

T H E S E

Présentée  
à la Faculté des Sciences de l'Université  
de Grenoble

Pour obtenir le Grade de Docteur de Spécialités  
(Troisième Cycle Mécanique des Solides)

par

Daniel PONCET-MONTANGE

Licencié ès-Sciences

—————  
"ÉTUDE DE LA LOCOMOTION TOUTS TERRAINS

—————  
"ÉVOLUTION DES ROUES RIGIDES SUR UN MILIEU PULVERULENT  
ET SUR UNE ARGILE SATURÉE"

—————  
Soutenue le 26 Novembre 1965, devant la Commission d'Examen

MM. SARTON

Président

ANGÈLES d'AURIAC

Examinateurs

BIAREZ

—————  
GRENOBLE

TH-  
GCL1

26 FEV. 1976

## INTRODUCTION

L'étude de la locomotion tous terrains peut être abordée sous différents angles qui varient avec le but à atteindre.

Le problème fondamental demeure cependant de prévoir la possibilité de passage ou de non passage d'un véhicule sur un terrain donné.

A ce titre, les recherches effectuées depuis quelques années au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de GRIGNOLE, ont porté sur les roues rigides en milieu à deux dimensions, puis sur le sable, à trois dimensions. Enfin, nous avons commencé à expérimenter sur une argile saturée. Ainsi ont été étudiés les deux milieux importants en Mécanique des Sols, le milieu pulvérulent et le milieu à angle de frottement apparent nul mais à cohésion quelconque.

Les recherches sur la locomotion à deux dimensions ont été facilitées par l'existence de méthodes approchées de calculs en plasticité parfaite. Mais, lorsqu'on aborde le problème à trois dimensions on ne dispose pas d'une base aussi solide. Aussi, avons-nous été amenés à essayer d'étendre à 3 dimensions les calculs faits à 2 dimensions. Les résultats obtenus permettent de donner un ordre de grandeur précieux dans un domaine peu connu. En effet, le fait de ne pouvoir observer que des déformations superficielles du sol sous une roue, facilitent peu l'élaboration d'une théorie. Aussi, avons-nous dû envisager la construction d'appareils de mesures des contraintes sur une roue rigide. Une exploration systématique de leur répartition devrait permettre une meilleure connaissance des phénomènes observés.

SOMMAIRE

Dans un premier chapitre, nous rappelons les données expérimentales de la locomotion à deux dimensions en distinguant roue tractée et roue motrice. Puis, en utilisant les hypothèses suggérées par l'observation des déformations du milieu pulvérulent à deux dimensions, nous donnons des abaques qui permettent de calculer pour une roue tractée de dimensions quelconques évoluant sur un milieu pulvérulent à angle de frottement interne quelconque, la force de traction et l'enfoncement, lorsqu'elle se meut à faible vitesse en régime permanent. De même, nous fournissons pour une roue motrice le couple et l'enfoncement dans les mêmes conditions. Nous donnons en annexe de nombreux exemples de répartition des contraintes qui découlent de ces calculs.

- Le chapitre II est consacré au milieu pulvérulent à trois dimensions ; nous y étudions l'influence des dimensions d'une roue motrice sur ses performances. Pour le milieu étudié ( $c = 0$ ,  $\beta = 35^\circ$ ,  $\gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ ), l'arc de contact roue-sol est proportionnel à la racine carrée de  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$ ,  $Q$  étant la charge verticale,  $r$  le rayon de la roue,  $L$  sa largeur. A partir de ces données, nous obtenons une méthode de calcul de l'enfoncement d'une roue motrice dans un milieu pulvérulent quelconque.

- Nous avons abordé dans le troisième chapitre l'étude des roues motrices et tractées sur une argile saturée ( $c = 49 \text{ g/cm}^2$ ,  $\beta = 0$ ).

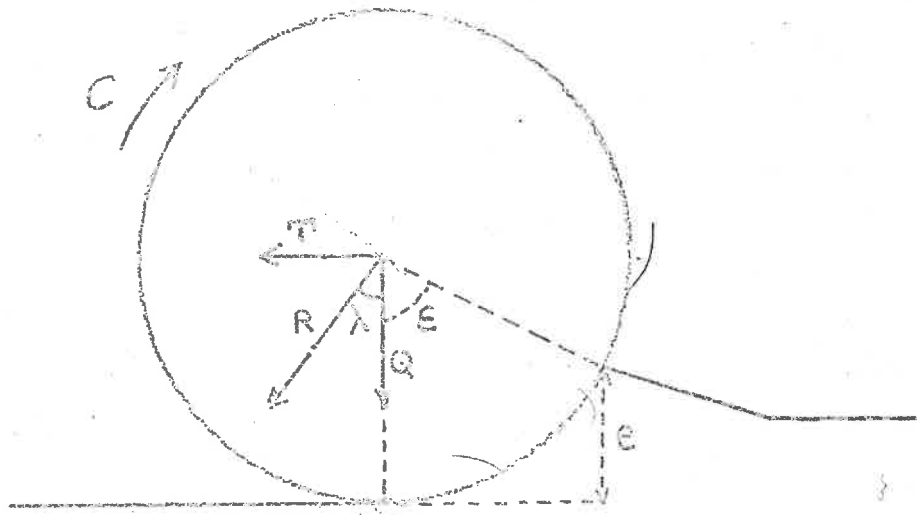
L'expérience montre que la force de traction est proportionnelle à la charge verticale.

Dans le cas d'une roue motrice la charge verticale varie linéairement, pour une largeur donnée de la roue, avec la longueur de l'arc de contact.

- Dans une dernière partie (Chapitre IV), nous exposons la réalisation d'un appareil simple de mesure des contraintes à deux dimensions. Puis, nous donnons les plans d'un dispositif plus perfectionné qui peut permettre de déterminer les trois composantes d'une contrainte sur une petite surface.

Dans chaque cas particulier nous avons donné les valeurs des forces portantes limites des roues correspondant à un enfoncement de  $\frac{r}{2}$  et de  $r$ .

NOTATIONS



- $\phi$  : angle de frottement du matériau,
- $\gamma$  : poids spécifique du matériau,
- $r$  : rayon de la roue,
- $b$  : largeur de la roue,
- $Q$  : effort vertical sur l'axe de la roue,
- $T$  : effort horizontal sur l'axe de la roue,
- $R$  : résultante des efforts sur l'axe de la roue,
- $\lambda$  : inclinaison sur la verticale de la résultante  $R$ ,
- $e$  : enfoncement de la roue,
- $\epsilon$  : angle de contact roue-sol.

CHAPITRE I

CALCUL DES ROUES TRACTEES OU MOTRICES  
EN MILIEU PULVERULENT A DEUX DIMENSIONS

Les précédentes recherches sur les roues rigides circulant sur un milieu pulvérulent à deux dimensions constitué par un empilement de cylindres de duraluminium (modèle dû à G. SCHNEEBELI) ont permis d'observer directement les déformations du milieu. DUPERRIN [1] et OBERTI [2] ont expérimenté sur un empilement de 1,50 m de long et 1,00 m de haut. Les cylindres, d'une longueur de 6 cm, comportaient un poids égal de rouleaux de 3 mm de diamètre et de 5 mm de diamètre. Les dimensions du bâti n'ont permis d'étudier que le démarrage des roues de petit diamètre. De plus, les cylindres à section circulaire étant cause du glissement important des roues, BOUCHERIE [3] pour l'étude du régime permanent a été amené à agrandir le modèle et à modifier la composition du milieu pulvérulent.

Le nouveau bâti avait 5 m de long et 60 cm de haut. Le mélange de rouleaux se présentait ainsi :

- 23 % en poids de rouleaux de section circulaire, diamètre 3 mm
- 44 % en poids de rouleaux de section circulaire, diamètre 5 mm
- 11 % en poids de rouleaux de section rectangulaire 3 x 2 mm<sup>2</sup>,
- 22 % en poids de rouleaux de section rectangulaire 6 x 3,5 mm<sup>2</sup>.

En prenant le milieu de cette courbe entre E, F et G, l'angle de frottement interne déterminé par le cercle tangentiel était de  $26^\circ$  en prenant le milieu de la courbe de densité et de  $28^\circ$  en prenant le milieu de cette courbe.

Les roues de bois étaient de deux sortes différentes :

- diamètre : 70 cm ; largeur : 6 cm ; poids : 5 kg.
- diamètre : 35 cm ; largeur : 6 cm ; poids : 2 kg.

Leur surface comportait des rainures de la dimension des rouleaux, perpendiculaires au plan de la roue de manière à ce que l'angle de frottement roue-sol soit celui du sol.

Les observations de BOUCHERIE ont permis de proposer une méthode de calcul satisfaisante pour les roues évoluant sur le milieu en question. Nous avons continué et étendu ces calculs de manière à donner sous forme pratique :

- la force de traction et l'enfoncement d'une roue rigide tractée sur un milieu à deux dimensions d'angle de frottement interne et de densité quelconques, mais de cohésion nulle.

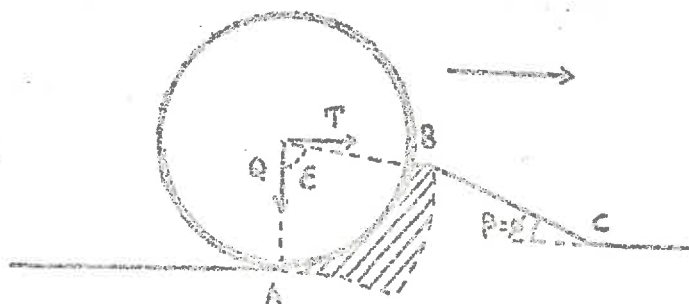
- le couple et l'enfoncement d'une roue rigide motrice sur un milieu d'angle de frottement interne et de densité quelconques mais de cohésion nulle.

Nous donnerons les conditions d'application de ces calculs en précisant les hypothèses sur lesquelles ils reposent.

1 - Roues tractées en milieu pulvérulent à deux dimensions.

a) Données expérimentales :

Lorsqu'on tracte une roue rigide chargée verticalement sur le milieu à deux dimensions précédemment défini ( $\gamma = 2,25 \text{ g/cm}^3$ ,  $\theta = 27^\circ$ ,  $c = 0$ ), on observe une vague à l'avant de la roue. Quand le régime permanent est atteint, c'est-à-dire lorsque forces, enfoncements, et déplacements ne dépendent plus du temps, on constate que la vague amont qui a alors une hauteur constante est inclinée de  $\theta = 27^\circ$  sur l'horizontale et qu'il existe un coin de sol solidaire de la roue dans son déplacement horizontal [4].



Ce coin, inexistant pour  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  petit, devient important pour  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  grand. Dans ce cas la roue tourne peu et subit presque uniquement un mouvement de translation horizontale.

L'enfoncement de la roue sera caractérisé par l'arc de contact  $\epsilon$  avec le sol. Les observations cinématiques montrent [4] qu'à la surface roue-sol les contraintes sont en moyenne normales et qu'il s'agit de contraintes principales majeures.

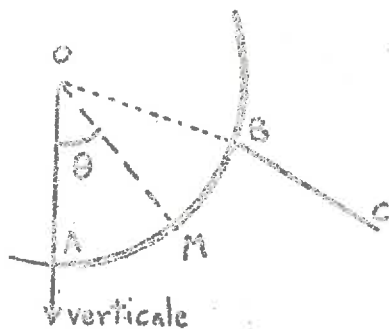


Cette hypothèse a déjà été formulée par plusieurs auteurs tels BERNSTEIN et DENKER.

Pour des roues de diamètres différents, les courbes donnant  $\frac{T}{Lr^2}$  et  $\epsilon$  en fonction de  $\frac{\delta}{\gamma \sin^2 \theta}$  coïncident approximativement. Donc, on peut penser, en généralisant, que pour des sols pulvérulents de même densité, et pour des roues de diamètres différents, chargées d'une manière quelconque,  $\frac{T}{\delta L r^2}$  et  $\epsilon$  ne dépendent que de l'angle de frottement.

D) Méthode de calcul :

Nous supposons :

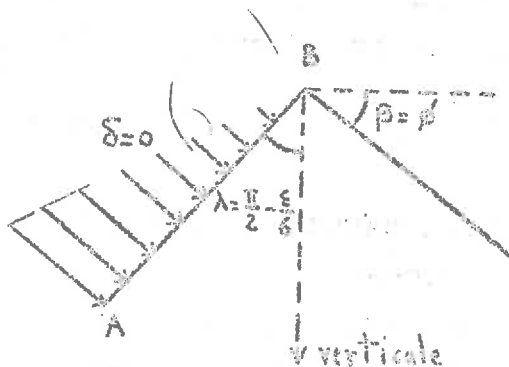


1°) que la zone aval ABC est mise en butée par l'écran circulaire AB.

2°) que les contraintes sont normales en tout point de l'arc AB.

3°) qu'en un point M de l'arc AB repéré par  $AOM = \theta$ , la contrainte est :

$$\sigma_M = b r |\overline{EM}| = b r (\epsilon - \theta)$$



$b$  étant le coefficient de butée relatif au dièdre ABC défini par :  $\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{\delta}$ ,  $\beta = \theta$  et avec  $\delta = 0$ .

La composante verticale de la contrainte est :

$$\sigma_{MV} = \gamma b r (\varepsilon - \theta) \cos \theta$$

La composante horizontale de la contrainte est :

$$\sigma_{MH} = \gamma b r (\varepsilon - \theta) \sin \theta$$

La résultante du système de forces due à l'action du sol sur la roue a donc comme composante verticale :

$$Q = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \gamma b r^2 (\varepsilon - \theta) \cos \theta d\theta$$

et comme composante horizontale :

$$T = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \gamma b r^2 (\varepsilon - \theta) \sin \theta d\theta$$

soit :

$$\frac{Q}{\gamma L r^2} = b(1 - \cos \varepsilon)$$

et :

$$\frac{T}{\gamma L r^2} = b(1 - \sin \varepsilon)$$

avec :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{T}{Q} = \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon}$$

Le graphique 1 représente la courbe théorique de variation de  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  en fonction de  $\varepsilon$  pour un angle de frottement de  $\beta = 27^\circ$  et les résultats expérimentaux. On voit que la concordance est bonne.

Le graphique 2 montre les courbes théoriques de variation de  $\frac{T}{\gamma L r^2}$  en fonction de  $\varepsilon$ .

c) Calcul de la force de traction et de l'enfoncement en milieu pulvérulent quelconque :

Au vu de ces résultats, nous avons tracé les courbes donnant  $\frac{Q}{\delta L r^2}$  et  $\frac{T}{\delta L r^2}$  en fonction de  $\xi$  pour des sols pulvérulents dont les angles de frottement sont 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40° (Figures 2 et 3).

Ces résultats restent évidemment à vérifier par l'expérience. Nous avons cependant la possibilité de répondre aux questions pratiques qui se posent quant à la traction d'une roue rigide, sur un terrain pulvérulent quelconque, de largeur suffisante pour que les déformations plastiques du sol se fassent parallèlement au plan de la roue.

Ainsi, par exemple : pour une roue de dimensions :

largeur : 17,4 cm

rayon : 33 cm

devant supporter une charge verticale de 100 kg et tractée sur un sable sec d'angle de frottement  $\phi = 40^\circ$  et de poids spécifique  $\delta = 2 \text{ g/cm}^3$ , nous pouvons donner l'enfoncement et la force de traction nécessaire pour la faire avancer à très faible vitesse en régime permanent :

On a :  $\frac{Q}{\delta L r^2} = 2,65$  la figure 3 nous donne  $\xi = 57^\circ$  et

la figure 2  $\frac{T}{\delta L r^2} = 0,37$  d'où :  $T = 22 \text{ kg}$ .

d) Détermination de la charge verticale limite compatible avec un enfoncement donné :

Au point de vue pratique, le problème fondamental de la locomotion tous terrains peut s'énoncer en ces termes : à partir de quelle charge verticale une roue ne pourra plus avancer sur un terrain donné ? Nous considérerons pour simplifier qu'une roue enfoncée de la moitié de son rayon commence à mettre le véhicule qu'elle supporte en difficulté ; nous avons alors tracé pour une roue tractée en régime permanent la force portante correspondant à un enfoncement de  $\frac{r}{2}$ , en fonction de l'angle de frottement interne du milieu pulvérulent. A titre d'indication, nous donnons dans les mêmes conditions la force portante correspondant à un enfoncement égal à  $r$  (Figure 4). Ce calcul semblerait montrer qu'au-delà de  $\frac{G}{\delta L r^2} = 5,25$  quel que soit le sable d'angle de frottement  $\phi$  inférieur à  $40^\circ$ , une roue est enfoncée jusqu'au moyeu.

2 - Roues motrices en milieu pulvérulent à deux dimensions.

Soit une roue rigide de dimensions quelconques chargée verticalement en son centre. Appliquons lui en outre un système de forces extérieures équivalent à un couple. Pour une valeur suffisante de ce couple, la roue va se mouvoir. Nous avons alors une roue motrice pure. Dans la pratique, même si toutes les roues d'un véhicule sont motrices, il existe toujours une interaction des roues entre elles. C'est-à-dire qu'une roue motrice peut être soumise de la part de celle qu'elle précède, à une force que nous supposerons horizontale. Nous avons donc à étudier le cas général d'une roue chargée verticalement et soumise à un système de forces équivalent à une force horizontale et à un couple. Autrement dit, la roue est soumise à un

Figure 1

Roue tractée à 2 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 27^\circ$ )

Variation de la charge verticale  $Q$  en fonction de l'angle de contact  $E$  avec le sol.

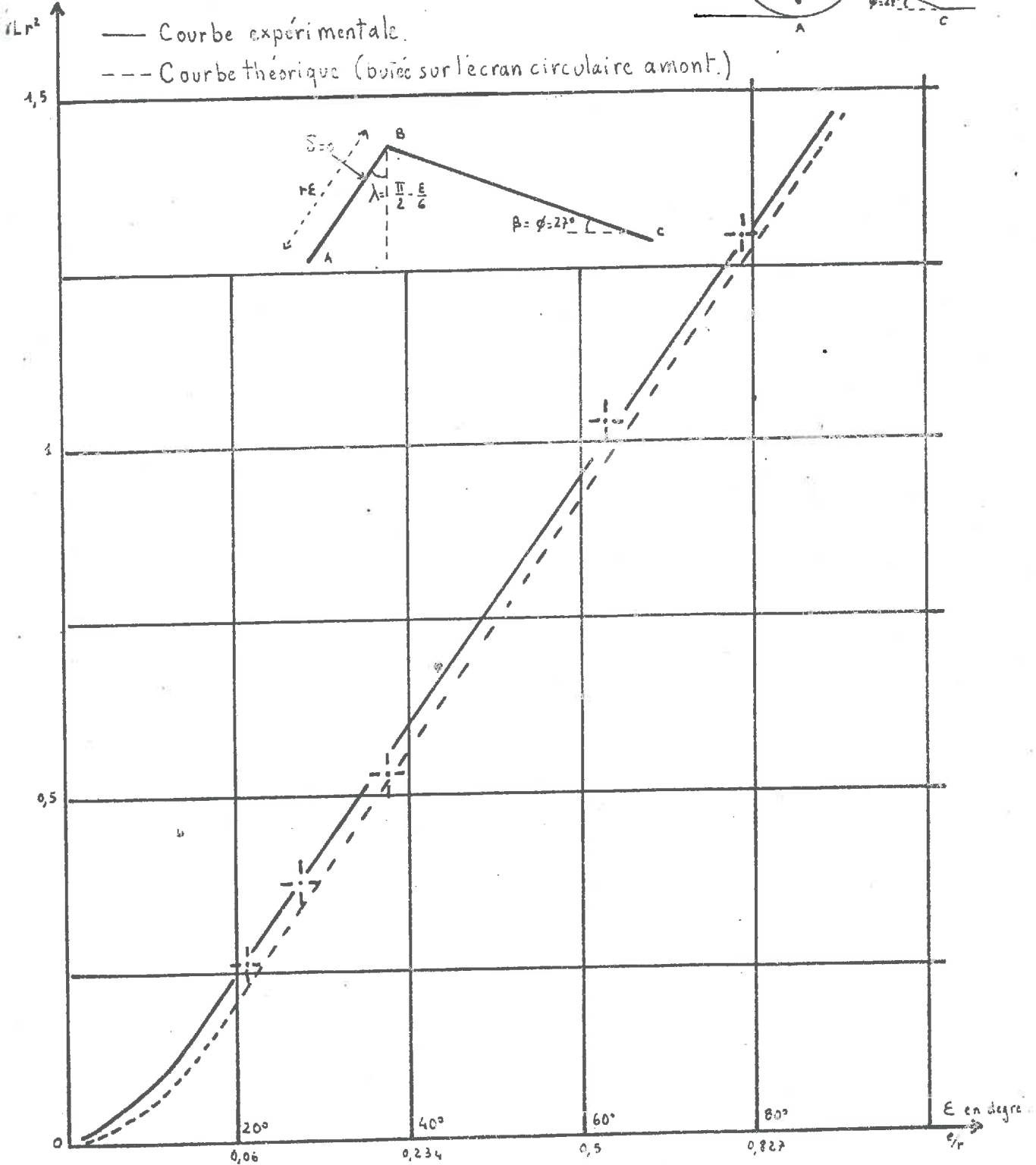
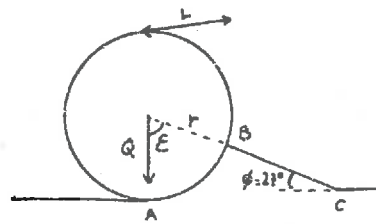


Figure 2

tractée à 2 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 27^\circ$ )

Variation de la force de traction  $T$  en fonction de l'angle de contact  $\epsilon$  avec le sol.

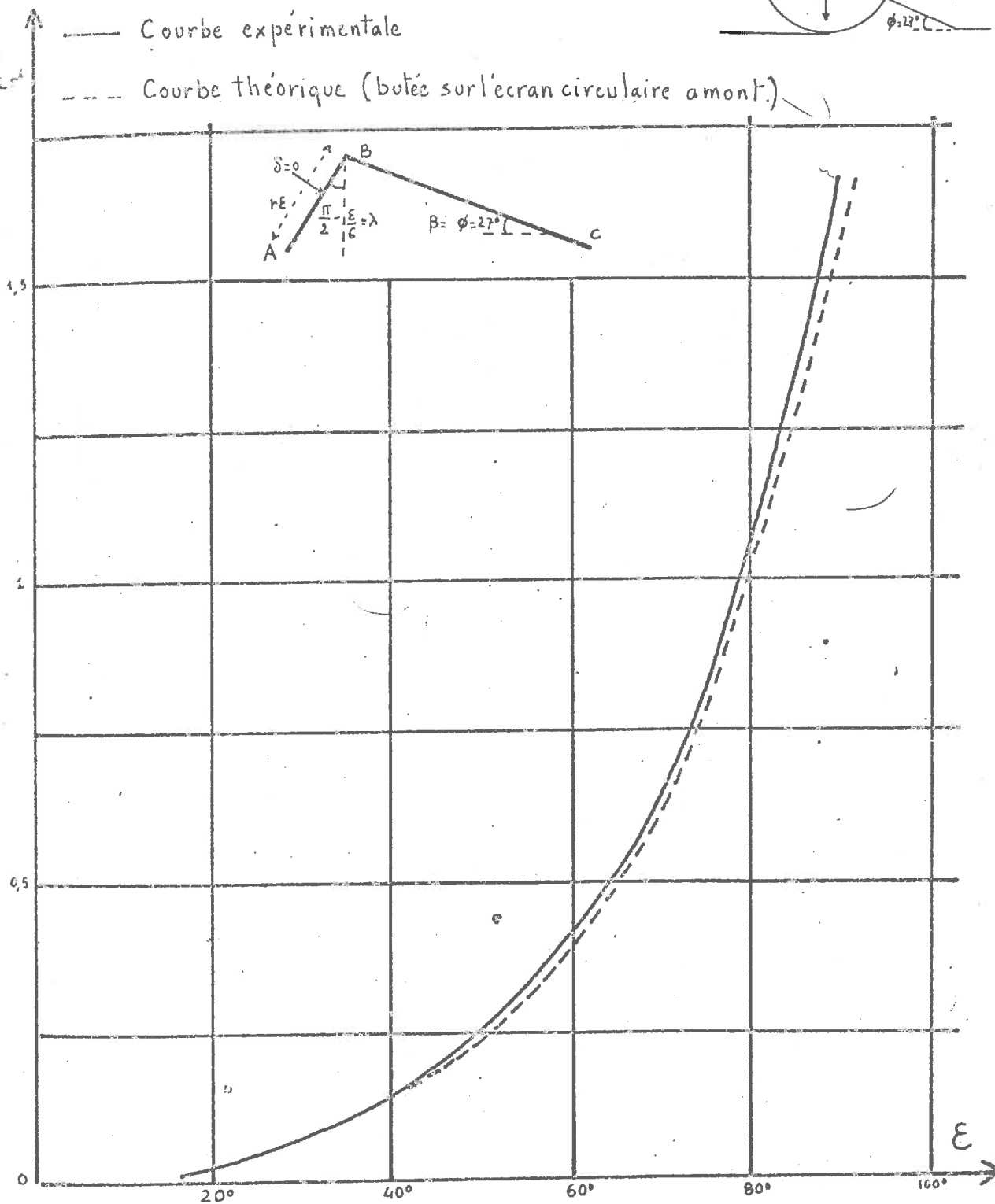
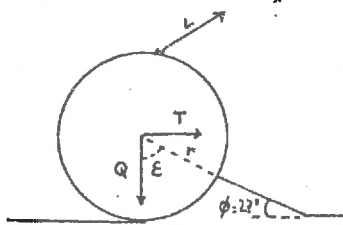
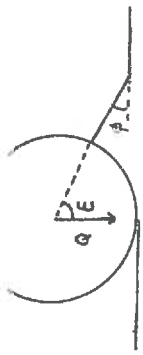
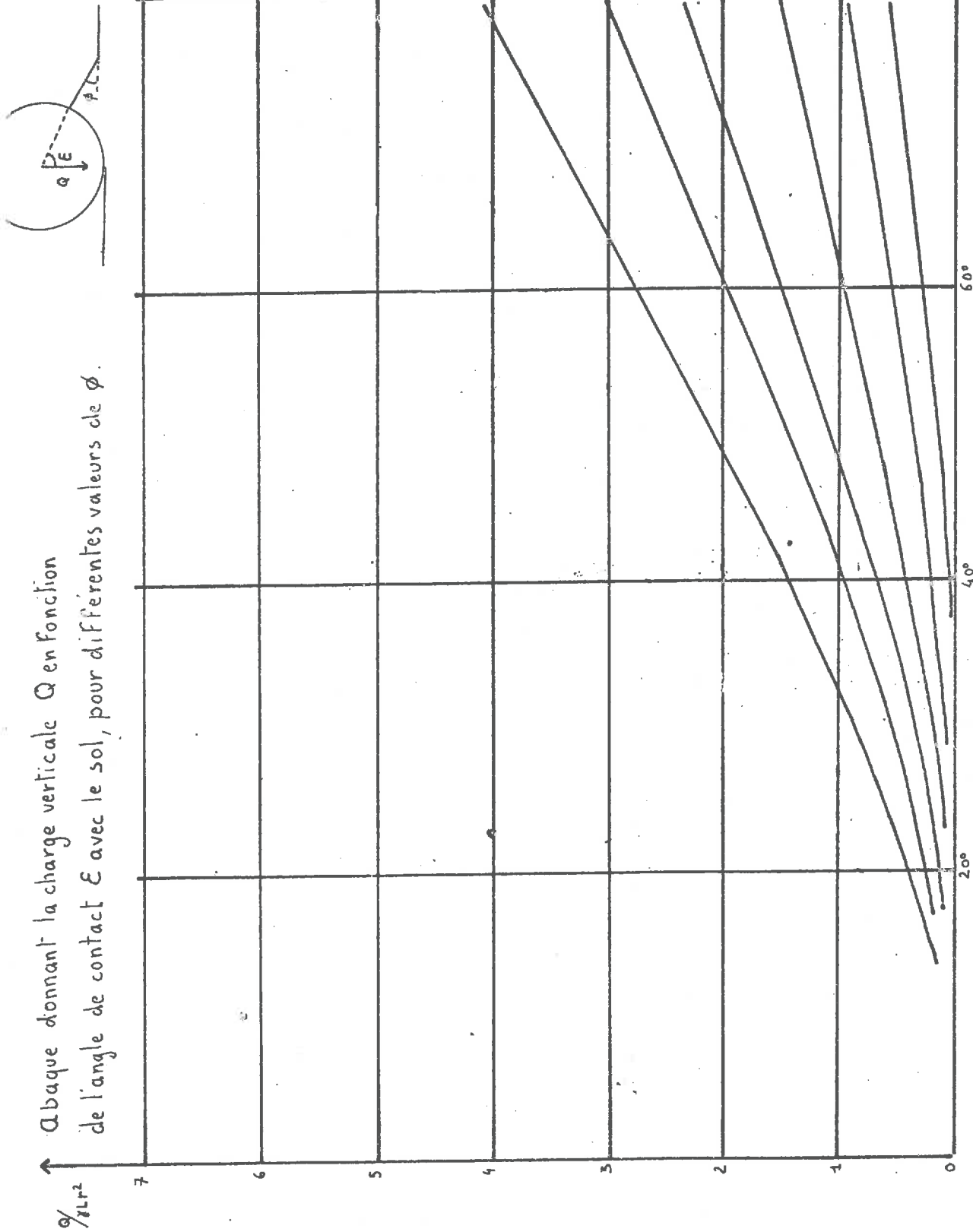


Figure 3

Abaque donnant la charge verticale  $Q$  en fonction de l'angle de contact  $\epsilon$  avec le sol, pour différentes valeurs de  $\phi$ .



ystème de forces, autres que celles dues à l'action du sol sur la roue, équivalent à une force  $R$  inclinée passant par son centre dirigée vers l'arrière et à un couple ; c'est ce que nous appellerons une roue motrice générale.

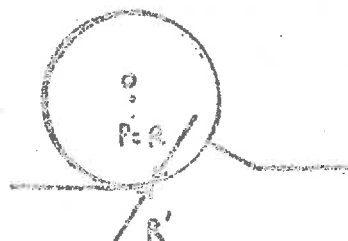


- Cas d'une roue motrice générale -

Ce système est encore équivalent à une force unique  $F$  égale à  $R$  appliquée à une distance  $d$  de  $O$  telle que  $Rd = C$ .

Ceci posé, en régime permanent, ce système de forces ne varie pas et si l'on néglige les forces d'inertie le système de toutes les forces extérieures (y compris maintenant celles dues à l'action du sol) est équivalent à zéro.

Le système des forces de contact sol-roue est donc équivalent à une force unique  $R'$  égale et opposée à  $F$ .



- Roue motrice en régime permanent -



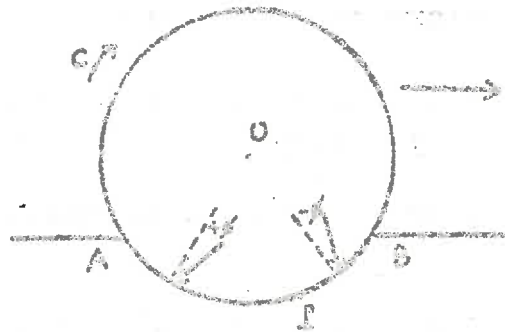
a) Données expérimentales :

L'étude cinématique des déformations d'un milieu à deux dimensions sous une zone motrice, réalisée au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble 5 , montre que :

1. Pour  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  faible et  $\text{tg } \lambda < 0,3$

2. Pour  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  grand

Le schéma de répartition des contraintes est à deux zones se raccordant en un point P :



- Sur MP les contraintes sont inclinées de  $-\beta$ , mais sont trop faibles pour mettre le sol en avant en plasticité.

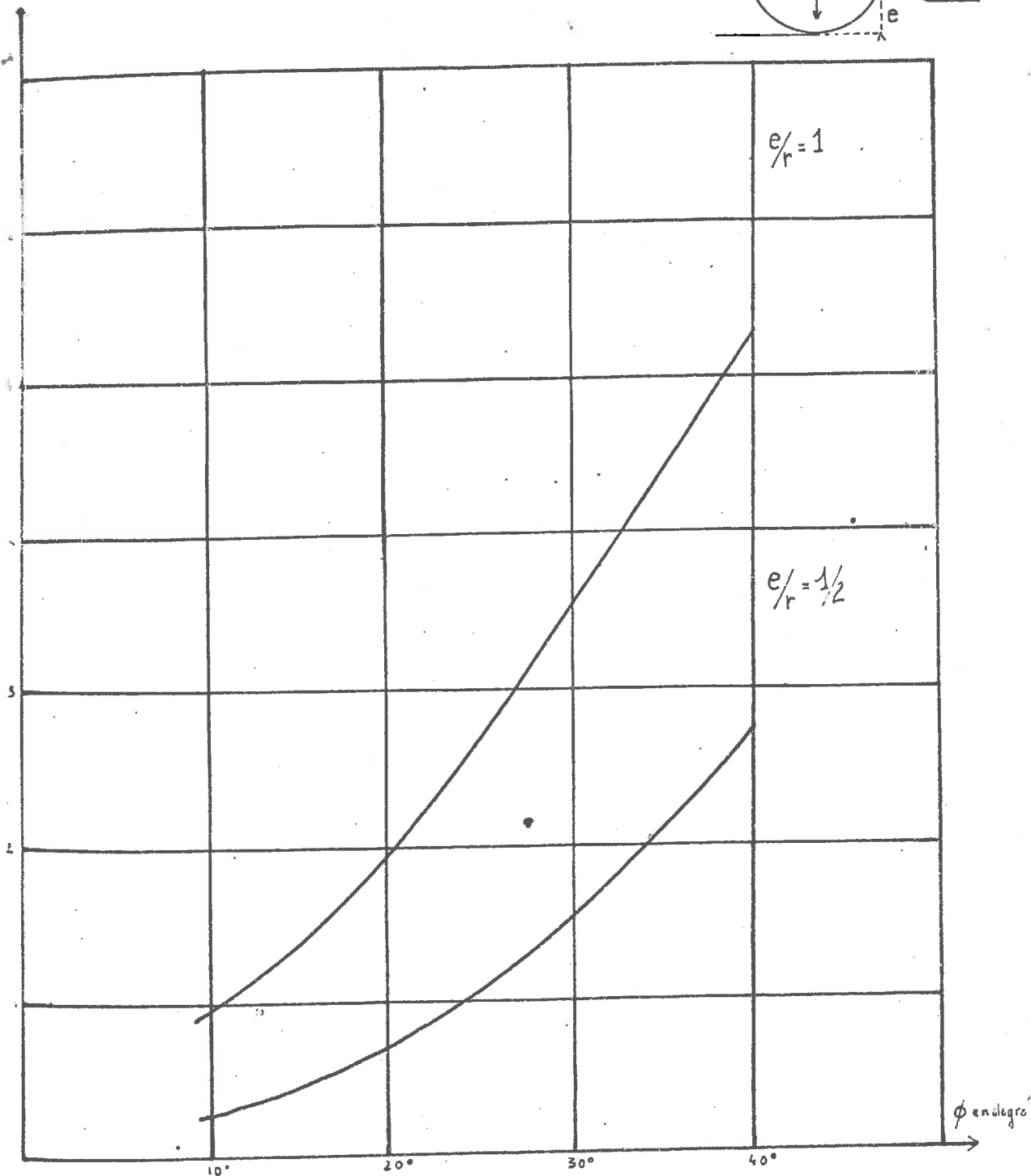
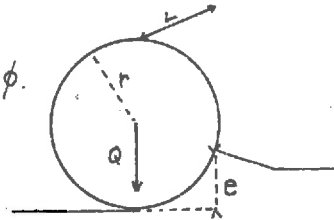
- Sur AP les contraintes sont inclinées de  $+\beta$ . Le long de AP existe une zone de déformation étroite approximativement circulaire et centrée en O. Nous pouvons admettre que AP est une ligne de glissement.

Ces observations sont la base du calcul qui va être développé. Auparavant, nous rappellerons les données statiques fournies par l'expérience.

Figure 4

Rose tracée à 2 dimensions sur matériau pulvérulent

Variation de la charge verticale limitée compatible avec un enfoncement  $e$  donné, en fonction de l'angle de frottement  $\phi$ .



On suppose :

- 1°) Une charge verticale  $Q$  constante,
- 2°) Une force de traction  $F$  horizontale constante,
- 3°) Une vitesse de rotation constante.

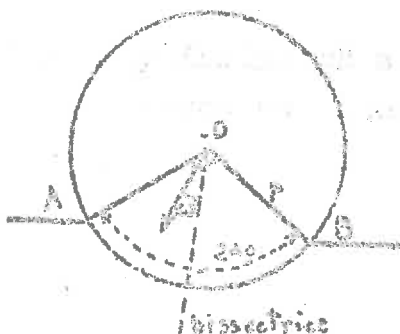
et, on mesure la valeur du couple  $C$  en régime permanent.

La résultante des efforts appliqués sur l'axe de la roue  $R$  était donc imposée en grandeur et en direction (repérée par l'angle  $\lambda$  qu'elle fait avec la verticale).

On constate alors que (Figure 5) :

- pour de faibles inclinaisons, les courbes tendent vers des droites passant par l'origine,
- pour  $\operatorname{tg} \lambda \geq 0,3$ , les courbes deviennent des droites passant par l'origine,
- pour une valeur donnée de la résultante, le couple croît avec l'inclinaison  $\lambda$ ,
- les courbes graduées en  $\frac{Q}{\sqrt{Lr^2}}$  tendent vers la même asymptote qui est la droite relative à l'inclinaison qui, quel que soit le couple, empêche la roue d'avancer.

Ces résultats ont été comparés avec ceux donnés par la méthode des talus [6] dont nous rappelons les formules :



Si les contraintes sur AB sont toutes inclinées de  $\beta$  le couple est compris entre deux valeurs :

$$C_{\text{minimum}} = R r \sin \beta$$
$$C_{\text{maximum}} = R r \sin \beta \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

On constate graphiquement que  $C_{\text{minimum}}$  peut donner un ordre de grandeur du couple nécessaire à l'avancement d'une roue, de charge inclinée R, sur un milieu pulvérulent à deux dimensions. Remarquons que les points expérimentaux situés en-dessous de la courbe donnée par  $C_{\text{minimum}}$  correspondent à des inclinaisons  $\lambda$  nulles et à de faibles excentricités  $e$  ( $C = aQ$ ). Il est donc raisonnable de penser que l'inclinaison des contraintes sous la roue n'atteint pas la valeur  $\phi$  ; les conditions d'existence du couple minimum ne sont alors pas réalisées.

Le couple minimum peut permettre, lorsqu'on se donne la charge appliquée à la roue, de calculer l'excentricité de la résultante par la formule :  $C = aQ$ . Ainsi, connaissant l'inclinaison  $\lambda$  de la résultante on peut déterminer l'enfoncement de la roue. Cette méthode a été appliquée par BOUCHERIE [7] en utilisant les travaux de HAERINGER [8] sur les forces portantes des fondations de surface en milieu pulvérulent.

En simplifiant les résultats, on peut admettre que pour une inclinaison donnée  $\lambda$  de la charge F, celle-ci passe par un maximum si elle est appliquée à la distance  $a_m$  du centre de la fondation :

$$\frac{a_m}{B} = \frac{1}{6} \frac{\lambda}{\phi}$$

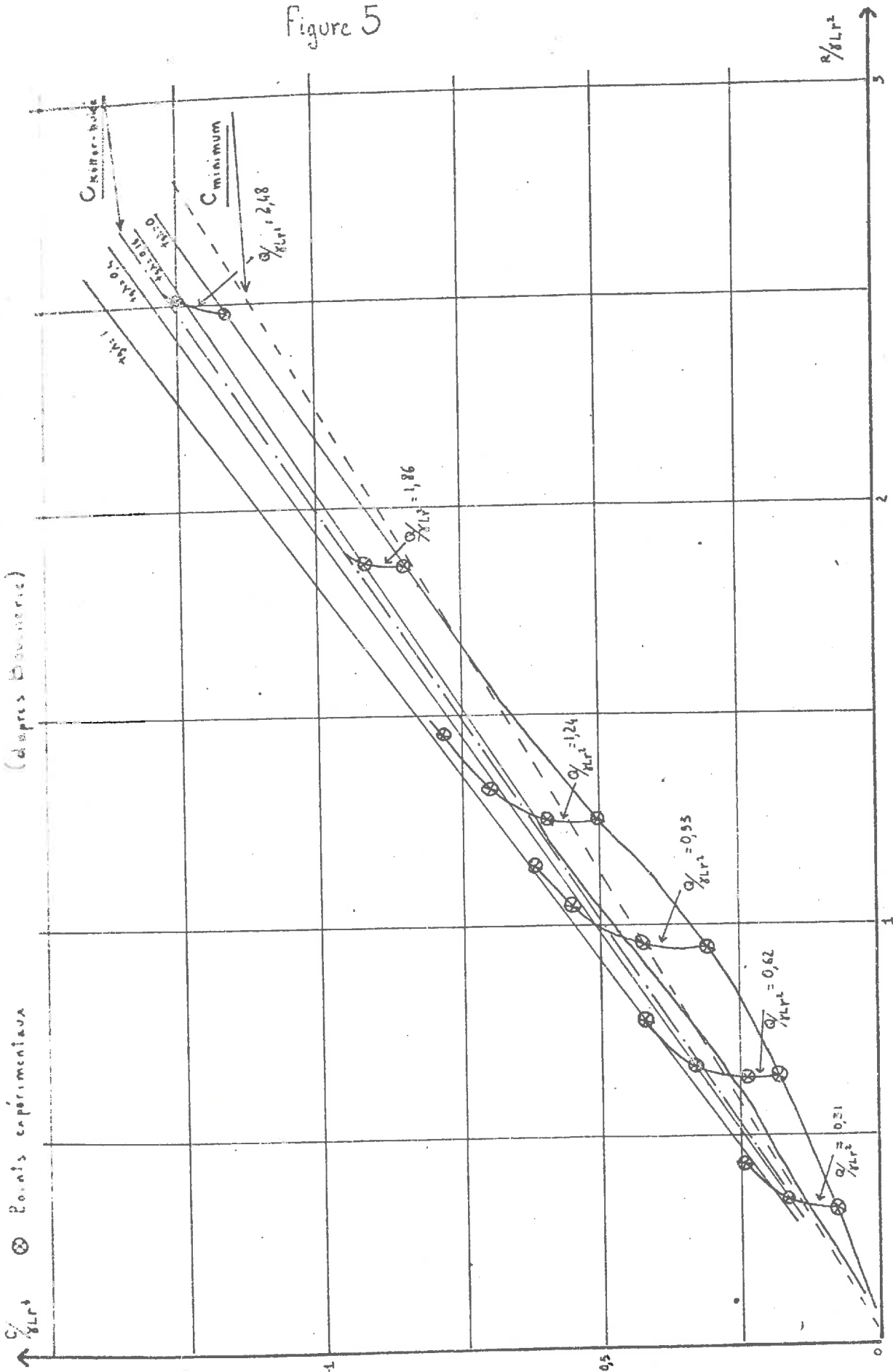
B étant la largeur de la fondation.

La force portante du sol est alors :

$$Q_{VA} = Q_{VM} \left[ \frac{a/b \pm 1/2}{a/b \mp 1/2} \right]^2$$

avec le signe + si en valeur algébrique  $a_m > a$   
avec le signe - si en valeur algébrique  $a_m < a$ .

Figure 5



Variation de  $\tau/8Lr^2$  en fonction de  $8Lr^2/\tau$  (après Boussinesq)

Les résultats sont exposés sur les Figures 6 et 7.

On constate que :

a) pour de faibles inclinaisons ( $\text{tg } \lambda = 0,1$ )

- pour  $\frac{Q}{F} < 0,2$  les valeurs calculées sont inférieures aux valeurs expérimentales,

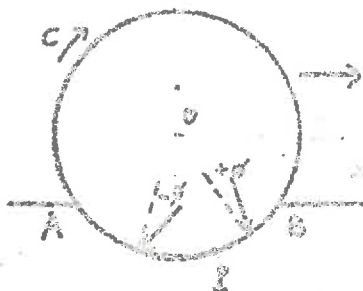
- pour  $\frac{Q}{F} > 0,2$  les forces portantes obtenues sont comparables à celles de l'expérience.

b) à mesure que  $\text{tg } \lambda$  croît, la méthode conduit à des forces supérieures à celles de l'expérience;

Cette méthode ne permet pas d'envisager d'inclinaisons supérieures à  $\text{tg } \lambda = 0,5$ . Dans le cas où  $\text{tg } \lambda$  est voisin de cette limite, les résultats sont très satisfaisants pour le domaine d'utilisation des roues ( $\frac{Q}{F} < 0,5$ ).

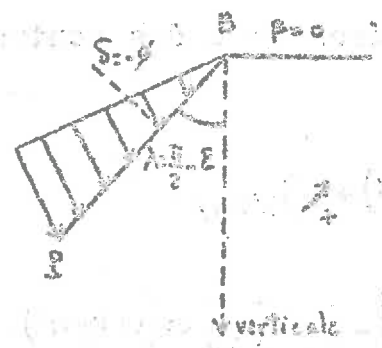
b) Méthode de calcul :

L'étude expérimentale a montré que dans le cas où les forces appliquées à la roue étaient suffisantes pour mettre le sol en plasticité, c'est-à-dire lorsque  $\frac{Q}{6 L r^2}$  était grand ou lorsque  $\text{tg } \lambda$  était grand, il existait un schéma de répartition à 2 zones.



Nous supposons que PA est une ligne de glissement, et que l'écran PB met le sol aval en butée.

On sait que, connaissant la contrainte en un point d'une ligne de glissement, on peut calculer d'après les formules de Kötter la contrainte en tout point de la ligne. En admettant que la contrainte sur la roue est nulle en A, on connaît la distribution des contraintes le long de AP.



Sur l'arc PB nous supposons une répartition linéaire avec pour coefficient de butée celui de l'écran tangent en B à la roue, l'inclinaison des contraintes étant  $-\beta$ , par rapport à la normale.

Donc, connaissant la position des points A et B, nous pouvons calculer la répartition des contraintes le long de APB ; le point P étant le point de l'arc AB où la contrainte calculée à partir de A par la formule de Kötter est égale à la contrainte calculée à partir de B par la répartition définie précédemment.

Remarque :

La distribution de Kötter partant de A ne peut être prolongée jusqu'en B. Car, en ce point la distribution maximale des contraintes sur la roue est formée par la butée, l'autre limite étant la poussée ou zéro.

Rappelons maintenant le résultat des calculs :

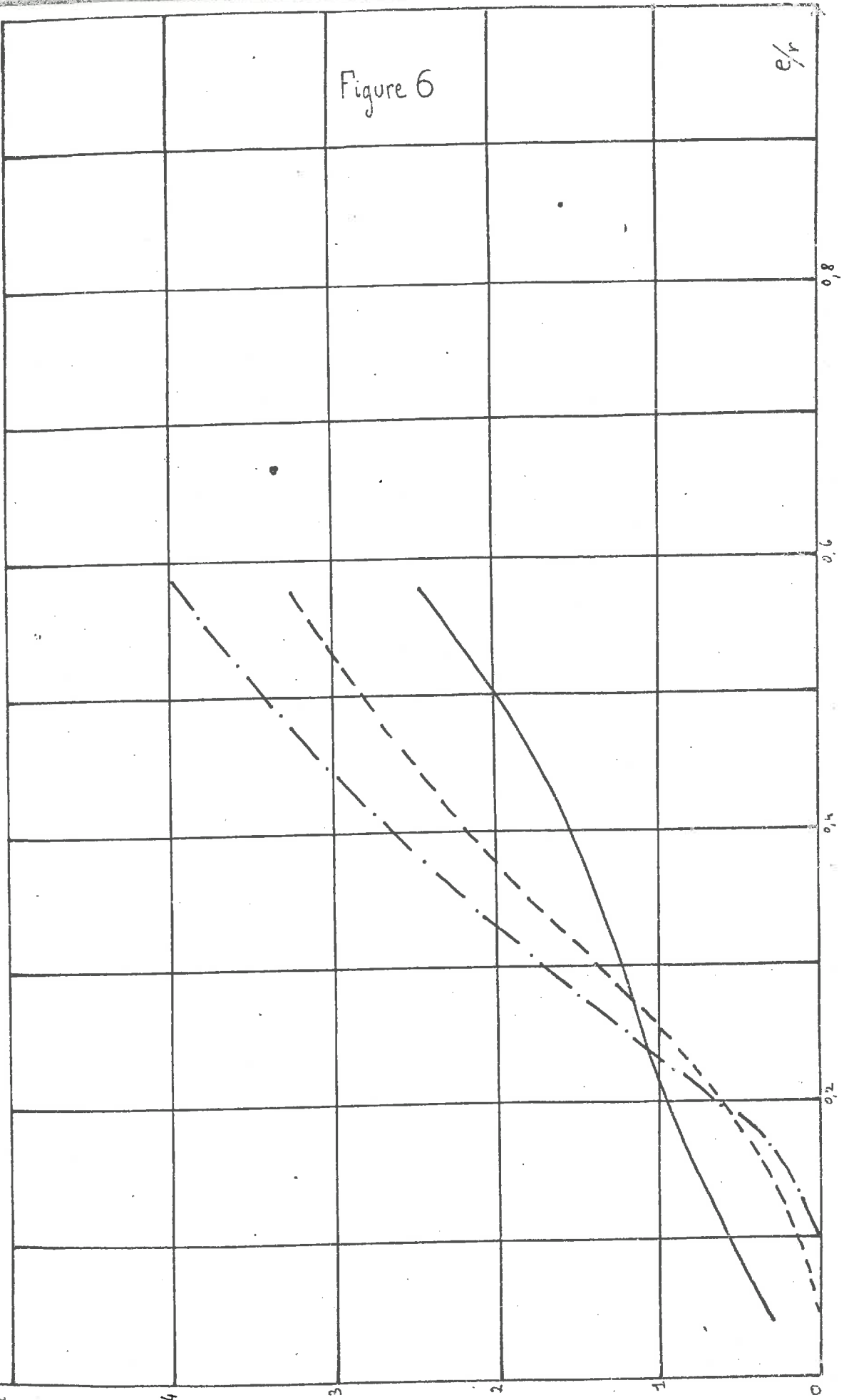
- Composante verticale Q de la résultante des contraintes sur l'arc AP :

$$\frac{Q}{\delta L r^2 \cos \beta} = -c_1 \cos^2 \beta \left[ e^{-2\theta_A \tan \beta} (2 \tan \beta (\cos(\theta_A + \beta) - \sin(\theta_A + \beta))) - \dots \right. \\ \left. \dots - e^{-2\theta_P \tan \beta} (2 \tan \beta (\cos(\theta_P + \beta) - \sin(\theta_P + \beta))) \right]$$

Page no. 101

Variation de la force de traction de l'acier au moment pour  $\sigma = 1$  après (Bouhassie)

Qua  $\frac{Q_{21}}{Q_{12}}$  Courbe expérimentale, --- Course calculée (Haeringer), - - - - - Course calculée (méthode de Talus)

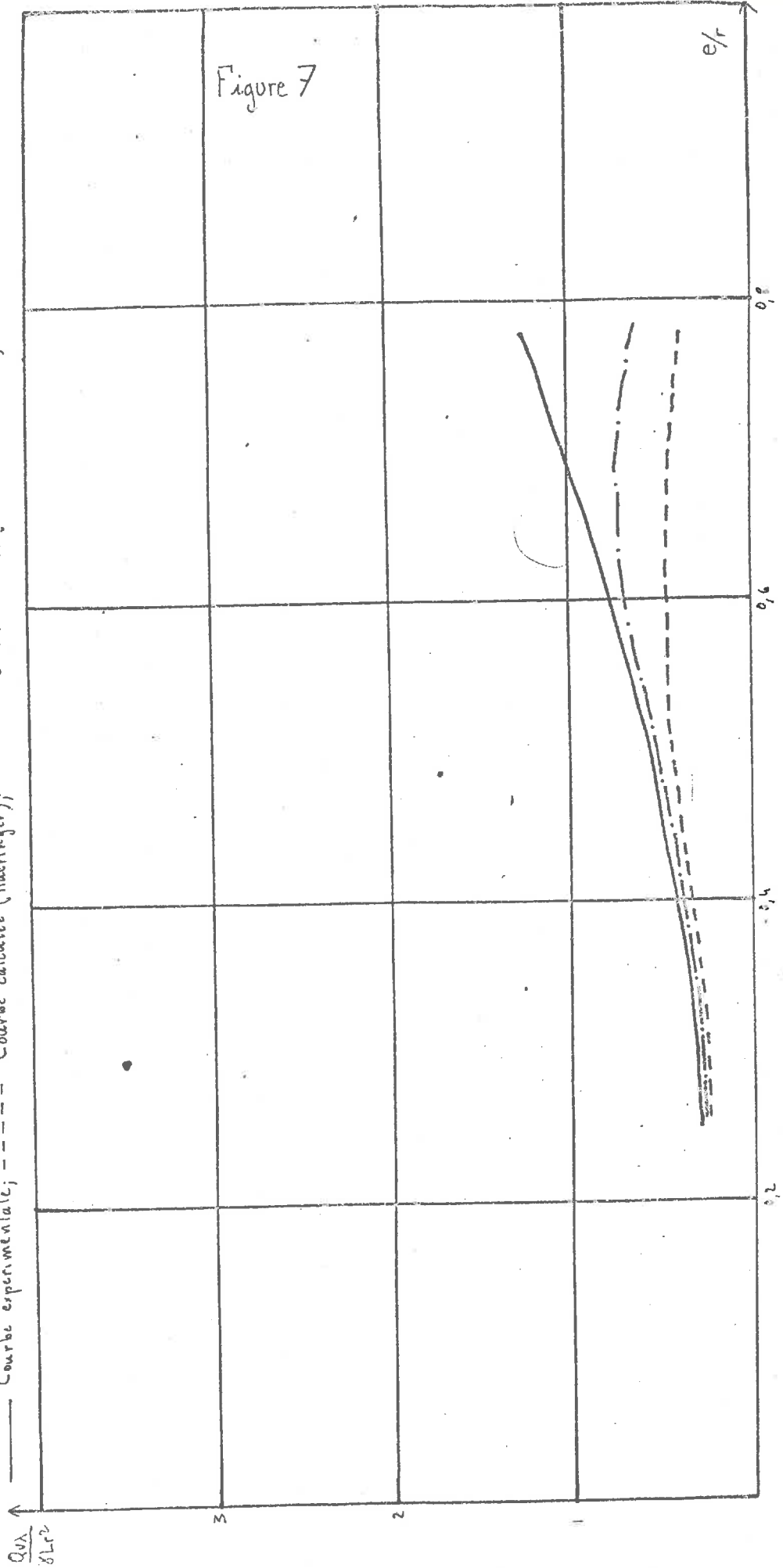


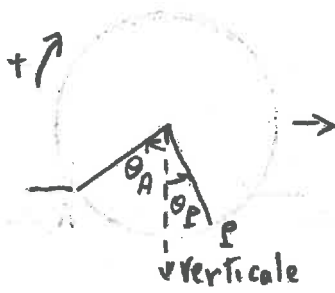


Revue motrice sur modèle analogique ( $c=0, \phi=27^\circ$ )

Variation de la force portante en fonction de l'enfoncement pour  $Tg\lambda=0,5$ . (D'après Boucherie)

— Courbe expérimentale; - - - Courbe calculée (Haeringer); - · - Courbe calculée (méthode des talus).





$$\left[ +\frac{1}{2} \frac{\omega \psi}{\omega \rho} \left[ \frac{1}{2} \sin(2(\theta_A + \theta) + \psi) - \frac{1}{2} \sin(2(\theta_P \rho) + \psi) + (\theta_A - \theta_P) \cos \psi \right] \right]$$

- Composante horizontale H de la résultante des contraintes sur l'arc AP :

$$\frac{H}{\gamma L r^2} = -\frac{c_1 \omega^2 \rho}{2} \left[ e^{-2\theta_P \rho} (2\theta_P \rho \cos(\theta_P \rho) + \sin(\theta_P \rho)) - e^{-2(\theta_A + \theta) \rho} \left( \frac{1}{2} \sin(2(\theta_A + \theta) + \psi) + (\theta_A - \theta_P) \cos \psi \right) \right]$$

- Couple C dû à cette répartition :

$$\frac{C}{\gamma L r^3} = -\frac{c_1 \omega^2 \rho}{2} \left[ e^{-2\theta_P \rho} (-2\theta_P \rho^2) - e^{-2(\theta_A + \theta) \rho} \left( \sin(\theta_A + \theta + \psi) - \sin(\theta_P + \theta + \psi) \right) \right]$$

$C_1$  est une constante définie page 19

$\psi$  est défini par  $\text{tg} \psi = 2 \text{tg} \theta$ .

- Composante verticale Q de la résultante des contraintes sur l'arc PB :

$$\frac{Q}{\gamma L r^2} = b \left[ (\theta_2 - \theta_0) \sin(\theta_2 \rho) + \cos(\theta_2 \rho) - \cos(\theta_0 \rho) \right]$$

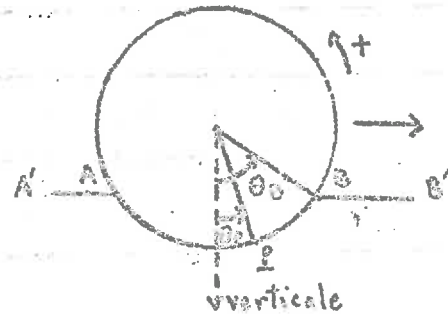
$$\left[ (\theta_2 - \theta_0) \sin(\theta_2 \rho) + \cos(\theta_2 \rho) - \cos(\theta_0 \rho) \right]$$

- Composante horizontale H de la résultante des contraintes sur l'arc PB :

$$\frac{H}{\gamma L r^2} = b \left[ (\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 - \beta) + \sin(\theta_1 - \beta) - \sin(\theta_2 - \beta) \right]$$

- Couple dû à cette répartition :

$$\frac{C}{\gamma L r^2} = b \frac{\sin \beta (\theta_2 - \theta_1)^2}{2}$$



Les photographies prises par BOUCHERIE [9] montrent que l'on peut prendre  $\theta_A = \theta_B$ ,  $\frac{C}{\gamma L r^2}$  variant de 0,62 à 2,48 et  $\text{tg } \lambda$  de  $5^\circ$  à  $22^\circ$ . Nous supposons donc que AA'BB' est une horizontale.

Notre méthode de calcul a été la suivante :

Nous nous fixons un enfoncement, en nous donnant  $\theta_A = \theta_B$ . Nous calculons les grandeurs des contraintes  $\sigma$  le long de AB (P n'étant pas déterminé) par la formule de Kötter : un point en M de l'arc AB, repéré par  $\widehat{AOM} = \theta$

$$\sigma_M = \gamma r \cos \beta \left[ c_1 e^{-2\theta + \beta} + \frac{\omega \psi}{\omega \beta} \cos(\theta + \beta + \psi) \right]$$

avec :  $c_1 = - \frac{\omega \psi}{\omega \beta} \cos(\theta_A + \beta + \psi) e^{+2\theta_A + \beta}$

et :  $\text{tg } \psi = 2 \text{ tg } \beta$ .

Ainsi, par exemple, pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $B = 70^\circ$  et  $\beta = 27^\circ$

| $\theta$                                    | 70 | 60    | 50   | 40    | 30    | 20    | 10    | 0     |
|---|----|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{\sigma}{\gamma r \cos \beta}$ Kötter | 0  | 0,271 | 0,58 | 0,956 | 1,442 | 1,851 | 2,363 | 2,972 |

| $\theta$                                    | - 10  | - 20  | - 30  | - 40  | - 50  | - 60  | - 70   |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\frac{\sigma}{\gamma r \cos \beta}$ Kötter | 3,649 | 4,398 | 5,263 | 6,218 | 7,257 | 8,558 | 10,049 |

La formule déduite de la répartition de butée le long de FB s'écrit  $\sigma = \lambda b r (\theta_B - \theta)$  avec  $b = 7,46$  et  $\theta_B = 1,221$  radian d'où  $\frac{\sigma}{\gamma r \cos \beta} = 11,7 - 10,65 \theta$

Par tâtonnement, on cherche deux valeurs de  $\theta$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , telles que :

$$\frac{\sigma(\theta_1)}{\gamma r \cos \beta} \text{ butée} > \frac{\sigma}{\gamma r \cos \beta} \text{ Kötter}$$

$$\frac{\sigma(\theta_2)}{\gamma r \cos \beta} \text{ butée} < \frac{\sigma}{\gamma r \cos \beta} \text{ Kötter}$$

Puis, par interpolation linéaire entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on détermine  $\theta_p$ . Dans le cas présent, on trouve  $\theta_p = 35^\circ 4' = 0,620$  radian. En reportant  $\theta_p$  dans les formules citées plus haut ( $\theta_p$  étant positif dans les formules de Kötter et  $\theta_p$  étant négatif dans les formules de butée, d'après nos conventions de signe) on trouve :

$$\frac{Q}{\gamma L r^2 \cos \phi} \text{ total} = \frac{Q}{\gamma L r^2 \cos \phi} \text{ Kötter} + \frac{Q}{\gamma L r^2 \cos \phi}$$

$$= 2,5 + 1,27 = 3,77$$

$$\frac{QH}{\gamma L r^2 \cos \phi} \text{ total} = \frac{H}{\gamma L r^2 \cos \phi} \text{ Kötter} + \frac{H}{\gamma L r^2 \cos \phi}$$

$$= 1,255 + 0,438 = 1,693$$

$$\frac{C}{\gamma L r^3} \text{ total} = \frac{C}{\gamma L r^3} \text{ Kötter} + \frac{C}{\gamma L r^3} \text{ butée} = 1,33 + 0,61 = 1,94$$

avec :  $\text{tg } \lambda = \frac{H}{C} = 0,448.$

Les calculs ont été faits pour  $\phi = 10, 15, 20, 27, 30, 35, 40^\circ$  en faisant varier  $\theta_A = \theta_B = \theta$  de  $10$  à  $90^\circ$ .

Nous donnons en annexe :

1°) Pour  $\phi = 27^\circ$ , les répartitions des contraintes pour  $\theta_A = \theta_B = \theta = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ, 50^\circ, 40^\circ, 30^\circ$ .

2°) Pour  $\phi = 10, 15, 20, 35, 40^\circ$ , les répartitions des contraintes pour  $\theta_A = \theta_B = \theta = 90^\circ$ .

De plus, on trouvera à la fin du chapitre les tableaux des résultats des calculs.

c) Résultats théoriques :

Pour un enfoncement donné ( $\theta_A = \theta_B = 0$ ) les méthodes exposées ci-dessus donnent les composantes de la résultante  $Q$  et  $H$ , son inclinaison  $\lambda$ , et la valeur du couple  $C$ .

Il est intéressant de comparer les résultats du calcul avec ceux de l'expérience :

- Sur la Figure 8 sont tracés les enfoncements en valeurs adimensionnelles en fonction des charges verticales adimensionnelles  $Q/8Lr^2$ . L'enfoncement expérimental figuré pour une charge verticale donnée est celui qui correspond à l'inclinaison  $\lambda$  fournie par le calcul pour cette même charge. On constate que l'erreur est au maximum et par défaut de 40 % de l'enfoncement expérimental. L'ordre de grandeur est donné pour  $e/r < 0,5$ , ce qui correspond au domaine d'enfoncement de la pratique. Pour ces valeurs de l'enfoncement, on remarque que l'inclinaison de la résultante est relativement forte :  $0,18 < \text{tg } \lambda < 0,5$ . Ce calcul semble donc valable pour des cas limites où la roue commencera à être en difficulté.

- Sur la Figure 9 nous comparons le couple théorique et le couple expérimental en fonction de la charge verticale. On constate que les points expérimentaux sont sur la courbe théorique.

La concordance des résultats expérimentaux théoriques pour  $\beta = 27^\circ$  étant satisfaisante, nous donnons des abaques qui permettent de calculer à deux dimensions, l'enfoncement d'une roue métrique quelconque soumise à une charge verticale donnée et le couple nécessaire à son avancement en régime permanent à faible vitesse pour une inclinaison fixée par le calcul (Figures 9, 10, 11, 12, 13).

Remarques :

Le calcul qui a été développé, nous impose la résultante  $R$  en grandeur et direction, une fois que l'on s'est donné un enfoncement. C'est-à-dire qu'à une valeur de l'enfoncement correspond une valeur et une seule de l'inclinaison de la résultante. Or, les expériences ont montré qu'il existe en régime permanent plusieurs valeurs de  $\lambda$  pour un enfoncement fixé.

Sur la Figure 5, par exemple, montrant la variation du couple en fonction de la résultante des forces, l'expérience nous fournit une famille de courbes, alors que la méthode de Kötter ou du couple minimum ne nous donne qu'une courbe. A cet effet, nous remarquons que ces deux dernières courbes, qui sont des droites, sont très voisines et qu'elles sont proches de l'asymptote vers laquelle semble tendre la famille de courbes graduées en  $Q/\gamma L r^2$  quand  $R$  croît ; cette asymptote étant relative à l'inclinaison qui empêche la roue d'avancer quelle que soit l'intensité de la résultante  $R$ .

Le calcul fait par la méthode Kötter nous permet donc de donner un ordre de grandeur du couple nécessaire pour mouvoir une roue soumise à une force  $R$  donnée, en négligeant toutefois la différence entre l'inclinaison donnée par le calcul et celle qui nous est imposée.

Exemple :

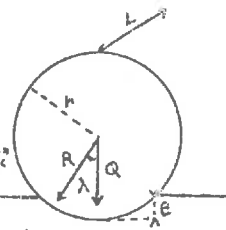
Pour  $R/\gamma L r^2 = 2,5$  et  $\theta = 27^\circ$   
en supposant que  $\lambda = 0$  l'expérience donne  $\frac{C}{L r^3} = 1,17$

en supposant que  $\lambda = 45^\circ$  l'expérience donne  $\frac{C}{L r^3} = 1,38$

# Figure 8

Rose matrice générale à 2 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 27^\circ$ )

Variation de l'enfoncement  $e$  en fonction de la charge verticale  $Q$ .



+ Points expérimentaux qui, pour  $Q/\pi L r^2$  donné, correspondent aux valeurs de  $\lambda$  de "Kötter butée"  
 --- Courbe théorique (Kötter-butée); - - - -  $\gamma \lambda = \int (Q/\pi L r^2)$  (théorique Kötter-butée) de l'enfoncement.

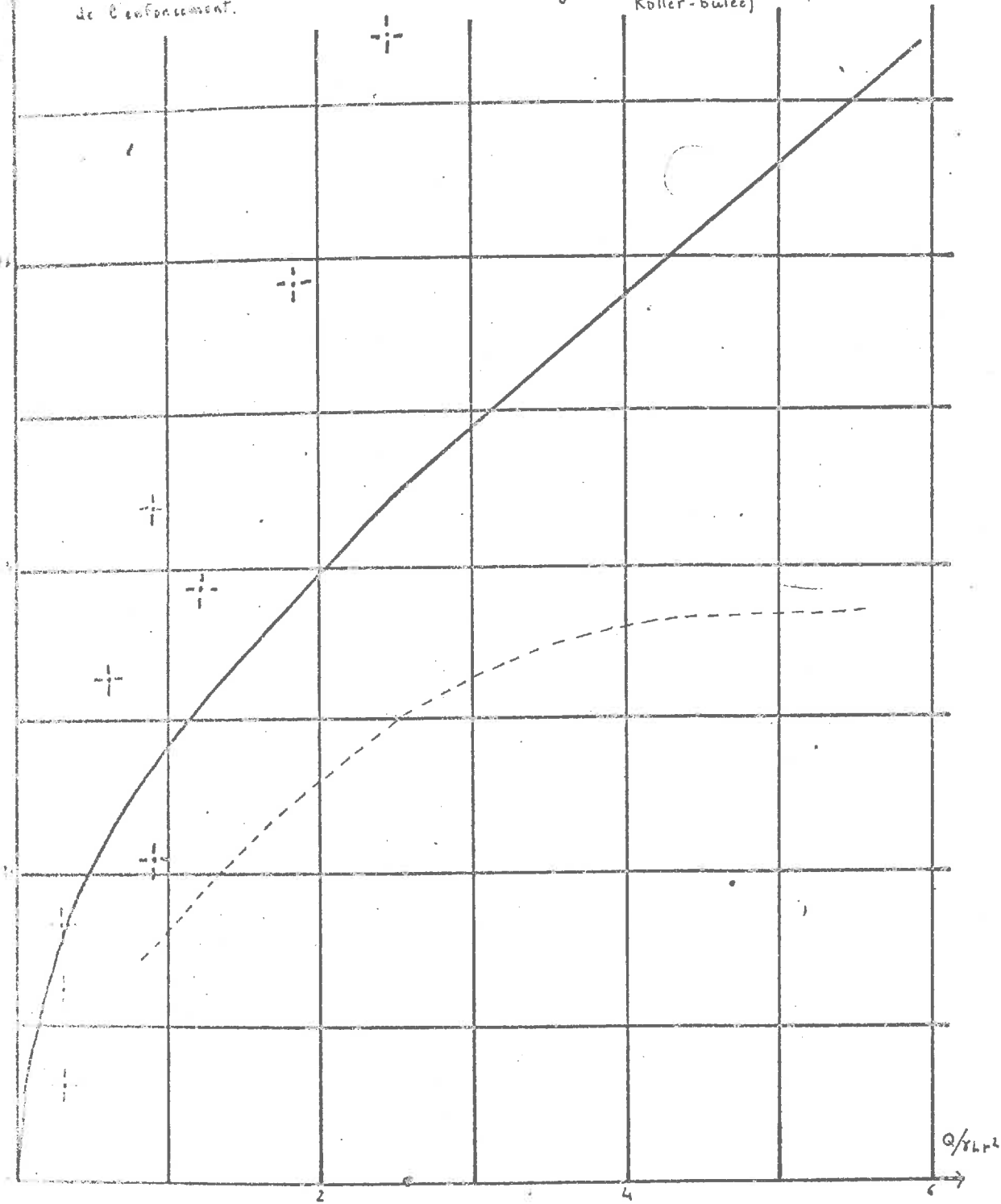




Figure 9

La surface générale à 2 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 27^\circ$ )

Variation du couple C en fonction de la charge verticale Q.

! Points expérimentaux ; — Courbe théorique (Kötter-bulbé).

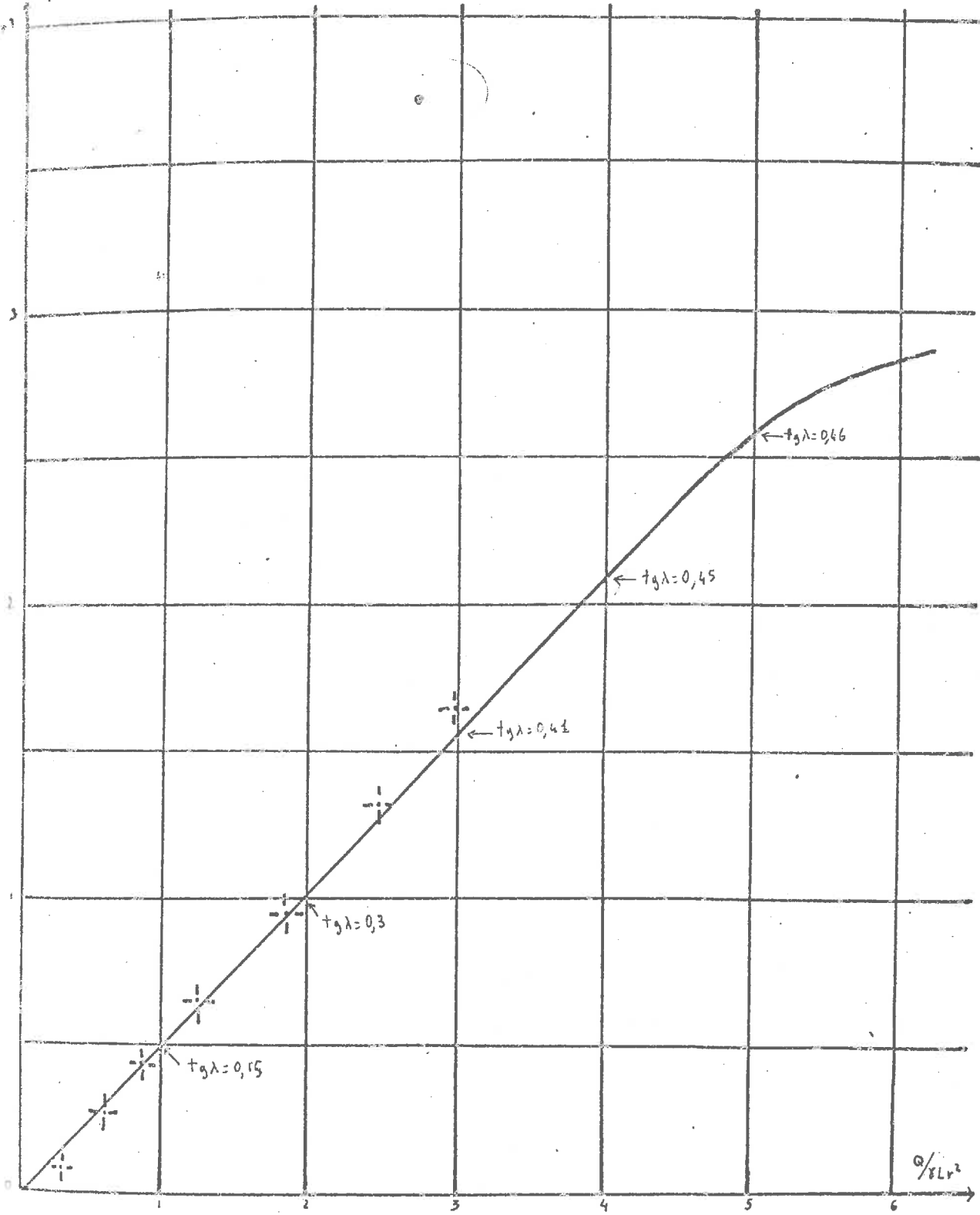
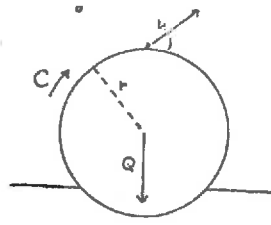
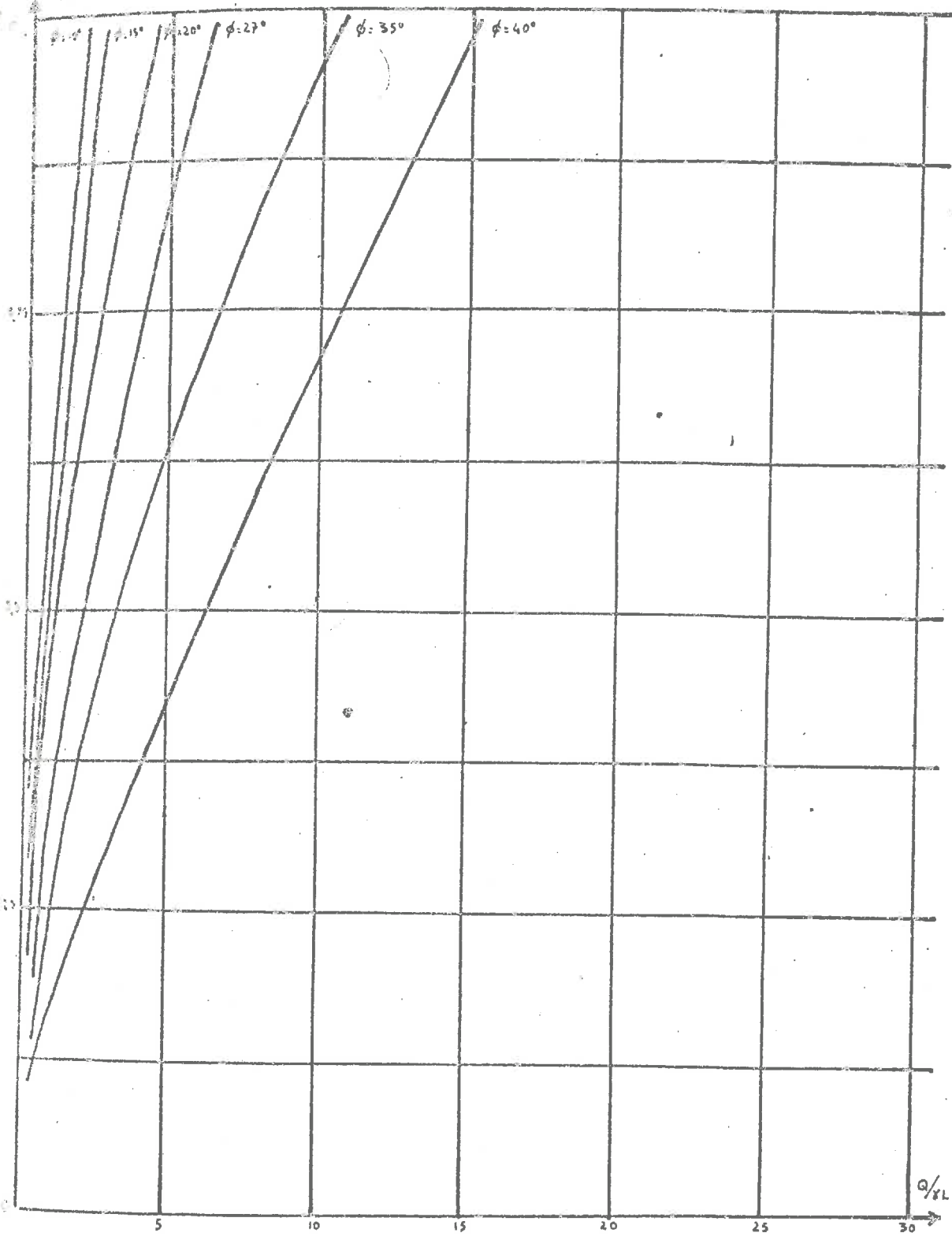
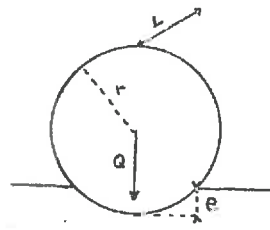


Figure 10

Reoue matrice générale à 2 dimensions sur matériau pulvérulent.

Tableau donnant l'enfoncement en fonction de la charge verticale  $Q$ , pour différentes valeurs de  $\phi$ , calculé par « Koller-butées ».



$Q/2L^2$

Figure 11

Les bagues donnent le couple C  
 en fonction de la charge  
 verticale Q pour différentes  
 valeurs de  $\phi$ , calculé par la  
 méthode «Kötter - bulée»

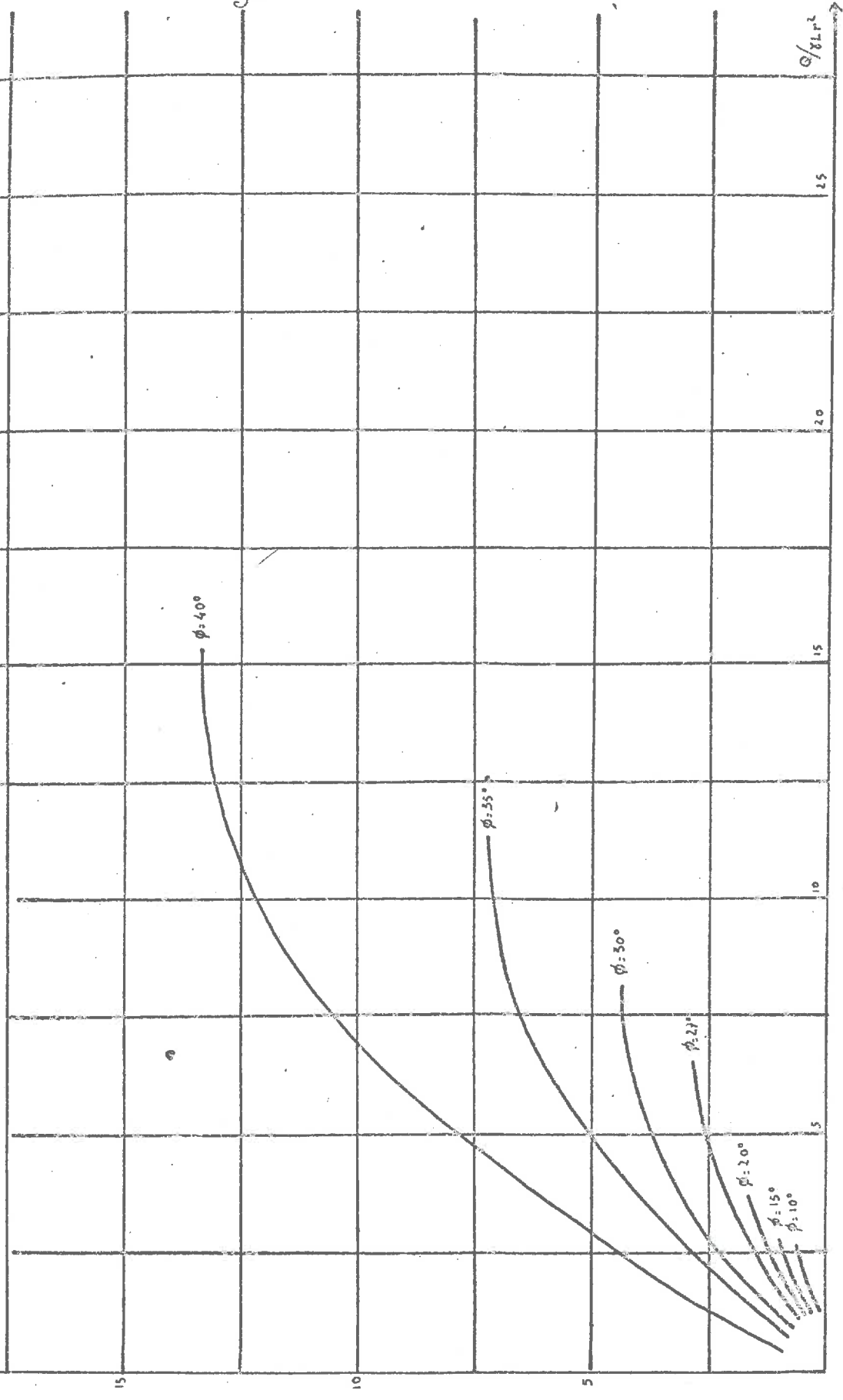
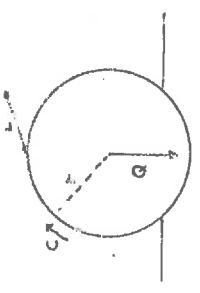
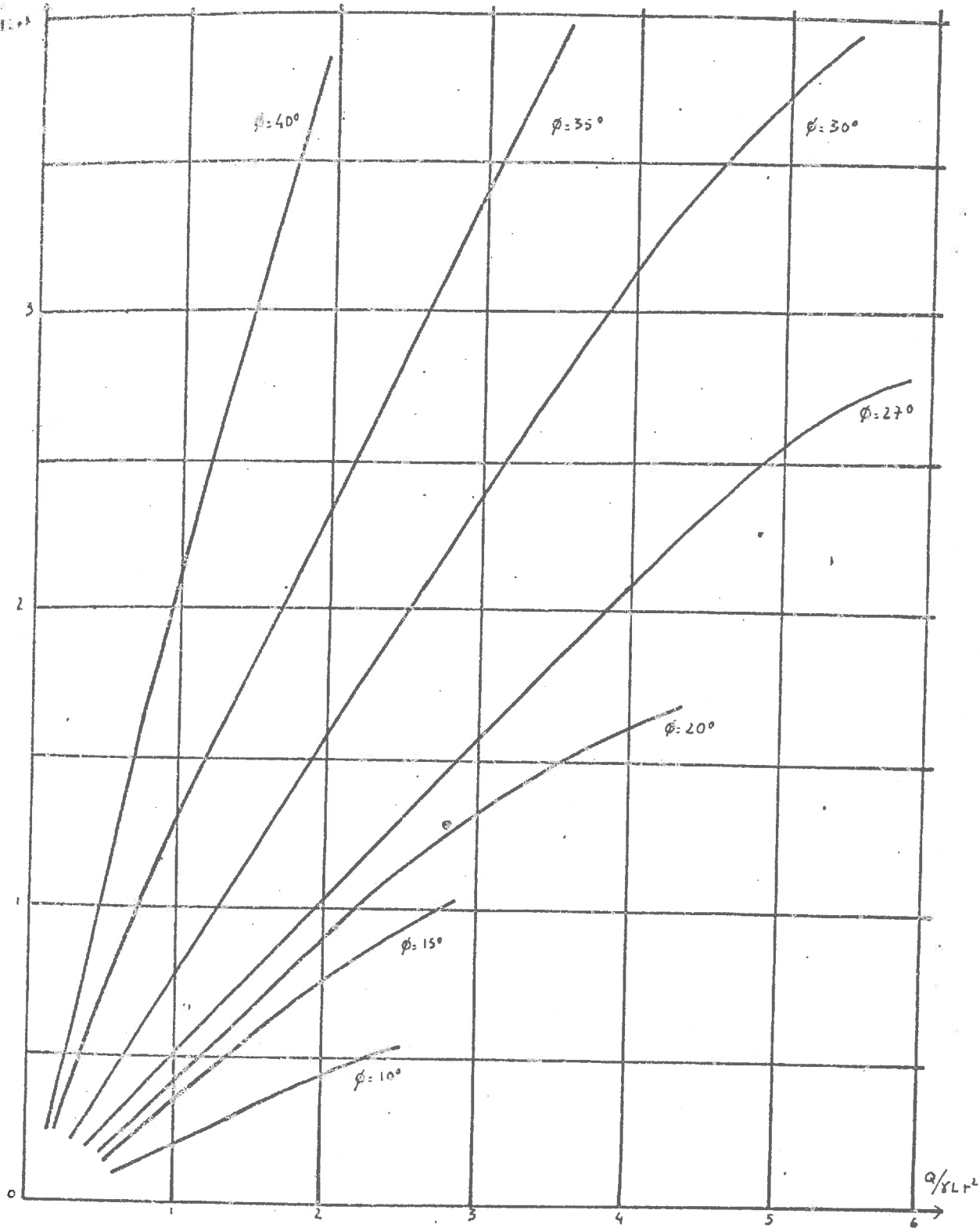
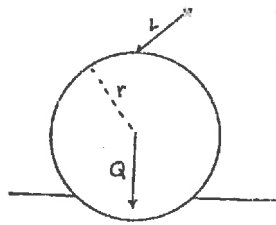


Figure 12

Recherche générale à 2 dimensions sur matériau pulvérolent ( $\phi=27^\circ$ )

Abaque donnant le couple C en fonction de la charge verticale Q pour différentes valeurs de  $\phi$ , calculé par la méthode "Kötter-buteé".



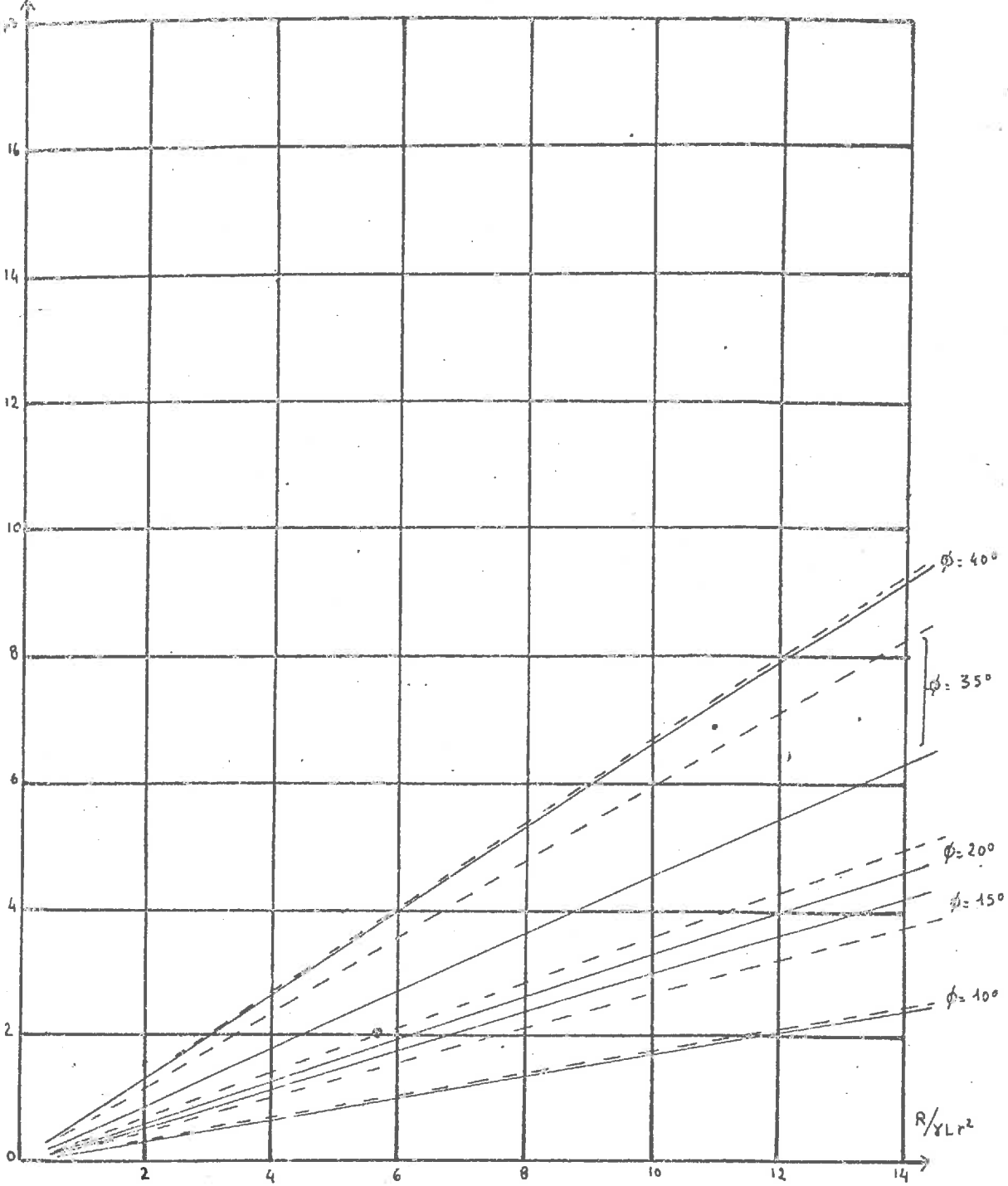
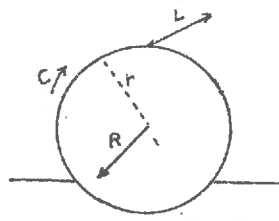
# Figure 13

Roue motrice générale à 2 dimensions sur matériau pulvérulent.

Variation du couple  $C$  en fonction de la résultante des forces

$R$ , pour différentes valeurs de  $\phi$ .

— Calculé par «Kötter-Butée»; --- Calculé par la méthode des talus.



Le calcul par Kötter nous indique que :

$$\frac{Q}{\delta L r^3} = 1,25$$

avec  $\lambda$  imposé par le calcul à  $3^\circ 5'$ .

On voit que l'influence de  $\lambda$  est faible sur la valeur du couple adimensionnel.

d) Détermination de la charge verticale limite compatible avec un enfoncement donné :

Les résultats sont exposés sur le diagramme de la Figure 14. Pour un enfoncement  $e = r/2$ , on voit que  $\frac{Q}{\delta L r^2} = 4,8$  pour un sable pulvérulent d'angle de frottement  $35^\circ$ .

ROUE MOTRICE A 2 DIMENSIONS

Tableaux des calculs par la méthode

de Kötter-butée

$\theta_A = 90^\circ \quad \theta = 27^\circ$

| $\theta$                         | 90 | 80    | 70    | 60    | 50    | 40  | 30    | 20    | 10   | 0     |
|----------------------------------|----|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|------|-------|
| $\frac{C}{r \cos \theta}$ Kötter | 0  | 0,248 | 0,558 | 0,936 | 1,372 | 1,9 | 2,472 | 3,086 | 3,97 | 4,939 |

| $\theta$                         | - 10  | - 20  | - 30  | - 40  | - 50   | - 60   | - 70   | - 80   |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{C}{r \cos \theta}$ Kötter | 5,899 | 7,095 | 8,353 | 9,988 | 11,867 | 12,528 | 16,479 | 19,340 |

$\frac{C}{r}$  butée = 11,5 - 7,34

d'où  $\theta_p = - 27^\circ 3 = 0,475$  radian,

$\frac{C}{\gamma L r^3}$  butée = 1,03 ,  $\frac{C}{\gamma L r^3}$  Kötter = 1,786

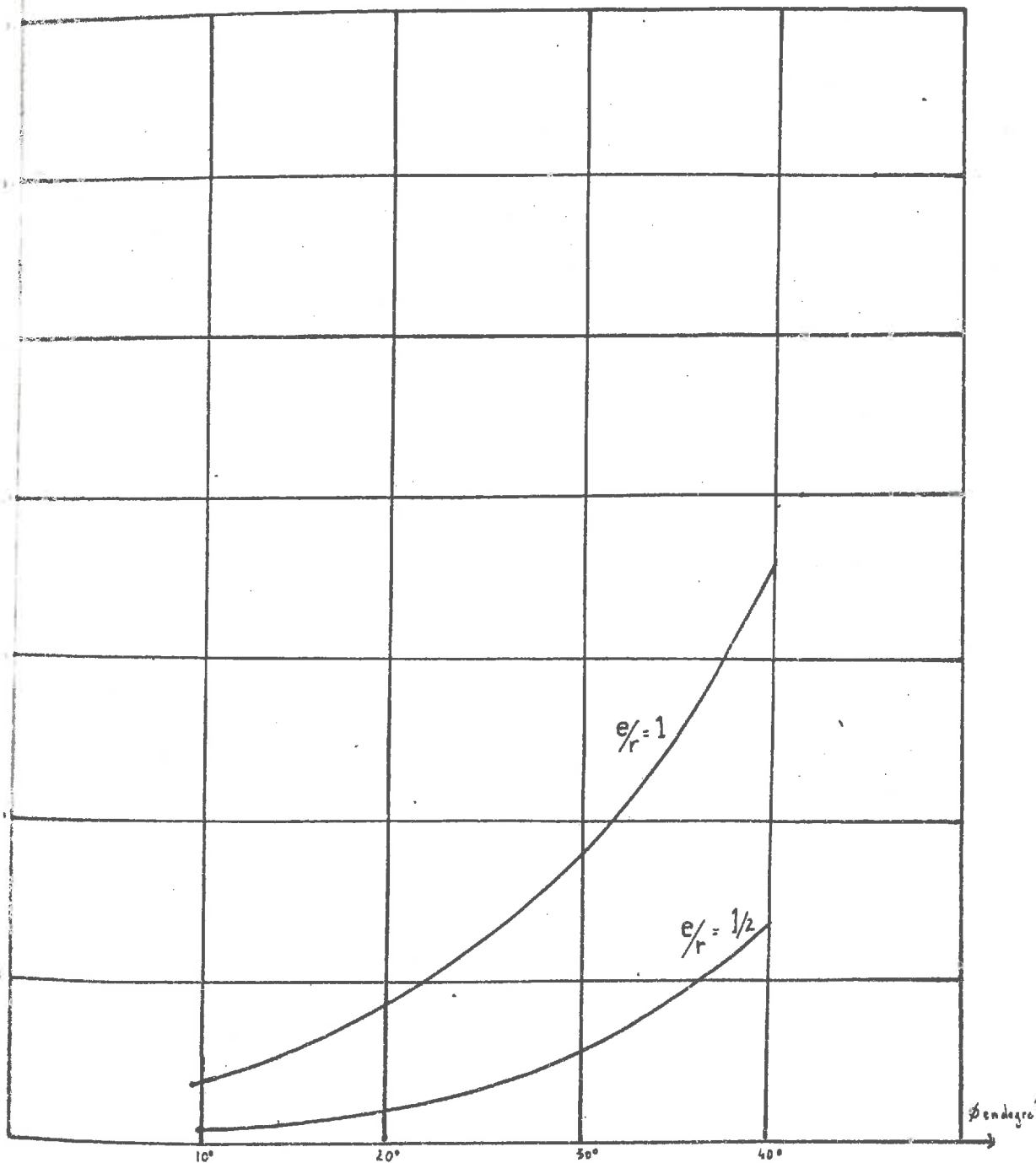
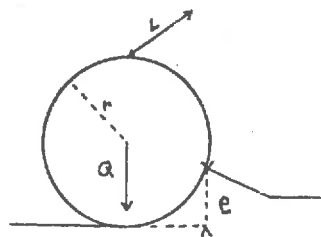
$\frac{Q}{\gamma L r^2}$  butée = 2,8 ,  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  Kötter = 3,78

$\frac{H}{\gamma L r^2}$  butée = 1,07 ,  $\frac{H}{\gamma L r^2}$  Kötter = 1,82

$\text{tg } \lambda = \frac{H}{Q} = 0,438$

Figure 14

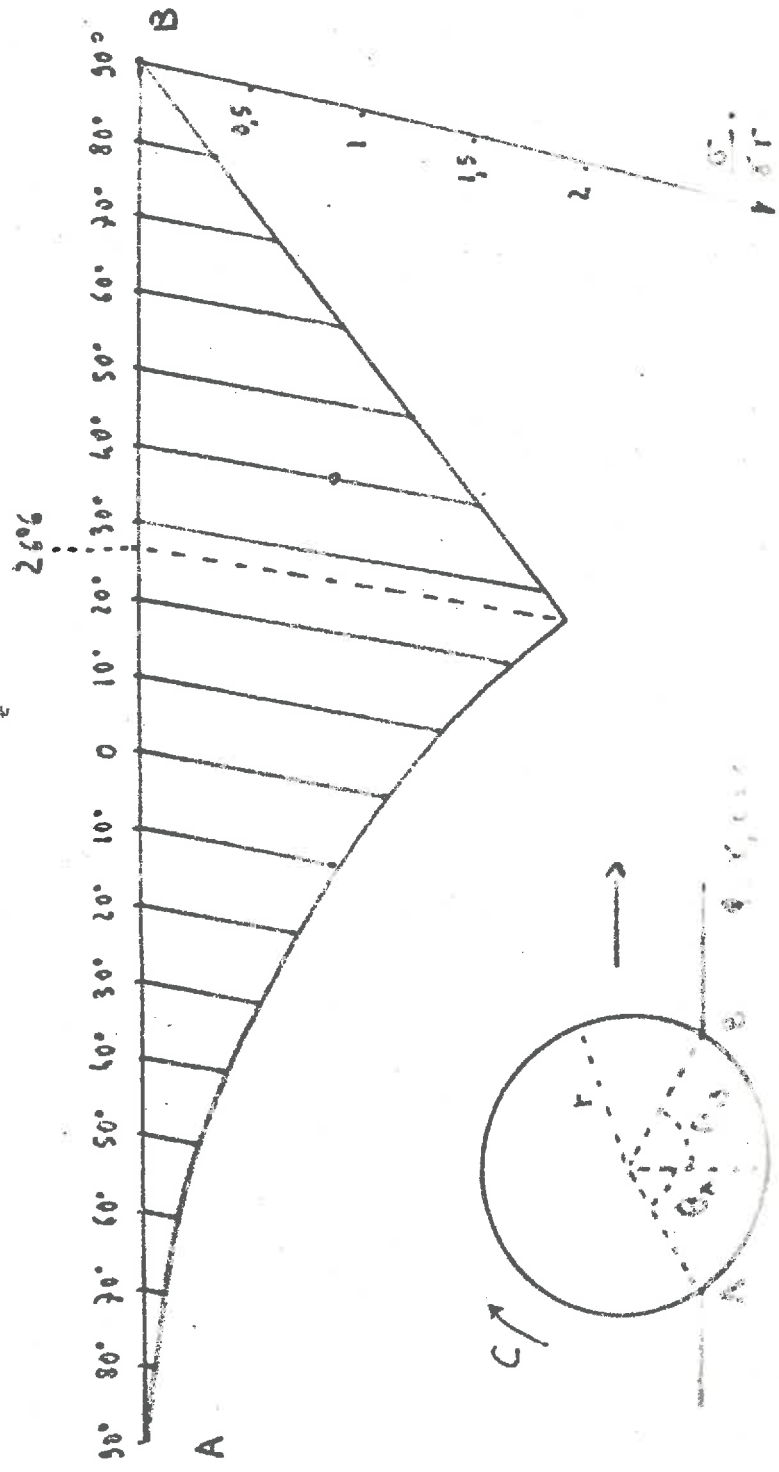
... générale à 2 dimensions sur matériau pulvérulent.  
 ... de la charge verticale limitée compatible avec un  
 ...  $e$  donné, en fonction de l'angle de frottement  $\phi$ .





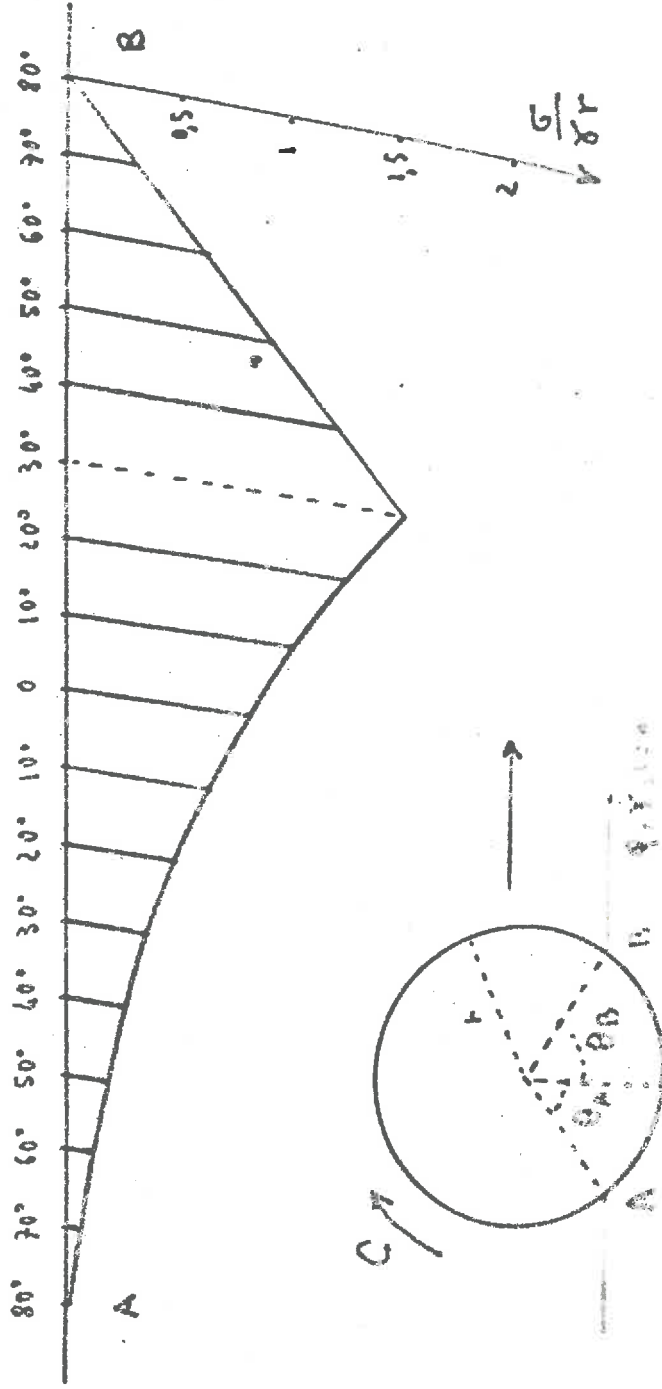
Roue motrice générale à 2 dimensions non variables particulièrement.

Diagramme développé de courbes sous la roue calculé par la méthode de «Kötter-hulte» pour  $\beta = 40^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 90^\circ$ .



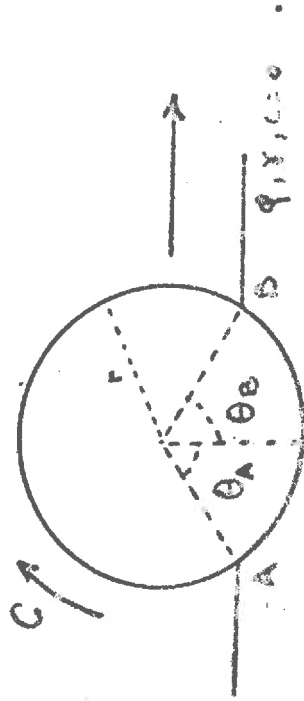
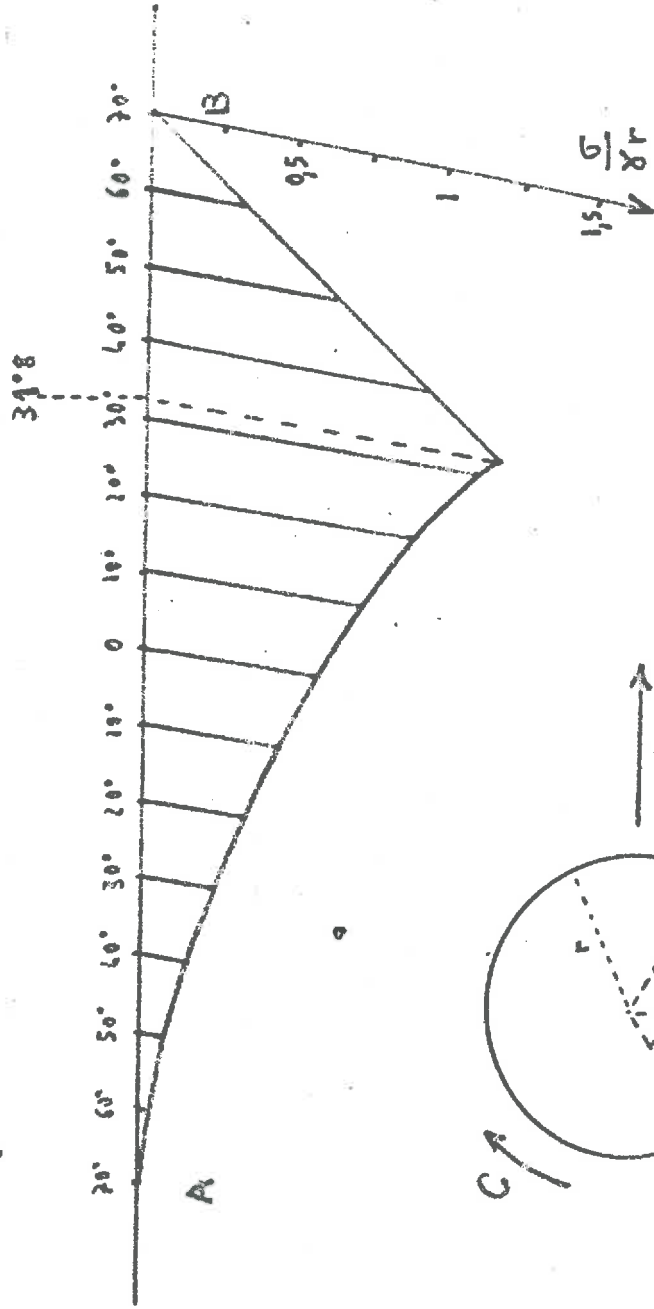
Roue motrice générale à 2 dimensions ou métrique parabolique.

Diagramme développé de caractéristiques sous la roue calculé par la méthode de « Kötter - butler » pour  $\beta = 40^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 80^\circ$ .



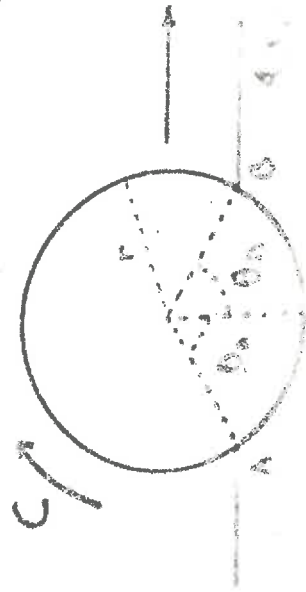
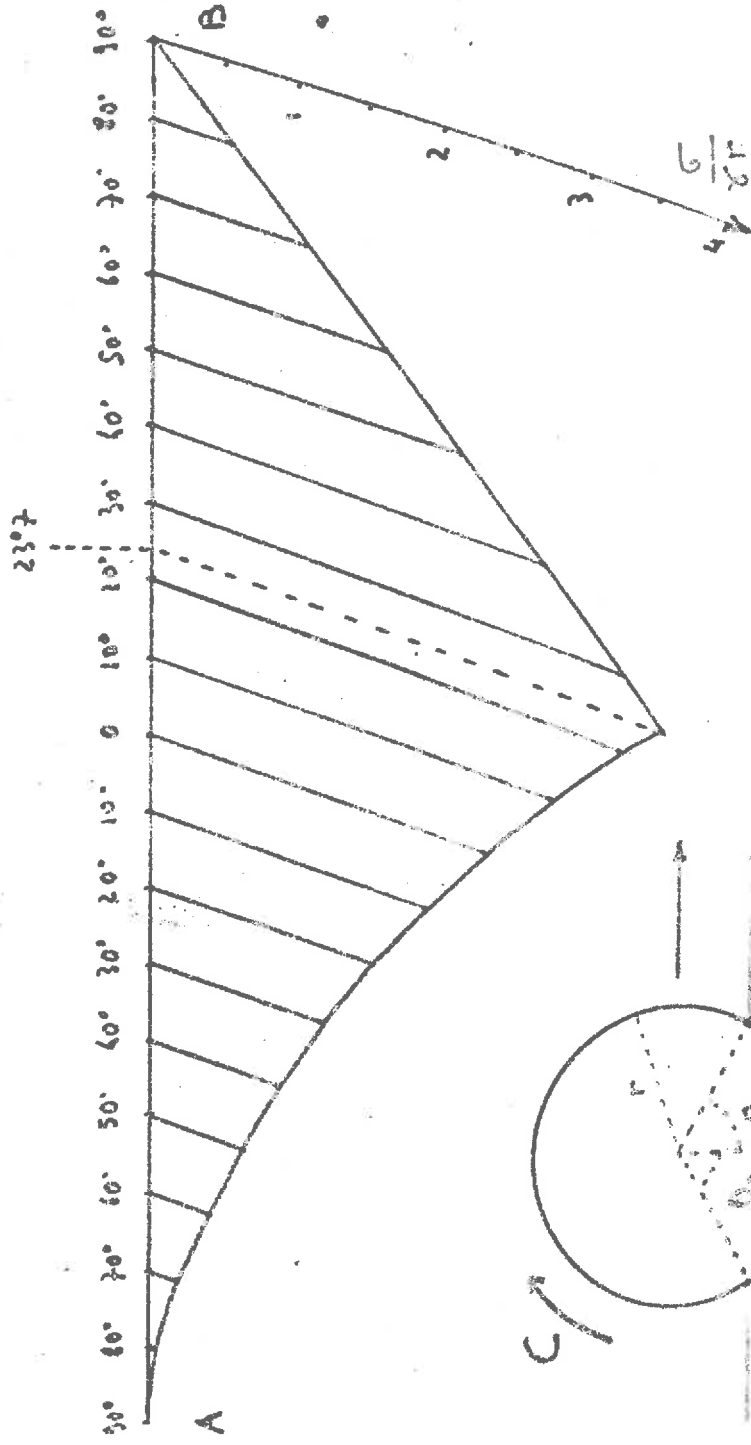
Roue motrice générale à 2 dimensions sur machine pulvérisante.

Diagramme développé de contraintes sous la roue calculé par la méthode de « Kötter - bulles » pour  $\phi = 10^\circ$ ,  $\theta_n = \theta_n = 70^\circ$



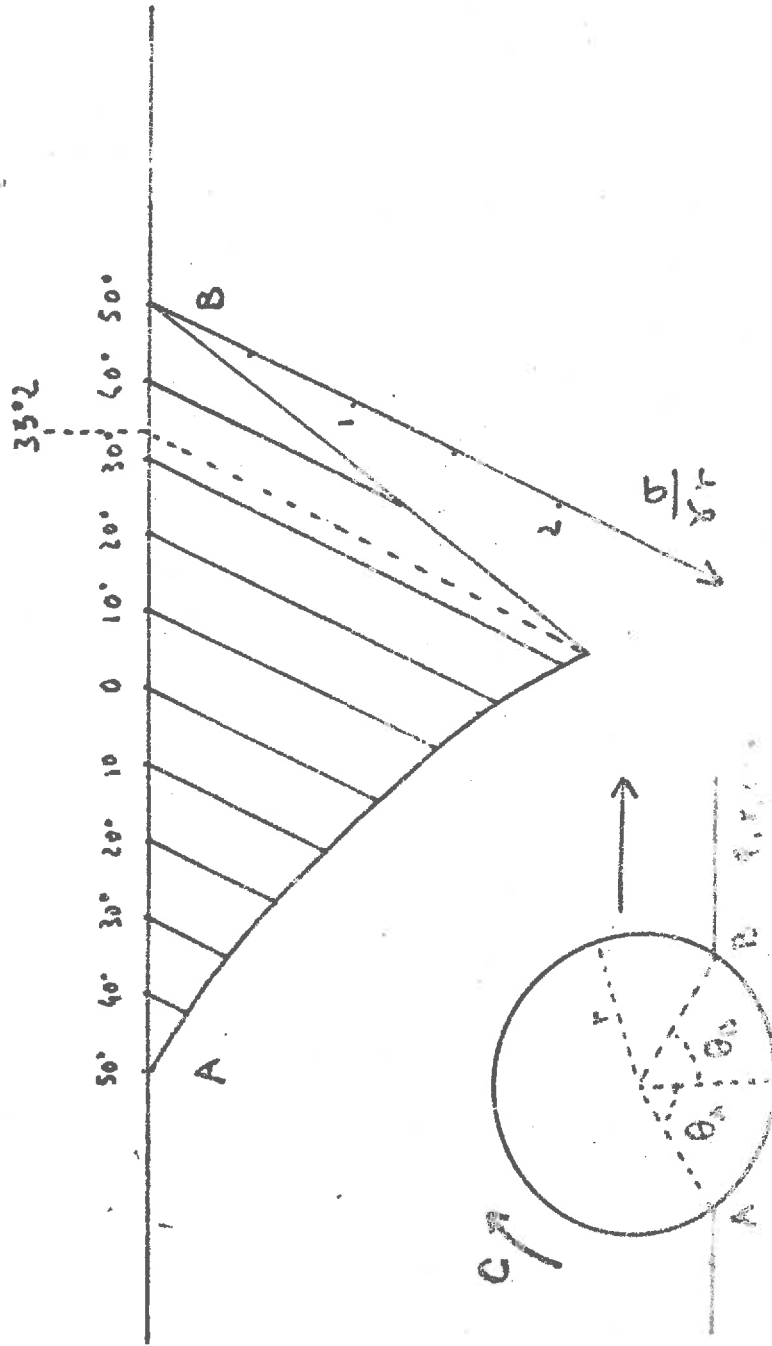
Roue motrice générale à 2 dimensions sur un terrain polaire.

Diagramme développé de contraintes sur la roue calculé par la méthode de « Kötter - Isnter » pour  $\beta = 20^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 30^\circ$



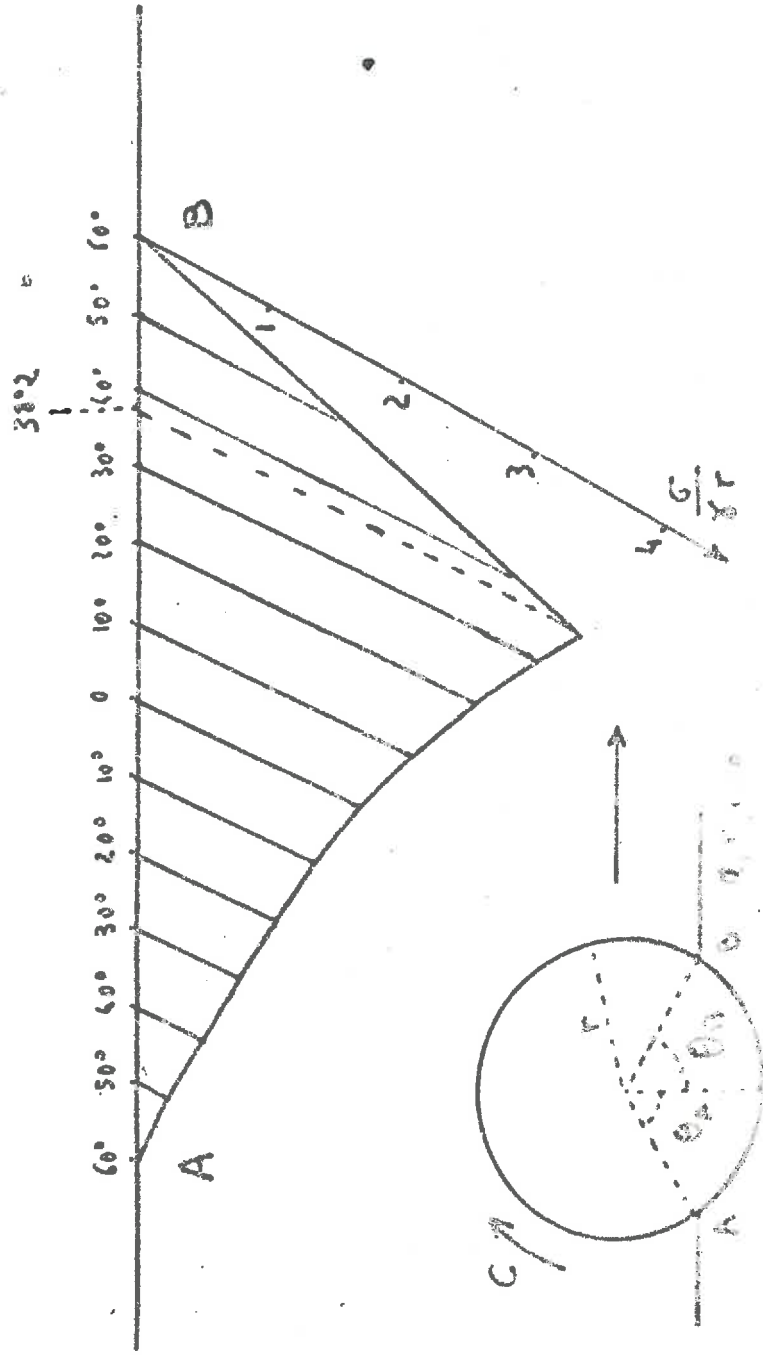
Roue motrice qu'on lui a 2 dimensions en notation polaire.

Diagramme développé de courbure sans le axe calculé par la méthode de la Kötter-bulle  $\Rightarrow$  pour  $\phi = 27^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 50^\circ$



Roue motrice générale à 2 dimensions sur métrique euclidienne.

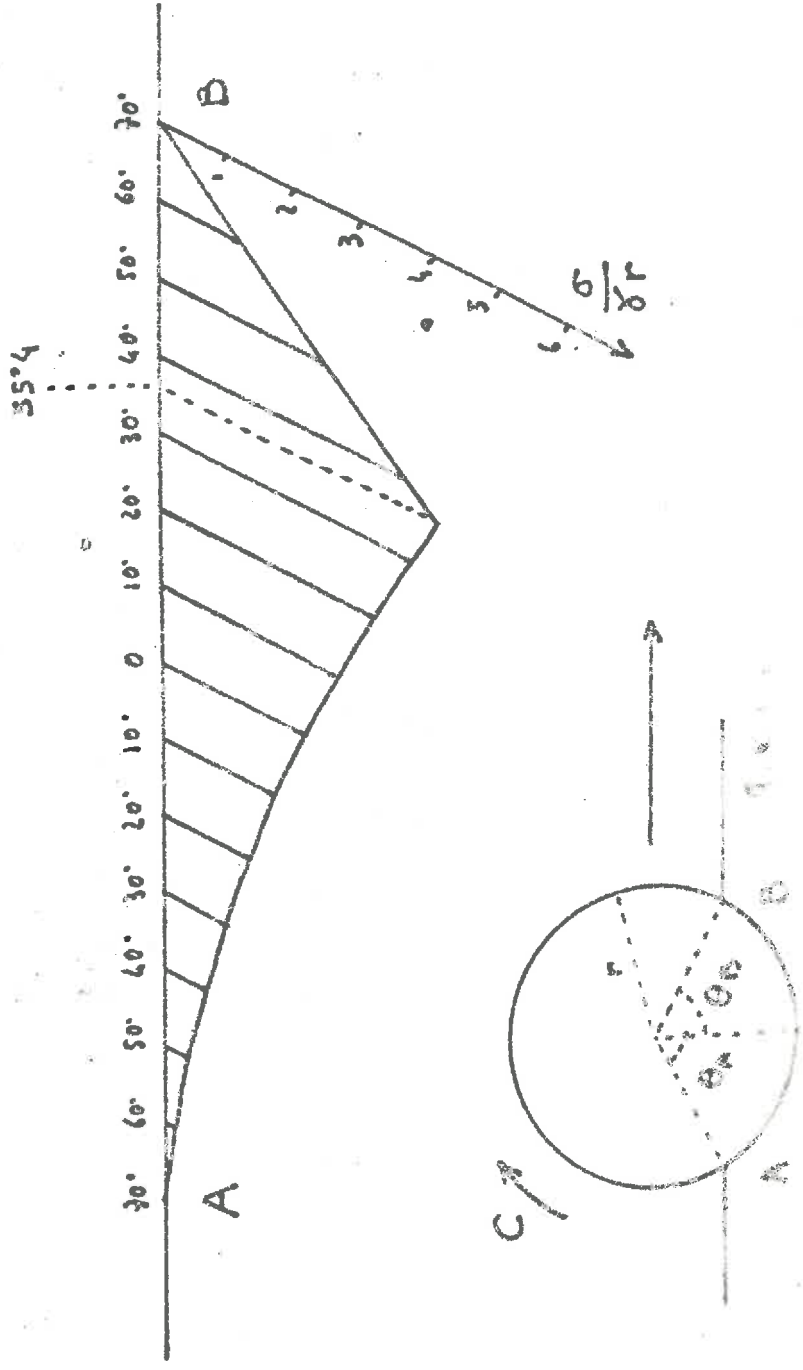
Diagramme de contraintes sur le roue calculé par la méthode de « Kötter - bulle » pour  $\beta = 27^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 60^\circ$ .



Roue motrice générale à 2 dimensions sur surface polaire.

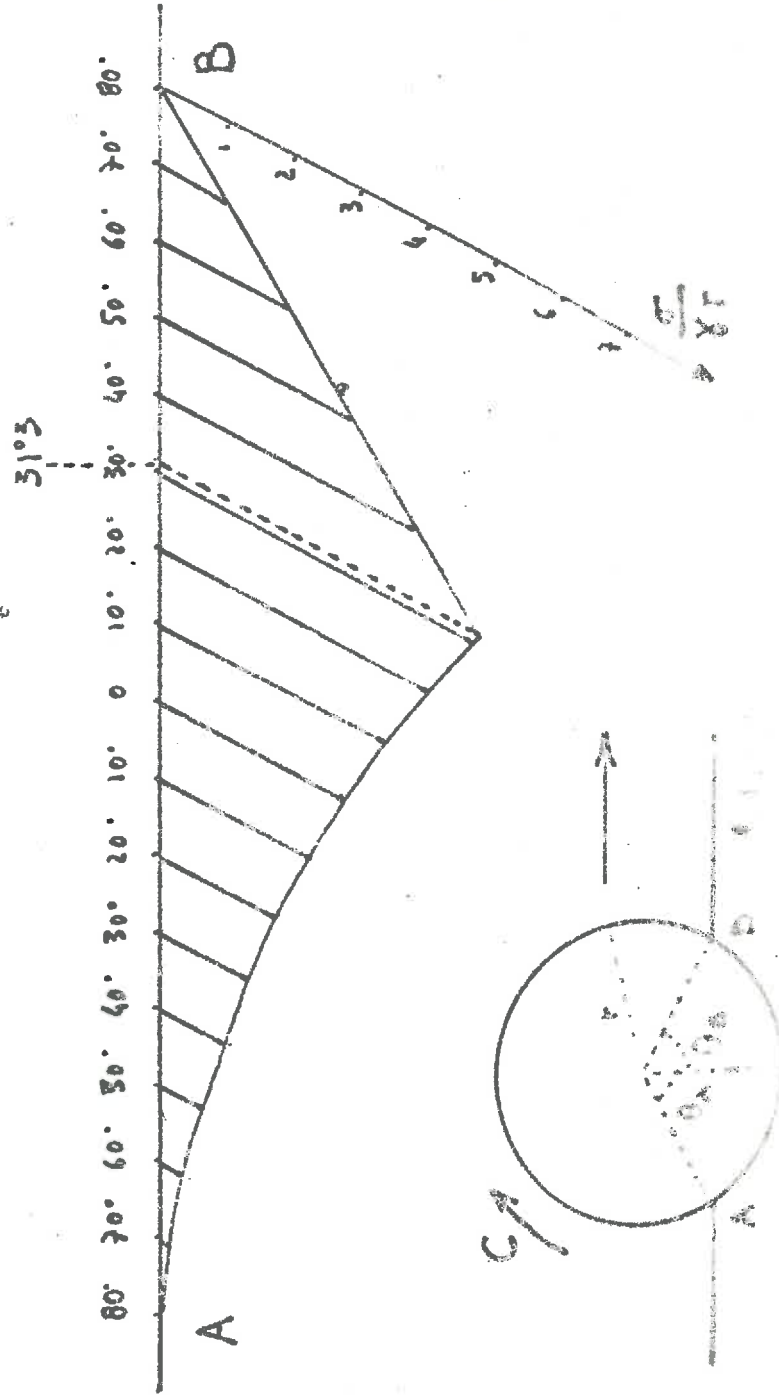
Diagramme développé de courbes sous la forme calculé par la méthode

de la Kötter + hétéro pour  $\phi = 27^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 70^\circ$



Roue motrice générale à 2 dimensions sur surface pulvérisante.

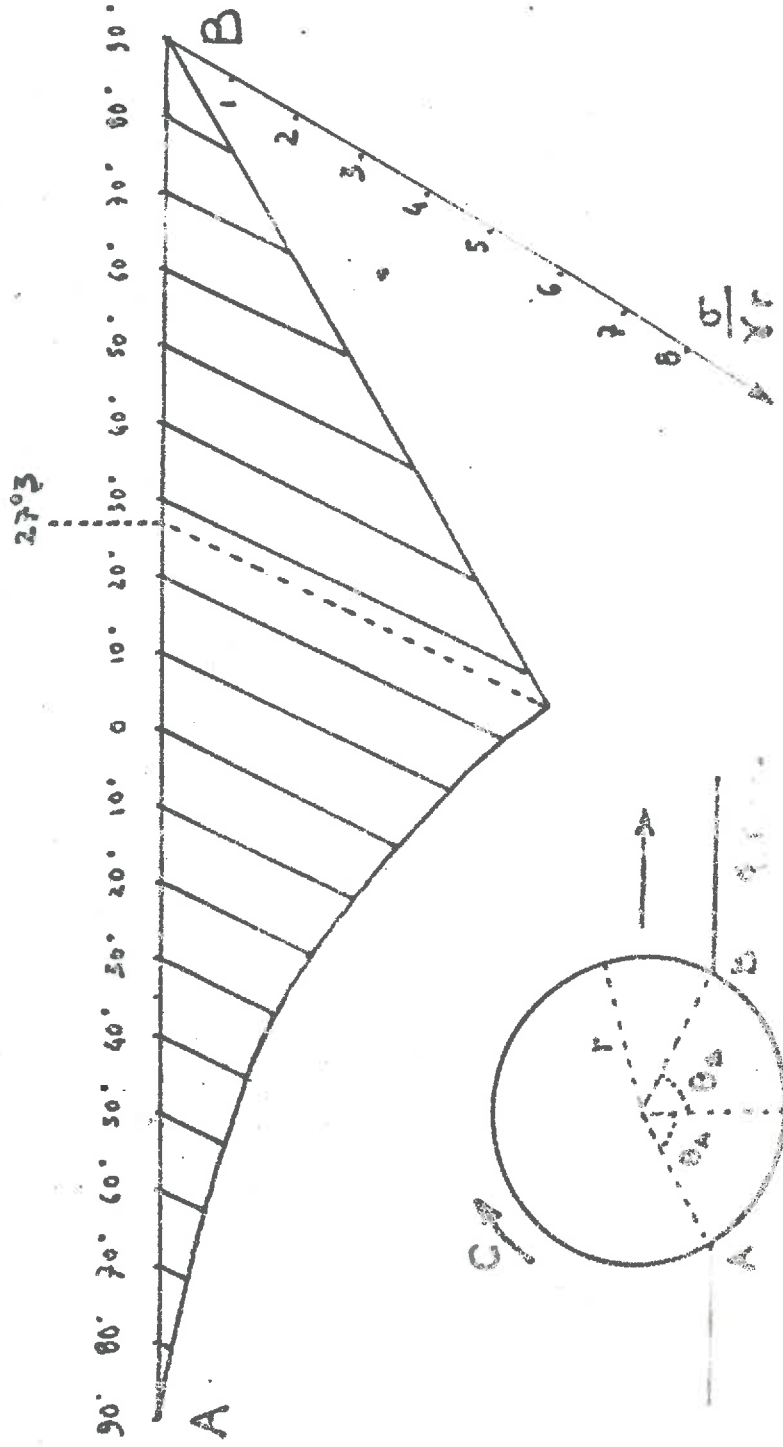
Diagramme développé de courbes sous la roue calculé par la méthode de « Köttner-butler » pour  $\phi = 27^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 80^\circ$ .





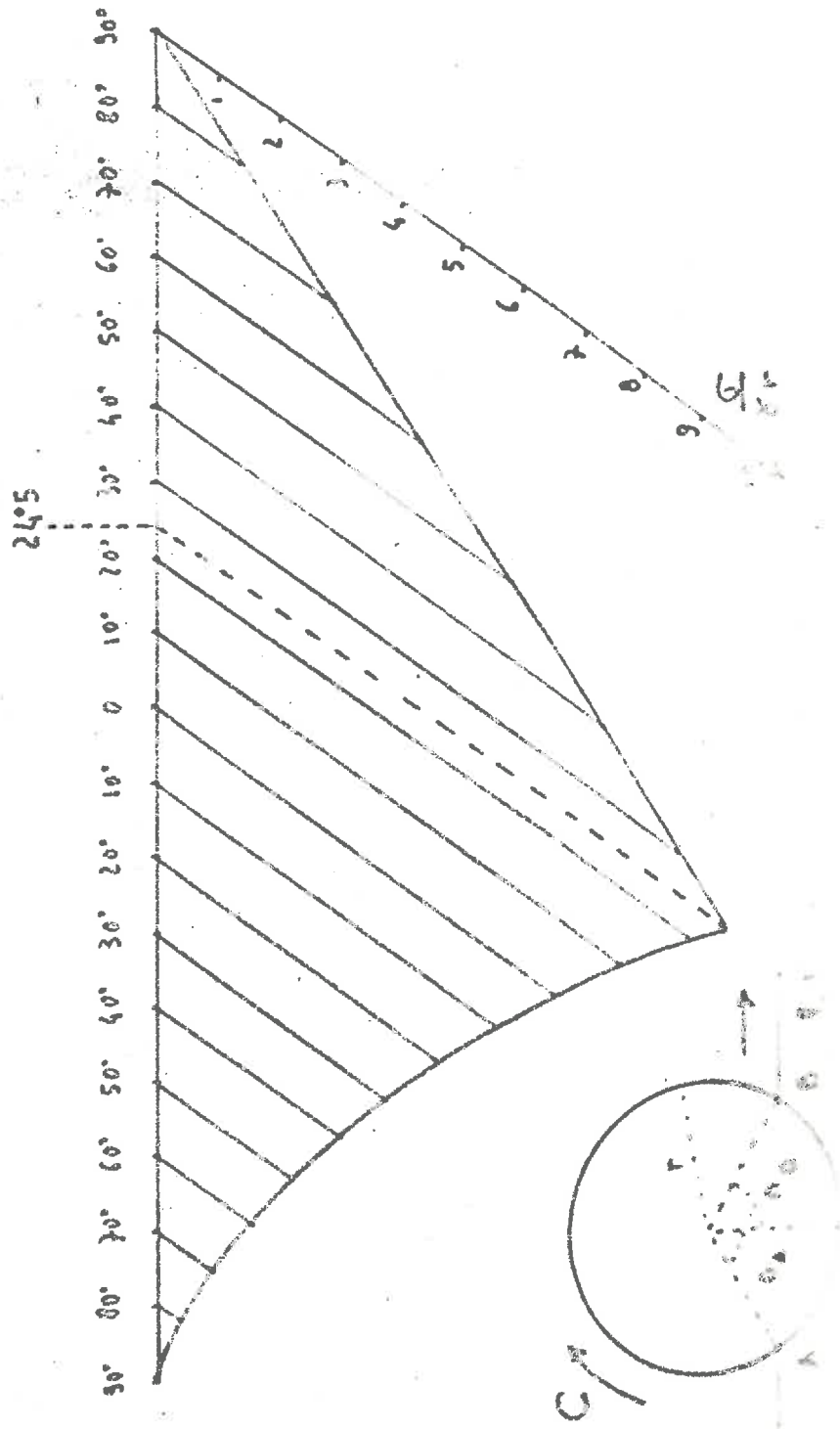
Roue motrice générale à 2 dimensions sur machine par le calcul.

Diagramme développé de contraintes sous la roue calculé par la méthode de « Köllin + butée », pour  $\phi = 27^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 90^\circ$ .



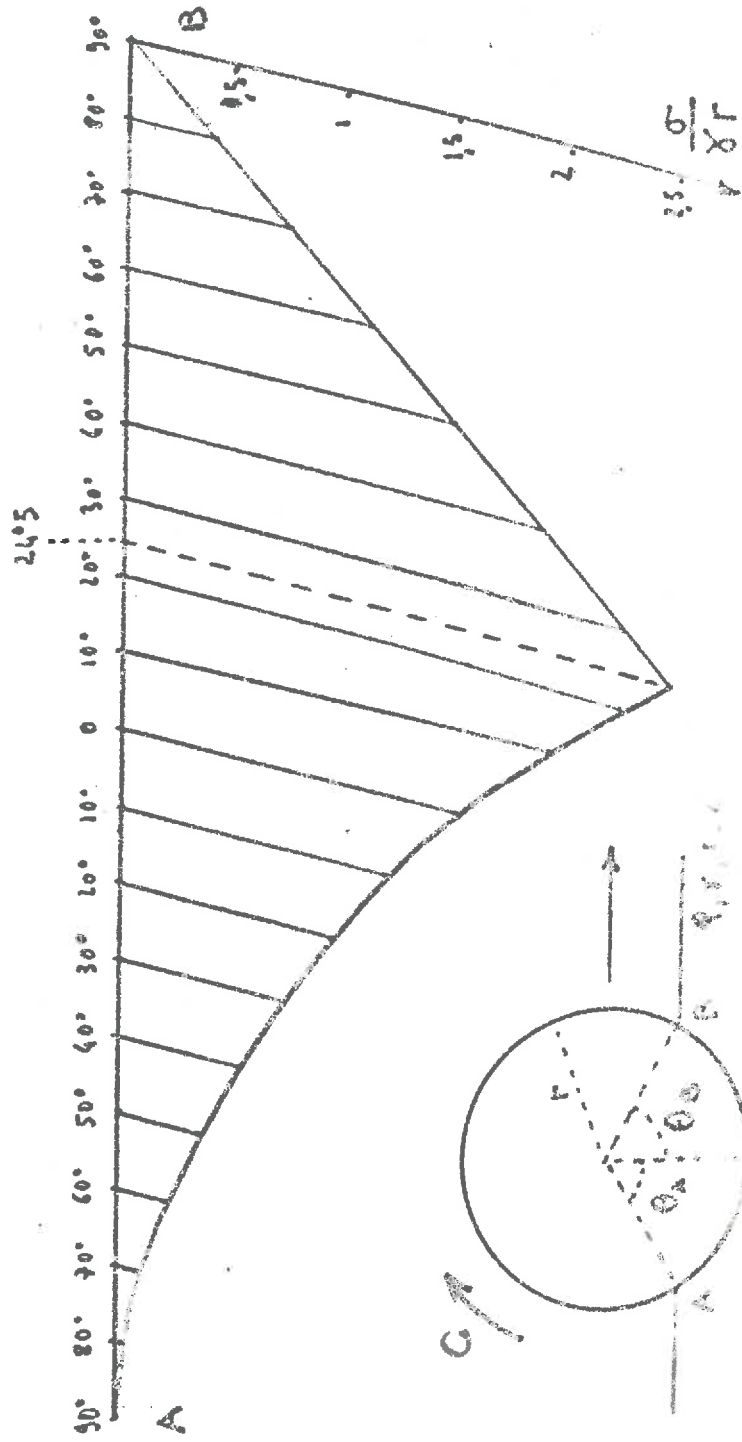
Roue motrice générale à 2 dimensions sur matériau pulvérisant.

Diagramme développé de contraintes sous la roue calculé par la méthode de « Kötter - bulles » pour  $\varphi = 35^\circ$ ;  $\theta_A = \theta_B = 90^\circ$ .



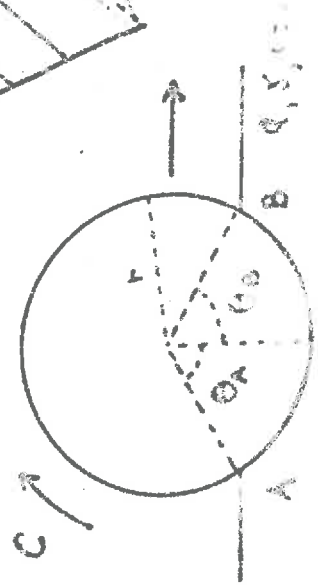
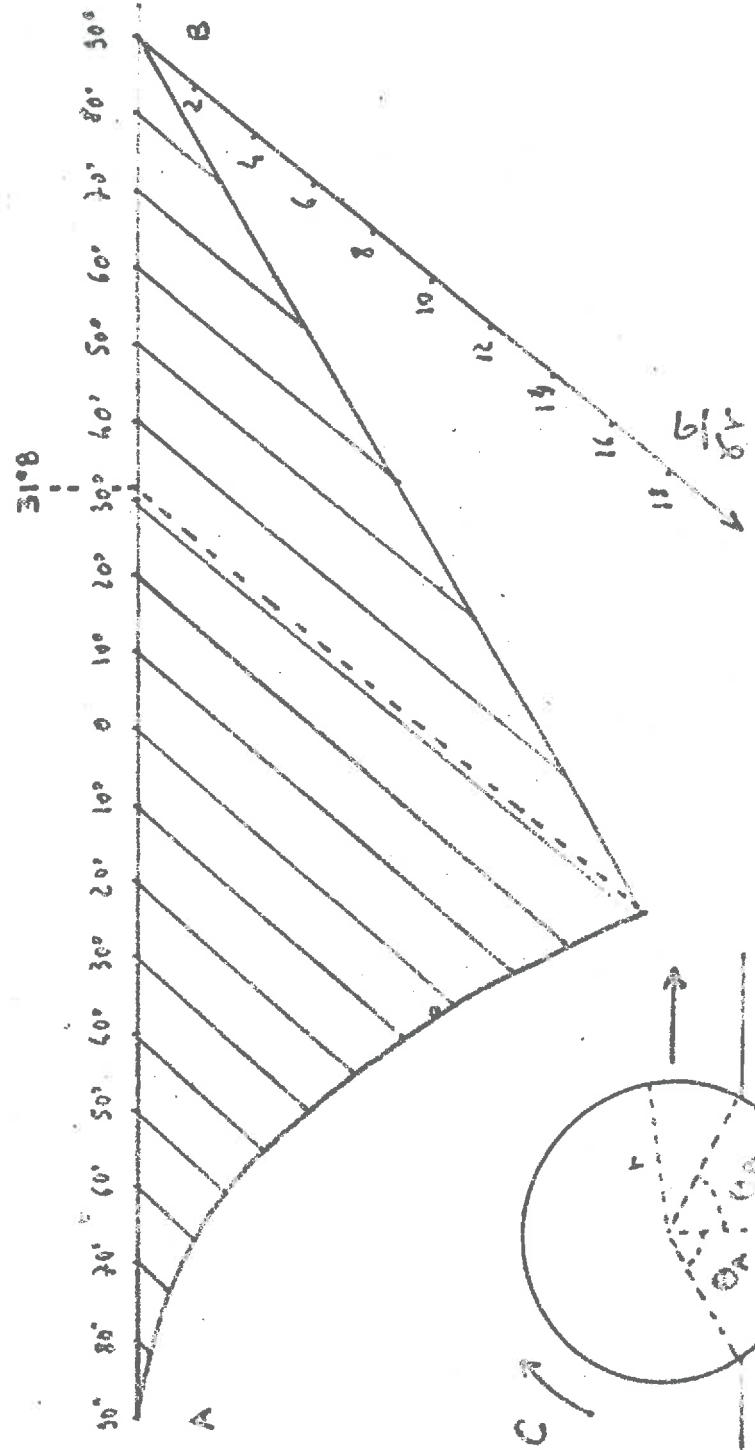
Roue motrice générale à 2 dimensions sans conditions particulières.

Diagramme développé des contraintes sur la roue calculé par la méthode de Kötter - buté II pour  $\beta = 15^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 90^\circ$



Roue motrice générale à 2 dimensions sur vecteurs polaires.

Diagramme développé de courants sur la roue calculé par la méthode de la Kötter-Intégration pour  $\phi = 40^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 50^\circ$



$\theta_A = 80^\circ \quad \vartheta = 27^\circ$

|  |    |       |       |       |       |       |       |       |      |
|--|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $\theta$                                     | 80 | 70    | 60    | 50    | 40    | 30    | 20    | 10    | 0    |
| $\frac{G}{\gamma L r \cos \vartheta}$ Kötter | 0  | 0,217 | 0,387 | 0,541 | 0,711 | 0,892 | 1,056 | 1,172 | 1,23 |

|  |       |       |       |       |      |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| $\theta$                                     | -10   | -20   | -30   | -40   | -50  | -60   | -70   |
| $\frac{G}{\gamma L r \cos \vartheta}$ Kötter | 4,709 | 5,715 | 6,753 | 7,908 | 8,48 | 10,15 | 0,850 |

$\frac{G}{\gamma L r}$  butée = 11,4 - 9,1

d'où  $\theta_p = -31^\circ 3' = -0,528$  radian.

$\frac{G}{\gamma L r^3}$  butée = 1,035

$\frac{G}{\gamma L r^3}$  Kötter = 1,548

$\frac{G}{\gamma L r}$  butée = 2,1

$\frac{G}{\gamma L r}$  Kötter = 2,81

$\theta_A = 70^\circ \quad \vartheta = 27^\circ$

|  |       |       |       |       |       |       |        |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\theta$                                     | 70    | 60    | 50    | 40    | 30    | 20    | 10     |
| $\frac{G}{\gamma L r \cos \vartheta}$ Kötter | 0     | 0,271 | 0,587 | 0,956 | 1,442 | 1,851 | 2,363  |
| $\theta$                                     | -10   | -20   | -30   | -40   | -50   | -60   | -70    |
| $\frac{G}{\gamma L r \cos \vartheta}$ Kötter | 3,649 | 4,398 | 5,263 | 6,218 | 7,257 | 8,558 | 10,041 |

$\frac{G}{\gamma L r}$  butée = 11,7 - 10,65

d'où  $\theta_p = -35^\circ 4' = -0,620$  radian.

$\frac{G}{\gamma L r^3}$  butée = 0,61

$\frac{G}{\gamma L r^3}$  Kötter = 1,33

$$\frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ butée} = 1,27 \quad , \quad \frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ Kötter} = 2,5$$

$$\frac{H}{\gamma L r^2} \text{ butée} = 0,438 \quad , \quad \frac{H}{\gamma L r^2} \text{ Kötter} = 1,255$$

$$\text{tg } \lambda = \frac{H}{Q} = 0,448$$

$$\theta_A = 60^\circ \quad \beta = 27^\circ$$

| $\theta$                                       | 60 | 50    | 40    | 30    | 20    | 10    | 0     |
|--|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{Q}{\gamma r \cos \beta} \text{ Kötter}$ | 0  | 0,302 | 0,651 | 0,970 | 1,628 | 1,811 | 2,282 |

| $\theta$                                       | - 10  | - 20  | - 30  | - 40  | - 50  | - 60  |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{Q}{\gamma r \cos \beta} \text{ Kötter}$ | 2,831 | 3,437 | 4,103 | 4,848 | 5,687 | 6,578 |

$$\frac{Q}{\gamma r} \text{ butée} = 12,9 - 13,7 \quad ,$$

$$\text{d'où } \theta_f = - 38^\circ 1' = - 0,663 \text{ radian,}$$

$$\frac{Q}{\gamma L r^3} \text{ butée} = 0,391 \quad , \quad \frac{Q}{\gamma L r^3} \text{ Kötter} = 0,947$$

$$\frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ butée} = 0,665 \quad , \quad \frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ Kötter} = 1,99$$

$$\frac{H}{\gamma L r^2} \text{ butée} = 0,211 \quad , \quad \frac{H}{\gamma L r^2} \text{ Kötter} = 0,7$$

$$\text{tg } \lambda = 0,344$$

$\theta_A = 50^\circ \quad \phi = 27^\circ$

|  |    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\theta$                                   | 50 | 40    | 30    | 20    | 10    | 0     | -10   | -20   | -30   | -40   |
| $\frac{\sigma}{\gamma r \cos \phi}$ Kotter | 0  | 0,258 | 0,544 | 0,860 | 1,210 | 1,576 | 1,964 | 2,355 | 2,883 | 3,450 |

$\frac{\sigma}{\gamma r}$  butée = 13,15 - 16,76

d'où  $\theta_2 = -33^\circ 2' = -0,575$

$\frac{G}{\gamma L r^2}$  butée = 0,221       $\frac{G}{\gamma L r^2}$  Kotter = 0,713

$\frac{G}{\gamma L r^2}$  butée = 0,47       $\frac{G}{\gamma L r^2}$  Kotter = 1,237

$\frac{H}{\gamma L r^2}$  butée = 0,141       $\frac{H}{\gamma L r^2}$  Kotter = 0,391

eg  $\lambda = 0,288$

$\theta_A = 40^\circ \quad \phi = 27^\circ$

|  |    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\theta$                                   | 40 | 30    | 20    | 10    | 0     | -10   | -20   | -30   | -40   |
| $\frac{\sigma}{\gamma r \cos \phi}$ Kotter | 0  | 0,237 | 1,496 | 0,770 | 1,063 | 1,363 | 1,675 | 1,968 | 2,358 |

La contribution due à la butée est négligeable.

$\frac{G}{\gamma L r^2}$  total = 1       $\frac{G}{\gamma L r^2}$  total = 0,46

$\theta_A = 30^\circ \quad \phi = 27^\circ$

|  |    |       |       |       |       |       |       |
|--|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\theta$                                   | 30 | 20    | 10    | 0     | -10   | -20   | -30   |
| $\frac{\sigma}{\gamma r \cos \phi}$ Kotter | 0  | 0,213 | 0,435 | 0,659 | 0,886 | 1,112 | 1,338 |

La contribution due à la butée est négligeable.

Tableau des contraintes de butée  
pour  $\theta = 10, 15, 20, 35, 40, 45^\circ$

|                       | $\theta = 10^\circ$                         | $15^\circ$ | $20^\circ$ | $35^\circ$ |
|-----------------------|---|------------|------------|------------|
| $\theta_B = 90^\circ$ | $\frac{\sigma}{\delta r}$ butée = 2,47-1,64 | 3,44-2,19  | 4,72-3,01  | 16,0-10,2  |
| $\theta_B = 80^\circ$ | " 2,41-1,73                                 | 3,35-2,40  | 4,82-3,45  | 19,25-13,8 |
| $\theta_B = 70^\circ$ | " 2,175-1,78                                | 3,15-2,58  | 4,76-3,9   | 22,8-18,7  |
| $\theta_B = 60^\circ$ | " 1,86-1,78                                 | 2,85-2,71  | 4,55-4,35  | 26,7-25,5  |
| $\theta_B = 50^\circ$ | " 1,51-1,73                                 | 2,44-2,8   | 4,16-4,77  | 30,2-34,6  |

|                       | $\theta = 40^\circ$                         | $45^\circ$ |
|-----------------------|---|------------|
| $\theta_B = 90^\circ$ | $\frac{\sigma}{\delta r}$ butée = 27,5-17,5 | 52,5-33,5  |
| $\theta_B = 80^\circ$ | " 35,6-25,5                                 | 73,6-52,9  |
| $\theta_B = 70^\circ$ | " 46,4-37,2                                 | 102,5-84   |
| $\theta_B = 60^\circ$ | " 57,1-54,6                                 | 141-135    |
| $\theta_B = 50^\circ$ | " 70-80,3                                   | 188-216    |

Tableau des constantes  $C_1$

|               | $\theta_A = 1,57$ | 1,396 | 1,221 |
|---------------|-------------------|-------|-------|
| $\theta = 10$ | 0,785             | 0,483 | 0,216 |
| 15            | 1,4               | 1,06  | 0,56  |
| 20            | 2,19              | 1,67  | 1,2   |
| 35            | 6,37              | 4,88  | 3,67  |
| 40            | 9,2               | 7     | 5,06  |
| 45            | 13,9              | 10,3  | 7,28  |



$$\beta = 10^\circ \quad \theta_A = 1,57 = 90^\circ$$

$$\theta_p = - 26^\circ 6' = 0,464 \text{ radian.}$$

$$\frac{O}{\delta L r^2} \text{ butée} = 0,772 \quad , \quad \frac{O}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 1,7$$

$$\frac{C}{\delta L r^2} \text{ butée} = 0,365 \quad , \quad \frac{C}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 0,365$$

$$\frac{H}{\delta L r^2} \text{ total} = 1,431$$

$$\text{tg } \lambda = 0,56 \quad \frac{R}{\delta L r^2} = 2,86$$

$$\beta = 10^\circ \quad \theta_A = 1,396 = 80^\circ$$

$$\theta_p = - 30^\circ = - 0,523 \text{ radian.}$$

$$\frac{O}{\delta L r^2} \text{ butée} = 0,1445 \quad , \quad \frac{O}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 1,295$$

$$\frac{C}{\delta L r^2} \text{ butée} = 0,03 \quad , \quad \frac{C}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 0,2885$$

$$\beta = 10^\circ \quad \theta_A = 1,221 = 70^\circ$$

$$\theta_p = - 31^\circ 6' = 0,550 \text{ radian.}$$

$$\beta = 15^\circ \quad \theta_A = 1,57$$

$$\theta_p = - 24^\circ 5' = 0,427 \text{ radian.}$$

$$\frac{O}{\delta L r^2} \text{ butée} = 1,18 \quad , \quad \frac{O}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 1,56$$

$$\frac{H}{\delta L r^2} \text{ total} = 1,392 \quad \text{tg } \lambda = 0,508$$

$$\frac{R}{\gamma L r^2} \text{ total} = 3,07$$

$$\frac{C}{\gamma L r^3} \text{ butée} = 0,368 \quad , \quad \frac{C}{\gamma L r^3} \text{ Kötter} = 0,654$$

$$\phi = 20^\circ \quad \theta_A = 1,57$$

$$\theta_g = - 23^\circ 7' = - 0,413 \text{ radian,}$$

$$\frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ butée} = 1,75 \quad , \quad \frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ Kötter} = 2,69$$

$$\frac{H}{\gamma L r^2} \text{ total} = 2,087 \quad \text{tg } \lambda = 0,47$$

$$\frac{R}{\gamma L r^2} \text{ total} = 4,9$$

$$\frac{C}{\gamma L r^3} \text{ butée} = 0,678 \quad , \quad \frac{C}{\gamma L r^3} \text{ Kötter} = 1$$

$$\phi = 35^\circ \quad \theta_A = 1,57$$

$$\theta_g = - 24^\circ 2' = - 0,422$$

$$\frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ butée} = 6,375 \quad , \quad \frac{Q}{\gamma L r^2} \text{ Kötter} = 4,97$$

$$\frac{H}{\gamma L r^2} \text{ total} = 5,75 \quad \text{tg } \lambda = 0,5$$

$$\frac{R}{\gamma L r^2} \text{ total} = 16,2$$

$$\frac{C}{\gamma L r^3} \text{ butée} = 3,86 \quad , \quad \frac{C}{\gamma L r^3} \text{ Kötter} = 3,31$$

$$\varphi = 40^\circ \quad \theta_A = 1,57$$

$$\theta_2 = - 31^\circ 5 = - 0,550 \text{ radian}$$

$$\frac{Q}{\delta L r^2} \text{ butée} = 8,65 \quad , \quad \frac{Q}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 6,9$$

$$\frac{C}{\delta L r^3} \text{ butée} = 5,62 \quad , \quad \frac{C}{\delta L r^3} \text{ Kötter} = 7,3$$

$$\frac{H}{\delta L r^2} = 7,29 \quad \text{tg } \lambda = 0,47$$

$$\frac{R}{\delta L r^2} = 17,25$$

$$\varphi = 45^\circ \quad \theta_A = 1,57$$

$$\theta_2 = - 27^\circ = - 0,47 \text{ radian}$$

$$\frac{Q}{\delta L r^2} \text{ butée} = 19,4 \quad , \quad \frac{Q}{\delta L r^2} \text{ Kötter} = 15,6$$

$$\frac{C}{\delta L r^3} \text{ butée} = 14,1 \quad , \quad \frac{C}{\delta L r^3} \text{ Kötter} = 8,4$$

$$\frac{H}{\delta L r^2} \text{ total} = 8,49 \quad , \quad \text{tg } \lambda = 0,25$$

$$\frac{R}{\delta L r^2} \text{ total} = 35$$

CHAPITRE II

ETUDE DES ROUES A TROIS DIMENSIONS  
SUR MATERIAU PULVERULENT

Les travaux de BOUCHERIE ont permis de rassembler un grand nombre d'expériences sur la locomotion d'une roue sur un sable sec ( $\phi = 35^\circ$ ,  $c = 0$ ) à trois dimensions.

Nous rappellerons ici les conclusions de ses observations et mesures qui ont porté sur deux types de roue :

- diamètre : 70 cm ; largeur : 6 cm,
- diamètre : 35 cm ; largeur : 6 cm.

Roue tractée :

Les courbes  $\frac{T}{\phi L r^2} = \frac{Q}{\phi L r^2}$  relatives à ces deux roues coïncident et, à partir d'une charge verticale suffisante ( $\frac{Q}{\phi L r^2} \gg 5$ ) on obtient une droite.

Il y a donc proportionnalité entre la force de traction et la charge verticale.

L'inclinaison  $\lambda$  de la résultante sur la verticale est très faible pour  $\frac{Q}{\phi L r^2} < 2$  et augmente considérablement

pour  $2 < \frac{Q}{L r^2} < 4$  tout en restant inférieure à  $\phi = 35^\circ$  ;

pour  $\frac{Q}{L r^2} = 15$ ,  $\text{tg } \lambda = 0,46$  et  $\text{tg } \phi = 0,7$ .

Roue motrice générale :

Comme pour le problème à deux dimensions le plus intéressant est la famille de courbes :

$$\frac{C}{\delta L r^3} = f\left(\frac{R}{\delta L r^2}\right) \text{ graduées en } \frac{Q}{\delta L r^2}$$

- aux faibles inclinaisons les courbes à  $\text{tg } \lambda = \text{constante}$  sont des droites pour une valeur suffisante de  $\frac{R}{\delta L r^2}$

- à partir de  $\text{tg } \lambda = 0,5$  ce sont des droites qui passent par l'origine.

- les courbes graduées en  $\frac{Q}{\delta L r^2}$  tendent vers la même asymptote qui est une droite passant par l'origine et voisine de  $\text{tg } \lambda = 2,4$ .

Donc quelles que soient les valeurs de  $\frac{Q}{\delta L r^2}$  la roue sera en patinage total pour la même inclinaison  $\lambda$  de R.

- Le couple minimum calculé par la méthode des talus, pour des valeurs suffisantes de  $\frac{R}{\delta L r^2}$  donne un ordre de grandeur.

Exemple : pour  $\frac{R}{\delta L r^2} = 4,5$  ,  $\frac{C}{\delta L r^3} \text{ mini} = 2,6$   $\frac{C}{\delta L r^3} \text{ exp} = 3,4$ .

L'enfoncement pour les mêmes  $\frac{Q}{\delta L r^2}$  est 3 à 4 fois plus petit qu'à deux dimensions.

Nous nous sommes alors proposé d'étudier l'influence des dimensions d'une roue sur ses performances et avons plus spécialement porté notre attention sur les roues motrices à charge verticale ( $\lambda = 0$ ) qui constituent le cas le plus simple de l'important problème d'une roue motrice.

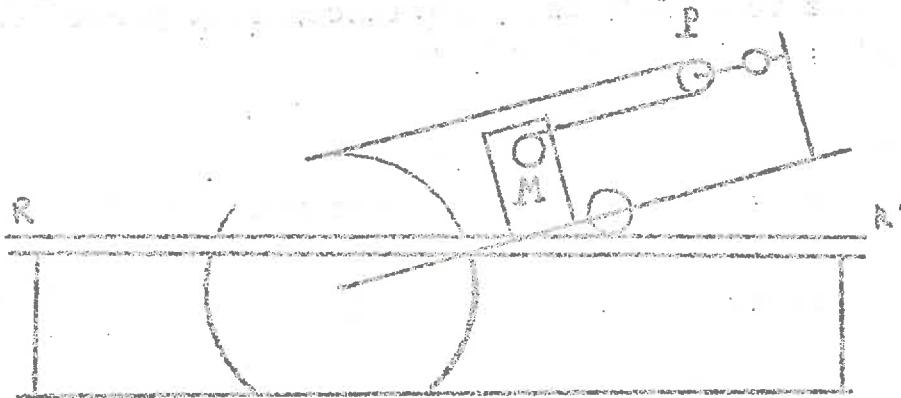
A - Etude expérimentale.

Notre série d'expériences a été faite sur la cuve de sable de dimensions :  $5 \times 0,6 \times 0,5$  m, de manière à étudier le régime permanent. Le sable avait comme caractéristiques :  $\phi = 35^\circ$ ,  $\gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ ,  $C = 0$ . Nous avons utilisé les roues ci-dessous :

Rayon : 35 cm, largeur : 24 cm ; 12 cm ; 6 cm ; 3 cm ; 1,5 cm

Rayon : 15,5 cm, largeur : 24 cm ; 12 cm ; 6 cm ; 3 cm ; 1,5 cm.

Le dispositif expérimental de mesure des efforts est le suivant :



La cuve de sable est surmontée de deux rails RR' sur lesquels se déplace un chariot à deux roues ; à une extrémité du chariot se trouve la roue à étudier qui peut tourner librement sur son axe.

35

Une gorge située dans le plan médian de la roue reçoit plusieurs tours de fil d'acier. Ce fil va passer sur une poulie P qui est fixée au chariot par l'intermédiaire d'un anneau dynamométrique et est renvoyé sur l'axe d'un moteur solidaire du chariot. Les deux brins de câble sont parallèles et le dynamomètre fournit le double de la tension du câble, d'où nous déduisons le couple appliqué à la roue.

Une force verticale est appliquée sur l'axe de la roue par l'intermédiaire du chariot chargé de poids. On impose à la roue une vitesse de rotation constante.

Les résultats des expériences sont présentés sous forme graphique. Figures 15, 16, 17.

Figure 15 :

Sur ce graphique nous avons représenté la variation du couple appliqué à la roue en fonction de la charge verticale qu'elle supporte, pour différents types de roues.

On constate que les courbes se regroupent par deux (même largeur et rayons doubles). Autrement dit, la largeur de la roue a une plus grande influence que le rayon sur la valeur du couple.

Ainsi : pour  $Q = 30$  kg on trouve pour  $L = 24$  cm,  $r = 17,5$  cm  
 $C = 175 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ ,

et pour  $L = 24$  cm,  $r = 35$  cm,  $C = 145 \text{ kg}\cdot\text{cm}$

Alors que :

pour  $L = 12$  cm,  $r = 35$  cm on trouve :  $C = 255 \text{ kg}\cdot\text{cm}$

Figure 16 :

Ce sont les mêmes résultats que précédemment mais exposés sous forme adimensionnelle.

Nous avons représenté la courbe moyenne qui a pour équation :  $\frac{C}{\gamma L r^3} = \frac{1}{10} \left( \frac{Q}{\gamma L r^2} \right)^{3/2}$

La dispersion des points pour  $\frac{Q}{\gamma L r^2} < 5$  est très faible mais, au-delà les points sont assez écartés de la courbe moyenne.

Néanmoins, on peut conclure que pour les valeurs des charges verticales expérimentées,  $\frac{C}{\gamma L r^3}$  n'est fonction que de  $\frac{Q}{\gamma L r^2}$  et de la nature du sol.  $\frac{C}{\gamma L r^3}$  ne dépend plus des dimensions, largeur et diamètre, de la roue.

Figure 17 :

Cette figure se rapporte aux enfoncements des roues. Au cours des expériences, nous avons remarqué que l'arc de contact de la roue avec le sable était pratiquement limité à l'arrière par la verticale passant par le centre de la roue.

On peut donc définir pour le domaine de charges expérimentées l'enfoncement de la roue par la valeur de cet arc  $\xi$  en radian par exemple.

Nous avons donc tracé pour chaque type de roue une courbe :  $\frac{Q}{\gamma L r^2} = f(\xi)$ .



Figure 15

Roue matrice pure à 3 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 35^\circ$ ,  $\gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ )

Variation du couple C en fonction de la charge verticale Q

pour divers modèles de roues.

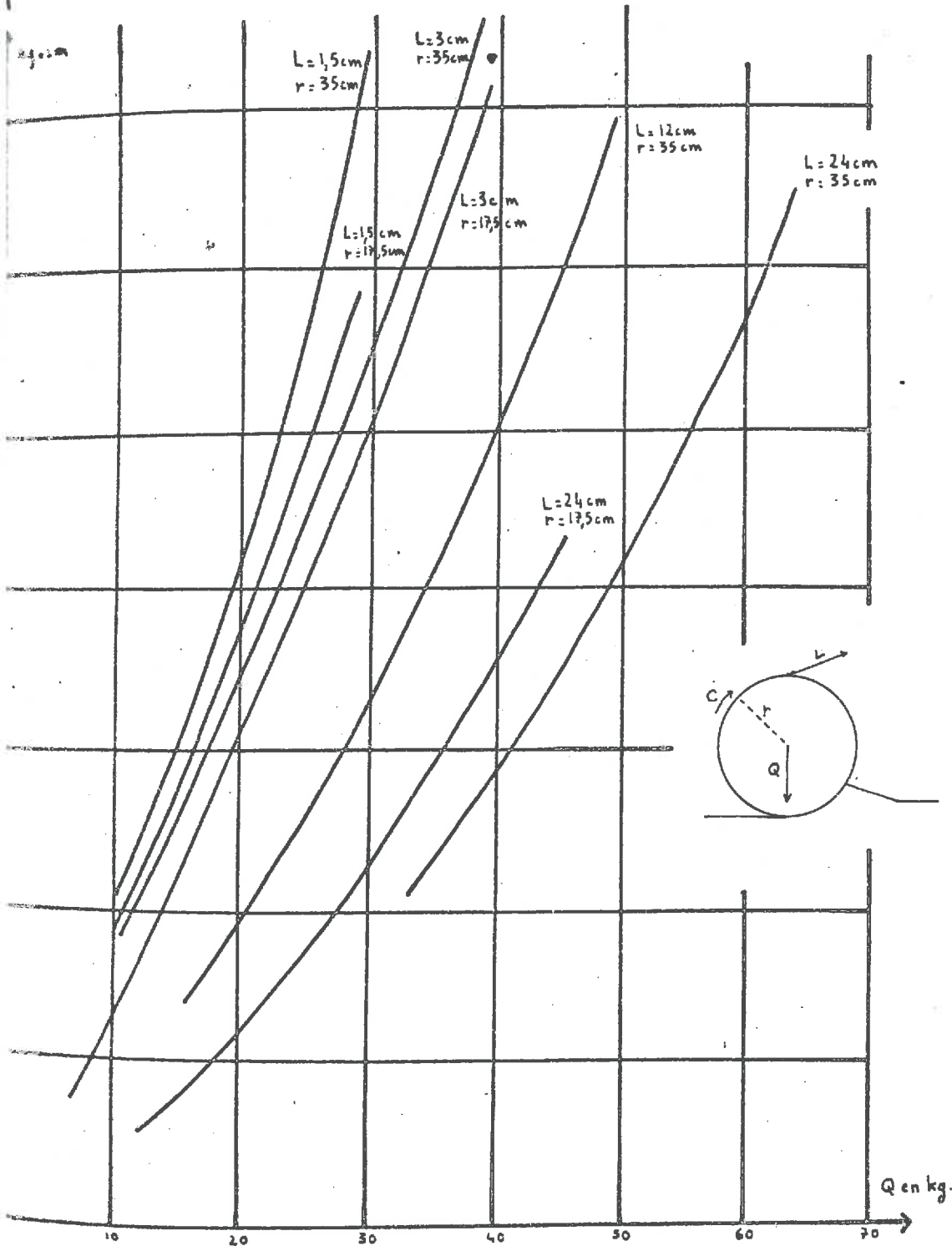


Figure 16

Roue motrice pure à 3 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 35^\circ, \gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ )

variation du couple C en fonction de la charge verticale Q pour différentes roues.

--- Couple max. donné par la méthode des talus.  
 $\Delta$  Points expérimentaux.

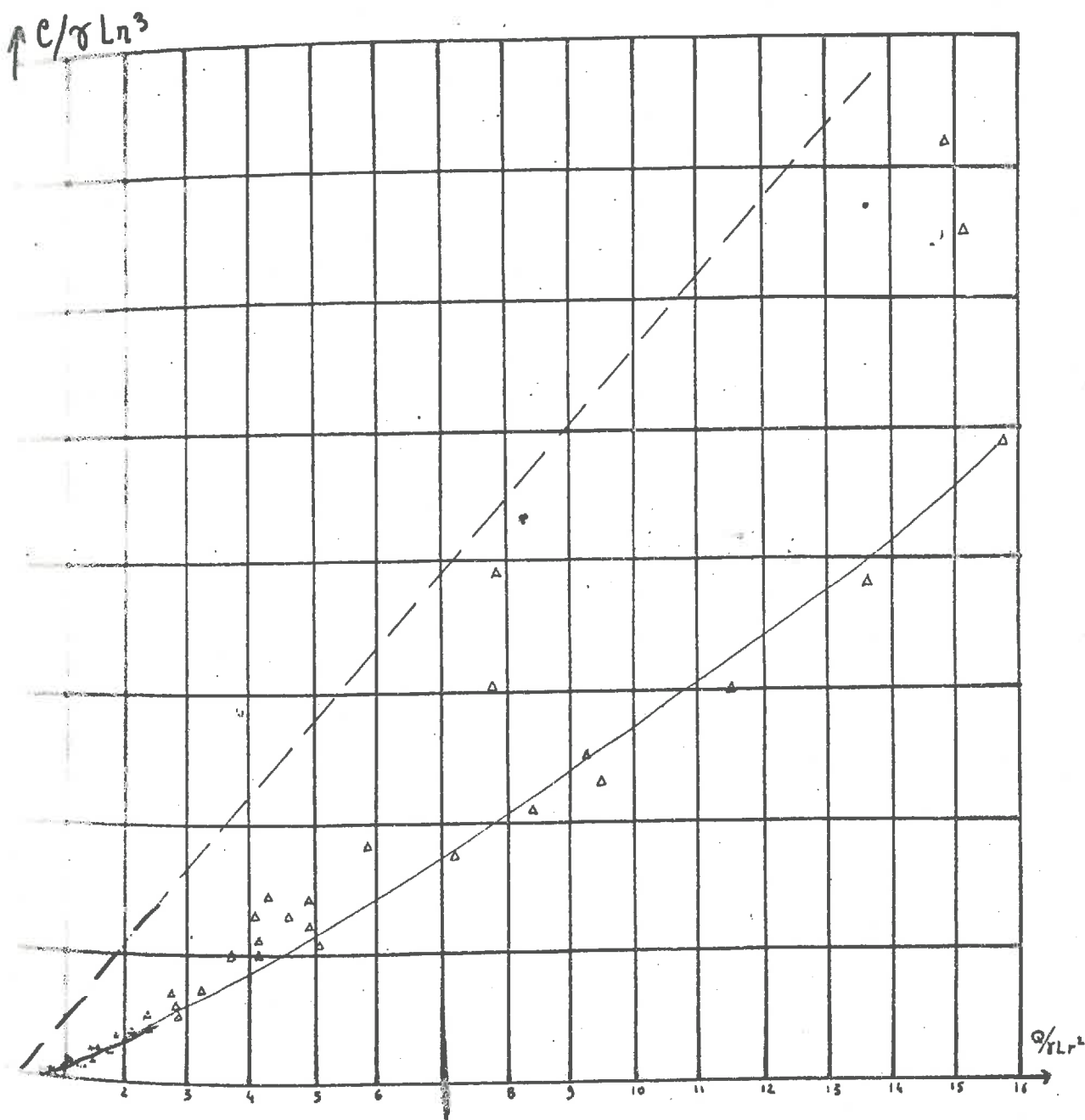
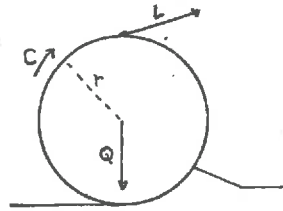
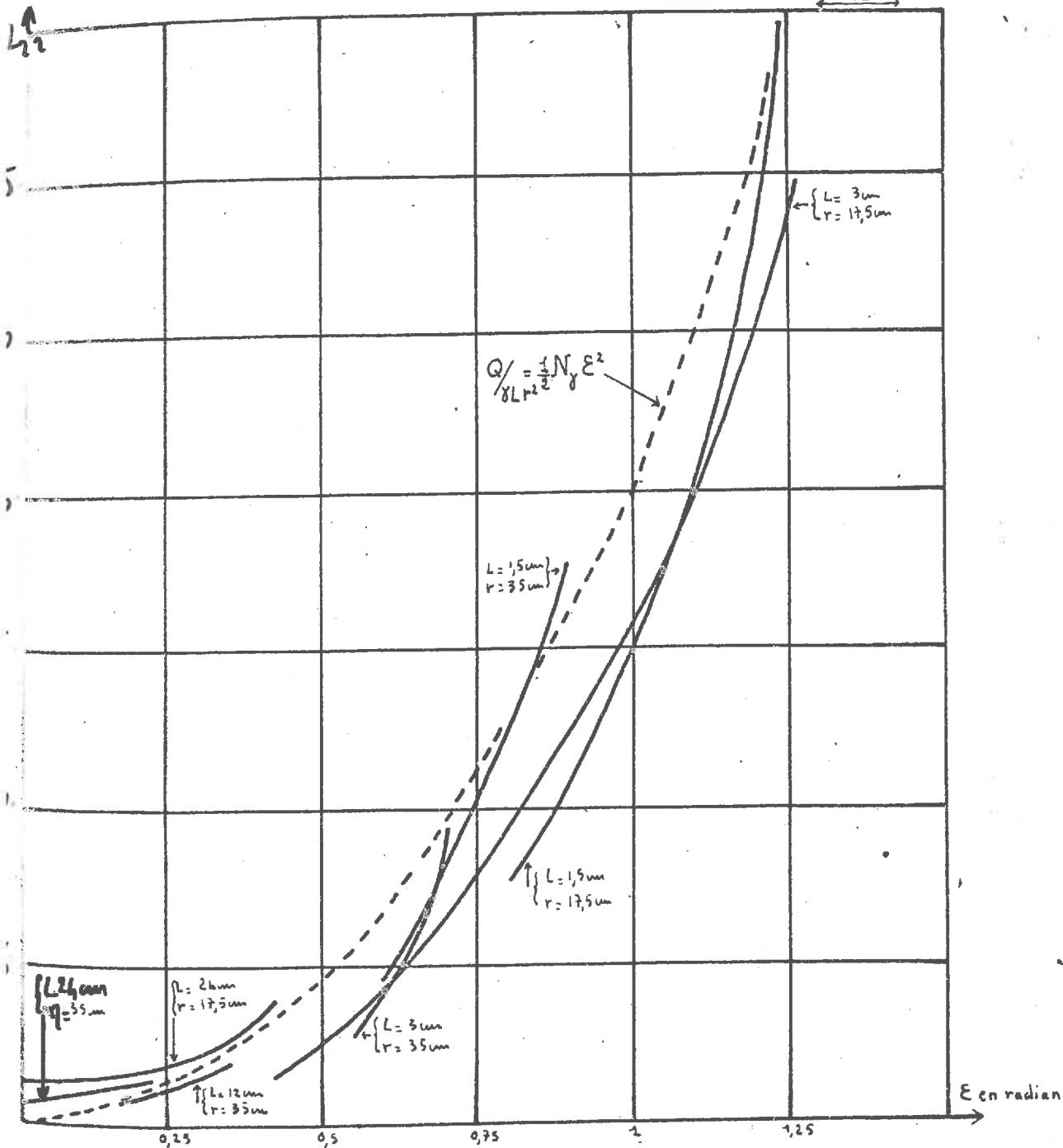
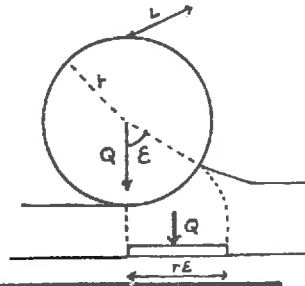


Figure 17

Roue motrice pure à 3 dimensions sur matériau pulvérulent ( $\phi = 35^\circ, \gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ )

Variation de la charge verticale  $Q$  en fonction de l'angle de contact  $E$  roue-sol pour différentes roues.

— courbe expérimentale relative à 1 roue.  
 - - - courbe déduite du calcul à l'aide des coefficients de Terzaghi à 2 dimensions.



En considérant la figure 17 on constate que les points expérimentaux sont tous groupés sur une courbe et une seule. C'est-à-dire que  $\frac{Q}{\delta L r^2}$  n'est fonction que de  $\zeta$  et de la nature du sol, mais qu'il ne dépend ni de la largeur, ni du diamètre de la roue.

L'équation de la courbe étant de la forme  $\frac{Q}{\delta L r^2}$  nous déduisons de cette propriété une méthode de calcul de l'enfoncement de la roue.

### B - Conclusions des expériences.

#### Calcul du couple en régime permanent :

Sur la figure 15, nous avons tracé le couple minimum donné par la méthode des talus  $C = R r \sin \phi$ ,  $R$  résultante des forces appliquées,  $r$  le rayon de la roue,  $\phi$  l'angle de frottement interne du matériau. On voit que  $C$  minimum est toujours plus grand que le couple mesuré. Pour  $\frac{Q}{L r^2} = 11,2$

$$C_{\text{minimum}} = 8,24 \text{ kg/cm} \quad \text{et} \quad C_{\text{mesuré}} = 2,45 \text{ kg/cm}$$

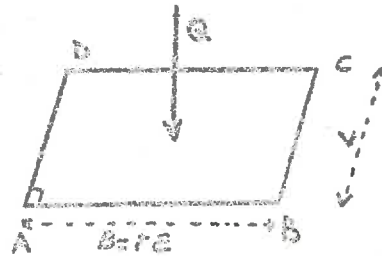
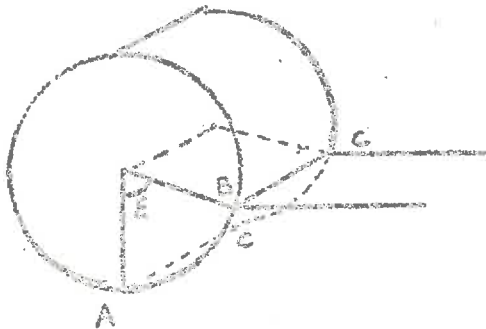
$$C_{\text{minimum}} - C_{\text{mesuré}} = 2,79, \text{ soit une erreur relative de } 50 \%$$

Cet écart est peut être dû au fait que les hypothèses du calcul du couple minimum (plasticité parfaite le long de la roue avec contraintes inclinées de  $\phi$ ) ne sont pas vérifiées car que la charge verticale n'est pas suffisamment grande pour soulever le sol sous la roue en état de plasticité parfaite. A l'aide d'une autre méthode de calcul nous retiendrons cette formule nous donnant un ordre de grandeur du couple à appliquer à une motrice pure pour qu'elle se meuve à faible vitesse en régime permanent.

Calcul de l'enfoncement en régime permanent :

L'expérience ayant montré (voir Figure 17) que  $Q = \gamma L r^2 k \xi^2$  pour un sable sans cohésion avec  $k$  ne dépendant que de l'angle de frottement du sable, nous avons comparé les résultats expérimentaux avec ceux donnés par le calcul de l'enfoncement par la méthode de TERZAGHI à deux dimensions.

Nous avons assimilé l'aire de contact ABCD roue-sol à une fondation plane superficielle rectangulaire de dimensions  $r \xi$  et  $L$ , chargée verticalement en son centre. Nous supposons donc que les déformations plastiques se font dans des plans parallèles à celui de la roue. On a alors avec TERZAGHI



$B = r \xi$  et  $\frac{Q}{L} = \frac{1}{2} \gamma r^2 \xi^2 N_\gamma$  avec  $\phi = 35^\circ, N_\gamma = 40, \gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$   
 d'où  $\frac{Q}{\gamma L r^2} = 20 \xi^2$

Nous avons tracé cette courbe en pointillé sur la Figure 17.

Cette méthode nous fournit donc une valeur satisfaisante de l'enfoncement d'une roue motrice pure.

A défaut de méthodes plus précises, nous pouvons donc donner un ordre de grandeur du couple et de l'enfoncement d'une roue motrice pure sur le sable sans cohésion ( $c = 0 ; \phi = 35^\circ ; \gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ ) qui a servi à nos expériences.

Remarque :

Nous avons considéré que la charge était centrée, ce qui est justifié par le fait que dans toutes nos expériences la force verticale excentrée (par rapport au centre de la roue) était appliquée au point milieu de l'arc de contact roue-sol.

C - Calcul d'une roue motrice pure en milieu pulvérulent quelconque. ( $\gamma, \phi, e = 0$ ).

Le calcul du couple minimum et de l'enfoncement en supposant la plasticité parfaite à deux dimensions paraît acceptable pour le cas particulier du matériau que nous avons utilisé ; nous avons étendu ces résultats à un sable de poids spécifique  $\gamma$  quelconque et d'angle de frottement interne  $\phi$  quelconque.

Nous présentons sur la Figure 18 un abaque donnant l'enfoncement (caractérisé par l'arc de contact  $\bar{E}$  sol-roue) d'une roue rigide motrice pure dans un sable d'angle de frottement quelconque, en fonction de la charge verticale adimensionnelle. La Figure 19 permet de calculer un ordre de grandeur du couple nécessaire au mouvement de la roue lorsqu'on se donne sa charge verticale.

D - Détermination de la charge verticale limite compatible avec un enfoncement donné.

La Figure 20 montre comment varie la force portante verticale d'une roue motrice pure, en fonction de l'angle de frottement interne du matériau pulvérulent. Nous avons pris deux valeurs de l'enfoncement  $e = r/2$  et  $e = r$ .

L = 24 cm

R = 35 cm

ROUES MOTRICES DANS LE SABLE A 3 DIMENSIONS, SANS FORCE HORIZONTALE

Tableaux des mesures

| Charge<br>verticale<br>(kg) | $\frac{C}{\gamma L r^3}$ |                | $\frac{Q}{\gamma L r^2}$ |                        | Couple<br>(kgXcm) | $\frac{Q}{\gamma L r^3}$ |                          | $\Delta$ | lecture<br>P<br>max | H<br>(cm) | cos E | E<br>grad | RE   | L RE<br>cm <sup>2</sup> | RE/L |
|-----------------------------|--------------------------|----------------|--------------------------|------------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|----------|---------------------|-----------|-------|-----------|------|-------------------------|------|
|                             | C                        | $\gamma L r^3$ | Q                        | $\gamma L r^2$         |                   | $\frac{Q}{\gamma L r^3}$ | $\frac{Q}{\gamma L r^3}$ |          |                     |           |       |           |      |                         |      |
| 30,32                       | 0,0675                   | 0,69           | 104,2                    | -                      | -                 | -                        | 20                       | 35       | 1                   | 0         | 0     | 0         | 0    | 0                       | 0    |
| 35,14                       | 0,0895                   | 0,797          | 138                      | -                      | -                 | -                        | 25-28                    | 35       | 1                   | 0         | 0     | 0         | 0    | 0                       | 0    |
| 39,97                       | 0,0987                   | 0,907          | 152                      | 0,289.10 <sup>-3</sup> | 0,107             | 28-30                    | 30-35                    | 34,8     | 0,994               | 0,108     | 3,82  | 91,6      | 0,16 |                         |      |
| 45,1                        | 0,11                     | 1,025          | 169,5                    | 0,328                  | 0,107             | 30-35                    | 34,8                     | 0,994    | 0,108               | 3,82      | 91,6  | 0,16      |      |                         |      |
| 49,6                        | 0,127                    | 1,13           | 195,5                    | 0,309                  | 0,11              | 35-40                    | 34,7                     | 0,992    | 0,125               | 4,375     | 101   | 0,182     |      |                         |      |
| 54,4                        | 0,144                    | 1,237          | 222                      | 0,260                  | 0,111             | 40-45                    | 34,5                     | 0,986    | 0,167               | 5,85      | 140,5 | 0,244     |      |                         |      |
| 59,2                        | 0,178                    | 1,345          | 274                      | 0,282                  | 0,132             | 50-55                    | 34,5                     | 0,986    | 0,167               | 5,85      | 140,5 | 0,244     |      |                         |      |
| 64                          | 0,212                    | 1,455          | 326                      | 0,238                  | 0,146             | 60-65                    | 34,2                     | 0,977    | 0,214               | 7,49      | 179,5 | 0,312     |      |                         |      |

L = 12 cm

R = 35 cm

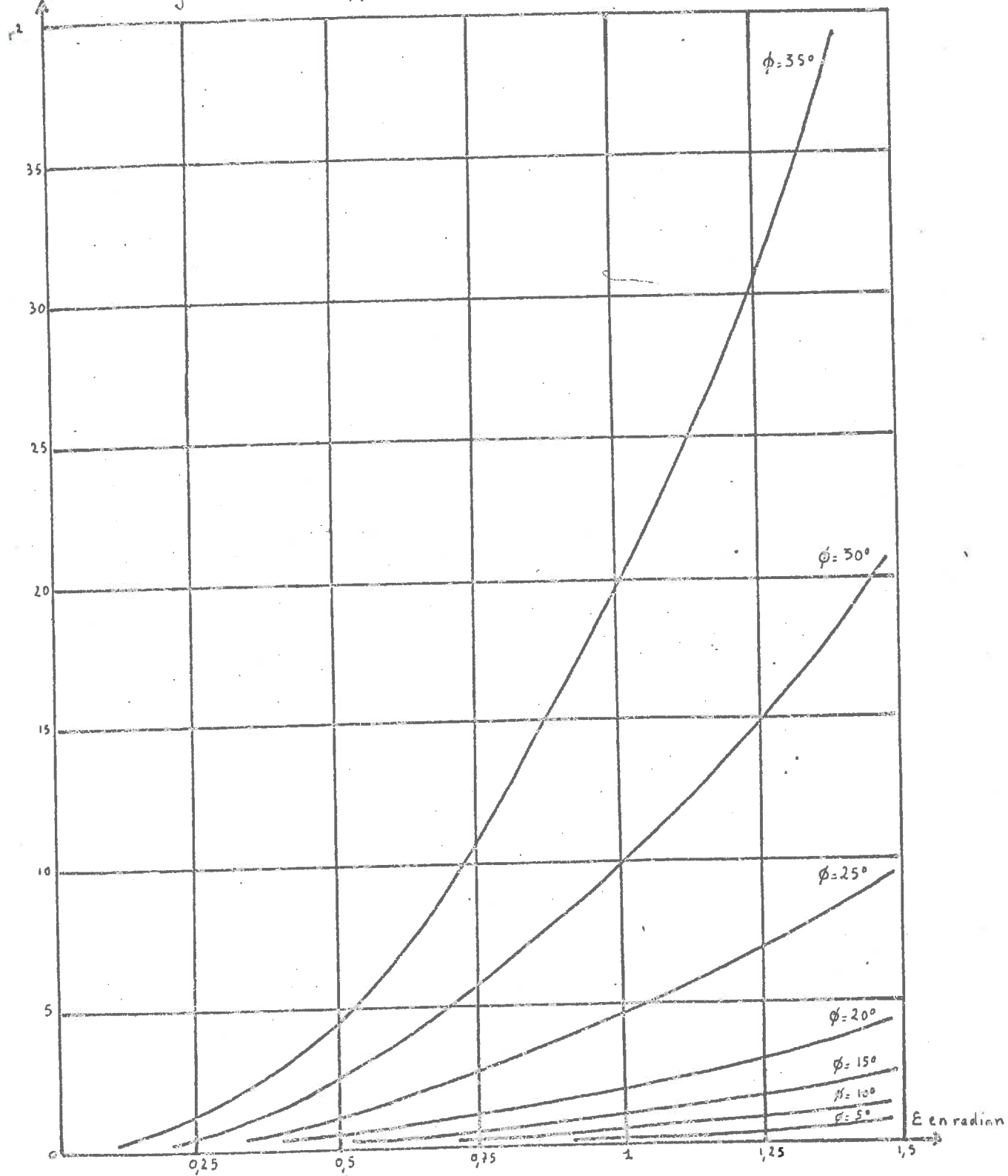
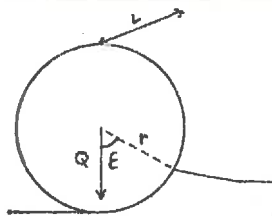


|       |        |       |       |       |       |       |      |       |       |       |       |       |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 17,07 | 0,0846 | 0,775 | 65,2  | 0,163 | 0,11  | 10-15 | 34,5 | 0,996 | 0,167 | 5,85  | 70,2  | 0,487 |
| 21,89 | 0,1525 | 0,995 | 117,5 | 0,174 | 0,153 | 20-25 | 34,3 | 0,980 | 0,2   | 7     | 84    | 0,583 |
| 26,72 | 0,1695 | 1,215 | 130,5 | 0,179 | 0,14  | 25    | 34   | 0,972 | 0,237 | 8,3   | 99,6  | 0,692 |
| 31,85 | 0,22   | 1,45  | 169,5 | 0,172 | 0,152 | 30-35 | 33,5 | 0,957 | 0,294 | 10,3  | 123,5 | 0,859 |
| 36,35 | 0,25   | 1,65  | 208   | 0,196 | 0,164 | 40    | 33,5 | 0,957 | 0,294 | 10,3  | 123,5 | 0,859 |
| 41,15 | 0,336  | 1,865 | 260   | 0,202 | 0,18  | 50    | 33,2 | 0,948 | 0,323 | 11,3  | 135,6 | 0,943 |
| 45,95 | 0,406  | 2,09  | 313   | 0,214 | 0,195 | 60    | 33   | 0,942 | 0,341 | 11,95 | 143,5 | 0,98  |
| 50,75 | 0,457  | 2,316 | 352   | 0,236 | 0,236 | 65-70 | 33   | 0,942 | 0,341 | 11,95 | 143,5 | 0,98  |

Figure 18

Roue motrice pure à 3 dimensions sur matériau pulvérulent.

Abaque donnant l'enfoncement (caractérisé par  $E$ ) en fonction de la charge verticale  $Q$ , pour diverses valeurs de  $\phi$ .





# Figure 19

Base motrice pure à 3 dimensions sur matériau pulvérulent.

Tableau donnant le couple C en fonction de la charge verticale

Q, pour diverses valeurs de  $\phi$ .

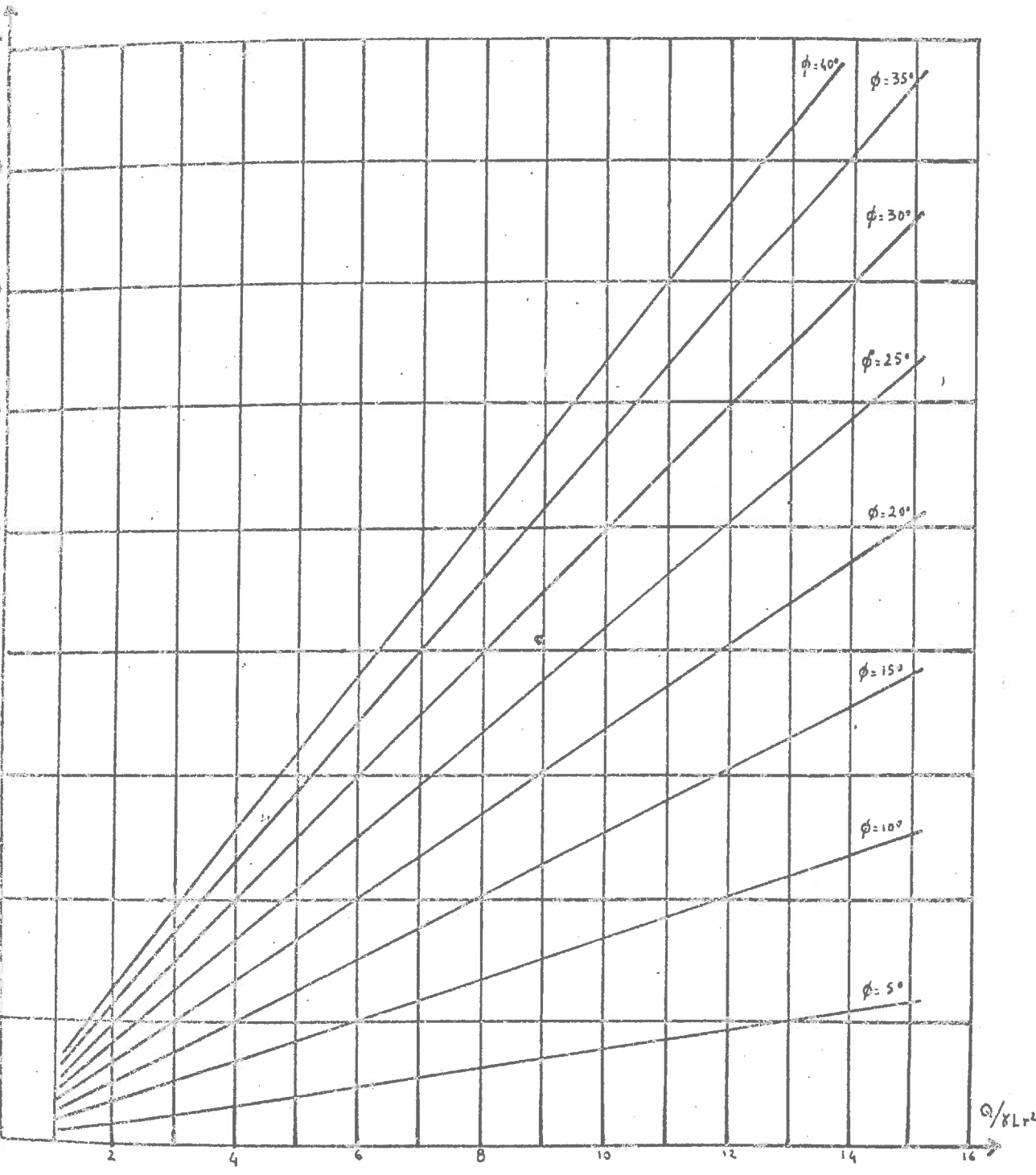
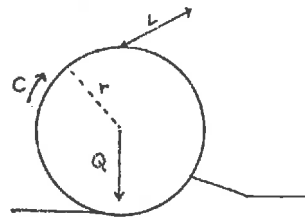
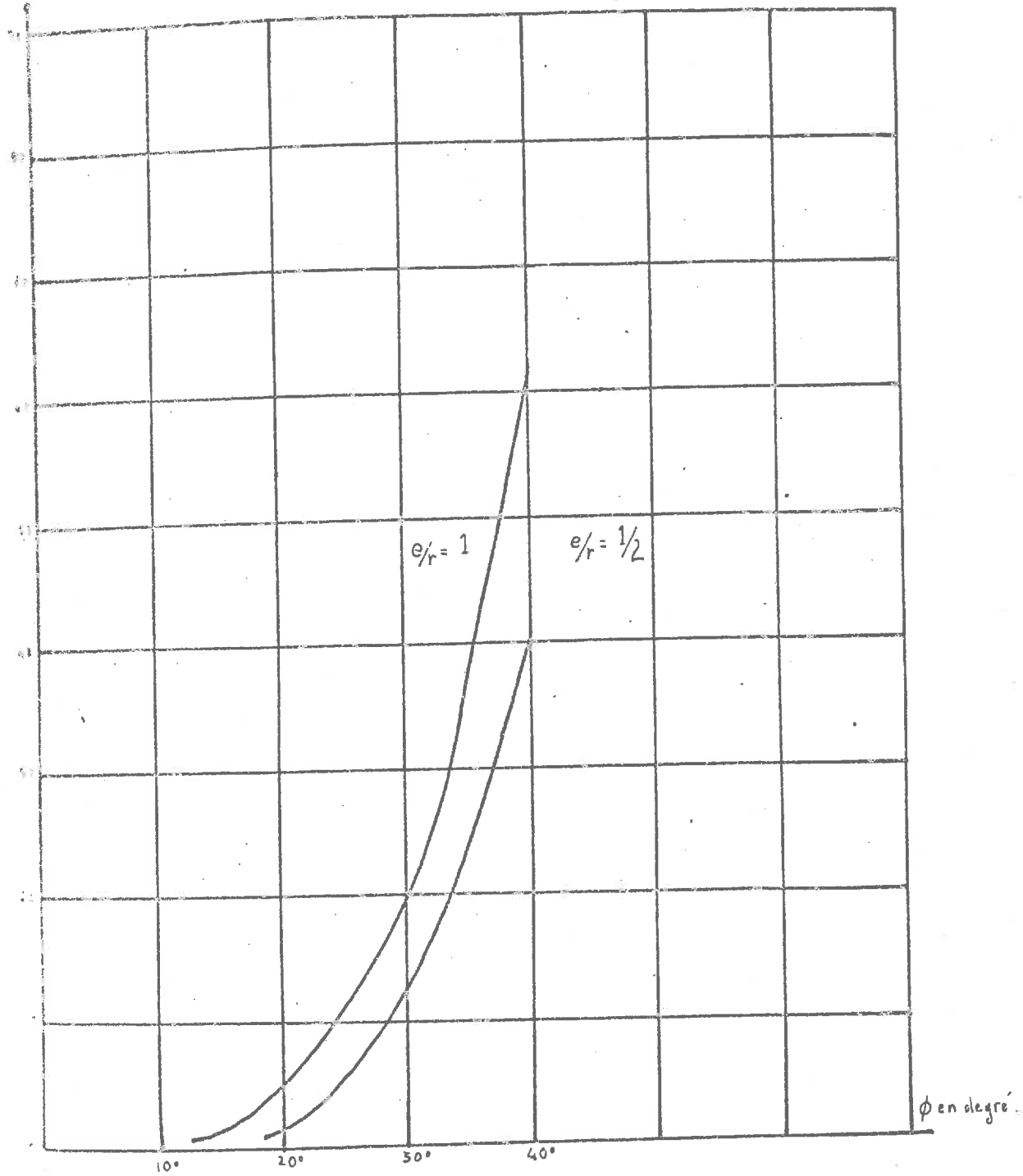
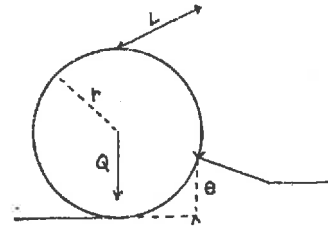


Figure 20

Matrice pure à 3 dimensions sur matériau pulverulent.  
 Variation de la charge verticale limite  $Q$  compatible  
 avec un enfoncement donné  $e$ , en fonction de  $\phi$ .

méthode de calcul des fondations:  $B = r \varepsilon$   $Q = \frac{1}{2} \gamma B^2 N_\phi$



L = 3 cm

R = 35 cm

| Charge<br>verticiale<br>(kg) | $\frac{C}{\sqrt{I} r^3}$ | $\frac{Q}{\sqrt{I} r^2}$ | Couple<br>(kgxcm) | $\frac{Q}{\sqrt{I} r}$ | $\alpha$ | Lecture<br>P <sub>max</sub> | H<br>(cm) | cos $\xi$ | $\xi$ rad. | n $\xi$ | $\frac{I R E}{(cm)}$ | n $\xi$ / I |
|------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|------------------------|----------|-----------------------------|-----------|-----------|------------|---------|----------------------|-------------|
| 7,82                         | 0,406                    | 1,42                     | 78,2              | 0,106                  | 0,04     | 15                          | 32        | 0,914     | 0,418      | 14,65   | 44                   | 4,83        |
| 12,64                        | 0,54                     | 2,3                      | 104,3             | 0,177                  | 0,066    | 20                          | 31,5      | 0,9       | 0,451      | 15,8    | 47,4                 | 5,28        |
| 17,47                        | 0,745                    | 3,18                     | 143,5             | 0,217                  | 0,09     | 25-30                       | 30,5      | 0,871     | 0,512      | 17,8    | 53,6                 | 5,95        |
| 22,6                         | 1,01                     | 4,1                      | 195,5             | 0,24                   | 0,117    | 35-40                       | 29        | 0,828     | 0,595      | 20,8    | 62,6                 | 6,94        |
| 27,1                         | 1,42                     | 4,92                     | 274               | 0,214                  | 0,14     | 50-55                       | 28,5      | 0,815     | 0,618      | 21,8    | 66                   | 7,22        |
| 31,9                         | 1,83                     | 5,8                      | 352               | 0,318                  | 0,166    | 65-70                       | 28        | 0,8       | 0,642      | 22,3    | 67                   | 7,43        |
| 45,7                         | 2,1                      | 8,32                     | 404               | 0,456                  | 0,238    | 75-80                       | 28        | 0,8       | 0,642      | 22,3    | 67                   | 7,43        |
| 50,5                         | 2,5                      | 9,18                     | 482,5             | 0,466                  | 0,262    | 90-95                       | 27        | 0,772     | 0,688      | 24,1    | 72,3                 | 8,03        |

L = 1,5 cm

R = 35 cm

|       |       |       |       |       |       |      |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 6,32  | 0,542 | 2,81  | 52,2  | 0,08  | 10    | 30   | 0,857 | 0,542 | 18,38 | 28,4  | 12,65 |
| 11,14 | 1,085 | 4,96  | 104,4 | 0,142 | 20    | 29   | 0,828 | 0,595 | 20,8  | 31,2  | 12,9  |
| 15,97 | 1,73  | 7,1   | 166,5 | 0,2   | 30    | 28   | 0,8   | 0,642 | 22,3  | 33,8  | 15    |
| 21,1  | 2,3   | 9,4   | 222   | 0,264 | 40-45 | 27   | 0,771 | 0,690 | 24,0  | 37,2  | 16,55 |
| 25,6  | 2,98  | 11,4  | 287   | 0,328 | 55    | 25,5 | 0,728 | 0,755 | 26,4  | 39,6  | 17,6  |
| 30,4  | 3,79  | 13,5  | 365   | 0,385 | 70    | 24   | 0,68  | 0,816 | 28,6  | 42,9  | 19,1  |
| 35,2  | 4,88  | 15,65 | 470   | 0,45  | 90    | 23   | 0,657 | 0,853 | 29,5  | 44,8  | 20    |
| 40    | 5,96  | 17,8  | 574   | 0,5   | 110   | 22   | 0,628 | 0,891 | 31,2  | 46,75 | 20,8  |

24 cm  
17,5 cm

| Charge<br>rticale<br>(kg) | $\frac{C}{\gamma L r^3}$ | $\frac{Q}{\gamma L r^2}$ | Couple<br>(kg/cm) | lecture<br>$F_{max}$ | H<br>cm | $\cos \xi$ | $\xi$ rad. | $L R \xi$<br>cm <sup>2</sup> | $R \xi / L$ |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|----------------------|---------|------------|------------|------------------------------|-------------|
| 11,32                     | 0,149                    | 1,03                     | 28,6              | 11                   | 17,2    | 1          | 0          | 0                            | 0           |
| 16,15                     | 0,27                     | 1,46                     | 52                | 20                   | 17      | 1          | 0          | 0                            | 0           |
| 20,95                     | 0,338                    | 1,9                      | 65                | 25                   | 16,8    | 0,96       | 0,283      | 118,9                        | 0,207       |
| 25,8                      | 0,446                    | 2,35                     | 85,8              | 33                   | 16,8    | 0,96       | 0,283      | 118,9                        | 0,207       |
| 30,6                      | 0,608                    | 2,78                     | 117               | 45                   | 16,6    | 0,95       | 0,317      | 133                          | 0,232       |
| 35,5                      | 0,742                    | 3,23                     | 143               | 55                   | 16,6    | 0,95       | 0,317      | 133                          | 0,232       |
| 40,3                      | 0,918                    | 3,66                     | 176,5             | 68                   | 16,2    | 0,925      | 0,389      | 163,5                        | 0,284       |
| 45,1                      | 1,12                     | 4,1                      | 216               | 83                   | 16      | 0,915      | 0,415      | 174,5                        | 0,303       |

3 cm  
17,5 cm

|       |       |       |      |     |      |       |       |      |      |
|-------|-------|-------|------|-----|------|-------|-------|------|------|
| 5,82  | 1,475 | 4,23  | 36,4 | 14  | 14,5 | 0,83  | 0,590 | 31   | 3,44 |
| 10,65 | 3,04  | 7,75  | 72,8 | 28  | 13,2 | 0,755 | 0,715 | 37,6 | 4,17 |
| 15,45 | 4,66  | 11,2  | 112  | 43  | 12,2 | 0,7   | 0,795 | 41,7 | 4,64 |
| 20,6  | 6,5   | 15    | 156  | 60  | 10   | 0,573 | 0,960 | 50,4 | 5,6  |
| 25,1  | 8,66  | 18,25 | 208  | 80  | 8,5  | 0,486 | 1,06  | 55,8 | 6,2  |
| 29,9  | 10,82 | 21,7  | 260  | 100 | 7,5  | 0,428 | 1,12  | 59,2 | 6,58 |
| 34,7  | 13    | 25,2  | 312  | 120 | 6,5  | 0,372 | 1,18  | 62,5 | 6,9  |
| 39,6  | 16,25 | 28,8  | 390  | 150 | 5,5  | 0,314 | 1,25  | 65,7 | 7,3  |

1,5 cm  
17,5 cm

|       |      |      |      |     |      |       |       |      |       |
|-------|------|------|------|-----|------|-------|-------|------|-------|
| 5,32  | 3,9  | 7,74 | 46,8 | 18  | 12,3 | 0,7   | 0,795 | 20,9 | 9,27  |
| 10,15 | 7,16 | 14,8 | 86   | 33  | 9,7  | 0,555 | 0,982 | 25,7 | 11,45 |
| 14,9  | 11,5 | 21,7 | 138  | 53  | 8    | 0,457 | 1,096 | 28,7 | 12,8  |
| 20,1  | 15,1 | 29,2 | 182  | 70  | 7,3  | 0,417 | 1,140 | 29,8 | 13,3  |
| 24,6  | 19,1 | 35,8 | 229  | 88  | 5,5  | 0,314 | 1,251 | 32,8 | 14,6  |
| 29,4  | 24,5 | 42,8 | 294  | 113 | 3,5  | 0,2   | 1,369 | 35,9 | 15,96 |

## CHAPITRE LIX

### ETUDE DES ROUES A TROIS DIMENSIONS SUR UNE ARGILE SATURÉE

Après avoir étudié le comportement des roues rigides sur un milieu pulvérulent ( $C = 0$ ,  $\phi = 35^\circ$ ), il restait à expérimenter sur un milieu cohérent mais à angle de frottement apparent nul ( $\phi = 0$ ).

Pour ce faire, nous avons fabriqué une argile saturée à partir d'argile en poudre. La teneur en eau du matériau ainsi obtenue était de 85 %, son poids spécifique  $1,48 \text{ g/cm}^3$ , sa cohésion, en prenant le palier de la courbe lecture/déplacement, mesurée avec un Van Test de  $49 \text{ g/cm}^2$ . Cette argile a été mise en place à la main au fur et à mesure de sa fabrication dans une goulotte parallélépipédique de dimensions  $300 \times 30 \times 30 \text{ cm}$ . Ces dimensions sont volontairement réduites afin d'avoir une première idée des phénomènes à observer de manière à ne réaliser un modèle plus important qu'à bon escient. Cette goulotte a été mise sur la cuve de sable de manière à pouvoir utiliser les dispositifs de mesures précédents.

#### 1 - Roue tractée.

Nous avons utilisé une roue de diamètre 70 cm, et de largeur 3 cm. La largeur a été choisie suffisamment petite pour que l'on puisse négliger les effets dus aux bords de la goulotte. Nous avons mesuré les efforts et les enfoncements en régime permanent. Les charges verticales appliquées ont varié de 8 à

33 kg. Nous avons tracé sur la figure 21, en valeurs adimensionnelles pour permettre la comparaison avec d'autres essais la force de traction en fonction de la charge verticale. On constate que, pour la série d'expériences faites, la force de traction est proportionnelle à la charge verticale, toutes choses égales d'ailleurs.

On voit d'autre part sur la figure 22 comment varie la charge verticale  $Q$  en fonction de la longueur de l'arc de contact  $r \xi$  roue-sol ou de la surface de contact  $Lr \xi$ . On voit qu'à partir d'une certaine charge il y a proportionnalité entre ces 2 quantités.

## 2 - Roue motrice pure.

Nous avons étudié deux types de roues motrices. La première d'un rayon de 35 cm et de 3 cm de large, la seconde de 17,5 cm de rayon et de 3 cm de large. Les charges verticales appliquées ont varié de 8 à 33 kg.

Les essais ont été faits plusieurs fois. Au cours différentes expériences, nous avons constaté, contrairement essais effectués sur le sable de notables variations dans l'efforts mesurés. Ces phénomènes sont dus principalement à 6 causes :

- malgré la mise en place minutieuse de l'argile, les propriétés mécaniques du sol variaient d'un point à un autre.

- après chaque essai, afin d'effacer l'ornière creusée par la roue, l'argile était remaniée sur une couche de 15 à 20 cm. La cohésion pouvait donc notablement diminuer du fait de la thixotropie. L'évaporation de l'eau réduite au minimum mais inévitable, tendait elle à faire augmenter la cohésion.

Figure 21

Pave tractée à 3 dimensions sur une argile saturée.

Variation de la force de traction  $T$  en fonction de la charge verticale  $Q$ .

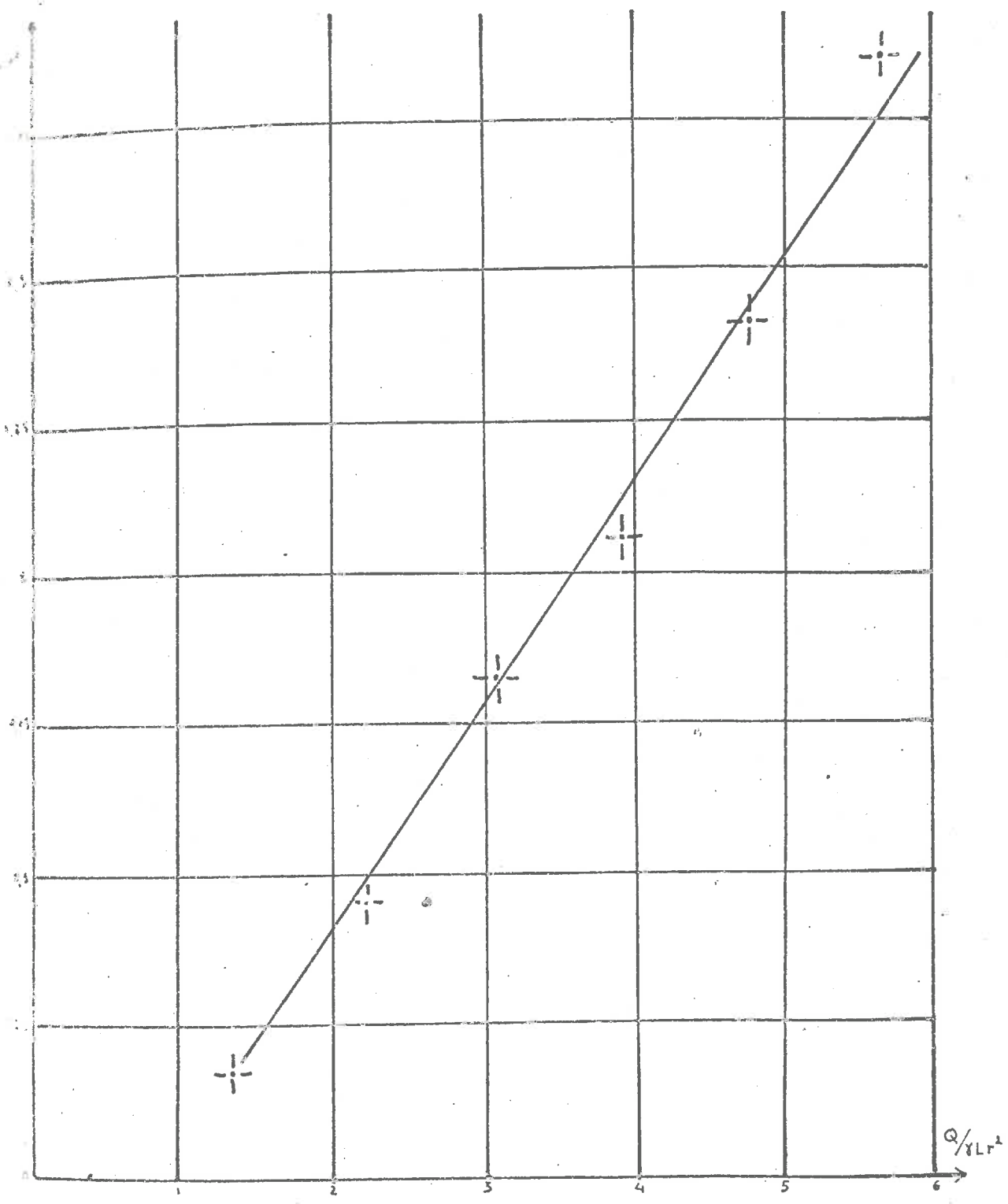
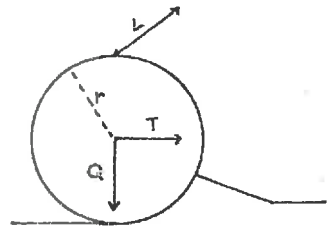
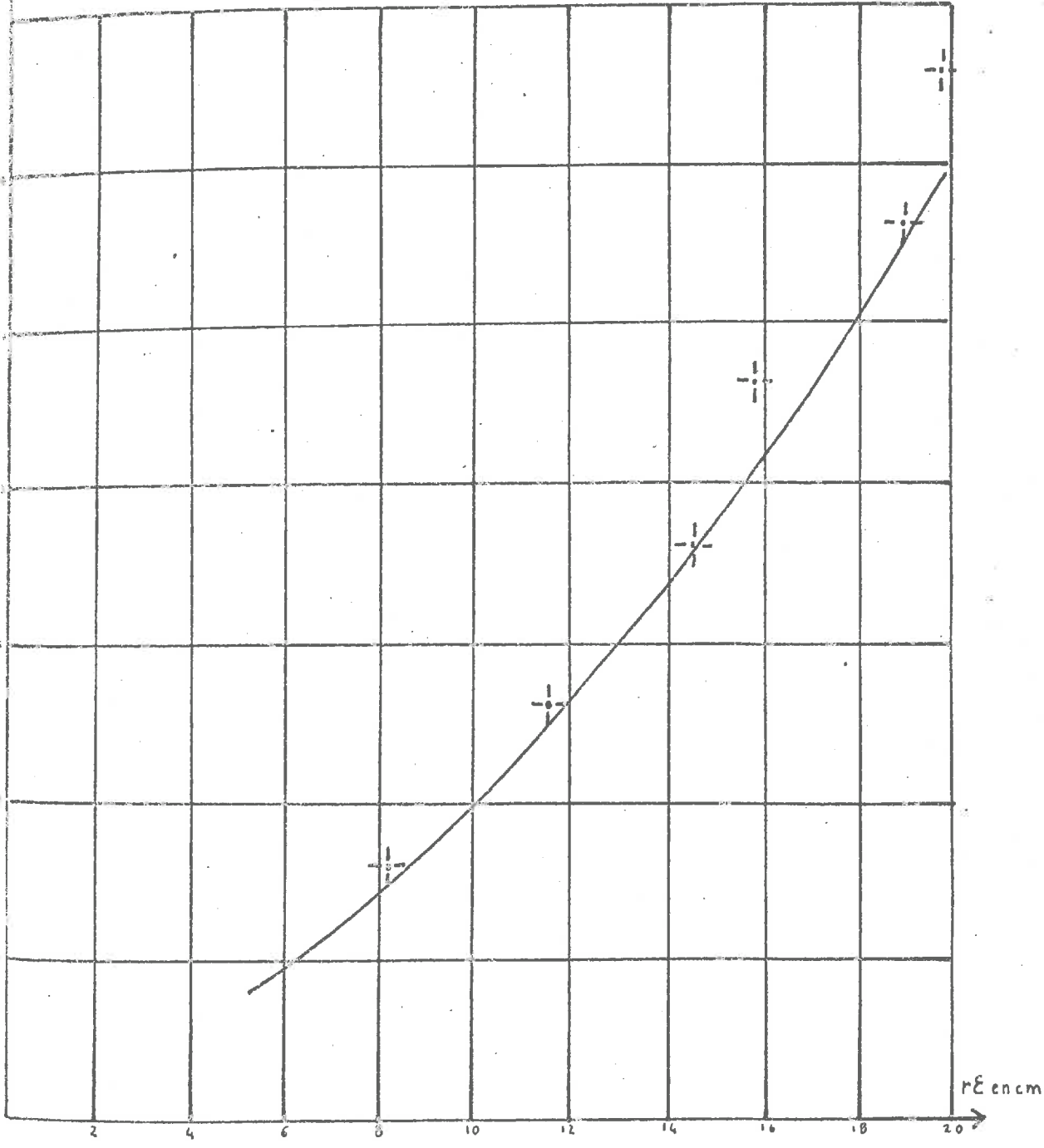
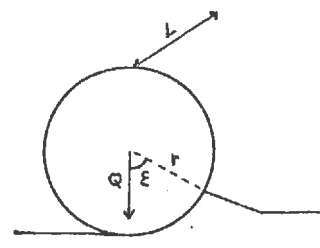


Figure 22

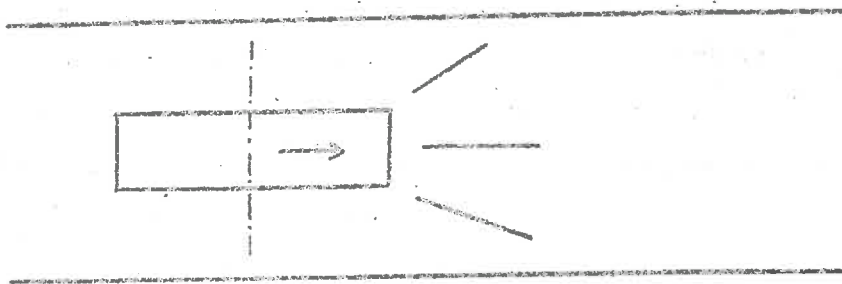
Essai tractif à 3 dimensions sur une argile saturée.  
 Variation de la charge verticale  $Q$  en fonction de  
 la longueur de l'arc de contact roue-sol,  $rE$  pour  
 une roue donnée.





Au cours des essais, après un tour, la surface de la roue était recouverte d'une couche d'argile plus ou moins uniforme. Si bien que les contraintes dues à l'action du sol sur la roue s'appliquaient à la surface de contact de deux couches d'argile. En conséquence, pour obtenir plus rapidement le régime permanent, la roue expérimentée était recouverte d'une couche d'argile uniforme.

Durant toutes les expériences, nous avons observé la formation de fissures rectilignes qui se développaient en amont de la roue, faisant un angle de 0 à 45° avec la direction d'avancement de la roue.



De chaque côté, le sol se soulève sur une largeur égale approximativement à deux fois la largeur de la roue pour de fortes valeurs de  $Q$ .

Pour de fortes charges (20 kg) on observe une légère vague amont de 0,5 cm de haut et de 1 cm de long, devant toute la largeur de la roue.

Ce sont les seules observations des déformations du sol que l'on puisse faire. Aussi, nous sommes-nous intéressés aux grandeurs mesurables pour essayer de mieux connaître les phénomènes en cause.

Figure 23 :

Nous avons tracé la charge verticale  $Q$  en fonction de la longueur de l'arc de contact roue-sol  $r\xi$  ou, à un coefficient près puisque la largeur  $L$  des deux roues est la même en fonction de la surface de contact  $Lr\xi$ .

On constate que les courbes obtenues pour chaque roue sont des droites qui passent par l'origine et qu'elles ont une pente très voisine. On peut donc dire que pour deux roues de même largeur la charge est proportionnelle à la surface de contact sol-roue.

Nous avons tracé sur le même graphique la variation de la force portante d'une fondation à deux dimensions de largeur  $R\xi$  et de longueur  $L$  égale à la largeur de la roue, donnée par  $\frac{Q}{Lr\xi} = 5,70$ . On voit qu'on obtient une force portante inférieure à l'expérience. Sur la même figure on constate que la formule à 3 dimensions  $\frac{Q}{Lr\xi} = 80$  [10] et [11] rend bien compte des enfoncements obtenus.

Figure 24 :

Nous avons tracé la valeur du couple en valeur adimensionnelle. Les points relatifs aux deux roues se regroupent sur une même courbe qui affecte la forme d'une parabole.

Puisque nous avons vu que la roue était recouverte par la permanence d'une couche d'argile, les contraintes dues au roulement de la roue s'appliquent à la surface de contact de deux couches d'argile. On peut penser que les contraintes tangentielles en chaque point de la roue sont égales à la cohésion. En supposant qu'elles sont uniformément réparties sur toute la largeur de la roue, on devrait ainsi trouver un maximum du

Figure 23

Une matrice pure à 3 dimensions sur une argile saturée.  
 Variation de la charge verticale  $Q$  en fonction de la  
 longueur de l'arc de contact rove-sol.

⊕ ( $r=35\text{cm}, L=3$ ); ⊗ ( $r=17,5\text{cm}, L=3\text{cm}$ )

--- Courbes théoriques..

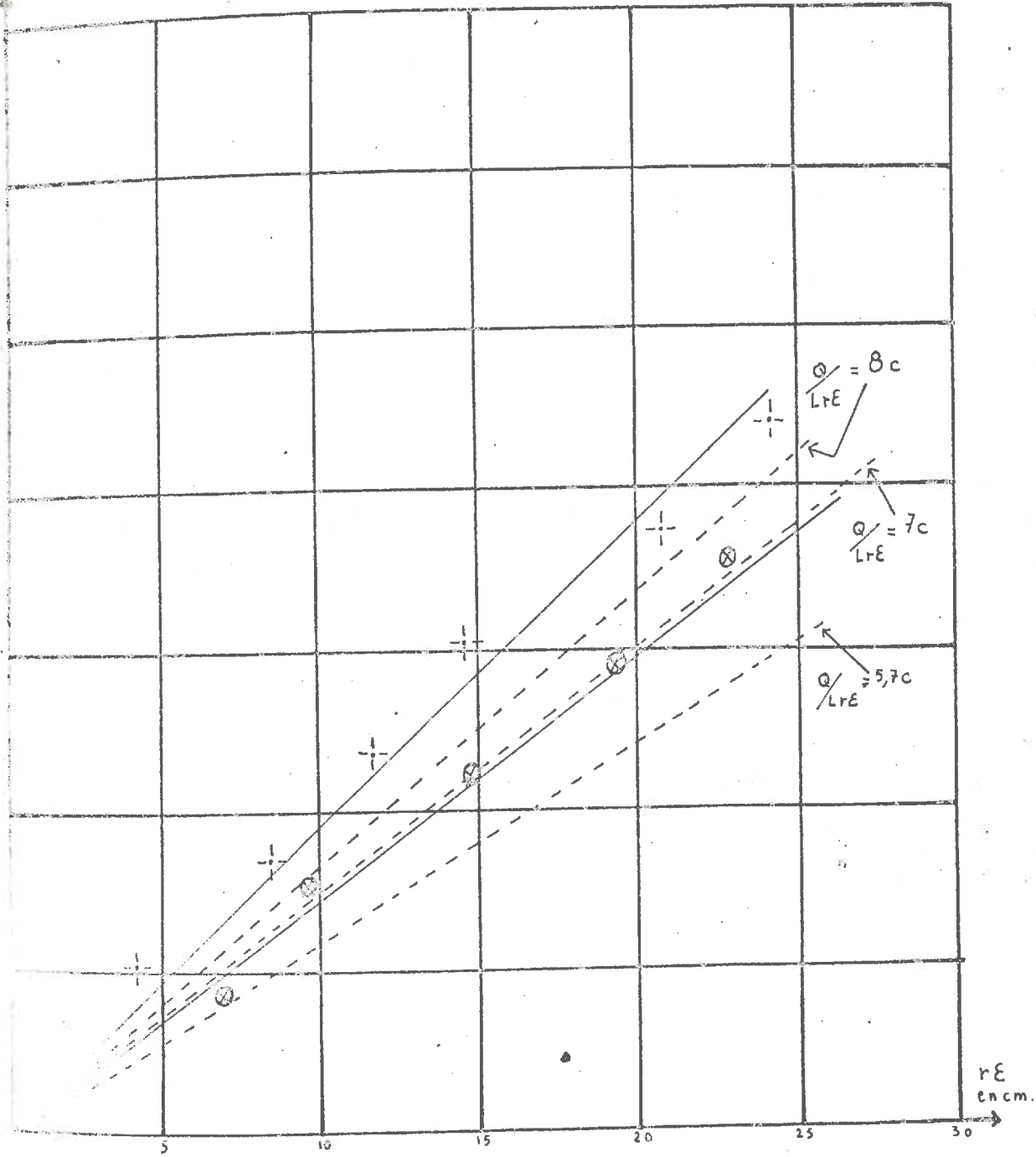
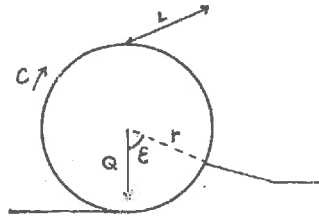


Figure 24

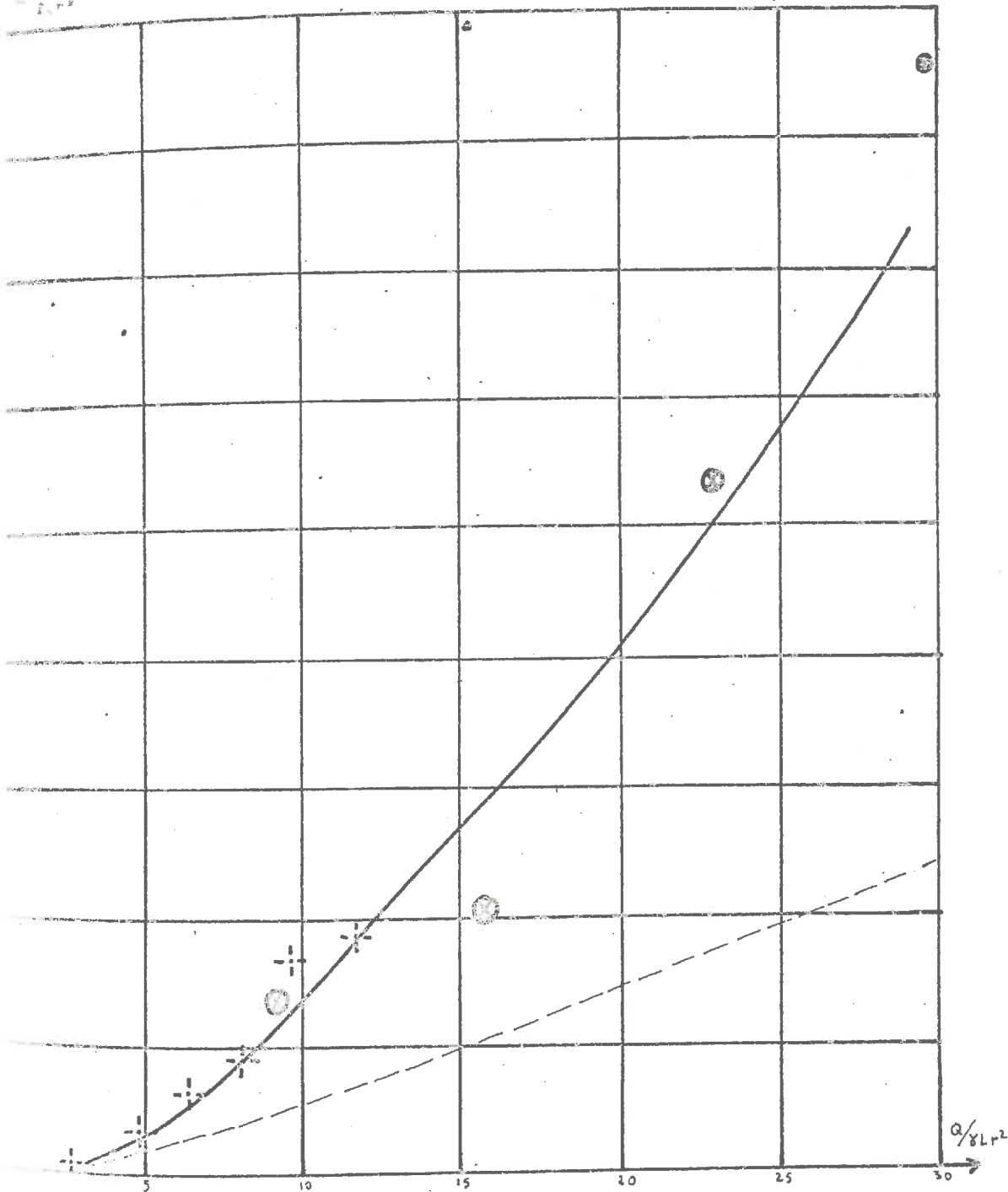
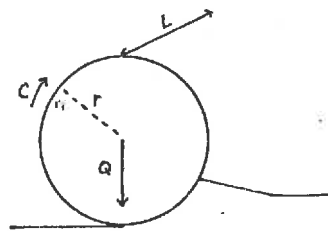
matrice pure à 3 dimensions sur une argile saturée.

relation du couple  $C$  en fonction de la charge verticale

sur 2 modèles de roues.

$(r=5,5\text{cm}, L=3\text{cm})$ ;  $(r=17,5\text{cm}, L=3\text{cm})$ .

--- Calcul avec une répartition uniforme des contraintes tangentielles égales à la cohésion.



couple. Nous avons donc tracé le couple  $C = Lr\epsilon c$  déduit de cette hypothèse en fonction de la charge verticale.

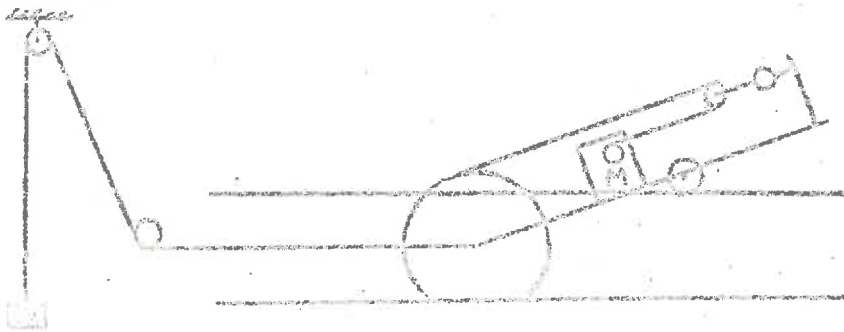
On constate que le couple calculé est inférieur à celui mesuré.

Figure 25 :

Nous avons tracé la variation du couple en fonction du déplacement du centre de la roue. La forme des courbes montre que les propriétés mécaniques de l'argile varient d'un point à un autre : le couple varie d'une manière discontinue. Pour  $\frac{Q}{\gamma L r^2} = 11,4 ; 14,8 ; 18,3$ , le patinage total est atteint après un faible déplacement.

3 - Roues motrices générales.

Pour l'étude de roues motrices générales, c'est-à-dire avec une charge appliquée sur l'axe, mais inclinée vers l'arrière, nous avons utilisé le même dispositif de mesure en lui ajoutant toutefois un système permettant d'appliquer à la roue une force horizontale constante.



Un fil d'acier fixé sur l'axe de la roue passe sur une poulie fixée au bâti, est renvoyé sur une autre poulie xée au plafond et redescend pour supporter un poids chargé d'appliquer la force de retenue constante.

La caractéristique principale de ces essais est qu'elle que soit la charge verticale appliquée de 6,5 à 18 k. il suffit d'une faible force horizontale pour empêcher la r d'avancer. Cette force est de l'ordre de 2 kg. Les inclinaisons de la résultante obtenue ne dépassent pas 20°. De ce fait nous n'avons pu faire une étude systématique en donnant à des valeurs faibles imposées car on atteignait ainsi des forces très petites. Les limites de précision du dispositif de mesure étaient ainsi dépassées.

#### 4 - Détermination de la force portante verticale compatible avec un enfoncement donné.

Nous avons vu que dans le domaine de charge explicite et pour une seule largeur de roue ( $L = 3$  cm), l'enfoncement était donné par la formule de la force portante d'une fondation superficielle à 3 dimensions, chargée en son centre  $Q = 8C$ . Cette loi permet donc de déterminer si une roue motrice pure passera ou ne passera pas dans un terrain d'angle de frottement apparent nul et de cohésion quelconque :

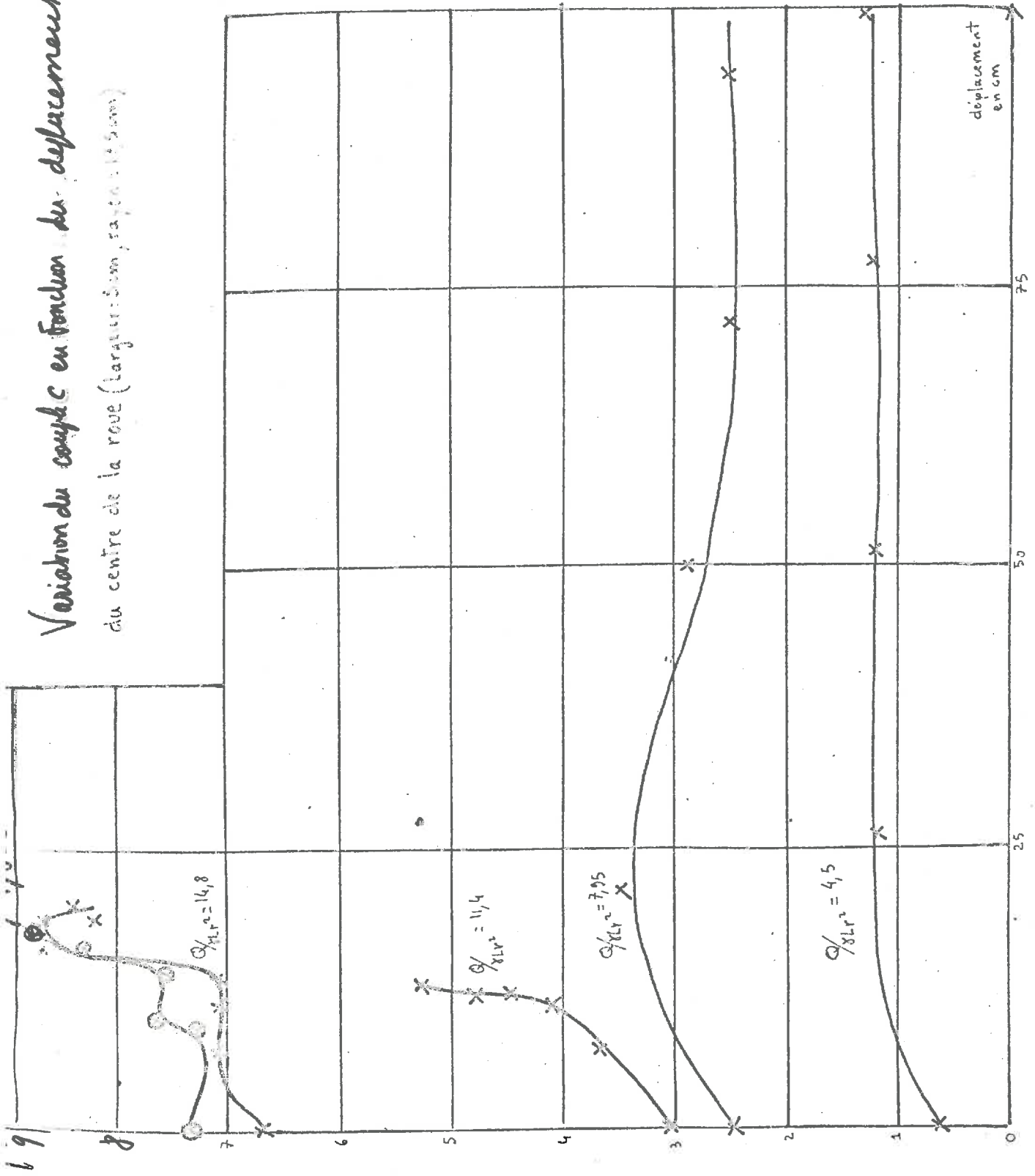
Soit une roue rigide motrice pure ayant les mêmes dimensions que celles d'un camion GMC type armée GCKW 352 et c'est-à-dire largeur 27,9 cm, rayon moyen 46 cm, devant supporter une charge verticale  $Q$  de 4000 kg. La valeur minimum de cohésion d'un terrain dont l'angle de frottement apparent  $\phi$  nul, pour qu'elle ne s'enfonce que de  $\frac{r}{2}$  en régime permanent faible vitesse est telle que :

$$\frac{4000 \ 000}{27,9 \times 46} = 8C \quad \text{soit} \quad C = 390 \text{ g/cm}^2$$

Pour un enfoncement égal à  $r$  on aurait  $C = 260 \text{ g/cm}^2$ .

Figure 25 :

Variation du couple en fonction du déplacement  
 du centre de la roue (largeur: 50cm, rayon: 150mm)



CHAPITRE IV

APPAREILS DE MESURE DES CONTRAINTES  
SUR LA PERIPHERIE D'UNE ROUE RIGIDE

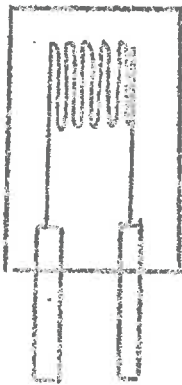
Lors de l'étude de la locomotion sur un modèle analogique à deux dimensions, le fait de pouvoir observer directement les déformations du sol au cours de chaque expérience a été très utile pour l'explication et les compréhensions des phénomènes en cause. Ainsi, on a été amené à penser que telle répartition des contraintes était possible, alors que telle autre devait être écartée. Grâce à la théorie de la plasticité parfaite à deux dimensions, on a pu ainsi relier les efforts et les enfoncements mesurés (couple, force de traction) aux caractéristiques du sol, angle de frottement et densité, pour le modèle analogique.

Lorsque l'on passe à trois dimensions, la seule observation possible est celle des déformations superficielles du sol. Aussi, dans ce problème, est-il difficile de faire intervenir les paramètres du sol dans les performances de la roue (couple, effort de traction, enfoncement). Même si l'on a pu en appliquant les méthodes de calcul à deux dimensions, donner une valeur approchée satisfaisante des enfoncements dans le cas du sable dont nous disposons, une étude plus précise des phénomènes s'impose pour aboutir à une meilleure explication. C'est pourquoi nous avons été amenés à concevoir un appareil capable de mesurer des contraintes à l'aide d'extensomètres à fil résistant.



1 - Définition et utilisation des extensomètres à fil résistant.

Les jauges de contraintes ou extensomètres sont constituées d'un fil fin résistant disposé à plat en zigzag sur un support de papier poreux (épaisseur 0,1 mm). Le fil est maintenu par une colle spéciale qui est chargée d'imposer au fil les déformations du support.



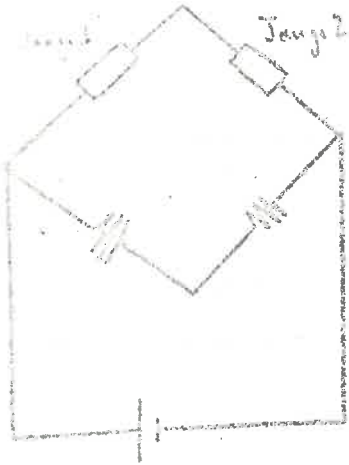
Le tout se présente sous la forme d'une petite languette de papier d'où descendent deux fils de connexion.

Le principe de fonctionnement est le suivant : la déformation de la pièce sur laquelle la jauge est collée instantanément fait varier la longueur  $l$  du fil, donc sa résistance électrique suivant la loi  $\frac{dR}{R} = K \frac{dl}{l}$

$K$  étant le coefficient de sensibilité connu de la jauge.

Il suffit donc de mesurer la variation de résistance de la jauge pour en déduire la déformation du support, et, par suite la contrainte appliquée une fois qu'elle est équilibrée.

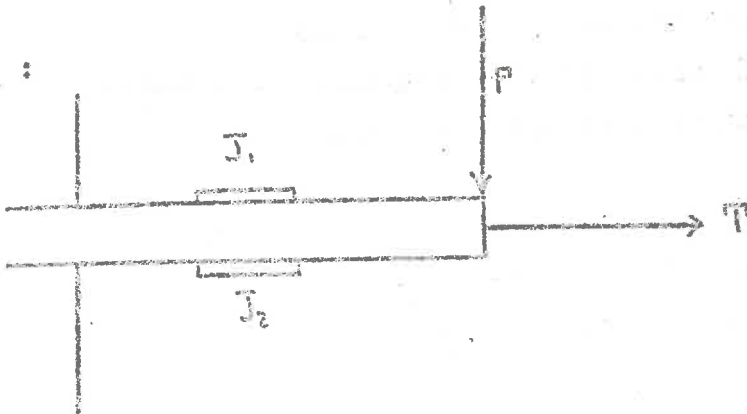
Pour ce faire, on utilise un montage de type pont de WHEASTONE ; mais, la résistance de la jauge étant très sensible aux variations de température, on doit annuler cette influence en mettant deux jauges identiques soumises aux mêmes variations de température dans les branches adjacentes du pont de WHEASTONE.



Ainsi disposée aucune variation égale de résistance des deux jauges ne peut déséquilibrer le pont.

Ce montage peut être utilisé lorsque l'on veut isoler telle ou telle déformation.

Exemple :



Soit une lame rectangulaire encastrée à une extrémité et soumise à deux forces  $F$  et  $T$  perpendiculaires.

Sous l'action de  $F$  la lame va fléchir, la jauge  $J_1$  va s'allonger, la jauge  $J_2$  se raccourcir. Dans le montage précédent le pont sera doublement déséquilibré.

La force  $T$  va allonger  $J_1$  et  $J_2$  d'une quantité égale, donc cette force n'aura aucun effet sur le déséquilibre du

On a ainsi réussi à isoler l'influence de la force  $F$ .

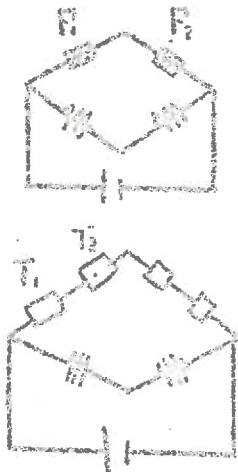
Il suffit alors d'appliquer des forces  $F$  connues et de mesurer le déséquilibre du pont pour avoir une balance des efforts qui agit directement appliquée à la barre.

2 - Montage utilisé pour la mesure des contraintes à deux dimensions.

Nous avons représenté sur la Figure 26 le plan de l'appareil utilisé. C'est un montage qui permet de mesurer à deux dimensions à la fois la contrainte normale et la contrainte tangentielle.

Nous mesurons la contrainte sol-roue sur une surface de  $18 \text{ cm}^2$ , soit  $R$  cette contrainte qui se décompose en une contrainte normale et une contrainte tangentielle.

Les jauges  $F_1$  et  $F_2$  sont montées dans les branches adjacentes du pont de WHEASTONE ; comme précédemment  $T$  n'a aucune influence sur l'équilibrage du pont.

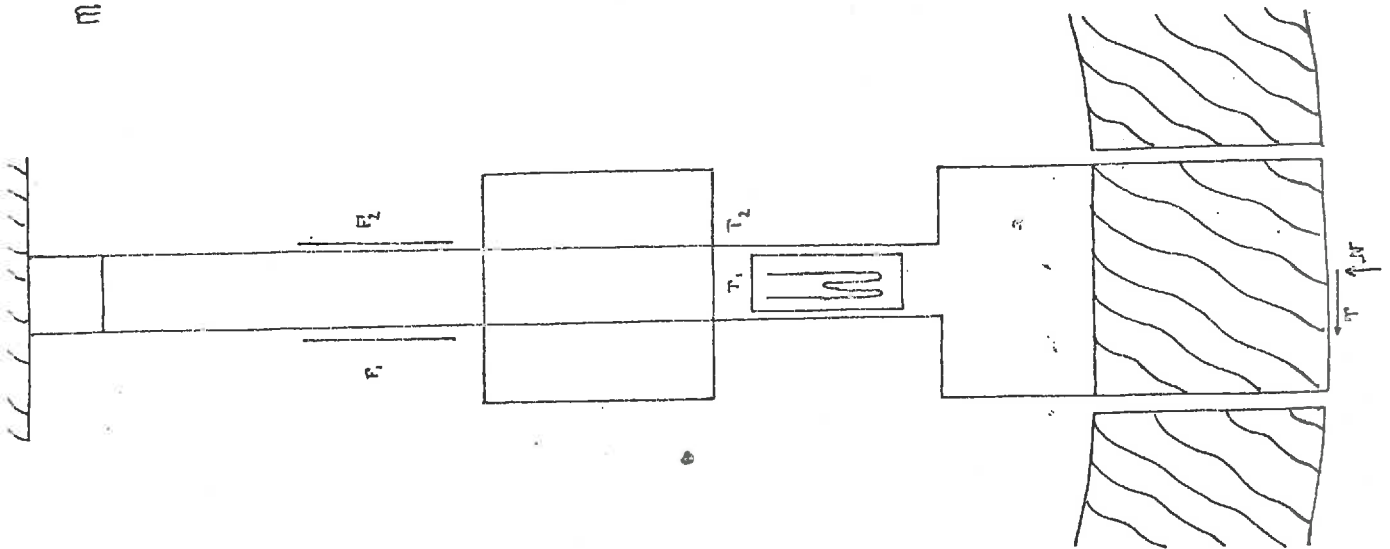
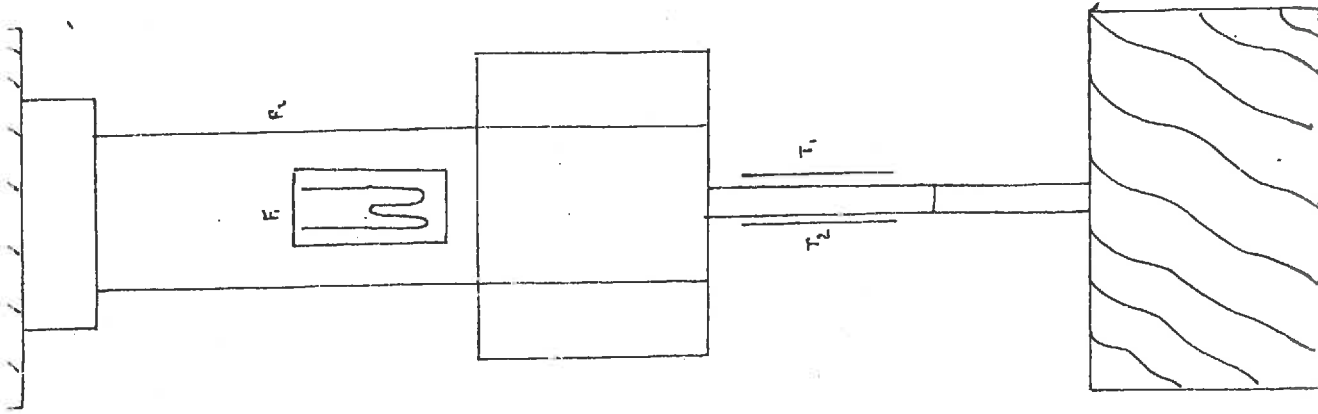


Les jauges  $T_1$  et  $T_2$  sont mises en série dans une branche d'un 2e pont. Dans la branche adjacente on met deux jauges analogues à  $T_1$  et  $T_2$  mais qui restent passives ; elles ne servent qu'à annuler les variations de résistance dues aux changements de température.

La force  $N$  fait se raccourcir les deux jauges  $T_1$  et  $T_2$  donc déséquilibre le pont. La force  $T$  fait se déformer les deux jauges d'une quantité égale. Donc, l'ensemble  $(T_1 + T_2)$  est sensible à  $N$  et  $T$ . Mais,  $F_1$  et  $F_2$  permettent de mesurer  $N$  ; il suffit donc d'étalonner  $T_1 + T_2$  en forces  $N$  et de retrancher cet effet de celui observé dans  $(T_1 + T_2)$  pour n'avoir que l'influence de  $T$  sur  $T_1 + T_2$ .

Figure 26

Mesure de s contraintes  
à 2 dimensions



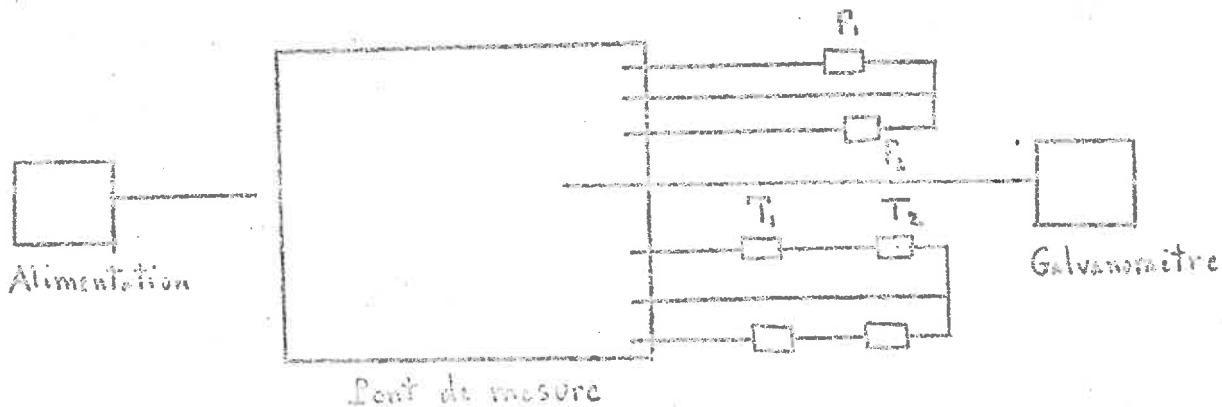
Remarquons de plus qu'une force perpendiculaire au plan de la roue fait allonger  $T_1$  et raccourcir  $T_2$  par exemple, mais d'une quantité égale ; donc  $(T_1 + T_2)$  n'y est pas sensible.  $F_1$  et  $F_2$  se raccourcissent d'une quantité égale donc ne déséquilibrent pas le pont.

Remarques :

- 1) Les jauges sont collées très exactement sur l'axe de chaque face du support.
- 2) L'excentricité de la résultante n'est pas mesurable.

3 - Appareillage complet.

Pour mettre au point le dispositif de mesures de contraintes nous avons utilisé le montage suivant :



- Un pont de mesure Soehnle à trois voies alimenté par un bloc fonctionnant sur 110 V,

- Un galvanomètre à index lumineux.

Pour effectuer une série de mesures on opère ainsi, (pour connaître par exemple les contraintes tangentielles) :

1°) La roue étant au repos et aucune contrainte n'étant appliquée au dispositif on équilibre le pont de mesure, l'index du galvanomètre est à zéro.

2°) On met la roue en marche et on lit l'élongation du galvanomètre pour chaque position repérée à l'avance du capteur de contraintes.

3°) A l'aide de la courbe d'étalonnage : lecture du galvanomètre en fonction de la force tangentielle on déduit cette dernière.

Remarques :

- Le pont de mesure ne permet pas de mesurer les contraintes normales et les contraintes tangentielles en même temps. Il ne comporte en effet qu'une seule sortie galvanométrique.

- Le bloc de bois solidaire du système de lames d'acier doit être isolé du sol à l'aide d'une capote de caoutchouc et, c'est muni de celle-ci que l'on étalonne l'appareil.

- Pour les mesures sur l'argile, l'appareil ne doit être étalonné que recouvert d'une couche de matériau.

4 - MESURES.

Les premières mesures faites, une fois l'appareil mis au point, n'ont concerné que les contraintes tangentielles et ont été purement qualitatives.

L'appareil a été monté sur une roue de 6 cm de largeur et de 70 cm de diamètre, cette roue a été mise en patinage total dans la goulotte d'argile.

Nous opérons ainsi à trois dimensions et mesurons la somme des composantes normales des contraintes sur une surface de 18 cm<sup>2</sup>. La circonférence de la roue était au départ complètement recouverte d'argile.

Nous avons ainsi pu constater que tout le long de la surface de contact roue-argile, la force enregistrée était constante, ce qui semble indiquer que le calcul du couple, en supposant que la composante tangentielle est en chaque point égale à la cohésion de l'argile, serait valable. Une mesure quantitative montrera si la valeur de la cohésion ainsi trouvée est égale à celle donnée par un Vane Test.

Cependant, cet appareil simple ne donne pas les trois composantes d'une contrainte, aussi, avons-nous été amenés à concevoir un dispositif de mesure de celles-ci.

## 5 - Mesures des contraintes à trois dimensions.

### a) Principes des mesures proposées :

Un morceau de jante de longueur de 100 mm et de 60 mm de large est fixée à l'extrémité d'un rayon de la roue formé par un axe de 20 mm de diamètre (Figures 27 et 28). Un premier dispositif constitué par 4 lames disposées suivant deux diamètres perpendiculaires permet la mesure des contraintes normales et sert de rotule pour les moments (forces tangentiels). Les cordes à piano qui supportent ces lames travaillent en compression. Les dimensions sont prévues pour qu'il n'y ait pas de flambage. Il serait préférable qu'elles travaillent en traction, mais alors pour cela le dispositif de maintien devrait être beaucoup plus complexe.

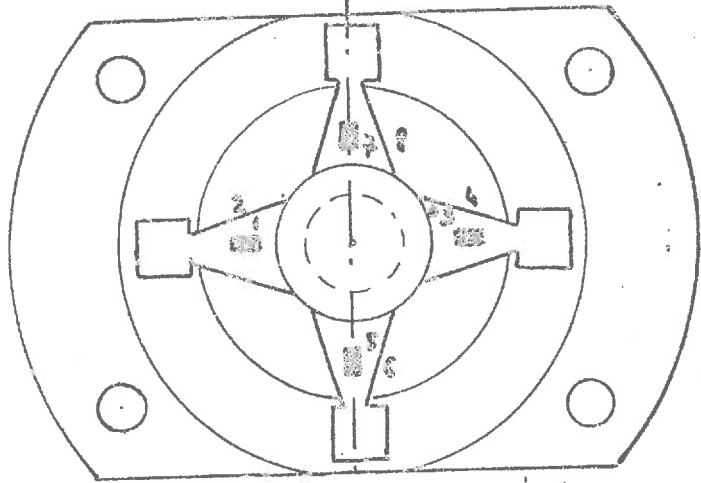
Un deuxième dispositif comprend deux lames perpendiculaires destinées aux mesures des moments fléchissants suivant le plan de symétrie de la roue et suivant un plan perpendiculaire. Ces lames sont reliées à l'axe par des cordes à piano qui travaillent en traction.

Ces six lames travaillant à taux de contrainte constant seront munies chacune d'une jauge extensométrique. Les quatre premières lames fournissent deux ponts de WHEASTONE, soit deux voies de mesure dont la moyenne indépendante des moments permettra de connaître la valeur des poussées radiales ; les deux autres fournissent un demi-pont chacune qui, branchées avec une résistance complémentaire permettront d'obtenir les deux voies de mesure des moments.

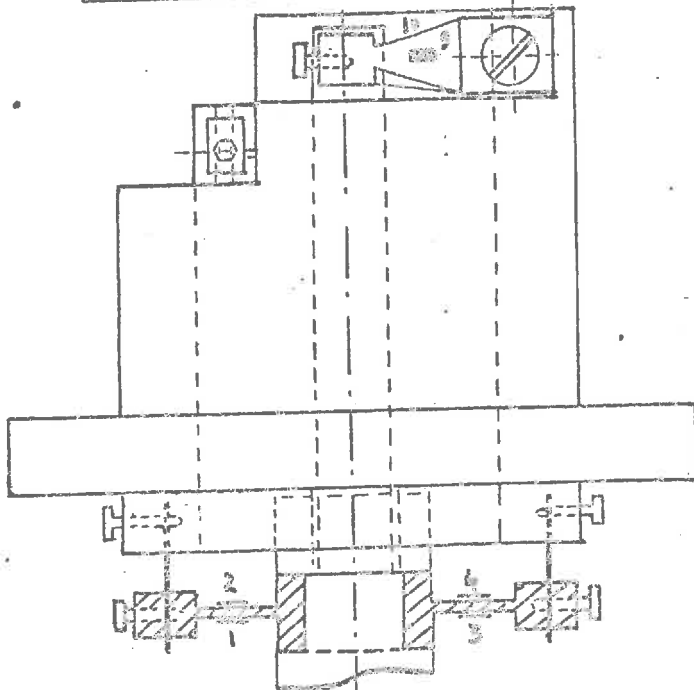


Figure 27

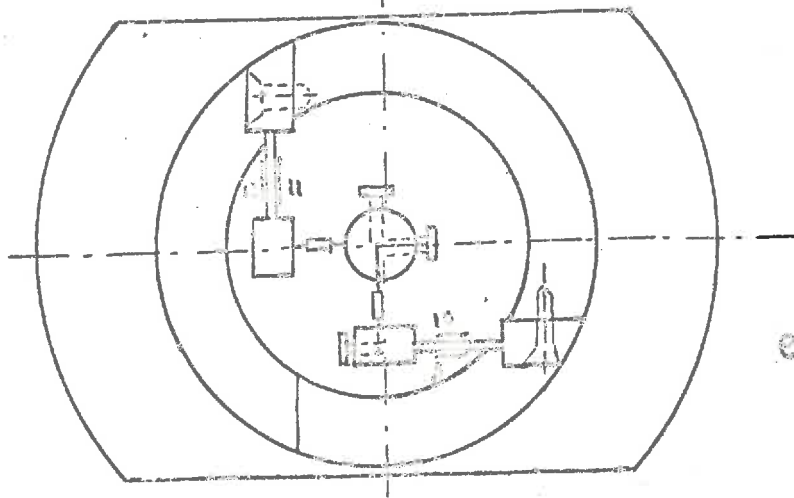
Appareil de mesure des 3 composantes d'une contrainte.



vue de dessus,  
lames de poutres radiales.



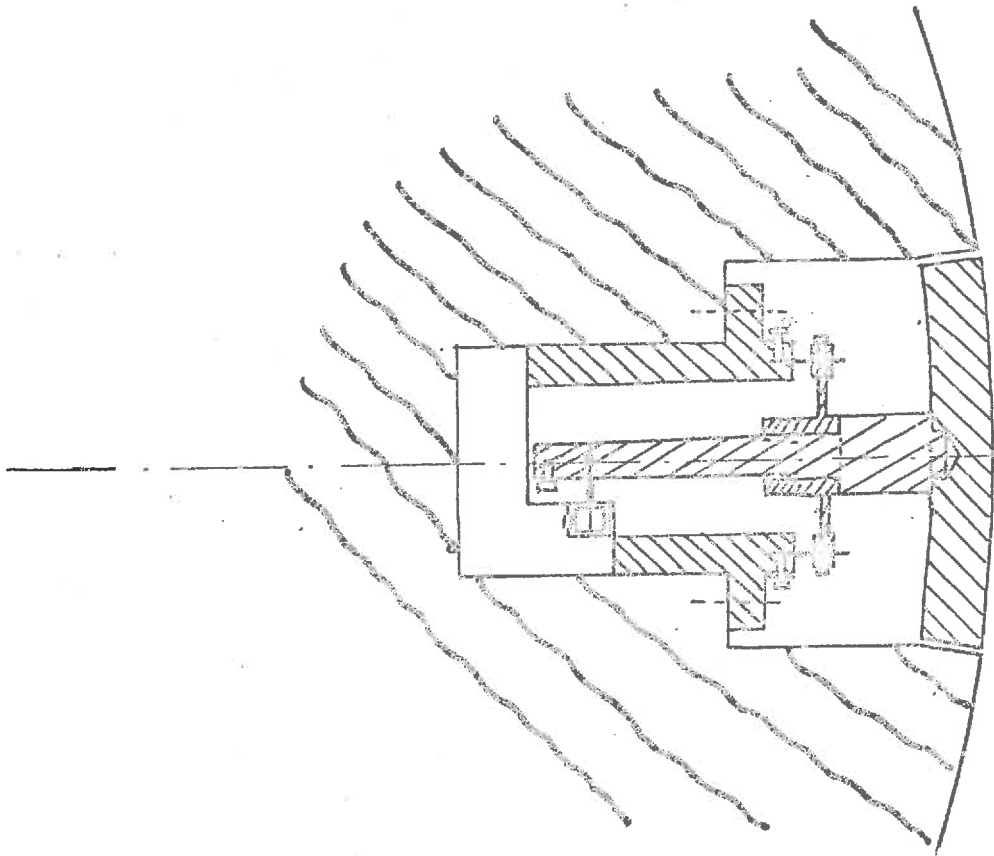
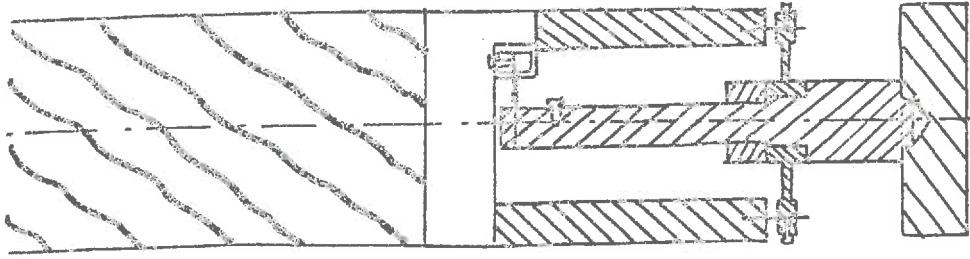
vue de dessus, lames de moment.



echelle 1

Figure 28

Appareil de mesure des 3 composantes d'une contrainte.



Ensemble des dispositifs de mesure. éch. 1/2

b) Principes de l'extensométrie :

Une jauge de contrainte de résistance R collée intimement sur une pièce suit fidèlement les variations superficielles des dimensions de ces pièces.

- Soient :  $t$  la contrainte superficielle  
 $E$  le module d'élasticité du métal ( $\text{kg/mm}^2$ )  
 $\frac{\Delta l}{l}$  l'allongement relatif égal à  $t/E$ .

La variation relative de résistance de la jauge est donnée par :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta l}{l}$$

Avec K variable suivant les jauges mais sensiblement égal à deux.

Les mesures à l'aide d'un pont de WHEASTONE donnent :

$$U' = U \frac{\Delta R}{R} \quad \text{pour 4 jauges actives}$$

$$U' = \frac{U}{2} \frac{\Delta R}{R} \quad \text{pour 2 " " "}$$

$$U' = \frac{U}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad \text{pour 1 jauge active}$$

(loi de KIRCHOFF).

Une  $U'$  est d.d.p. sur la diagonale de mesure

et d.d.p. d'orientation.

Cette tension  $U'$  peut être amplifiée et enregistrée en régime de contraintes variables. Un étalonnage préalable permet de connaître la loi (en général linéaire) de déplacement des spots sur l'enregistreur en fonction des charges et moments appliqués.

c) Définition et calcul des lames :

Poussée radiale

Avec une contrainte de  $0,05 \text{ kg/cm}^2$  et une surface  $10 \times 6 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$ , la force maximum sera de  $P = 3 \text{ kg}$ .

Cette force sera répartie sur 4 lames travaillant flexion pure soit  $\frac{P}{4}$ .

Pour obtenir une sensibilité correcte, il faut un  $\mu$ mm de  $0,5 \times 10^{-3}$  soit  $t/E = 0,5 \times 10^{-3}$ .

Suivant le matériau utilisé, nous aurons :

$t = 0,5 \times 10^{-3} E$  soit  $t = 10,5 \text{ kg/mm}^2$  pour l'acier et  $3,5 \text{ kg/mm}^2$  pour le dural.

La contrainte d'une lame en flexion est donnée par

$$t = \frac{6 P L}{b e^2} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} L : \text{longueur utile} \\ b : \text{largeur à la base} \\ e : \text{épaisseur.} \end{array}$$

Pour des raisons de construction, nous prenons :

$$L = 15 \text{ mm}$$

$$b = 10 \text{ mm.}$$

Il reste à calculer  $e$  :

$$e^2 = \frac{6 P L}{4 b t}$$

pour l'acier  $e = 0,82 \text{ mm}$  arrondi à  $0,8 \text{ mm}$

pour le dural  $e = 1,39 \text{ mm}$  arrondi à  $1,4 \text{ mm}$ .

### Lames de flexion (moment dans le plan de symétrie)

Compte tenu des rapports de bras de levier (voir plan joint) si l'on suppose la contrainte radiale appliquée sur toute des extrémités libre du morceau de jante, la charge vue par la lame sera environ 0,5 P.

Nous prenons comme ci-dessus  $L = 15 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  et les mêmes valeurs pour  $t$

alors  $e = 1,1 \text{ mm}$  pour l'acier et  $2 \text{ mm}$  pour le dural.

### Lames de flexion (moment dans un plan radial)

Comme ci-dessus on peut prendre comme ordre de grandeur la charge vue par la lame = 0,5 P.

Le calcul de cette lame donne un résultat analogue au précédent.

### Calcul des cordes à piano de transmission des efforts

L'utilisation des cordes à piano qui servent de rotule, permet le travail des lames en flexion pure, sans interaction des efforts composants.

Ces cordes voient un effort égal à celui transmis.

Soit au minimum  $P/2 = 1,5 \text{ kg}$  dans notre cas.

Avec un diamètre de 1 mm, l'effort de rotule est constant et la contrainte égale à  $9 \text{ kg/cm}^2$ , ce qui est très convenable.

Il est souhaitable de prévoir plusieurs jeux de lames de différentes épaisseurs pour adapter la sensibilité aux contraintes appliquées.

Soit, pour les lames de poussées radiales :

|          | <u>Acier</u>          |  |                               | <u>Dural</u>          |  |
|----------|-----------------------|--|-------------------------------|-----------------------|--|
| P = 3 kg | $e_{\text{mm}} = 0,8$ |  | P/S = 0,05 kg/cm <sup>2</sup> | $e_{\text{mm}} = 1,4$ |  |
| 9 kg     | 1,5                   |  | 0,15                          | 2,4                   |  |
| 20 kg    | 2,1                   |  | 0,33                          | 3,6                   |  |
| 100 kg   | 4,7                   |  | 1,66                          | 8                     |  |

Et, pour les lames de flexion :

|          |                       |  |                     |
|----------|-----------------------|--|---------------------|
| P = 3 kg | $e_{\text{mm}} = 1,1$ |  | $e_{\text{mm}} = 2$ |
| 9 kg     | 2                     |  | 3,5                 |
| 20 kg    | 2,9                   |  | 5,1                 |
| 100 kg   | 6,5                   |  | 11,3                |

Les valeurs extrêmes pour le dural : 8 mm et 11,3 mm sont trop importantes.

Pour des charges unitaires supérieures à 1,7 kg/cm<sup>2</sup> il suffirait de réduire la surface du morceau de jante.

Remarque : Calcul des flèches des lames sans charge.

Une lame travaillant en flexion à taux de contraintes constant à une flèche  $f$  donnée par  $f = \frac{6 P L^3}{E b h^3}$

avec les dimensions de base :

On a ici :  $P = 0,097 \frac{F}{h^3}$  pour l'acier et  $P = 0,29 \frac{F}{h^3}$  pour le dural.

Pour les lames de poussées  $F = \frac{P}{4}$

où :  $F = 0,245 \frac{1}{P}$  pour l'acier et  $F = 0,143 \frac{1}{P}$  pour le

*Dural*, ce qui donne :

| P<br>(kg) | Acier     |           | Dural     |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           | e<br>(mm) | f<br>(mm) | e<br>(mm) | f<br>(mm) |
| 3         | 1,1       | 0,14      | 2         | 0,08      |
| 9         | 2         | 0,081     | 3,5       | 0,047     |
| 20        | 2,9       | 0,055     | 5,1       | 0,032     |
| 100       | 6,5       | 0,0245    | -         | -         |

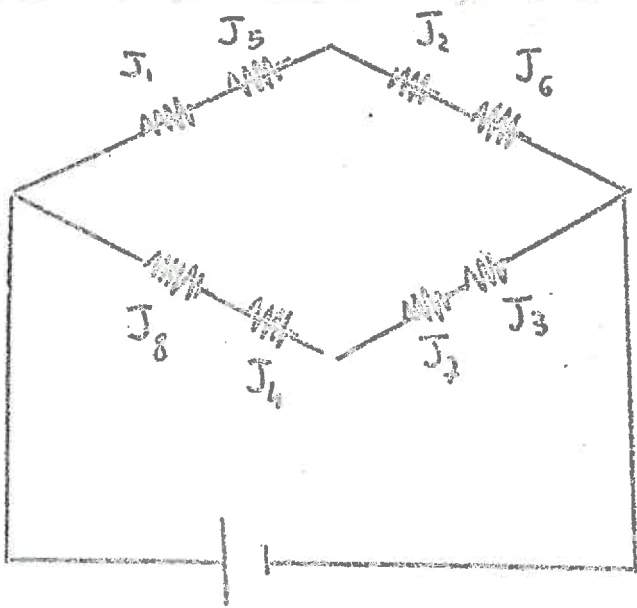
Ces flèches sont correctes. A titre de précaution, il conviendrait de prendre des lames en dural pour des P/S de 0,05 à 0,15 et en acier pour les P/S supérieurs.

Des calculs analogues montreraient que les conclusions sont identiques en ce qui concerne les lames de moments.

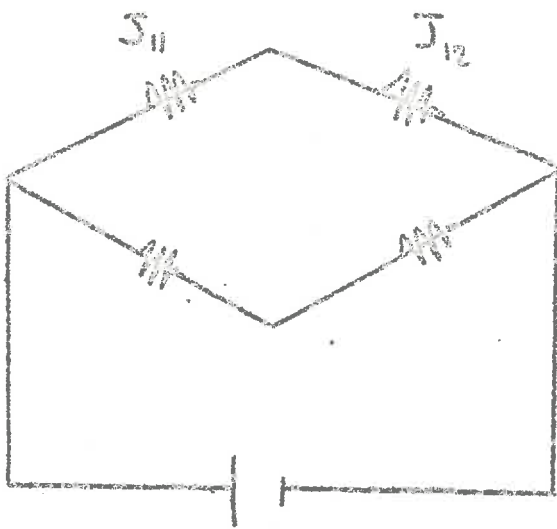
#### Branchement des jauges

Les jauges sont numérotées.  
(se reporter à la Figure 27).

Dynamomètre des contraintes radiales :

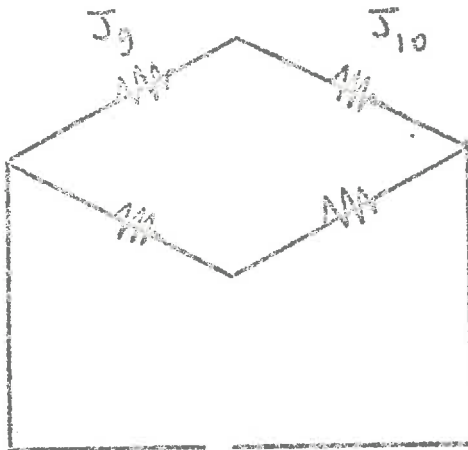


Dynamomètre des contraintes tangentielles (plan diamétral) :





Le schéma des contraintes tangentielles (perpendiculaire au plan de la roue) :



L'enregistrement peut être fait en rotation lente ou rapide pour les trois voies de mesure à la fois, y compris le repère des positions en rotation.

La chaîne de mesures est composée :

1°) d'un boîtier d'équilibrage et d'amplification comportant six voies de mesure. (bande passante de l'ampli 0 à 20.000 Hz, impédance de sortie 10  $\Omega$ ).

2°) d'un enregistreur sur papier à développement direct (six voies de mesure, bande passante de 0 à 3.000 Hz).

## CONCLUSIONS

Les travaux exposés dans ce mémoire ont permis d'étudier la locomotion d'une roue dans les deux milieux essentiels en Mécanique des Soils : le sable sec ou matériau pulvérulent ( $C = 0$ ) et l'argile saturée dont l'angle de frottement apparent est nul, sans compter le cas particulier de la locomotion à deux dimensions sur modèle analogique ( $C = 0$ ).

Pour chaque matériau étudié nous avons pu relier les caractéristiques statiques (force de traction pour une roue tractée, couple pour une roue motrice) et les enfoncements aux paramètres du milieu (angle de frottement, cohésion, poids spécifique). Les résultats obtenus dans la mesure où ils coïncident avec nos expériences, ont été généralisés et nous ont permis de proposer dans chaque cas des abaques ou des formules qui donnent les forces et les enfoncements qui se manifestent lors du régime permanent à faible vitesse.

Ainsi, pour une roue motrice à 2 dimensions, nous avons obtenu un ordre de grandeur convenable des enfoncements et des couples lorsque la résultante des forces est telle qu'elle met le sol en plasticité (grande force ou grande inclinaison), ce qui correspond au cas limite où la roue commence à être en difficulté.

La force portante d'une roue motrice pure ( $T = 0$ ) à 3 dimensions dans le sable est bien rendue par la formule  $Q/\gamma Lr^2 = N_\beta \varepsilon^2$  pour les charges étudiées ( $\frac{Q}{Lr^2} \leq 40$ ). Le couple est inférieur au minimum des talus probablement parce que les contraintes sous la roue n'atteignent pas l'inclinaison  $\beta$ .

L'étude en silice argileux saturé ( $\sigma = 50 \text{ g/cm}^2$ ,  $\beta = 0$ ) a montré que la force portante de la roue motrice pure ( $\beta = 0$ ) de la forme  $\sigma/\rho r^2 = 2 \sigma$ . Cette formule permet de calculer l'aptitude d'un tel terrain à supporter une roue donnée.

Pour les roues tractées, la force de traction est proportionnelle à la charge verticale.

Pour caractériser l'aptitude d'un terrain au déplacement d'une roue, il faudrait faire intervenir aussi le glissement maximum compatible avec un certain avancement. Il importerait alors de faire des essais de démarrage des roues enfoncées et de chercher comment varie le glissement critique en fonction des enfoncements et des paramètres du sol. De même pour se rappeler davantage des conditions réelles, il serait bon d'essayer des pneumatiques soumis à de fortes charges et d'aborder les problèmes de similitude.

REFERENCES

- 1 CH. DUPERRIN : "Etude de la locomotion tous terrains. Etude cinématique et statique du comportement d'une roue rigide en milieu sans cohésion à 2 dimensions".  
Thèse de Doctorat de Spécialité,  
Grenoble 1962.
  
- 2 A. OBERTI : "Etude de la locomotion tous terrains. Evolutions des roues rigides en milieu pulvérulent".  
Thèse de Doctorat de Spécialité,  
Grenoble 1963.
  
- 3 M. BOUCHERIE : "Etude de la locomotion tous terrains. Evolution de roues rigides en milieu pulvérulent à deux et trois dimensions".  
Thèse de Doctorat de Spécialité,  
Grenoble 1964.
  
- 4 Page 13 de 3 .
  
- 5 Page 26 de 3 .
  
- 6 J. DIAREZ : "Remarques sur la stabilité des talus. Influence de la loi de répartition des contraintes".  
Archiwum Hydrotechniki,  
Varsovie 1960.
  
- 7 Page 57 de 3 .
  
- 8 Page 74 de 3 .
  
- 9 Planches 6, 7, 8, 9 de 3 .
  
- 10 Y. LE GALL : "Contribution à l'étude de la force portante de fondations circulaires peu profondes".  
Thèse de 3e Cycle,  
Grenoble 1965.

- J. BIAREZ : "Cours de 3e Cycle" de la Faculté des Sciences de Grenoble, Année 1964-1965.
- J. HAERINGER : "Contribution à l'étude de la force portante des fondations de surface en milieu pulvérulent à 2 dimensions".  
Thèse de Spécialité, Grenoble 1964.
- STERENBERG : "Etude de la locomotion tous terrains. Etude théorique à deux dimensions des états statiques d'une roue rigide en milieu pulvérulent".  
Thèse de Doctorat de Spécialité, Grenoble 1963.
- J.L. AURIAULT : "Etude des milieux pulvérulents non chargés. Application au problème d'une roue rigide reposant sur un milieu pulvérulent".  
Thèse de 3e Cycle, à soutenir.
- M.C. BEKKER : "Off the road locomotion".  
University of Michigan Press, 1960.
- P. WILLEMEZ : "Information sur les études nouvelles se rapportant à la locomotion terrestre".  
Direction des études et fabrication d'armement, 1959.
- Report on mobility consultants conference.  
Vicksburg, Mississippi.
- Freitag - Wheels on soft soils an analysis of existing data,  
Vicksburg, Mississippi, 1965.
- 1er Congrès International de la locomotion hors route.  
Turin 1961.
- Les problèmes du pneu et de la route.  
Revue Générale du caoutchouc, Octobre 1959.

TABLE DES MATIERES

|   | Pages |
|---|-------|
| <u>Ant-Propos</u>   | 1     |
| <u>roduction</u> .....  | 2     |
| <u>maire</u> .....  | 4     |
| <u>ations</u> .....   | 4     |
| <u>pitre I : Calcul des roues tractées ou motrices<br/>en milieu pulvérulent à deux dimensions ..</u> | 5     |
| <u>- Roues tractées en milieu pulvérulent à deux di-<br/>mensions</u> .....                           | 7     |
| a) Données expérimentales .....   | 7     |
| b) Méthode de calcul .....  | 8     |
| c) Calcul de la force de traction et de l'enfon-<br>cement en milieu pulvérulent quelconque ....      | 10    |
| <u>gures 1, 2, 3</u>  |       |
| a) Détermination de la charge verticale limite<br>compatible avec un enfoncement donné .....          | 11    |
| <u>- Roues motrices en milieu pulvérulent à deux di-<br/>mensions</u> .....                           | 11    |
| <u>gure 4</u>   |       |
| a) Données expérimentales .....   | 13    |
| <u>gure 5</u>   |       |
| b) Méthode de calcul .....  | 16    |
| <u>gures 6, 7</u>   |       |
| c) Résultats pratiques .....  | 22    |
| <u>gures 8, 9, 10, 11, 12, 13</u>   |       |
| d) Détermination de la charge verticale limite<br>compatible avec un enfoncement donné .....          | 24    |
| <u>gure 14</u>  |       |
| <u>ableaux des calculs par la méthode de Kötter-butée</u>   | 25    |
| <u>ableau des contraintes de butée</u> .....  | 29    |

|   |    |
|---|----|
| <u>Tableau des constantes</u> .....   | 29 |
| <u>Chapitre II : Etude des roues à trois dimensions sur<br/>matériau pulvérulent</u> .....  | 33 |
| <u>A - Etude expérimentale</u> .....  | 35 |
| <u>Figures 15, 16, 17</u>   |    |
| <u>B - Conclusions des expériences</u> .....  | 38 |
| <u>C - Calcul d'une roue motrice pure en milieu pulvé-<br/>rulent quelconque. (<math>\mu</math>, <math>\phi</math>, <math>c = 0</math>)</u> ..... | 40 |
| <u>D - Détermination de la charge verticale limite com-<br/>patible avec un enfoncement donné</u> .....   | 40 |
| <u>Figures 18, 19, 20</u>   |    |
| <u>Tableaux des mesures</u> .....   | 41 |
| <u>Chapitre III : Etude des roues à trois dimensions<br/>sur une argile saturée</u> .....   | 44 |
| <u>1 - Roue tractée</u> .....   | 44 |
| <u>2 - Roue motrice pure</u> .....  | 45 |
| <u>Figures 21, 22</u>   |    |
| <u>Figures 23, 24</u>   |    |
| <u>3 - Roue motrice générale</u> .....  | 48 |
| <u>4 - Détermination de la force portante verticale<br/>compatible avec un enfoncement donné</u> .....  | 49 |
| <u>Figure 25</u>  |    |
| <u>Chapitre IV : Appareils de mesure des contraintes<br/>sur la périphérie d'une roue rigide</u> .....  | 50 |
| <u>1 - Définition et utilisation des extensomètres à<br/>fil résistant</u> .....  | 51 |
| <u>2 - Montage utilisé pour la mesure des contraintes<br/>à deux dimensions</u> .....   | 53 |
| <u>Figure 26</u>  |    |
| <u>3 - Appareillage complet</u> .....   | 54 |

|  |    |
|--|----|
| <u>INTRODUCTION</u> .....                              | 56 |
| <u>Mesures des contraintes à trois dimensions</u> .... | 57 |
| a) Principes des mesures proposées .....               | 57 |
| b) Principes de l'extensométrie .....                  | 58 |
| c) Définition et calcul des lames .....                | 59 |
| <u>CONCLUSIONS</u> .....                               | 65 |
| <u>Références</u> .....                                | 67 |
| <u>Table des matières</u> .....                        | 69 |