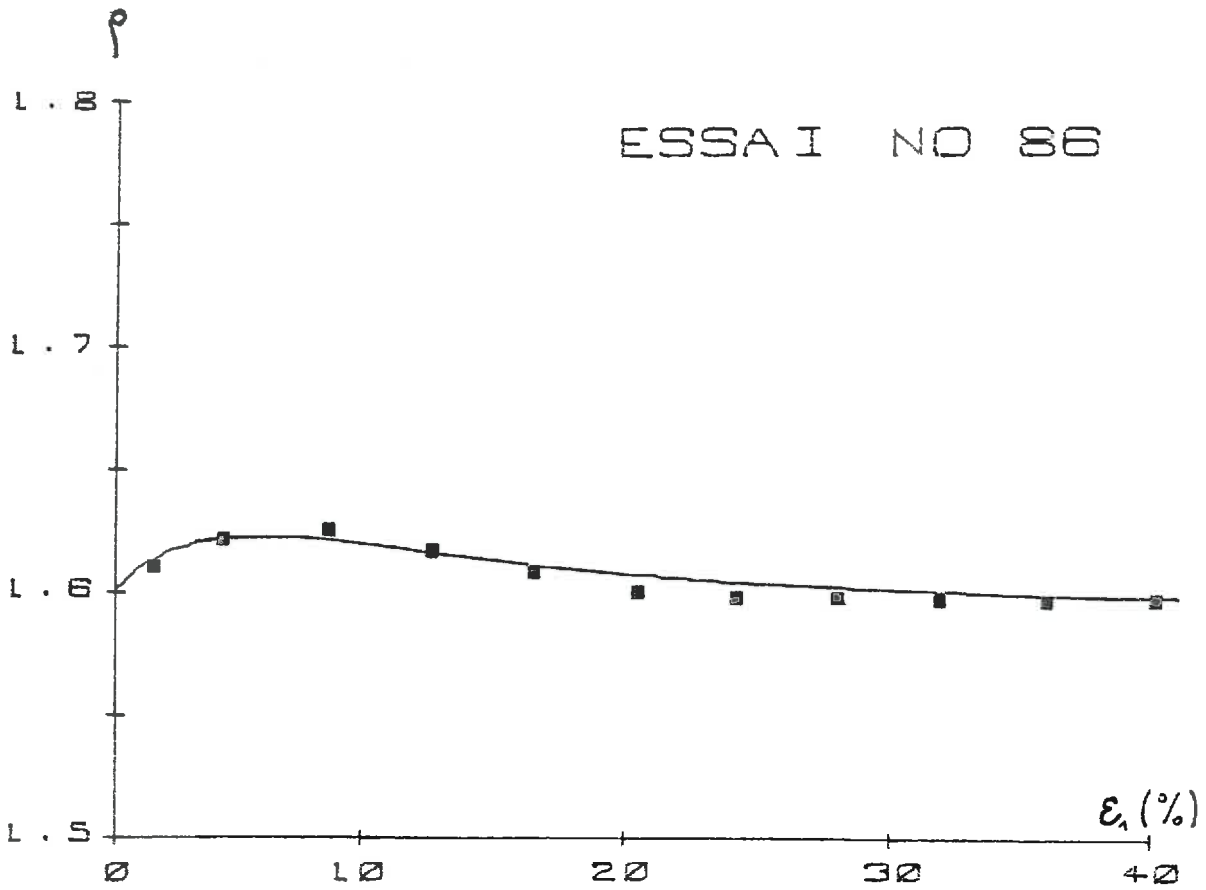
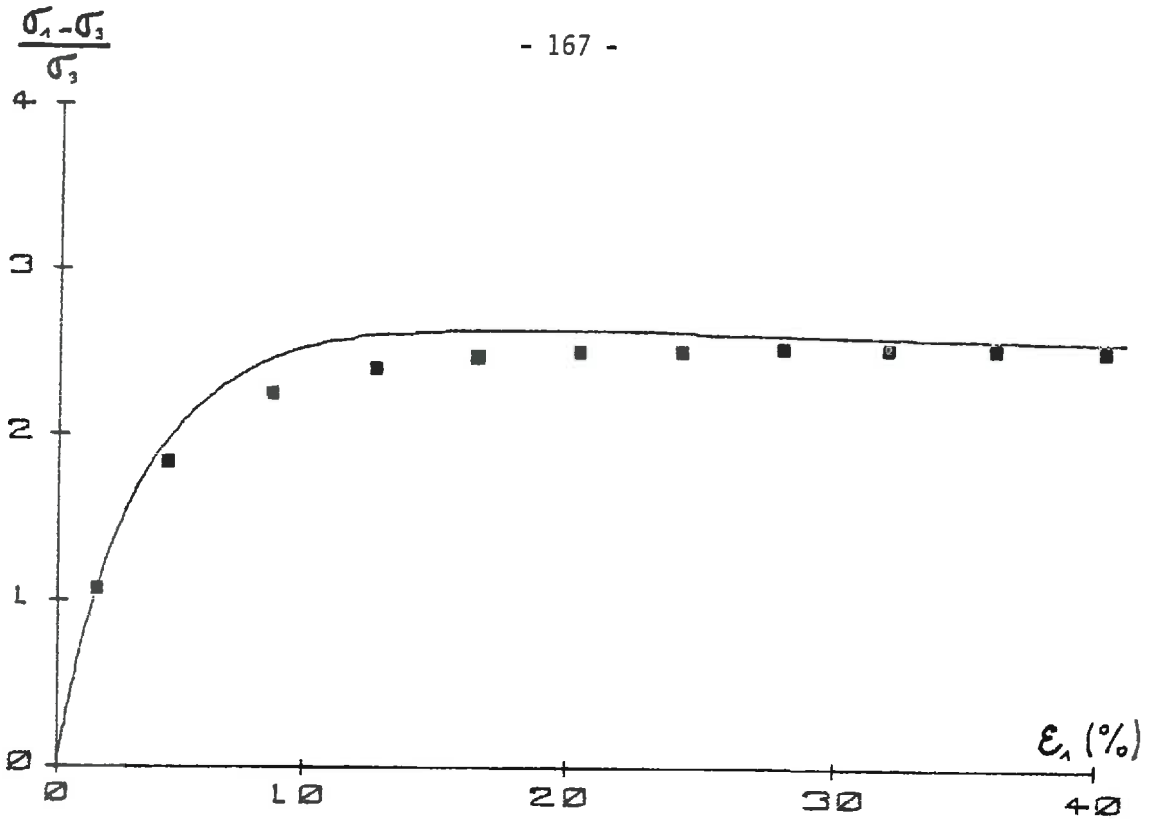


FIGURE II.6

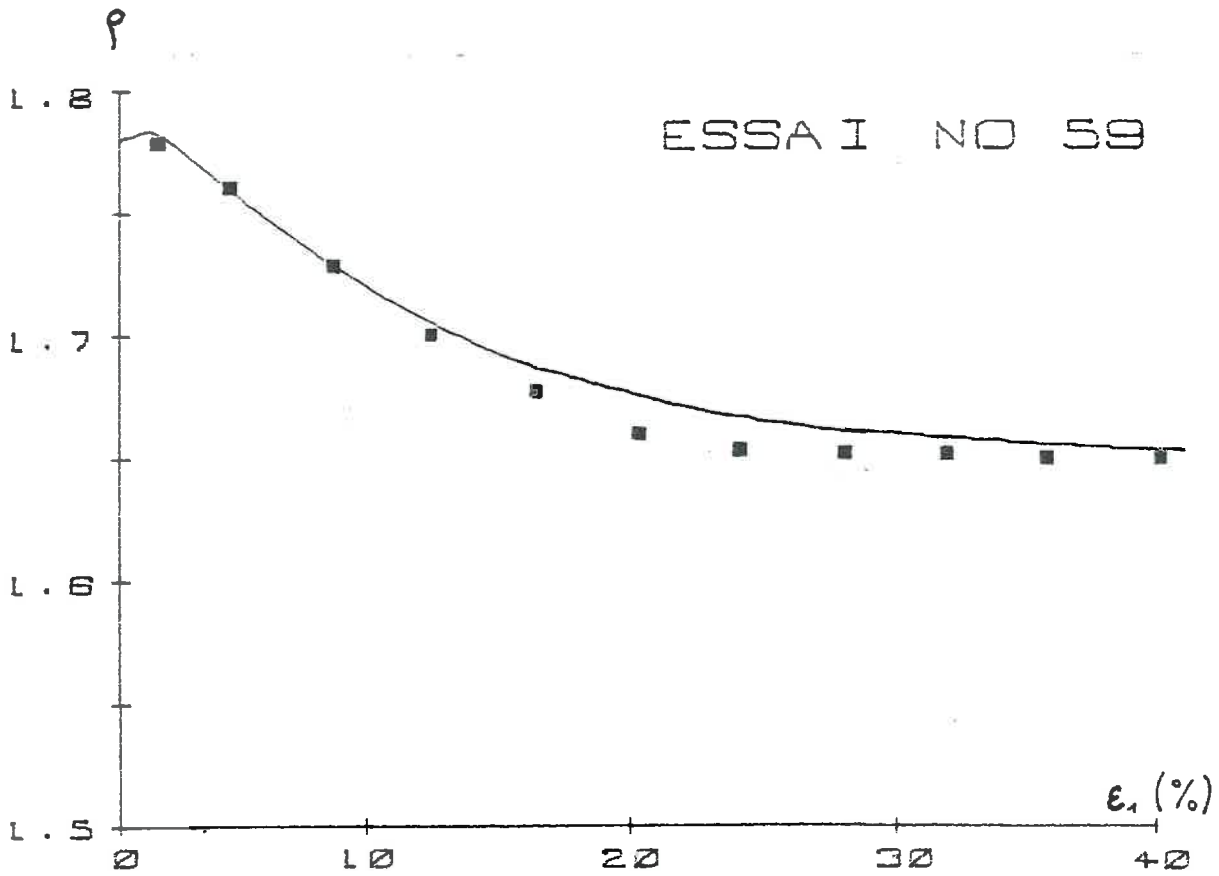
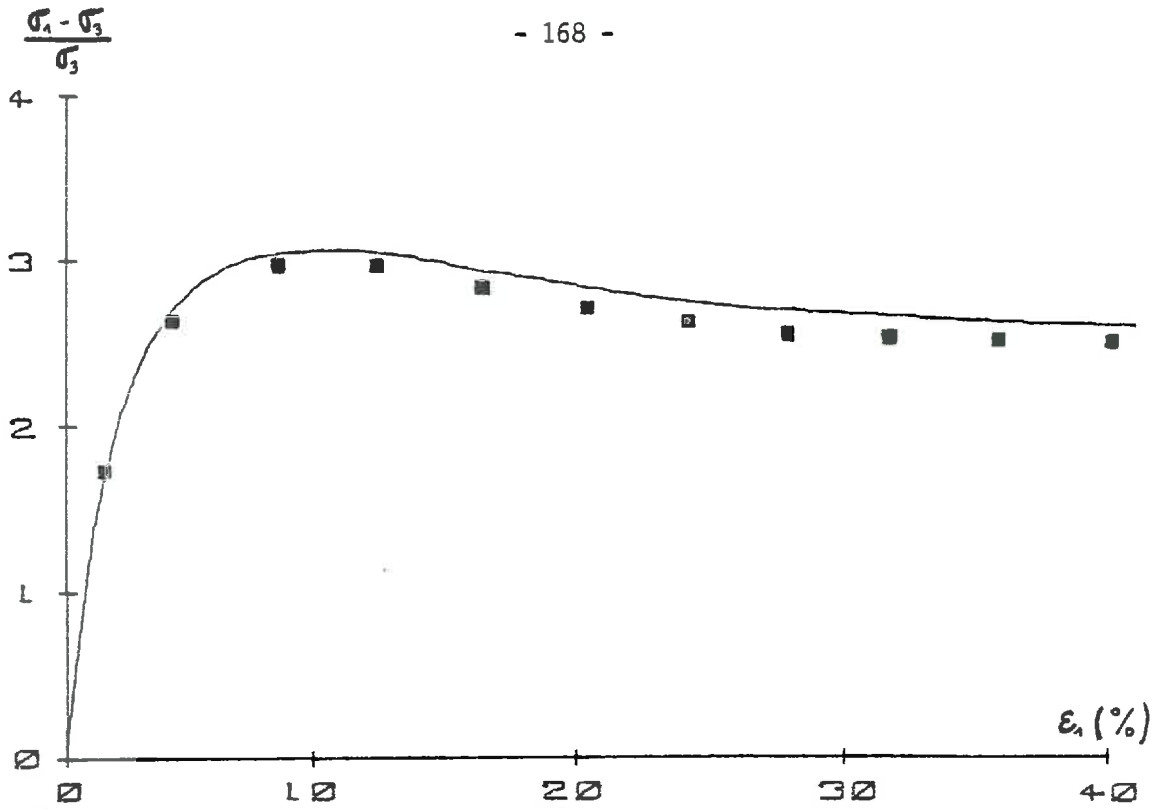
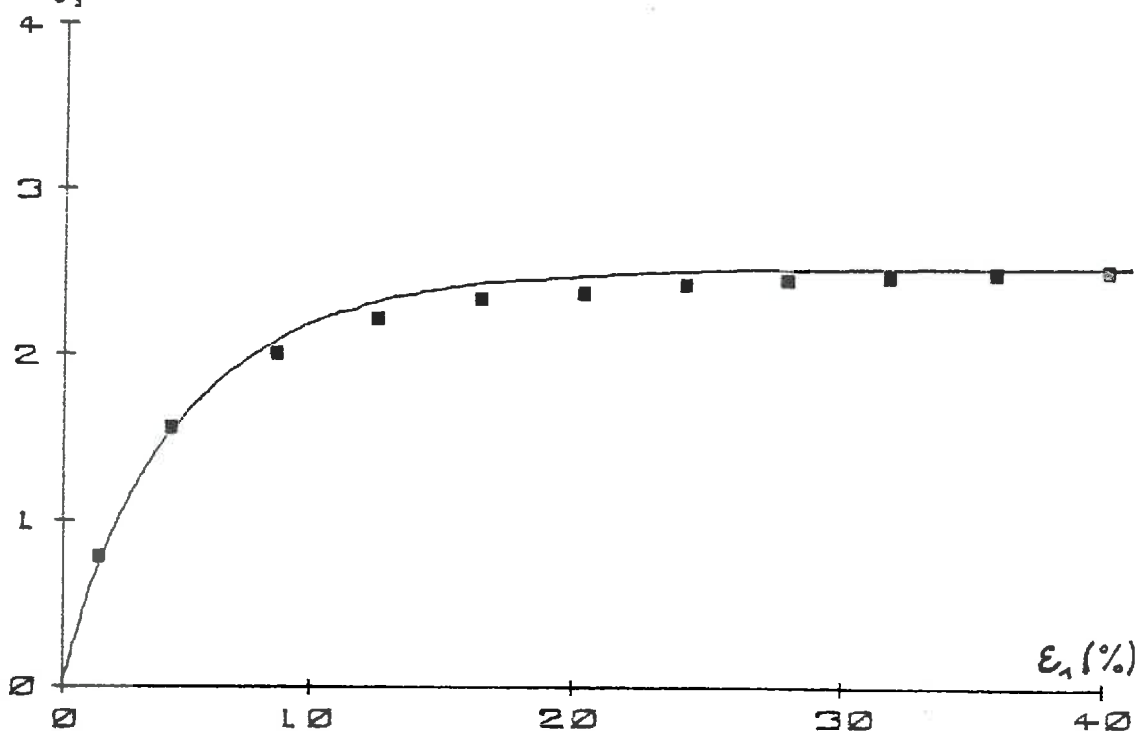


FIGURE II.7

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3}$$



ρ

ESSAI NO 29

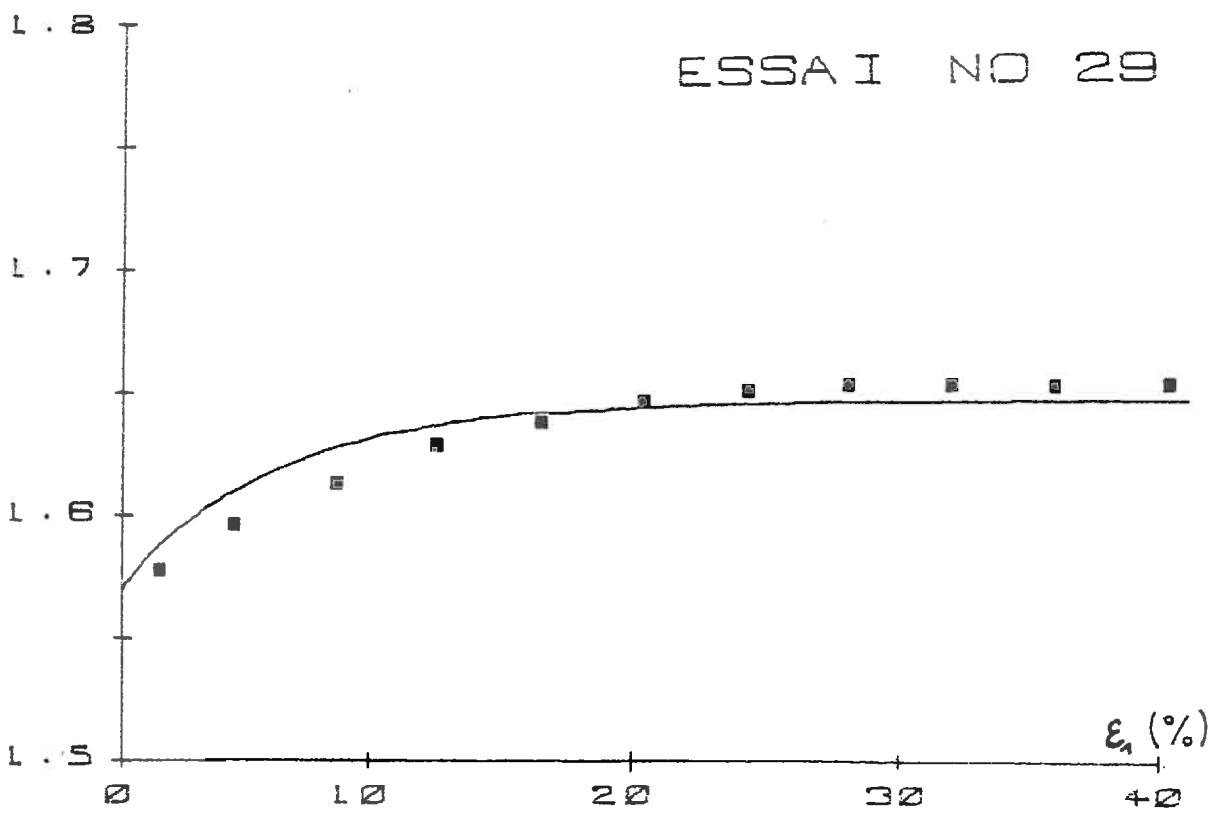


FIGURE II.8

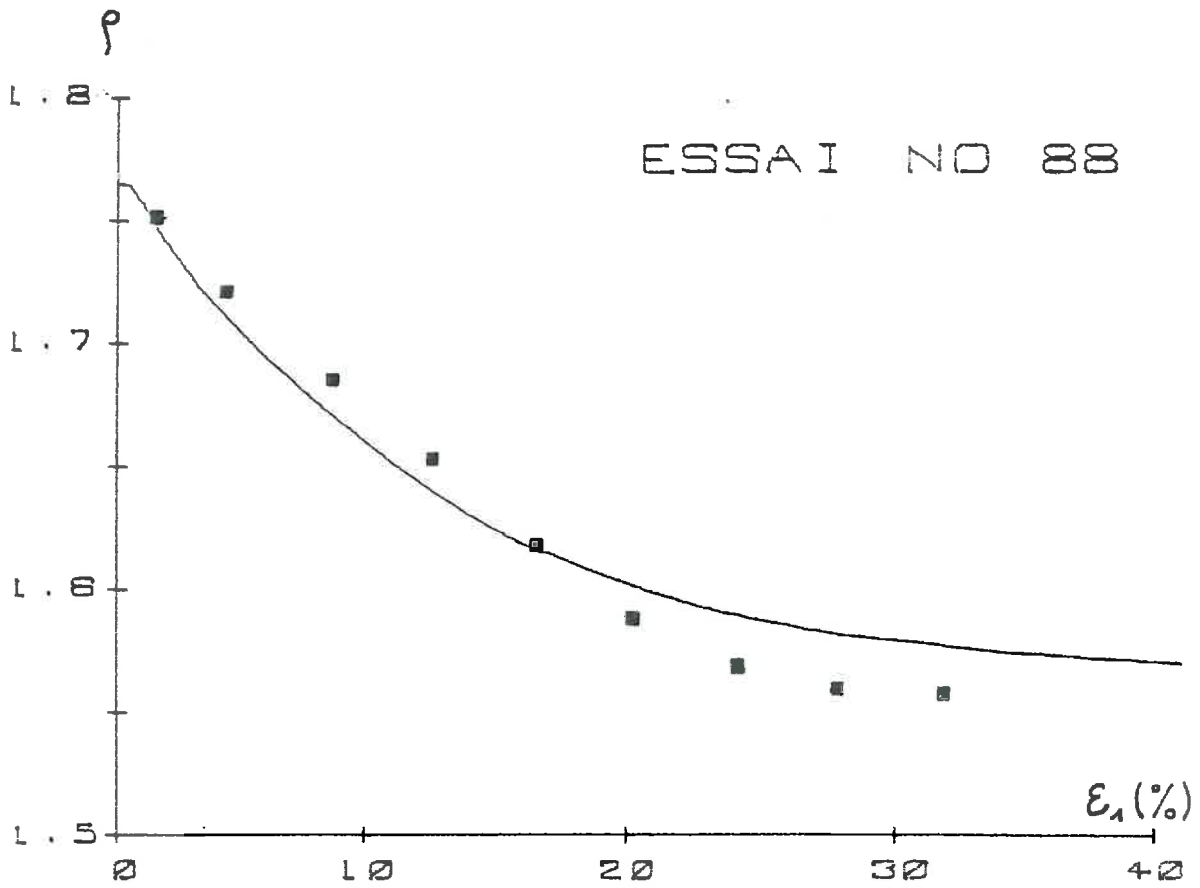
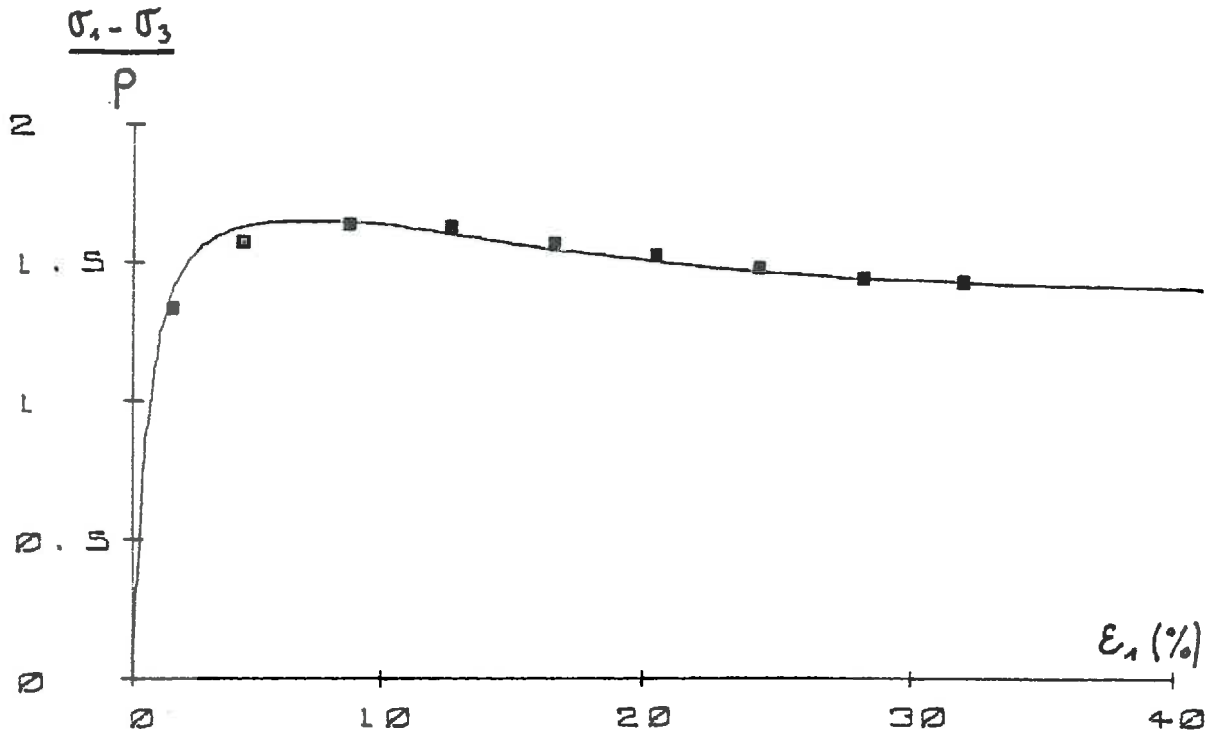


FIGURE II.3

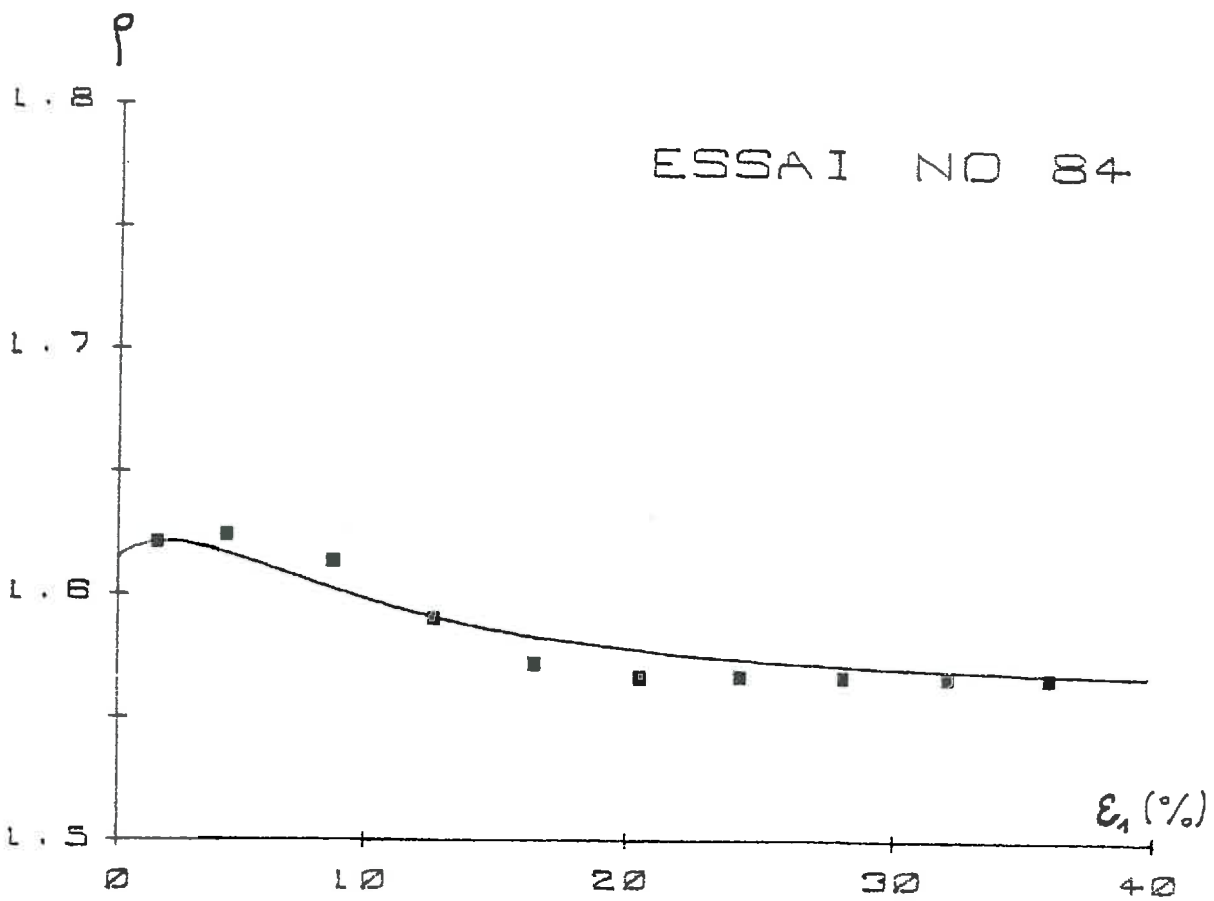
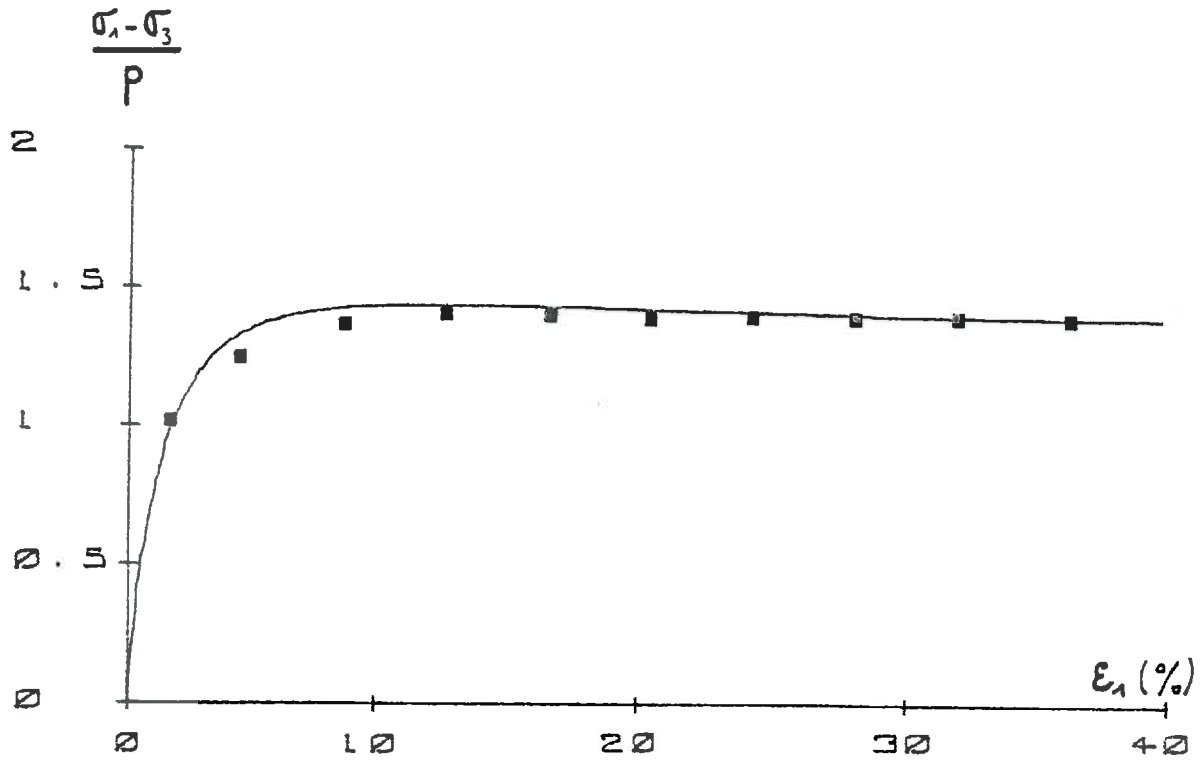


FIGURE II.10

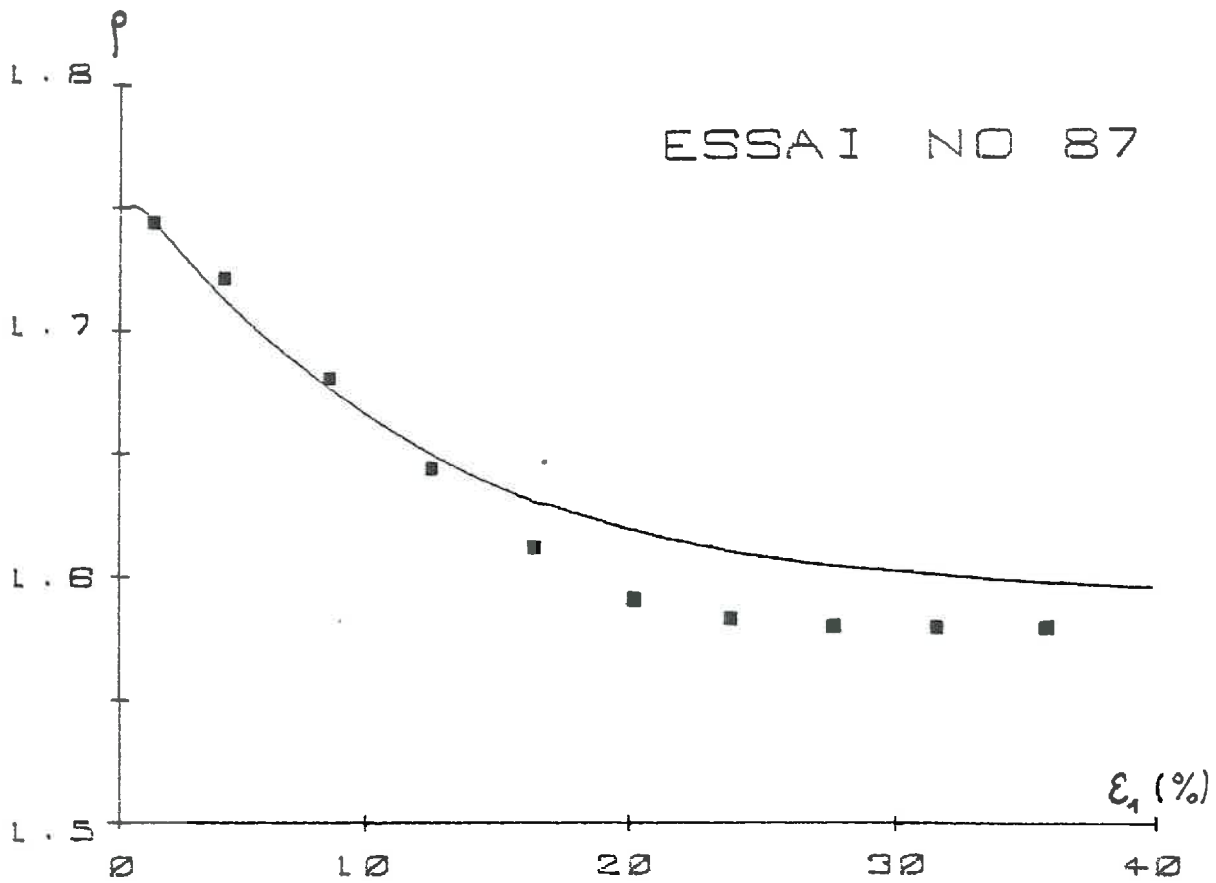
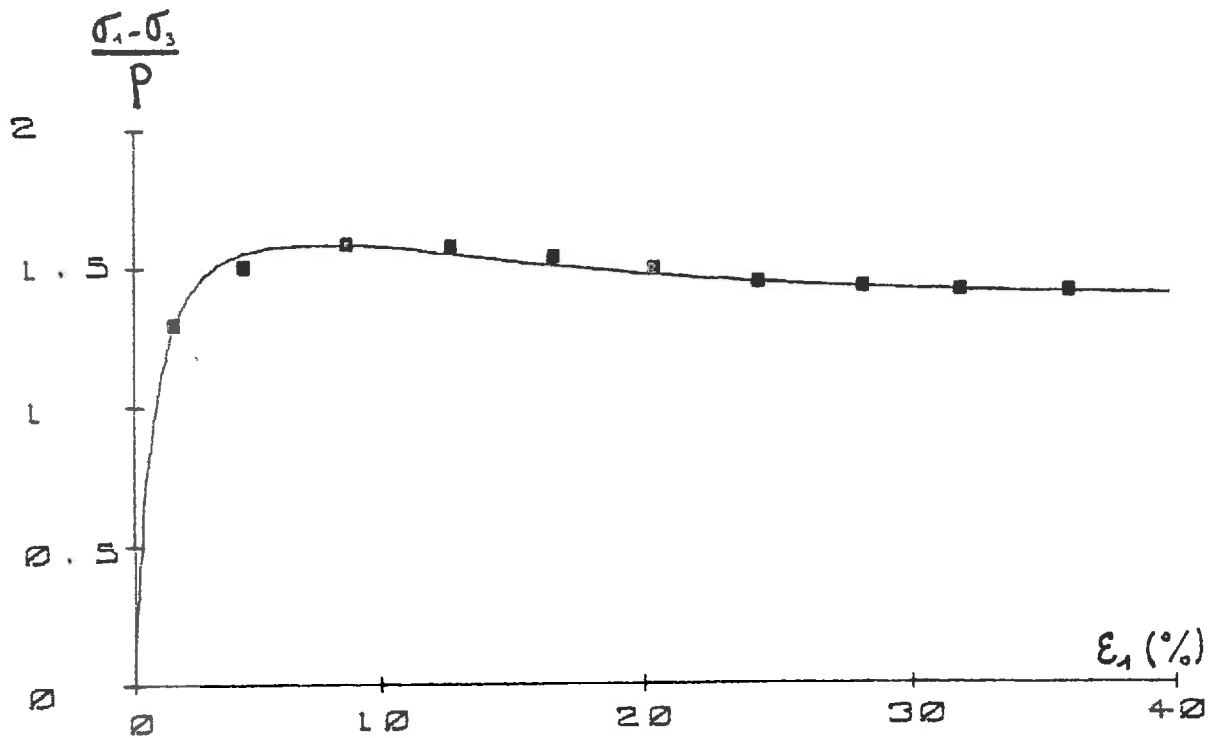


FIGURE II.11

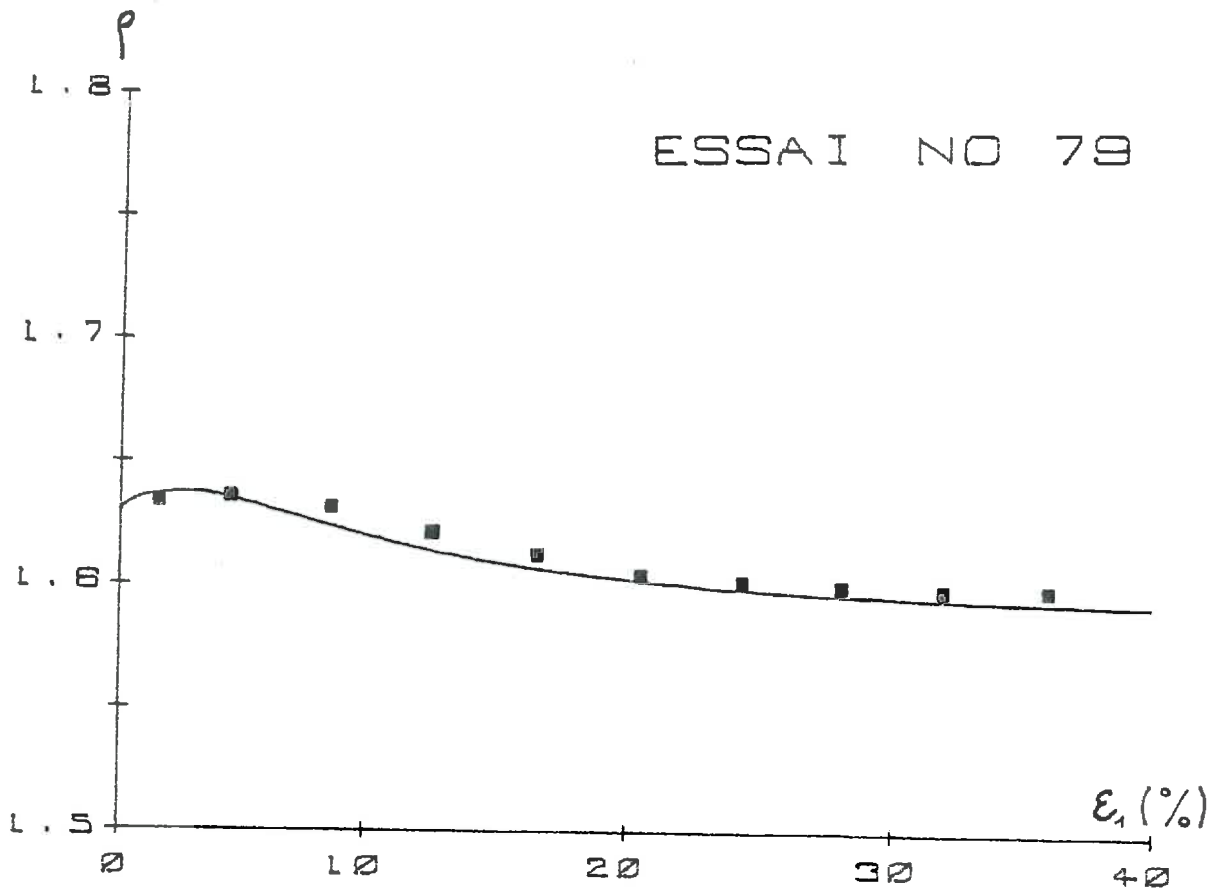
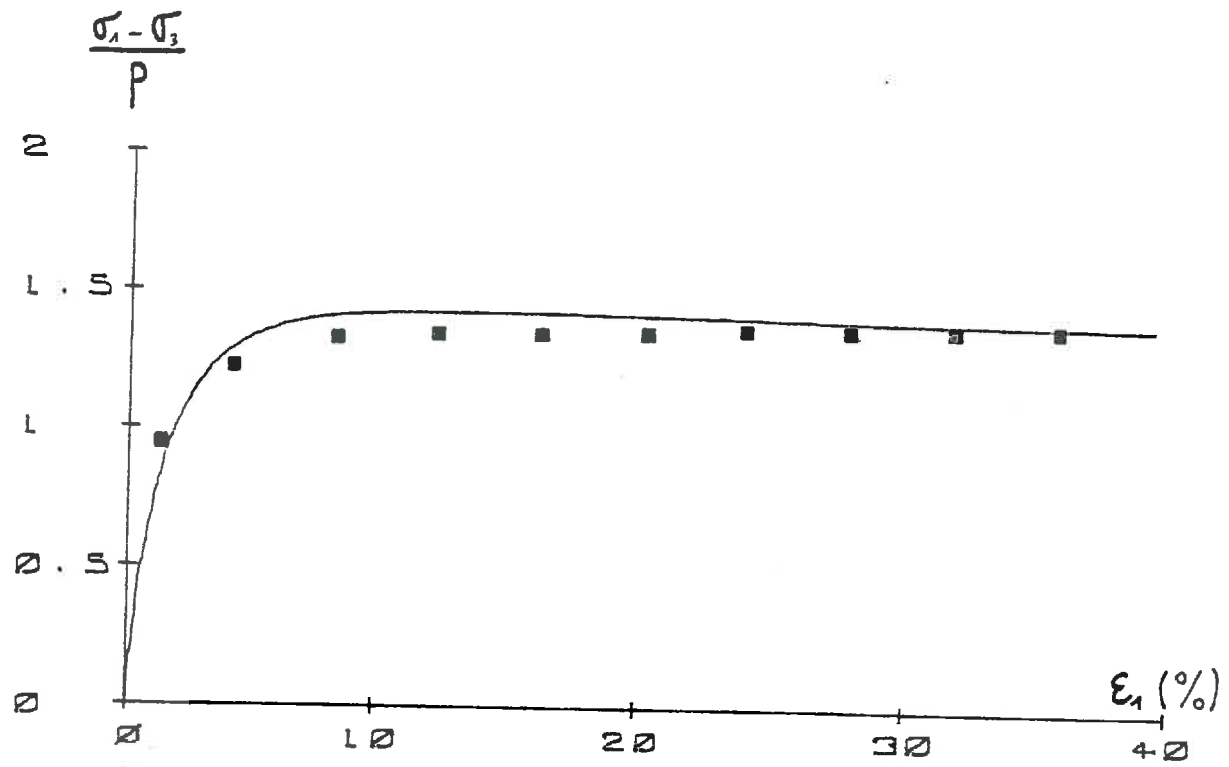
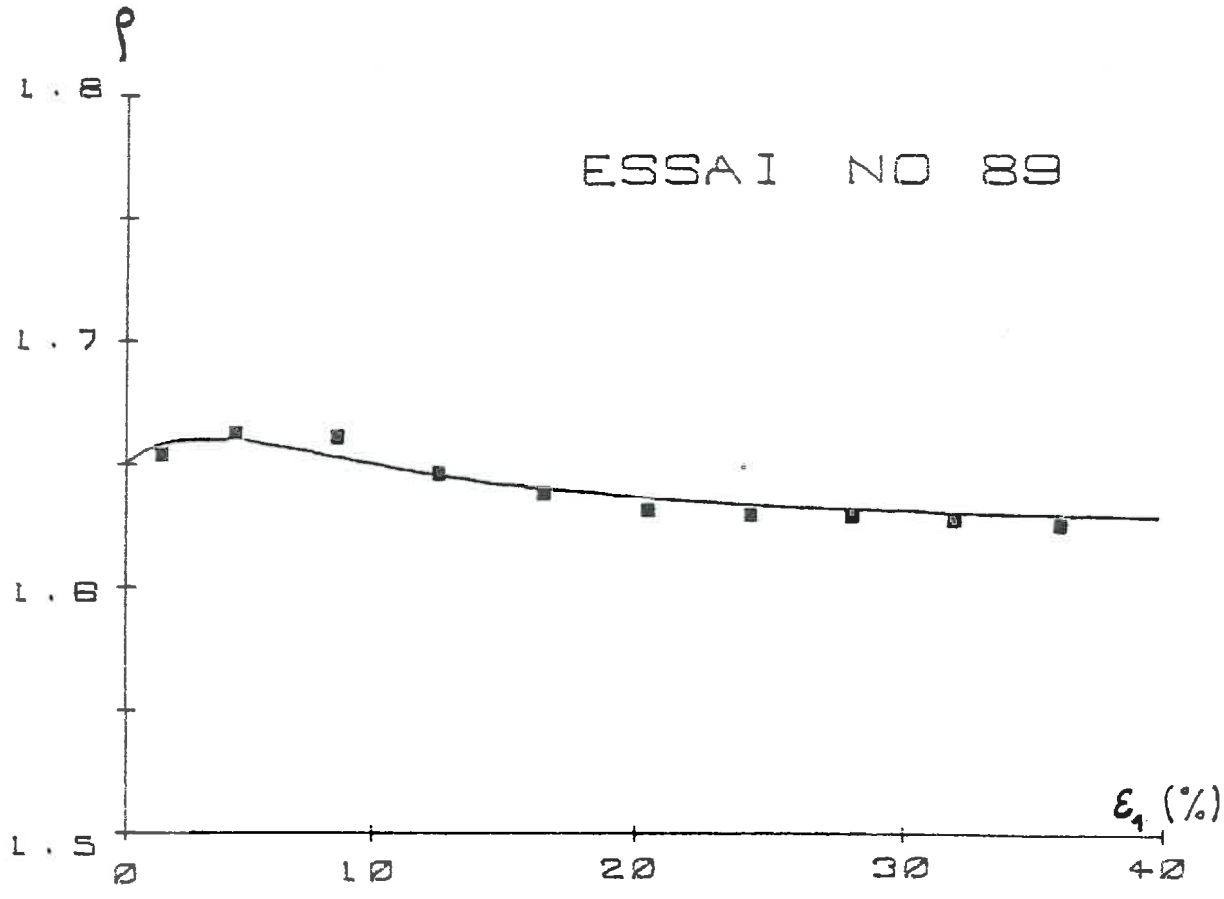
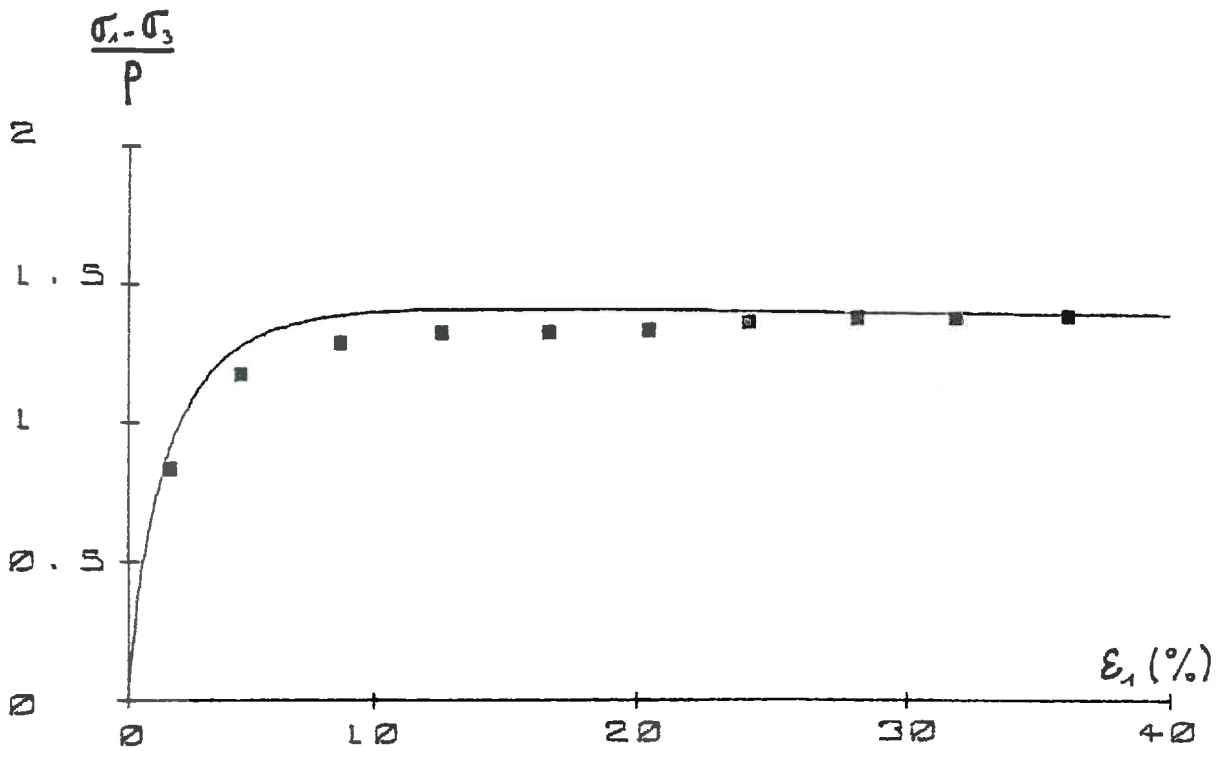


FIGURE II.12



ESSAI NO 89

FIGURE II.13

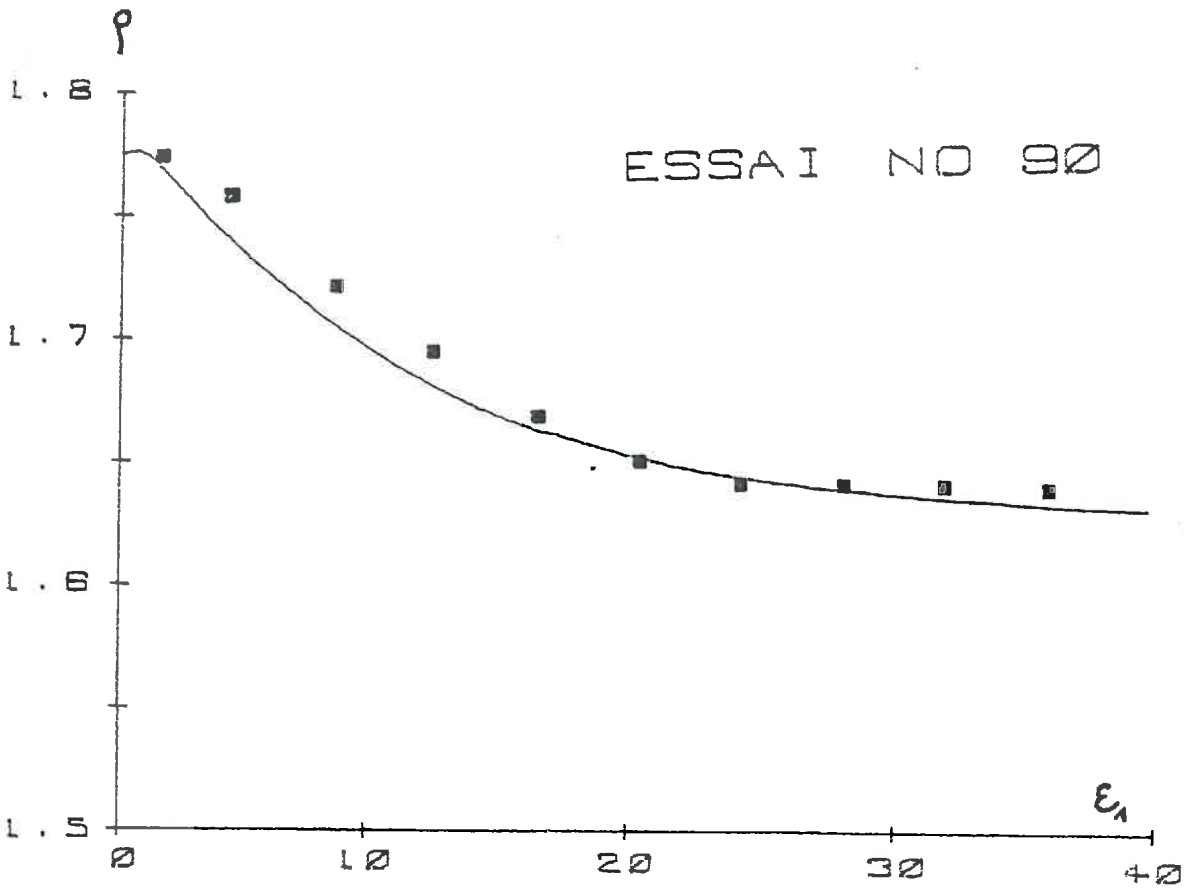
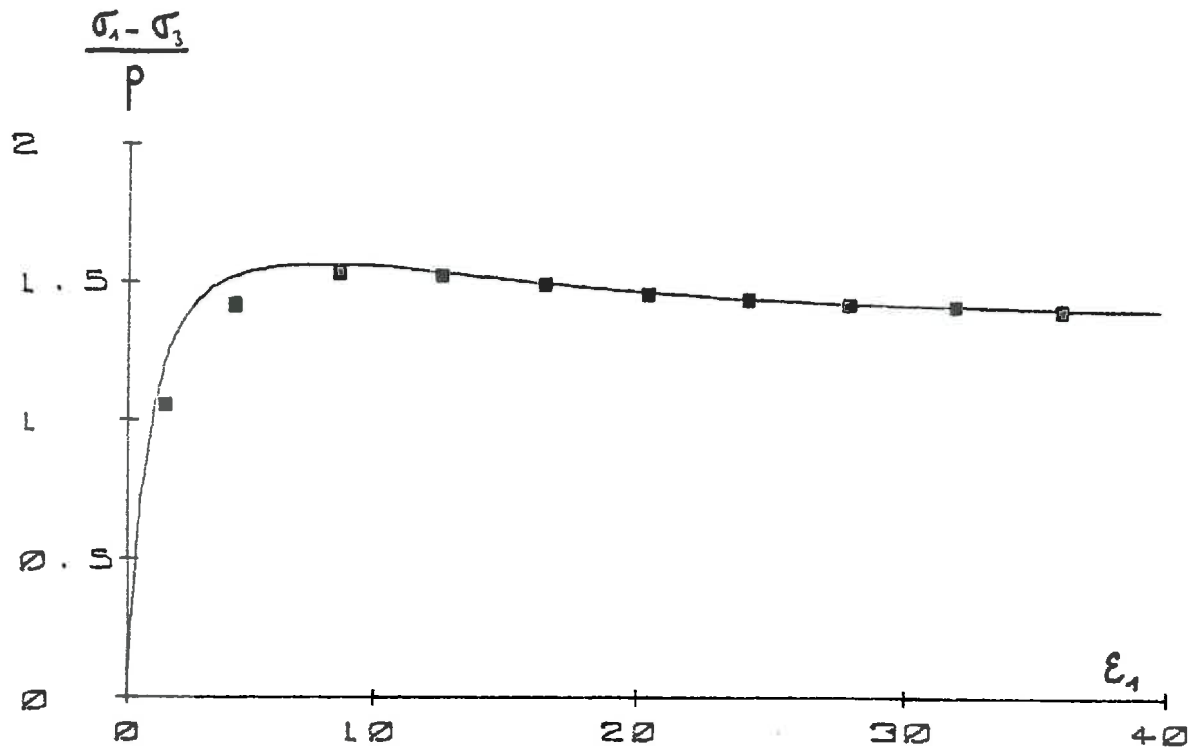


FIGURE II.14

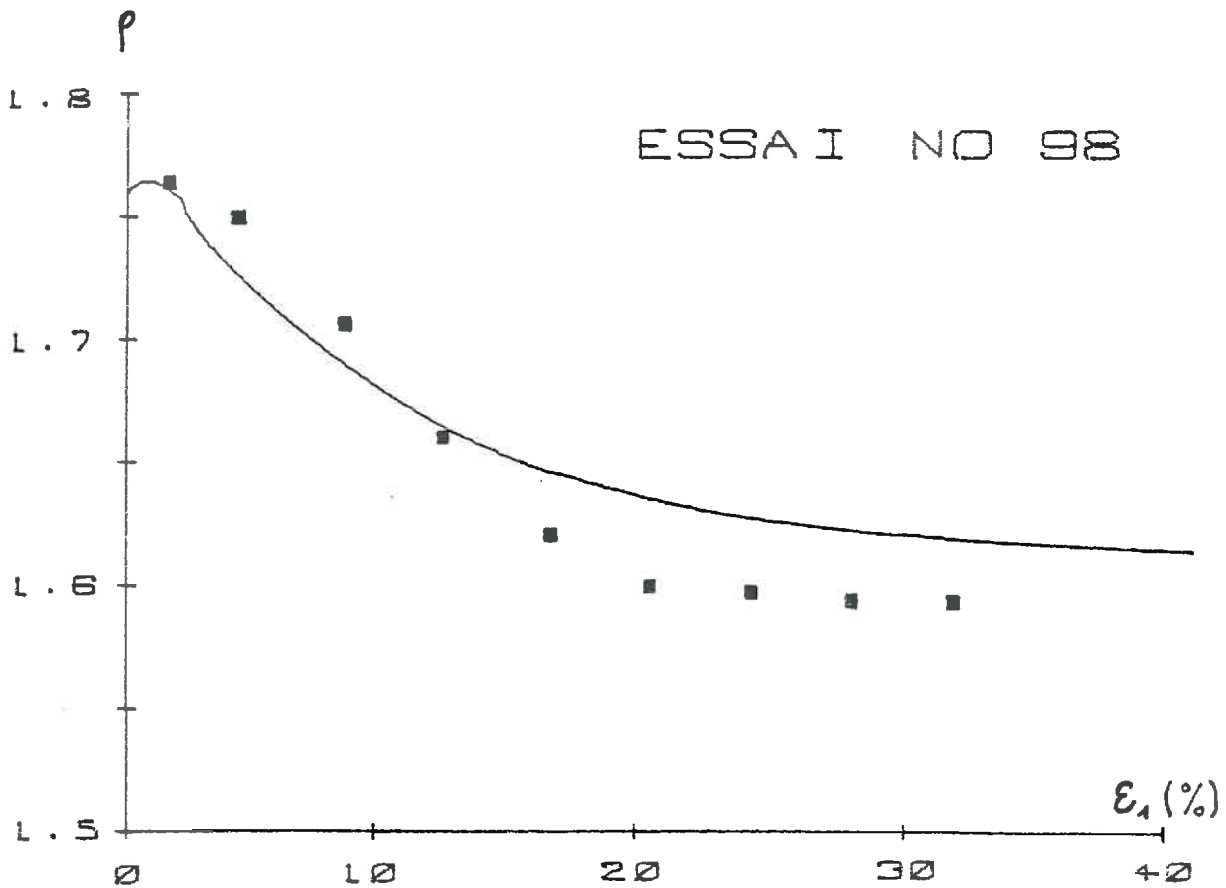
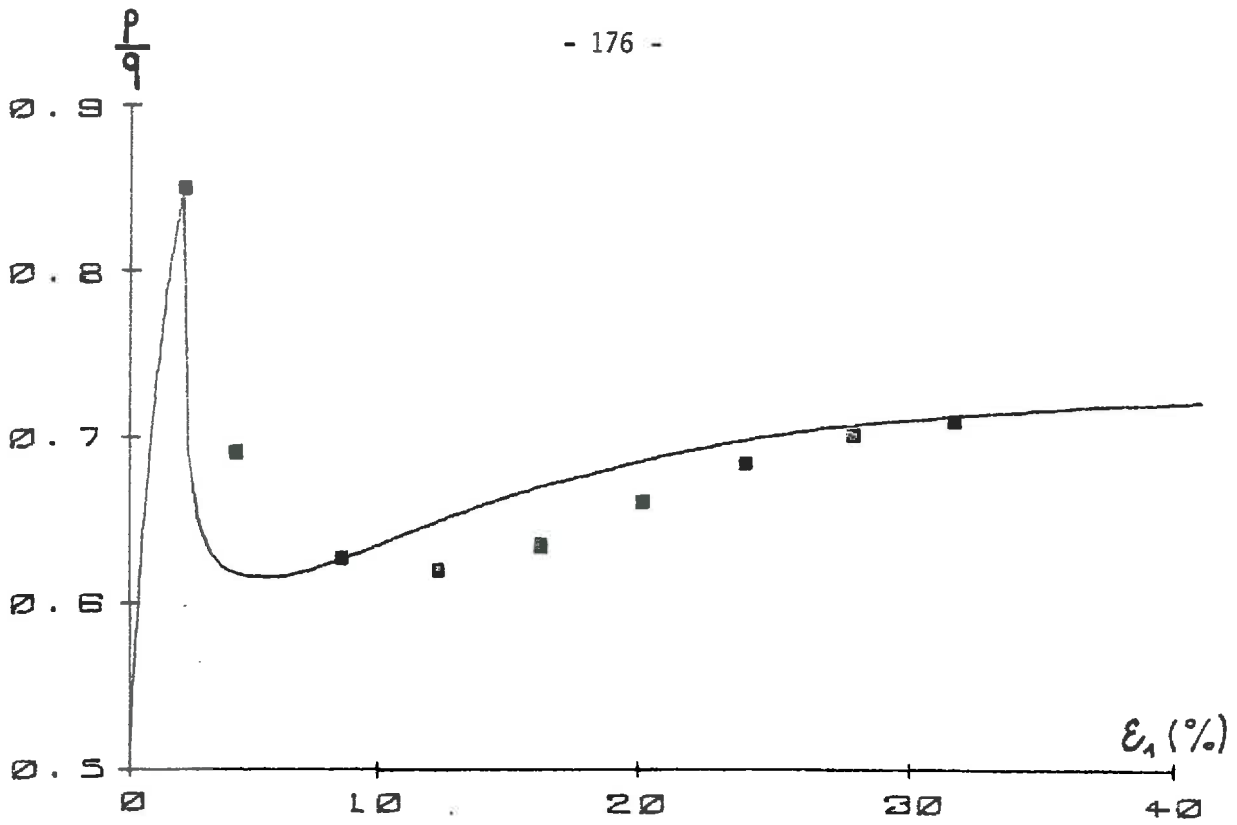


FIGURE II.15

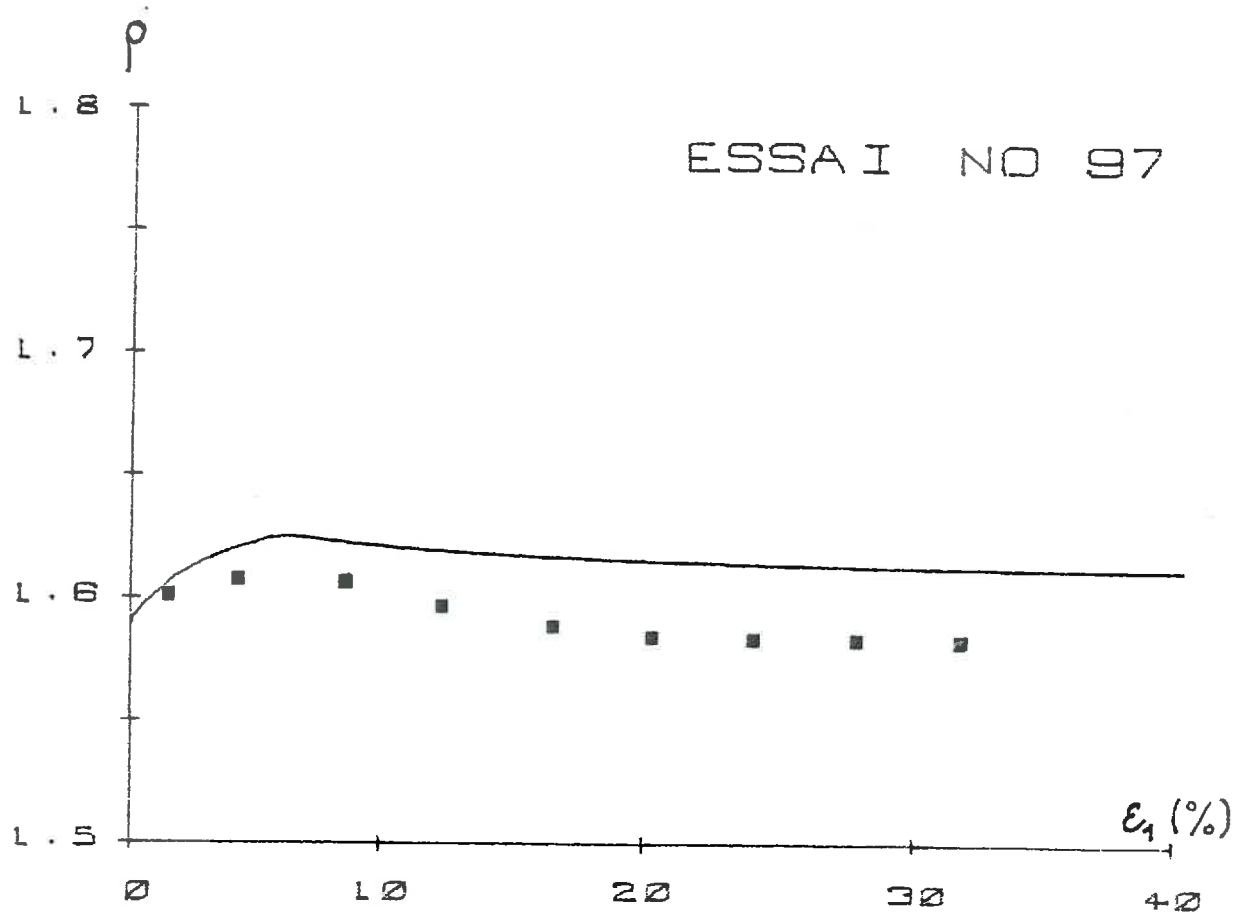
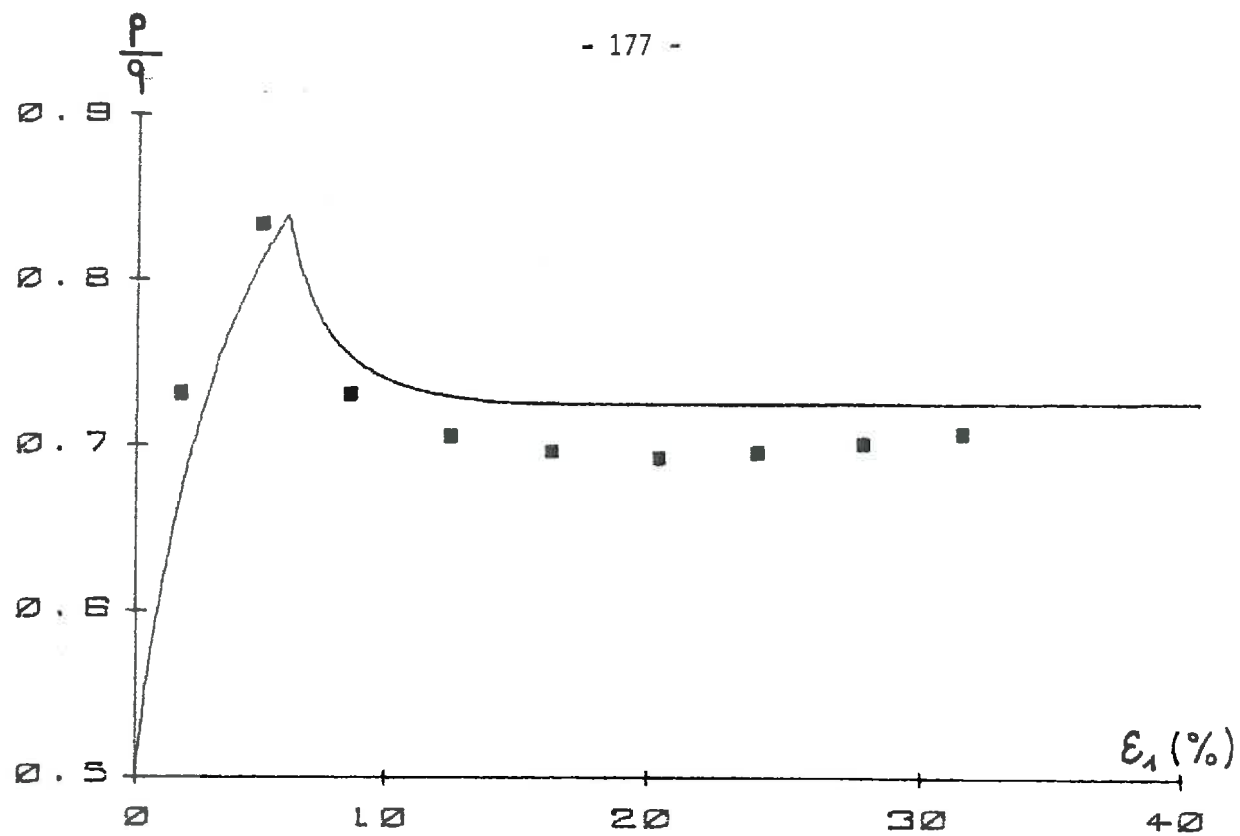


FIGURE II.16

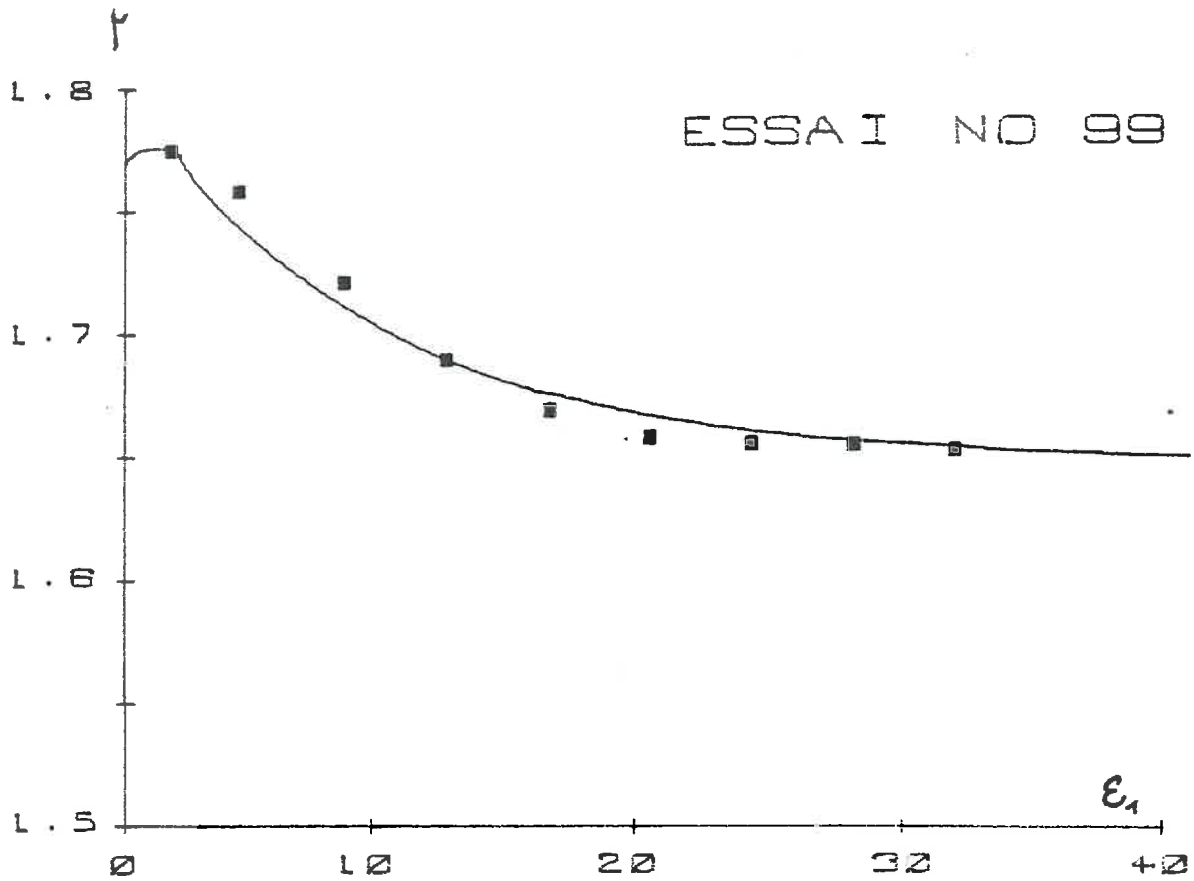
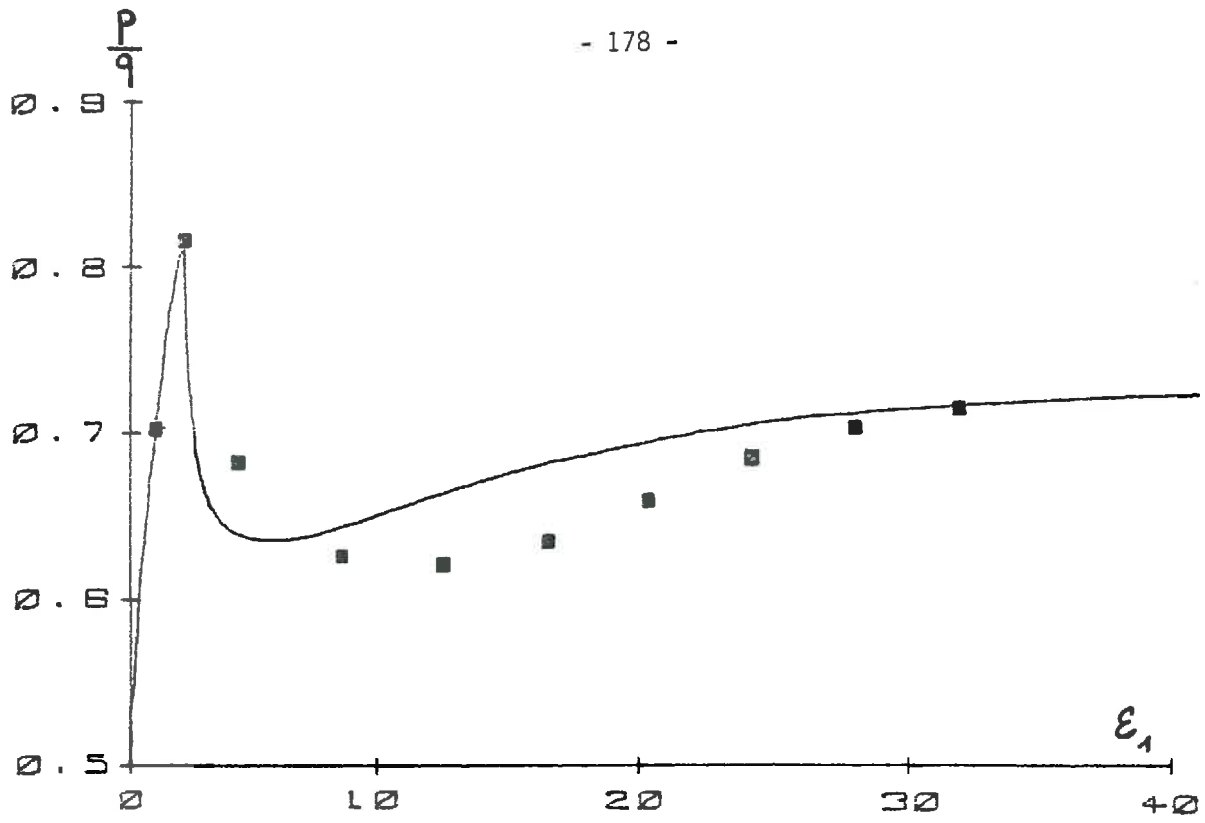


FIGURE II.17

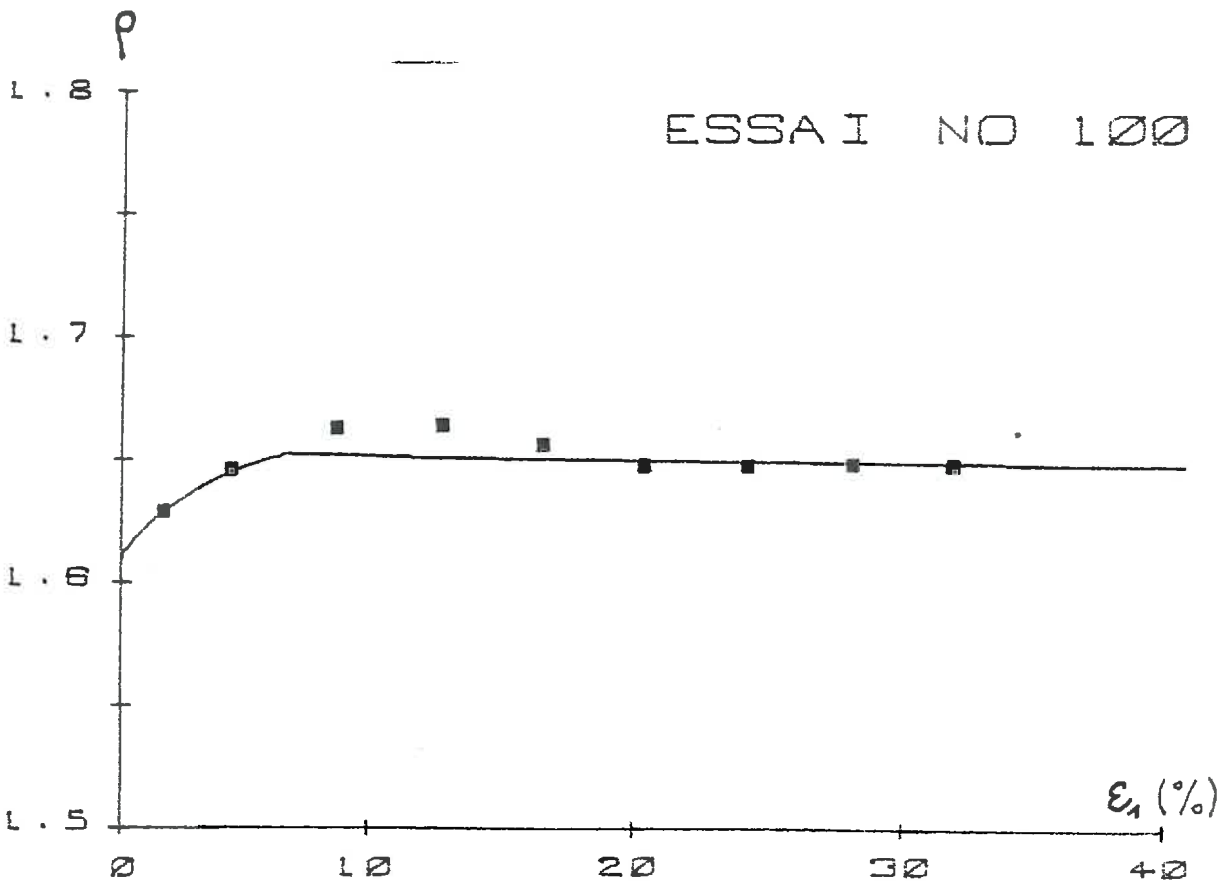
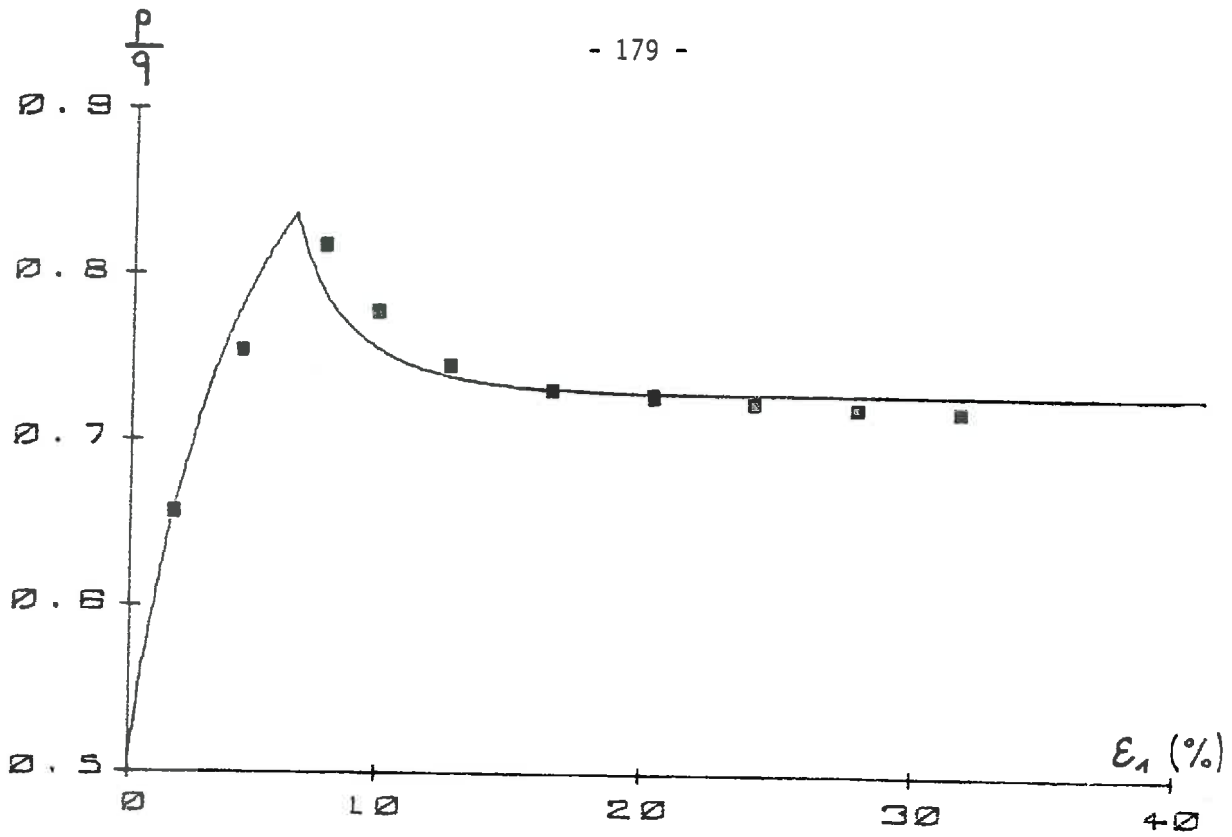
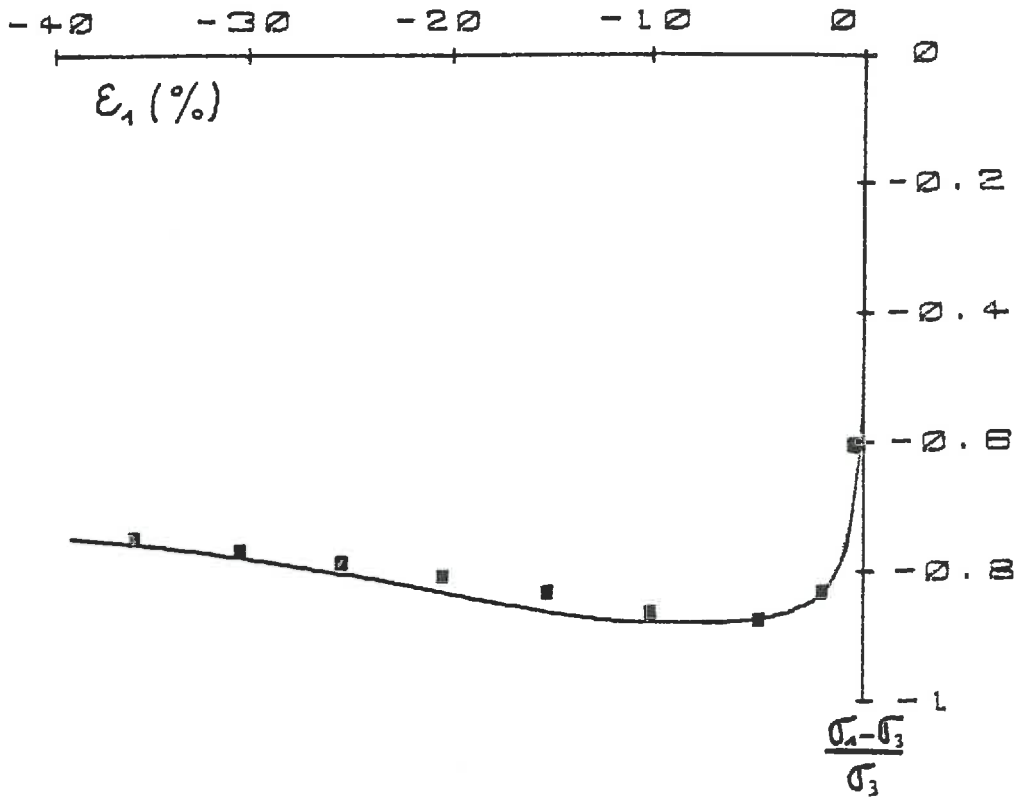


FIGURE II.10



ESSAI NO 67

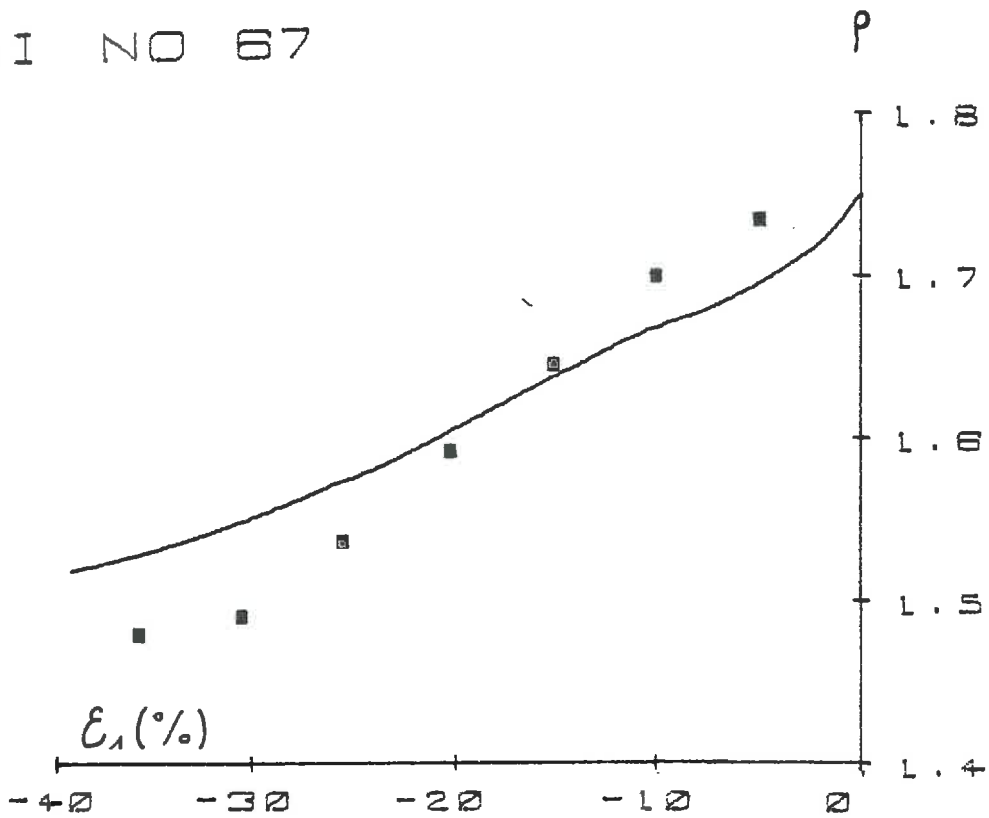
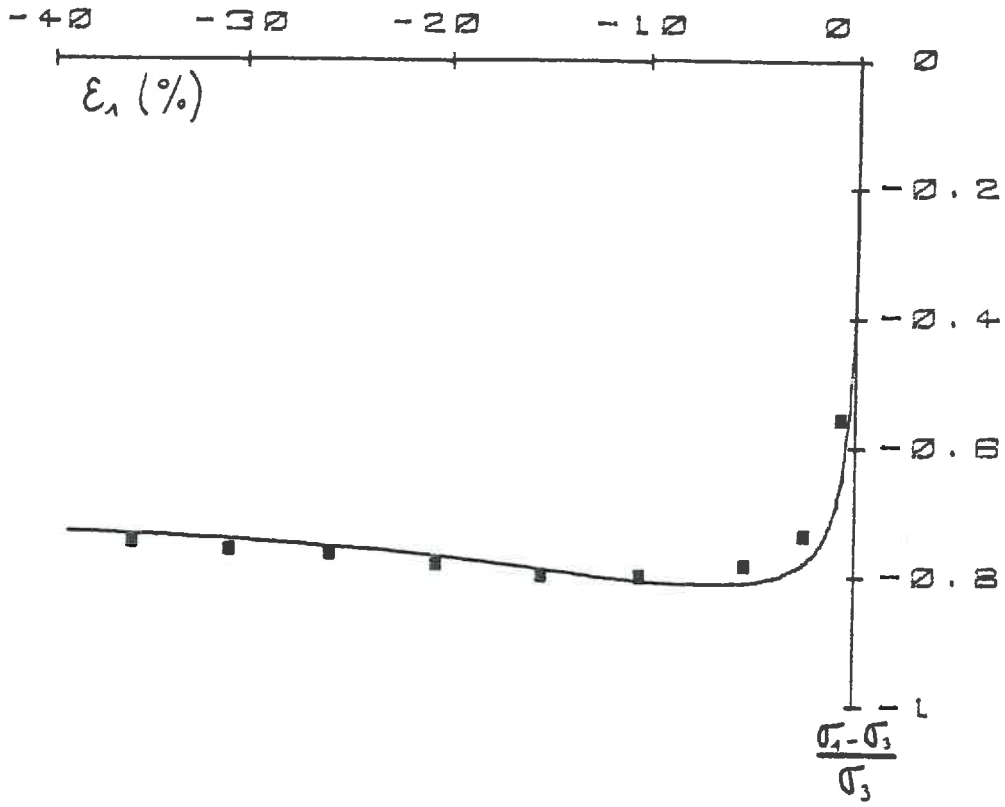


FIGURE II 19



ESSAI NO 66

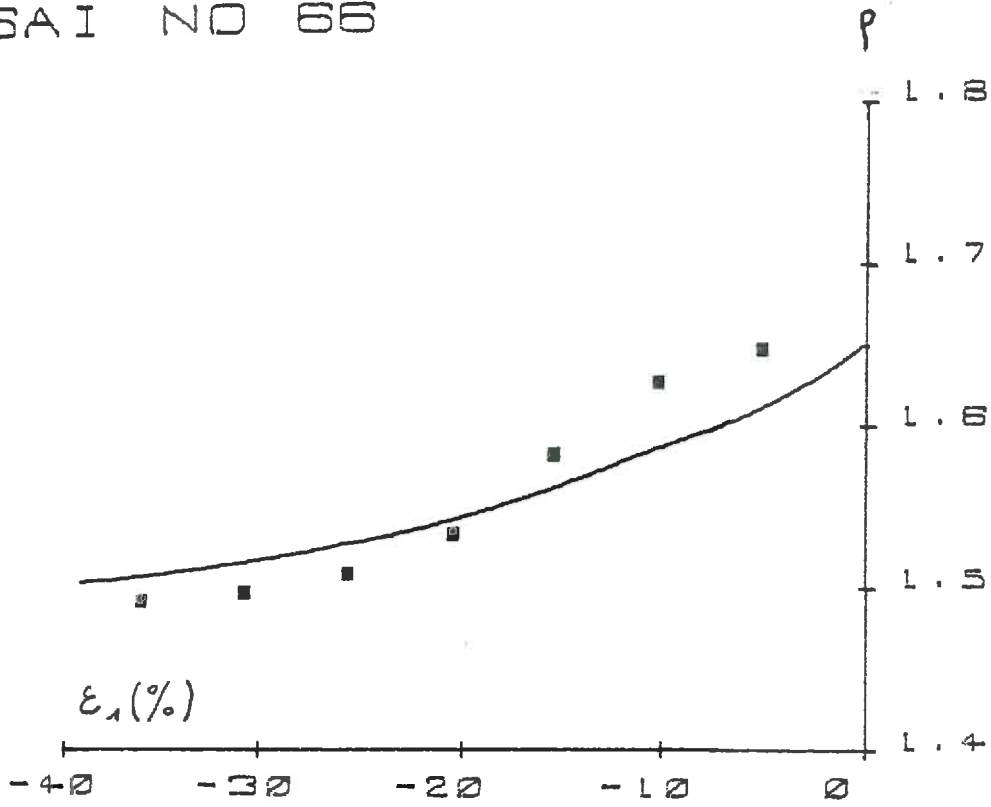
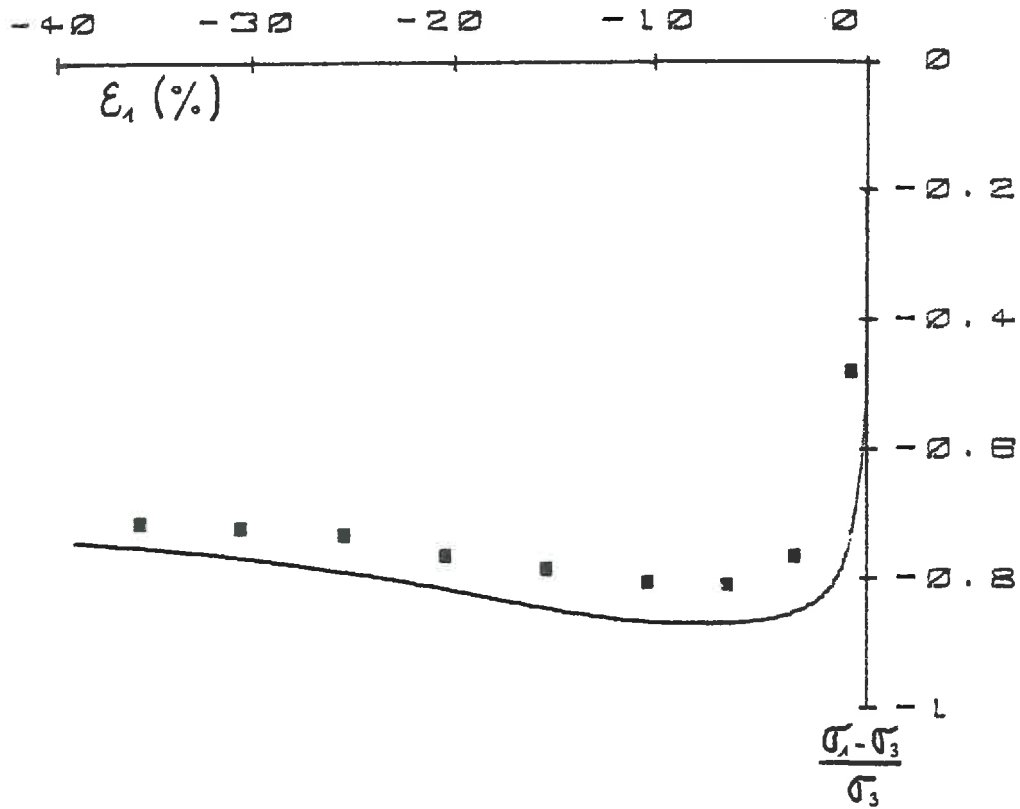


FIGURE II.20



ESSAI NO 68

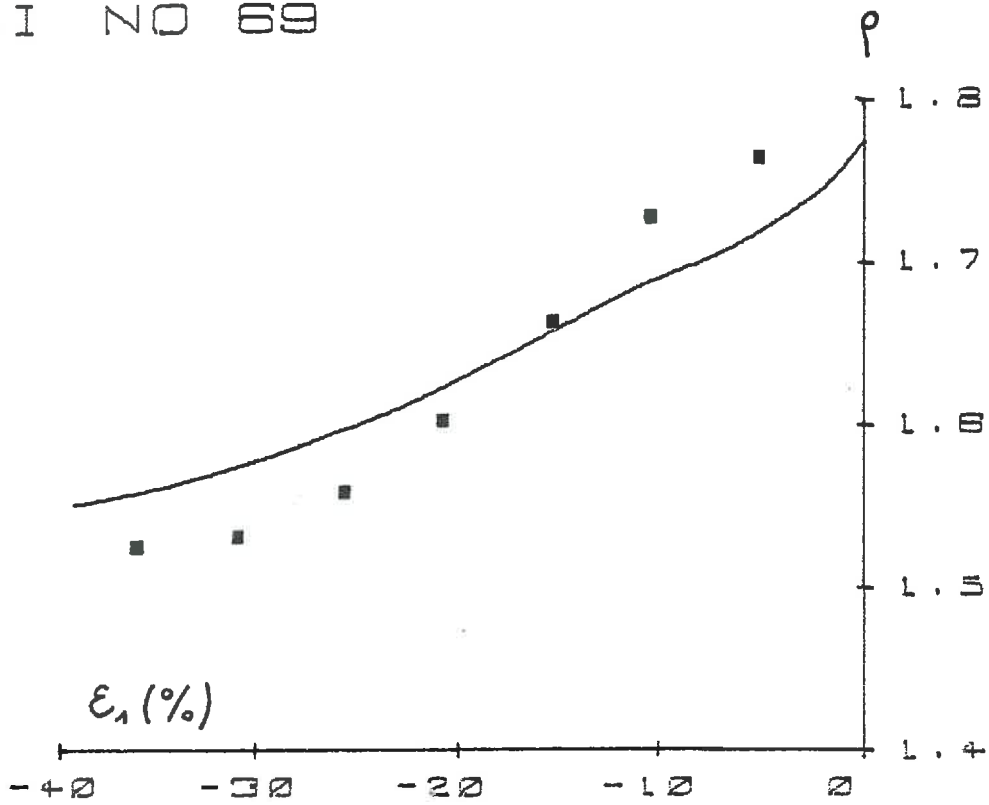
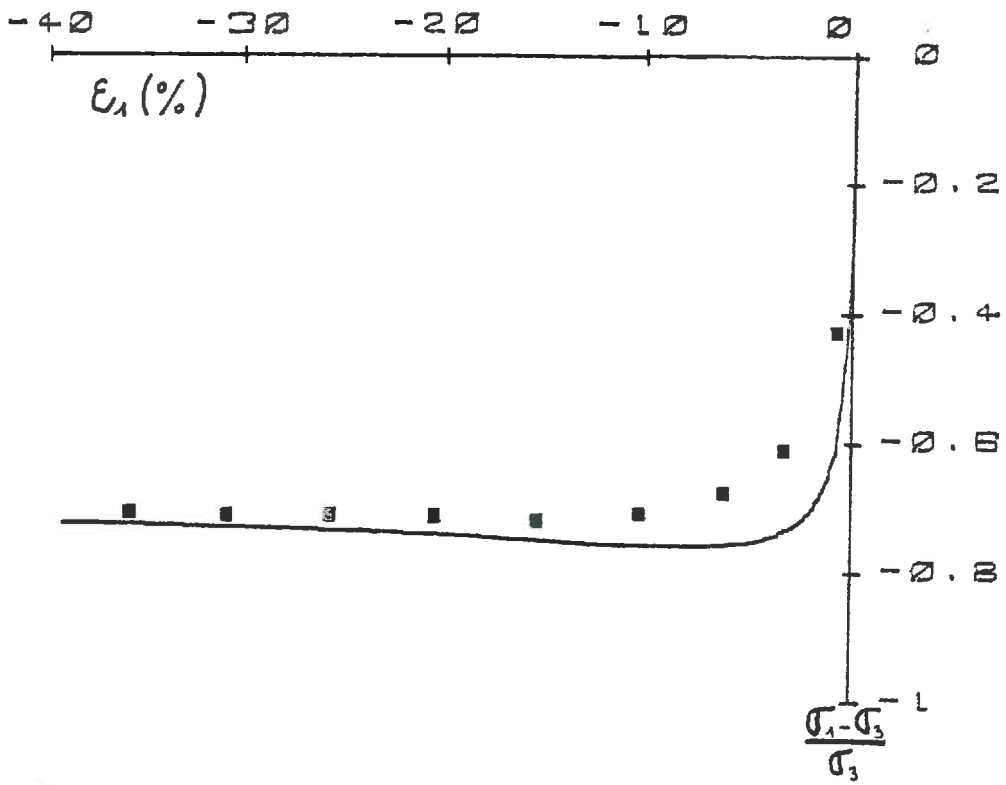


FIGURE II.21



ESSAI NO 68

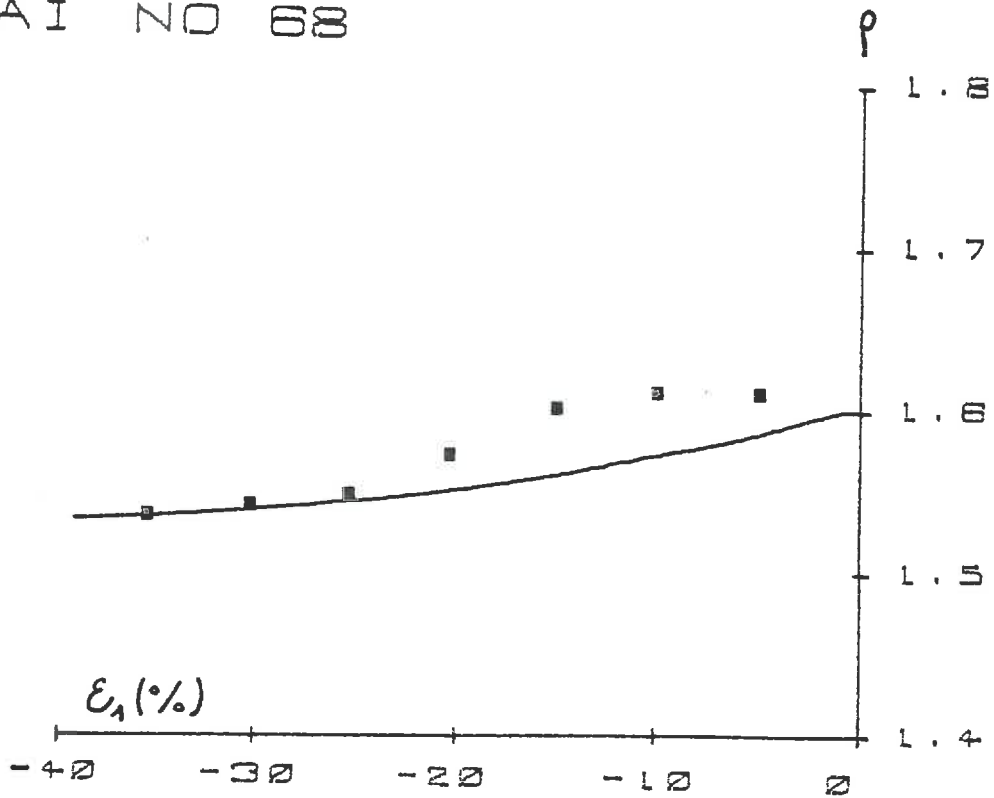


FIGURE II.22

excepté pour l'essai 97, qui aboutit à une densité-limite sensiblement plus faible que la valeur théorique.

Quant aux essais d'extension, on ne pouvait pas espérer les identifier de façon très convenable, puisque, d'une part les résultats expérimentaux ne sont pas très fiables (cf. 1ère Partie, Chapitre D), d'autre part, pour le calage de la loi, on ne s'est pas préoccupé du comportement en extension, sauf lors de la détermination du coefficient α_2 , qui varie avec la phase de l'état de contrainte. Pourtant l'évolution de la contrainte est assez bien représentée, en particulier pour les essais denses, bien que les modules tangents initiaux théoriques soient toujours trop grands. En ce qui concerne la densité, la comparaison n'est guère satisfaisante. Le modèle prévoit une forte dilatance initiale, suivie d'une descente plus douce vers le palier, alors que, sur les courbes expérimentales, la densité est stable pendant les premiers % de déformation puis descend assez vite au niveau de la densité-limite.

Rappelons que les courbes expérimentales ont été tracées en supposant que la déformation locale dans la zone de striction est égale à deux fois la déformation axiale totale. Cette hypothèse, qui semble assez bien vérifiée en grande déformation, est probablement fautive en début d'essai. Pour obtenir des courbes relatives au comportement réel du matériau, donc vraiment identifiables, il faudrait disposer de moyens expérimentaux permettant une mesure précise de la déformation locale. Nous n'avons donc pas essayé d'améliorer les identifications des essais d'extension en faisant varier certains coefficients avec la phase de l'état de contrainte.

CONCLUSION

Ainsi, grâce à une technique de mesure permettant d'obtenir des informations locales, et des conditions expérimentales assurant l'homogénéité des échantillons jusqu'à 40 % de déformation, on a pu mettre clairement en évidence l'existence d'un écoulement plastique en grande déformation, à contraintes et densité constantes, pour différents trajets de chargement. Les essais cycliques ont montré qu'un seuil de contrainte caractérise le changement de comportement du matériau, et que les écrouissages plastiques en compression et en extension créent des anisotropies de structure qui déterminent le comportement aux changements de sens de la déformation. On a réussi, avec un modèle hypoélastique, à identifier correctement tous les essais monotones, depuis les petites déformations jusqu'à l'écoulement plastique.

Du point de vue expérimental, il est évident qu'on ne peut plus se contenter d'essais triaxiaux en symétrie de révolution. Des essais plus complexes doivent être entrepris : la presse tridimensionnelle, avec un système de régulation très perfectionné, permet d'envisager de tels essais, même si on ne peut espérer obtenir des informations totalement satisfaisantes en très grandes déformations, puisqu'on n'est plus sûr de l'homogénéité de l'échantillon et puisque les mesures effectuées ne sont pas des mesures locales. On pourra ainsi étudier l'influence de la phase de l'état de contrainte, qui semble un facteur important puisque l'on n'a pas trouvé le même diagramme limite en compression et en extension.

Il sera alors possible d'adapter notre modèle pour qu'il décrive trajets plus complexes dans l'espace des contraintes. En ce qui concerne les trajets cycliques classiques il semble que l'on puisse espérer d'ors et déjà les représenter convenablement, avec la formulation actuelle.

Mais n'oublions pas que cette étude a été effectuée uniquement sur le sable d'Hostun. Il est important de tester le modèle sur un autre sable, ayant des caractéristiques différentes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 AUBRY P. : "Détermination expérimentale des paramètres de la loi rhéologique incrémentale d'un milieu pulvérulent".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1974.
- 2 BAZANT : "Endochronic constitutive law for liquefaction of sand".
Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., April 1976.
- 3 BISHOP A.W. & GREEN A.E. : "The influence of end restraint on the compression strength of a cohesionless soil".
Geotechnique, 15 n°3, 1965.
- 4 CASSAGRANDE A. : "Characteristics of cohesionless soil affecting the stability of slopes and earth fills".
Contributions to soil mechanics 1925-1940, Boston Society of Civil Engineers, October 1940.
- 5 CHAMBON R. : "Contribution à la simulation numérique non-linéaire des sols".
Thèse d'Etat, Grenoble, 1981.
- 6 DAVIS R.O. & MULLENGER G. : "A rate type constitutive model for soil with a critical state".
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 3, 1979.
- 7 DARVE F. : "Contribution à la détermination de la loi rhéologique incrémentale des sols".
Thèse d'Etat, Grenoble, 1974.
- 8 DARVE F. : "Loi rhéologique incrémentale non-linéaire et sollicitation cyclique sur les sols".
Journée de Rhéologie 1980, ENTPE Lyon.
- 9 DARVE F., DESRUES J. & JACQUET M. : "Les surfaces de rupture en mécanique des sols en tant qu'instabilité de déformation".
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, Vol. 5, 1980.

- 10 GEUZE E.C. : "Critical density of some dutch sands".
Second International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, 1948.
- 11 GREEN A.E. : "Hypoelasticity and plasticity".
Proceedings of the Royal Society, London, 1956.
- 12 GUDEHUS G. & KOLYMBAS D. : "A constitutive law of the rate type for soils".
Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 1979.
- 13 KIRKPATRICK W.M. : "Discussion on soil properties and their measurement".
Fifth International Conference on Soils Mechanics and Foundation Engineering, III, Paris, 1961.
- 14 KIRKPATRICK W.M. & BELSHAW D.J. : "On the interpretation of the triaxial test".
Geotechnique, 18, 1968.
- 15 LADE P.V. : "Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces".
International Journal of Solids and Structures, Vol. 13, 1977.
- 16 LADE P.V. & DUNCAN J.M. : "Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil".
Journal of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E., GT 10, octobre 1975.
- 17 LANIER J. : "Déformation d'un échantillon de sable sur chemins de contrainte isotropes et triaxiaux de révolution : influence de l'histoire".
A paraître.
- 18 LANIER J. : "Etude d'une loi de comportement pour des matériaux non visqueux".
Journal de Mécanique, Vol. 18 n° 1, 1979.
- 19 LORET B. : "Formulation d'une loi de comportement élastoplastique des milieux granulaires".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris, 1981.

- 20 LUONG M.P. : "Stress-strain aspects of cohesionless soils under cyclic and transient loading".
International symposium on "Soil under cyclic and transient loading",
Swansea, 1980.
- 21 MROZ Z., NORRIS V.A. & ZIENKIEWICZ O.C. : "An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading".
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 2, 1978.
- 22 NOVA R. & WOOD D.M. : "A constitutive model for sand in triaxial compression".
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 3, 1979.
- 23 PIPKIN & RIVLIN : "Mechanics of rate independent materials".
Z.A.M.P., Vol. 16, 1965.
- 24 ROBINET J.C. : "Loi rhéologique en écriture incrémentale. Application aux sols et au béton".
Thèse d'Etat, Grenoble, 1980.
- 25 ROMANO M. : "A continuum theory for granular media with a critical state".
Archives of Mechanics, Vol. 26 n° 6, 1974.
- 26 ROSCOE K.H. : "Principal axes observed during simple shear of sand".
Proceedings of the Geotechnical Conference, Oslo, 1967.
- 27 ROSCOE, SCHOFIELD & WROTH : "On the yielding of soils".
Geotechnique, 9, 1958.
- 28 SANDLER Y.S., DI MAGGIO F.L. & BALADI G.Y. : "Generalized Cap Model for Geological Materials".
Journal of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E., GT 7,
(July 1976).
- 29 STUTZ P. : "Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents".
Thèse d'Etat, Grenoble, 1972.

- 30 STUTZ P. : "Comportement élastoplastique des milieux pulvérulents".
Séminaire "Plasticité et Viscoélasticité", 1972.
- 31 SIDANER J.F. : "Comportement cyclique et transitoire des milieux pulvérulents".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris, 1981.
- 32 TERRIEZ J.M. : "Sur l'identification optimale des lois de comportement élasto-
plastiques isotropes".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1974.
- 33 THANOPOULOS I. : "Contribution à l'étude du comportement cyclique des milieux
pulvérulents".
Thèse de Docteur-Ingénieur, Grenoble, 1981.
- 34 TRUESDELL C. : "Hypoelasticity".
Journal of Rational Mech. Anal., Vol. 4, 1955.
- 35 VALANIS K. : "A theory of viscoplasticity without a yield surface".
Archives of Mechanics, Vol. 23, 1971.
- 36 VAN EEKENLEN H.A.M. : "Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in
soil mechanics".
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geo-
mechanics, Vol. 4, 1980.
- 37 WACK B. : "Mesures par radioactivité en Mécanique des Sols".
Thèse d'Etat, Grenoble, 1968.
- 38 YAMADA S.E. & ABOU SAYED A.S. : "Cap model guided by energy concept".
Journal of the Geotechnical Engineering Division A.S.C.E., GT 7,
July 1976.
- 39 VARDOULAKIS, GOLDSCHIEDER & GUDEHUS : "Formation of shear bands in sand bodies
as a bifurcation problem".
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geo-
technics, Vol. 2, 1978.
- 40 ROWE & BARDEN : "Importance of free ends in triaxial testings".
Proceedings A.S.C.E., 1964.

- 41 WACK B. : "Détermination expérimentale de la densité d'un sable à l'état de plasticité. Influence de la pression latérale sur la densité-limite.
Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Septembre 1965.
- 42 WACK B. : "Performance de la plateforme de mesure "phogadense".
Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, octobre 1967.