

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE  
— I. M. R. A. —  
STATION de SCIENCE du SOL  
Domaine Saint-Paul  
84140 MONTFAVET

1984

TH-GB1.

Martine BROSSARD

Je tiens à remercier tout particulièrement  
Monsieur ROGER GUENNELON pour l'aide qu'il m'a  
apportée au cours de mon travail.

Je remercie également Madame ANNE-MARIE COKBORNE  
et toutes les personnes qui m'ont permis de réaliser  
certaines parties de mon travail.

## SOMMAIRE

|   | <u>PAGES</u> |
|---|--------------|
| PREMIERE PARTIE   |              |
| PRESENTATION DU CADRE DU STAGE  | 1            |
| SCIENCE DU SOL : DEFINITION DES OBJECTIFS ET DES<br>THEMES DE RECHERCHE     | 4            |
| DEUXIEME PARTIE   |              |
| INTRODUCTION : Préviation des courbes potentiel-Teneurs en eau              |              |
| - Potentiel de l'eau dans le sol  | 7            |
| - Mesures directes par des tensiometres et des psychromètres                | 8            |
| - Réduction du problème   | 17           |
| I CALCUL DES DIAMETRES DES VIDES MENAGES ENTRE TROIS<br>SPHERES TANGENTES   |              |
| - Formules  | 20           |
| - Etablissement du programme  | 29           |
| - Utilisation du mini 6 et résultats  | 32           |
| - commentaires  | 39           |
| II CALCUL DU VIDE INTERNE A QUATRE SPHERES                                  |              |
| - Formules  | 40           |
| - Etablissement du programme  | 45           |
| - Résultats et commentaires   | 48           |
| V APPROCHE PROBABILISTE   |              |
| - Dénombrement des types d'"arrangements" 4 à 4 de N<br>types de particules | 49           |
| - Appréciation de la fréquence d'existence des arrangements                 | 50           |
| - Programme et commentaires   | 51           |
| CONCLUSION GENERALE   | 53           |
| ANNEXE : Organigrammes programmes et résultats                              | 54           |

# PREMIERE PARTIE

## Présentation du cadre du stage

### INSTITUT NATIONAL DE LA RECHERCHE AGRONOMIQUE

#### **I Son organisation**

Organisé dans sa forme actuelle en 1946, l'I.N.R.A. a reçu pour mission l'organisation, l'exécution et la publication de tous travaux de recherches scientifiques intéressant les productions végétales et animales, la transformation et la conservation des produits végétaux et animaux.

L'INRA emploie 7400 personnes en France.

Placé sous la tutelle du Ministère de l'Agriculture et du Ministère de l'Industrie et de la Recherche, l'INRA est un établissement public national doté de l'autonomie financière.

#### **II Ses ressources**

Elles proviennent de 80 à 90 % d'une subvention de l'Etat et pour le reste des ventes de produits agricoles, d'analyses, de brevets, de droits de licence sur les variétés obtenues, de contrats de recherche.

#### **III Historique**

L'INRA s'est d'abord intéressé aux recherches économiques et sociologiques de l'agriculture ainsi qu'au monde rural, aux recherches vétérinaires, forestières et hydrobiologiques. De nouvelles orientations sont apparues en raison de problèmes posés en cette fin de XXe siècle :

- l'aménagement de l'espace rural,
- la sauvegarde de l'environnement,
- l'économie des matières premières, y compris l'eau,
- l'emploi des produits chimiques,
- la transformation des produits agricoles,
- la qualité des aliments.

Les recherches entreprises par l'INRA sont organisées selon trois critères :

- orientation par production,
  - orientation par spécialisation scientifique,
  - orientation régionale.
-

# CENTRE DE RECHERCHES AGRONOMIQUES D'AVIGNON-MONTFAVET

Il est situé au cœur d'une région de production agricole, ses recherches visent à améliorer les facteurs de production maraîchère et fruitière et de gestion des forêts méditerranéennes.

Il bénéficie de la collaboration d'autres centres INRA et de divers organismes de recherche scientifique et technique.

## I Historique

C'est un des 21 centres de l'Institut National de la Recherche Agronomique. Il fut créé en 1953 sur le Domaine Saint-Paul à Montfavet. L'INRA installa les laboratoires de la Station d'Agronomie et ceux de la Station de Zoologie. En 1957, la Station expérimentale d'Apiculture fut construite. La même année fut implantée la Station d'Amélioration des plantes maraîchères sur le domaine Saint-Maurice situé à 4 kms au nord de Montfavet. Au cours des années suivantes, des disciplines complémentaires ont été créées donnant un plus vaste rayon de recherches.

La superficie totale à la disposition du Centre INRA Avignon-Montfavet, en propriétés ou location, est d'environ 260 hectares.

## II Enumération des différentes stations ainsi que leurs fonctions

### A Domaine Saint-Paul

- AGRONOMIE : étudie l'effet des techniques culturales sur l'élaboration du rendement
- Recherches d'Arboriculture fruitière : création et sélection de variétés de porte-greffes de fruits à noyau et à pépins adaptés à la région méditerranéenne
- Bioclimatologie : étudie l'influence du climat sur la production agricole
- Biométrie : informatique, électronique, automatique
- Documentation : utilisation de l'outil informatique pour la gestion de l'information au service des utilisateurs
- Phytopharmacie : étudie les moyens chimiques ou biologiques de protection des plantes, les pollutions atmosphériques

- Technologie des produits végétaux : étudie la qualité des fruits et légumes
- Recherches intégrées en production végétale : recherche de références utiles au développement en production de légumes
- Zoologie : étude des insectes ravageurs et de la protection des cultures
- Sylviculture méditerranéenne :
- Science du Sol : (son but sera développé ultérieurement)

## **B Domaine Saint-Maurice**

- Amélioration des plantes maraîchères : tente de faire progresser la création de nouvelles variétés de légumes
- Pathologie végétale : mise au point de méthodes de lutte biologique contre les champignons, virus sur différentes formes de cultures.

## **La Station de Science du Sol**

### 1/ Les Objectifs

Depuis la création du Département de Science du Sol en 1974, la Station d'Avignon est spécialisée dans les domaines de la physique et de la mécanique des sols.

Les programmes qu'elle conduit ou se prépare à entreprendre visent pour l'essentiel, dans les limites de sa compétence :

- A prévoir l'état et le fonctionnement physique des sols en fonction de leur constitution et du contexte climatique et cultural dans lequel ils sont placés,
- A déterminer les modalités d'utilisation, principalement agricole, des sols les mieux adaptés à leur état,
- A définir des techniques de correction de cet état et de ce fonctionnement physique.

Son évolution, déjà amorcée ou prévue, peut être caractérisée par les principaux points suivants :

- Renforcement des recherches sur le potentiel et la localisation de l'eau dans l'espace poral dans le but de mieux décrire et prévoir l'évolution structurale des sols à court terme, les propriétés mécaniques, les transferts d'eau et surtout de solutés,
- Effort accru de prise en compte du caractère discontinu et anisotrope des sols considérés du point de vue de leur fonctionnement,

- Introduction de recherches sur des organes vivants en tant que facteur de déformation des sols et en tant que moteurs de transferts d'eau et de solutés,
- Importance accrue accordée au rôle des constituants organiques sur l'évolution structurale et les propriétés mécaniques dans un premier temps ; vraisemblablement sur les caractéristiques hydrodynamiques dans un proche avenir,
- Tentative d'intégration des concepts et éléments théoriques sur le déterminisme de l'état physique dans le cadre du développement du profil pédologique.

## 2/ Thèmes de recherches

### A Problèmes généraux (les principaux)

- Evolution et protection des sols en régime d'exportation maximale de matières organiques.

Ce thème d'intérêt général permanent prend une importance particulière en raison des projets de production d'énergie à partir de la biomasse, notamment des résidus de récolte exportables tels que les pailles de céréales.

- Fonctionnement hydrique des couches de surface.

Il s'agit d'un thème essentiel -et jusqu'ici très peu étudié- à la prévision de l'humidité des couches de surface dans le but de prévoir les propriétés mécaniques des sols et de maîtriser les premiers stades (germination, levée, début d'enracinement) des peuplements végétaux.

- Etude des interactions entre d'une part le sol et les phénomènes dont il est le siège et d'autre part la croissance et le fonctionnement racinaire.

Ce thème, à la limite de la Science du Sol et de l'Agronomie, s'est imposé en raison d'un manque de connaissances freinant d'autres recherches, telle que l'étude du fonctionnement en régime permanent de la "fertirrigation localisée".

### B Problèmes posés par des systèmes particuliers de culture

#### 1) Grandes cultures y compris systèmes légumiers en plein champ :

- Un ensemble de recherches visent, en collaboration avec des chercheurs de l'A.R.C. (Grande-Bretagne), à déterminer l'aptitude des sols au non travail (semis direct)
- D'autres recherches portent sur la traficabilité des terrains agricoles et sur leur aptitude en fonction de l'humidité à recevoir tel ou tel type de travail du sol

- D'autres, enfin, concernent l'étude des tassements profonds des sols cultivés et leur degré de réversibilité dans le but de participer à une prospective sur la conception des matériels de culture (roulant notamment) en vue de conserver la fertilité physique des sols.

## 2) Arboriculture fruitière

Aussi bien l'orientation nouvelle décidée pour le Centre d'Avignon que l'état d'avancement des recherches à la station suggèrent le choix des sols support de verger comme modèle privilégié *in situ* pour plusieurs programmes en cours :

- Fertirrigation localisée des arbres fruitiers,
- Influence du mode d'entretien du sol sur l'état physique et le fonctionnement hydrique de l'ensemble du profil exploité par les racines,
- Participation à une analyse pluridisciplinaire des causes non reconnues de dépérissement d'arbres fruitiers (cerisiers dans un premier temps).

## 3) Cultures sous serre

- Pilotage de l'alimentation minérale et hydrique des cultures maraîchères par fertirrigation,
- Participation à la recherche et à l'évaluation de nouveaux substrats pour l'élevage des jeunes plants et la culture "hors sol".

## DEUXIEME PARTIE

### I Introduction

#### Prévision des courbes - Potentiel-Teneurs en eau

##### 1/ Potentiel de l'eau dans le sol

A côté de la teneur en eau du sol, on définit son état énergétique. Des deux formes d'énergie reconnues, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, seule la première va intéresser le sol. En effet, l'énergie cinétique est liée à la vitesse et l'on considère généralement que les transferts dans le sol sont trop lents pour que l'énergie cinétique puisse jouer un rôle. Notons que par contre pour tous les processus d'érosion, c'est au contraire l'énergie cinétique qui jouera le rôle principal.

L'énergie potentielle permet de caractériser la disponibilité de l'eau et le sens des transferts de l'eau dans le sol. Comme pour tout potentiel, on ne peut mesurer qu'une valeur relative par rapport à un état standard.

Un exemple très simple d'un déplacement sous l'effet de l'énergie potentielle est une goutte d'eau qui va être "bue" par un bloc d'argile.

L'eau du sol est soumise à différents champs de force ; son potentiel total pourra être identifié comme la somme de ses différentes composantes que nous allons définir ci-dessous.

Les différents types de potentiel :

- Le potentiel de gravité : c'est un potentiel de position. Il dépend de l'altitude du point considéré par rapport à un niveau de référence.

- Le potentiel de pression : dépend des forces qui relient l'eau et la matrice poreuse. On le subdivise en deux potentiels selon que la pression est négative ou positive

- Le potentiel matriciel ou encore capillaire. Il est négatif lorsque le sol est non saturé et exprime le fait que l'eau est liée au sol en raison, soit de la texture et de la minéralogie de la matrice poreuse, soit de l'organisation du milieu poreux et de l'existence de forces liées à la capillarité. Cette notion de potentiel matriciel permet de ne pas séparer ce qui est dû aux forces d'adsorption et ce qui est dû aux forces capillaires, dont les domaines d'action sont difficiles à isoler. Ce potentiel est négatif. Pour simplifier l'écriture, lorsque l'on travaille dans le domaine non saturé, on a défini le potentiel de succion (exercé par le sol sur l'eau), égal à la valeur absolue du potentiel matriciel. A la limite entre les domaines saturés et non saturés, le potentiel matriciel est nul.

- Le potentiel hydrostatique. C'est le potentiel de pression auquel est soumis un point situé dans une nappe d'eau. Il correspond à la pression due à la colonne d'eau située entre ce point et la surface de la nappe.

- Le potentiel osmotique est dû à la concentration en sel de l'eau du sol. On observe ainsi, en laboratoire, lorsqu'il y a deux solutions de concentration différentes, séparées par une membrane semi-perméable, un déplacement de l'eau à travers cette membrane qui tend à équilibrer les concentrations. Dans les sols, pour les problèmes courants, sous climat tempéré, ce potentiel peut être négligé. Ce n'est pas le cas des sols irrigués dans des régions de forte évaporation. Le potentiel osmotique pourra également être important pour les problèmes d'altération des sols puisque cette altération pourra se produire dans des microscopes, des microsystèmes où la concentration en sel est bien supérieure à la concentration moyenne des eaux du sol.

### Expression quantitative du potentiel de l'eau du sol

L'expression du potentiel de l'eau du sol par unité de poids est très fréquemment utilisée car elle permet de traiter de façon simple les problèmes où interviennent le potentiel de gravité (mesuré par la différence de niveau entre le point considéré et un niveau de référence), le potentiel hydrostatique (exprimé par une charge hydraulique en cm d'eau).

Le potentiel de succion de l'eau du sol subit de fortes variations entre le dessèchement complet et la saturation. Aussi, il est intéressant parfois de l'exprimer non pas en cm d'eau mais d'en prendre le logarithme ; on définit ainsi le pF de l'eau du sol :

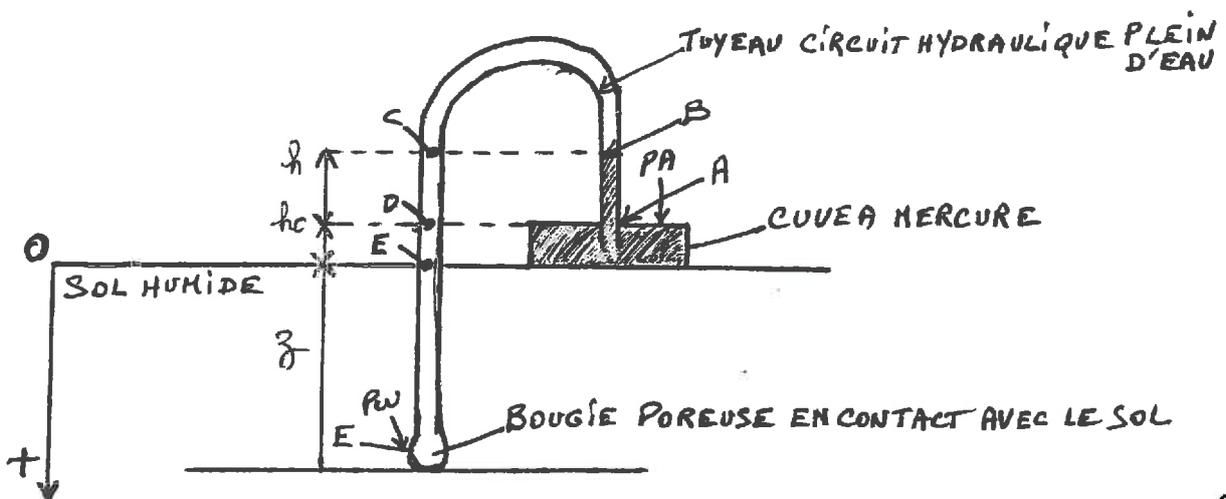
$$pF = \log (\text{pot. succion exprimé en cmH}_2\text{O})$$

### Relation potentiel-teneur en eau.

On cherche une relation liant le potentiel de l'eau du sol donc le potentiel de succion du sol par rapport à l'eau à la teneur volumique en eau du sol.

### Mesures directes

#### Par tensiomètre



Si le sol se dessèche, le mercure monte dans le tuyau, le sol aspire l'eau de la bougie. Il y a une différence de pression entre l'entourage de la bougie et la cuve à mercure, il y a succion  $P_w - P_A$

Calcul de cette différence de potentiel

A  $\rightarrow P_A$   
 B  $\rightarrow P_B$   
 C  $\rightarrow P_C$   
 E  $\rightarrow P_E$   
 F  $\rightarrow P_F = P_w$

$$P_w - P_E = \rho_w g z$$

$$P_E - P_D = \rho_w g h_0$$

$$P_D - P_C = \rho_w g R$$

$$P_A - P_B = \rho_{Hg} g R$$

$\rho_w$  densité de l'eau

$\rho_{Hg}$  densité du mercure

$$P_w - P_A = \rho_w g (z + h_0 + R) - \rho_{Hg} g R$$

Si  $h_0 = 0$ , le niveau de la cuve de mercure est au niveau du sol.

Dans ce cas,

$$P_w - P_A = \rho_w g z + \rho_w g R - \rho_{Hg} g R$$

$$P_w - P_A = g R (\rho_w - \rho_{Hg}) + \rho_w g z \quad (1)$$

Si en plus  $z = 0$  le niveau de la cuve est au même niveau que la bougie.

$$P_w - P_A = g R (\rho_w - \rho_{Hg}) \quad (2)$$

Expression négative  $P_w - P_A < 0$  avec  $P_A > P_w$

L'erreur sur  $h$  est de l'ordre du mm

On peut admettre que  $\rho_w, \rho_{Hg}, g$  sont sans erreur

Le tensiometre permet d'accéder à une différence de pression

Le potentiel matriciel est lié à la matière, aux forces de capillarité (distribution des pores)

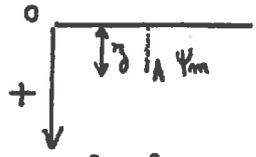
$\Psi_m$  est proportionnel à la différence de pression

$$\frac{P_w - P_A}{\rho_w g} = \Psi_m \quad (3)$$

$P_w < P_A$  donc  $\Psi_m < 0$

Potentiel gravitaire  $\Psi_g$

$$\Psi_T = \Psi_g + \Psi_m = \Psi_m - z \quad (4)$$



Le point A subit une pression égale au poids d'une colonne d'eau de longueur z pour un niveau de référence O

$P_w - P_A$  est fonction de h, donc dans l'équation (3) on peut porter l'équation (1)

$$\Psi_m = \frac{hg(\rho_w - \rho_{Hg}) + \rho_w g z}{\rho_w g} = \frac{R(\rho_w - \rho_{Hg})}{\rho_w} + z$$

$$\Psi_m = \frac{R(\rho_w - \rho_{Hg})}{\rho_w} + z \quad (5)$$

Potentiel matriciel

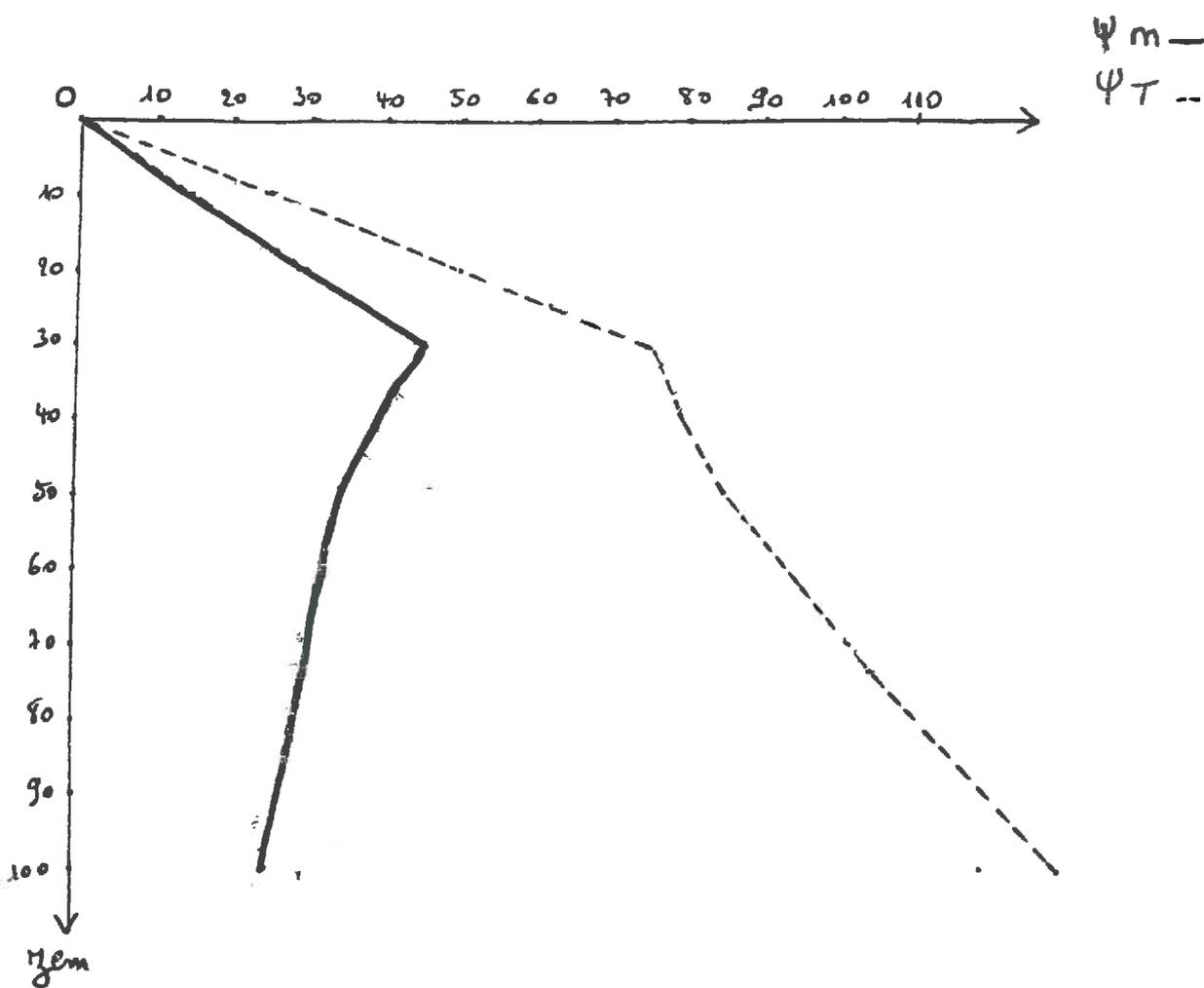
$$\Psi_T = \Psi_m - z = \frac{R(\rho_w - \rho_{Hg})}{\rho_w} \quad (6)$$

En utilisant un tensiomètre, on a donc accès à la valeur h (liante de Hg en H<sub>2</sub>O dans le capillaire) et on fixe la valeur z par la profondeur de l'implantation du tensiomètre

Application numérique

| $z$ cm | $\Psi_m$ | $\Psi_T$ |
|--------|----------|----------|
| 0      | 0        | 0        |
| 10     | -15      | -25      |
| 20     | -30      | -50      |
| 30     | -45      | -75      |
| 40     | -60      | -100     |
| 50     | -75      | -125     |
| 75     | -105     | -155     |
| 100    | -135     | -185     |

L'eau coule en fonction du potentiel total



### Limites techniques et théoriques de la tensiométrie

On mesure une différence  $P_w - P_A$   
 quand  $P_w \rightarrow 0$   $P_w - P_A \rightarrow - P_A$

donc on ne peut dépasser une dépression de une atmosphère soit 760 mm de Hg (limite théorique)

Lorsque la pression  $P_w$  de succion est trop forte au niveau de la bougie ( $P_w$  grand), on extrait l'eau des pores de la bougie poreuse, il y a une entrée d'air et de ce fait les mesures sont erronées.

### Par psychromètre.

La mesure psychrométrique ne concerne que la phase gazeuse d'un milieu donné : de ce fait, il est abusif de parler a priori de mesure du "potentiel hydrique d'un sol" puisqu'en toute rigueur, la mesure se ramène à celle d'une humidité relative ou d'une pression partielle de vapeur d'eau : il n'y a coïncidence entre les deux termes de potentiel de l'eau du sol et d'humidité relative que dans le cas où l'équilibre entre les différentes phases est réalisé, ce qui ne constitue pas a priori le cas général, surtout en conditions non isothermes. Si l'on considère le cas idéal où l'équilibre entre les phases "solide + liquide" et gazeuse est réalisé à une température  $T_0$ , on pourra caractériser cette phase gazeuse par 3 grandeurs :

- sa pression partielle de vapeur d'eau  $p$

- son humidité relative  $H_r = p/p_0(T_0)$ ,  $p_0(T_0)$  étant la pression de vapeur saturante à la température  $T_0$

- son potentiel hydrique  $\Psi$  tel que

$$\Psi = \frac{RT_0}{Mg} \ln(p/p_0)$$

$\Psi$  = potentiel

$R$  = constante des gaz parfaits

$M$  = masse molaire de l'eau

$g$  = accélération de la pesanteur

Le principe de la mesure consiste à déterminer ( $p/p_0(T)$ ) pour la phase gazeuse situé dans la chambre interne du psychromètre et supposée en équilibre avec le milieu extérieur. La chambre de mesure, délimitée par une capsule poreuse, renferme un thermocouple chromel-constantan (Cr/Cst) qui comporte une jonction de "mesure" et une jonction de "référence", constituée en réalité de deux plots de cuivre et dont la température doit rester constante tout au long de mesure (forte chaleur massique).

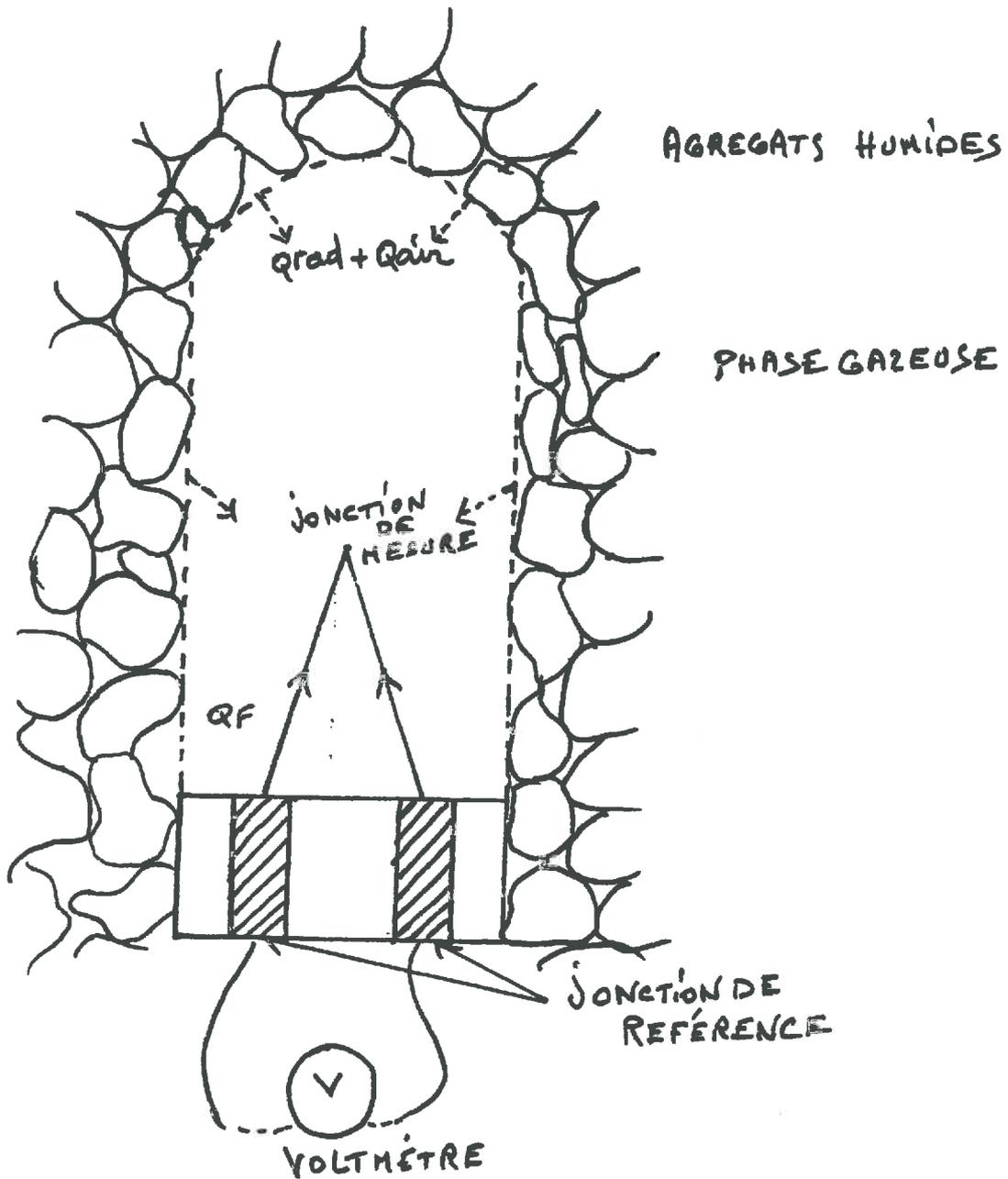
Le matériel utilisé est de type WESCOR (microvoltmètre HR 33T)

Dans une première phase, à partir de l'état initial A du système, on refroidit la soudure de mesure par effet Peltier jusqu'à condensation d'une infime quantité d'eau sur celle-ci. Si le refroidissement est prolongé au-delà de la température du point de rosée  $T_r$ , la masse d'eau condensée sur la soudure de mesure augmente. A partir de l'arrêt du refroidissement, deux méthodes de mesure sont alors possibles en utilisant le matériau cité plus haut :

- Dans la méthode psychrométrique dite "classique", on laisse la soudure de mesure se réchauffer librement. Du fait de l'évaporation, la soudure de mesure prend une température d'équilibre  $T_e$  telle que  $T_r < T_e < T_0$  : dans ce cas, l'évaporation a lieu à une température supérieure à la température du point de rosée  $T_r$ , car cette dernière caractérise précisément un équilibre liquide vapeur, c'est-à-dire l'absence d'évaporation. On détermine enfin la relation  $T_0 - T_e = f(p, p_0(T_0))$ , par étalonnage expérimental ou modélisation.

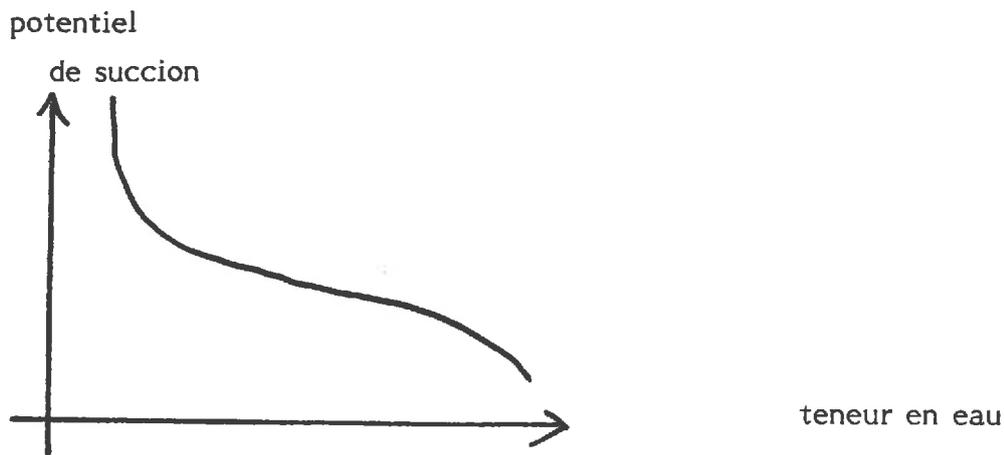
- Dans la méthode psychrométrique dite "du point de rosée", après arrêt du refroidissement et réchauffement de la soudure jusqu'au point de rosée, un dispositif électronique permet de compenser par effet Peltier le réchauffement de la soudure du aux flux radiatifs et conductifs vers la soudure de mesure ; celle-ci tend alors à prendre une température d'équilibre égale à  $T_r$ . Dans ce cas, on mesure un abaissement de température  $T_0 - T_r = f(p/p_0(T_0))$ .

# REPRESENTATION SCHEMATIQUE D'UN MICROPSCYCHROMETRE



- $Q_{rad}$  = flux de type radiatif des parois de la chambre psychrométrique
- $Q_{air}$  = flux de type conductif à travers le volume d'air de la chambre
- $Q_F$  = flux de type conductif le long des fils du thermocouple

Les mesures directes (par tensiomètre ou psychromètre) montrent qu'il s'établit une relation continue entre la succion du sol sur l'eau et la teneur en eau qui a la forme très générale suivante



Chaque unité de sol présente ainsi une courbe caractéristique d'humidité. Cette courbe dépend de la texture, de la structure, de la teneur en matière organique. Quelques exemples régionaux permettent d'illustrer l'influence de ces facteurs.

#### a) Rôle de la texture

Le rôle de la texture est illustré par quelques exemples de sol étudiés ces dernières années. De façon très générale, on observe que, aux fortes succions, les sols argileux retiennent plus d'eau que les autres sols. Cela est dû à la grande surface spécifique des matériaux argileux.

Par contre, les sols sableux ne contiennent beaucoup d'eau qu'aux faibles succions. La courbe caractéristique de la craie, fait ressorti le caractère particulier de ce matériau : porosité très fine et unimodale.

#### b) Le rôle de la structure

L'importance de la structure sur les courbes caractéristiques d'humidité nécessite que l'on s'apesantisse sur les modalités de mesure de la relation potentiel-teneur en eau. Cette courbe peut être établie soit sur matériau remanié (séché à l'air tamisé à 2 mm puis réhumecté), soit sur matériau non remanié (au champ ou au laboratoire).

Le remaniement de la terre crée une forte porosité grossière entre les agrégats de 2 mm. Il y a donc beaucoup plus d'eau disponible aux faibles succions dans ce type de matériau que dans un sol qui a conservé sa structure et sa densité d'origine.

c) La courbe dépend également du sens de variation de la teneur en eau

Si le sol desséché subit une humectation, la courbe (teneur en eau-succion) établie en réhumectation pourra être différente de celle établie en desséchement. Ceci est particulièrement net pour les faibles succions dans les sols sableux, mais se manifeste aussi pour des textures limoneuses ou argileuses.

Différents phénomènes expliquent cela :

1. L'hystérésis : le sol peut présenter en désorption un "effet retard" tel que, pour un potentiel donné, il contiendra plus d'eau qu'en adsorption. Cela peut être dû à la modification de l'angle de contact de l'eau contre les parois des pores selon que l'on est en absorption ou en désorption.

Mais surtout au fait que le sol présente un réseau de pores hétérogènes (succession de constructions et de chambres) et interconnectés.

Ceci provoque en humectation, divers effets (piégeage d'air, barrières capillaires, etc....) qui court-circuitent certains pores. Il y a ainsi en humectation moins d'eau qu'en desséchement pour un même potentiel.

2. Le réarrangement des particules du sol, à la suite des contraintes hydriques que sont les cycles desséchement-réhumectation, qui modifie donc la porosité du sol, c'est donc l'histoire du matériau qui intervient.

Mais il est rare que ces différents phénomènes soient pris en compte lors de l'étude des transferts de l'eau du fait de leur complexité. On se base généralement sur la courbe établie en désorption, appelée courbe caractéristique d'humidité.

Signification de la courbe potentiel-teneur en eau

Considérons une nappe libre d'eau pure en position d'équilibre, en absence d'évaporation, dans un sol homogène ; la teneur en eau en un point donné, situé dans la zone non saturée va être dépendante de la distance  $A$  du point considéré à la nappe. Les deux potentiels qui déterminent l'équilibre sont le potentiel de gravité et le potentiel matriciel. Situons le plan de référence au niveau de la surface d'eau libre. Le potentiel de gravité exprimé en cm, est égal à  $h$ . Le potentiel total est égal à la somme des potentiels gravitaire et matriciel. Puisqu'il n'y a pas déplacement, ce potentiel est constant. Le potentiel matriciel est donc égal à  $-h$ . La courbe d'humidité en fonction du potentiel représente donc le profil d'humidité au dessus d'une nappe d'eau libre en équilibre. On peut visualiser ainsi la hauteur d'ascension capillaire.

Un premier type d'approche est d'ordre statistique et une mise au point relativement récente a été réalisée par **GUPTA et LARSON** en 1979.

Ces auteurs ont mesuré sur une quinzaine de sols, les teneurs en eau ( $\theta$ ) pour 13 valeurs de  $\Psi$ , dans la gamme -0,04 à -15 bar. Ayant déterminé pour ces sols, les teneurs en argile, limon et sables, la densité apparente de l'échantillon séché à l'air et la teneur en matières organiques, ils ont établi un tableau de 5 coefficients qui, affectés aux paramètres ci-dessus permettent de prédire la teneur en eau pour un potentiel donné.

Pour des sols types, l'écart entre la teneur en eau mesurée et la teneur prédite pour un potentiel donné, peut conduire à des écarts de l'ordre de 30 %. Cette relation statistique n'a donc qu'un intérêt très limité et ne peut certainement pas, contrairement à ce qu'affirment les auteurs, être utilisable dans l'exploitation de modèles de circulation d'eau et de sel.

La relation  $\Psi(\theta)$  qui lie le potentiel de l'eau du sol à sa teneur volumique est une donnée assez fastidieuse à obtenir comme nous l'avons vu ci-dessus (par mesures directes sur tensiomètre ou psychromètre). Il est donc intéressant de chercher à relier des paramètres plus simples à mesurer à cette relation phénoménologique.

Les phénomènes en cause étant des phénomènes capillaires, il semble que l'on puisse a priori relier la succion à la dimension des pores existant dans le milieu. Les pores résultant de l'assemblage des particules élémentaires (argile, limon, sables) on peut penser que théoriquement les dimensions de l'espace poral découlent de la taille et de la répartition des particules.

C'est sur ces considérations que sont basées les quelques tentatives faites pour aboutir, à partir de propriétés constitutives simples, à l'expression du potentiel matriciel recherché.

Une conception tient compte, comme il est dit ci-dessus, de relations géométriques entre la taille des particules et la taille des pores du milieu. Un des plus récents modèles a été proposé par **ARYA et PARIS (1981)**. Le principe d'élaboration du modèle est de s'appuyer sur une courbe de distribution de tailles granulométriques. Cette courbe est divisée en n fractions auxquelles on associe un volume de pores :

$$V_{vi} = (W_i / \rho_p) \cdot e \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$V_{vi}$  est le volume de pores de la fraction i

$W_i$  est sa masse

$\rho_p$  est la densité de solide des particules

e est la porosité globale de l'échantillon

On attribue à chaque classe une dimension moyenne de particule  $R_i$ . Moyennant certaines hypothèses d'arrangement, on fait correspondre à chaque classe un rayon moyen de pore  $r_i$  et une succion  $\Psi_i$  découlant de l'équation classique :

$$\Psi_i = 2 \gamma \cos \theta / \rho_w g r_i$$

qui pour l'eau dans les conditions moyennes peut s'écrire

$$\Psi_i \text{ (cm)} = 0,149 / r_i \text{ (cm)}$$

On connaît ainsi pour chaque potentiel  $\Psi_i$  le volume de vide susceptible d'être rempli par de l'eau, donc la teneur en eau volumique de l'échantillon.

Le modèle confronté aux résultats expérimentaux donne de bons résultats pour certains types de sols (sablo-limoneux en général) ; mais comme le remarquent les auteurs, les sols à texture fine limoneuse et limono-argileuse, ainsi que les sols gonflants donnent des résultats bien moins satisfaisants.

Une même approche est réalisée par **HAVERKAMP et PARLANGE (1982)** avec une tentative de prise en compte du phénomène d'hystérésis. Les résultats fournis par ces derniers auteurs sont très satisfaisants, mais ne concernent que deux matériaux sableux.

#### Réflexions sur le rôle de la fraction argileuse

Autant l'on peut, pour un matériaux sableux, assimilé les éléments constitutifs à des particules solides empilées et admettre l'existence d'un rayon de pore équivalent invariable durant l'humectation ou la dessiccation, autant cette démarche est critiquable lorsque la phase argileuse est relativement abondante.

Deux raisons peuvent être invoquées à cet égard :

Tout d'abord, les particules élémentaires des argiles sont loin d'être sphéroïdales ; elles sont généralement aplaties, empilées les unes sur les autres, et les pores qu'elles ménagent entre elles ne sont ni sphériques, ni cylindriques. On peut donc difficilement parler de rayon de pore équivalent et on ne peut pas concevoir de leur appliquer les lois géométriques des empilements rhomboédriques, cubiques, etc....

La seconde raison est d'ordre physique. Dès qu'il existe un peu d'argile dans un milieu, soit 10-15 %, les examens morphologiques montrent que cette argile enrobe les grains du squelette (sables et limon). Les diamètres réels des grains ne sont donc plus ceux que déterminent l'analyse granulométrique, destructrice des assemblages. Lorsque le taux d'argile augmente, au revêtement des grains d'argile (argile chlamydomorphe) vient s'ajouter un remplissage (argile intertestique) et les pores ne sont plus alors que des lacunes existant dans la masse d'un mélange pseudo-homogène de squelette et d'argile. Au surplus, quelle que soit la nature de l'argile, celle-ci présente toujours, avec une intensité variable, des phénomènes de retrait et de gonflement.

En bref, un modèle de relation entre la pression matricielle et la teneur en eau doit faire jouer un rôle particulier, et sans doute prépondérant à la fraction argileuse.

Ce rôle est conditionné par la nature de l'argile et donc par les caractéristiques  $f(\theta)/g$  de cette fraction granulométrique ( $g$  est le gonflement, c'est-à-dire le volume spécifique du mélange eau-argile à une succion donnée ou à une teneur en eau donnée).

Nous avons donc tenté d'établir un modèle répondant à cette exigence. Le principe en est le suivant. Le squelette est, comme dans les modèles précédents, subdivisé en classes auxquelles on affecte un diamètre moyen de particule. L'argile est répartie proportionnellement à l'importance de ces classes, et compte-tenu de la valeur du gonflement  $g$  à  $pF 6$  (limite supérieure de la succion appliquée), on calcule le nouveau diamètre des particules après enrobage et le diamètre de pore équivalent qui y correspond.

Partant de la relation  $f(\theta, g)$  de l'argile, on introduit dans le système des incréments  $\Delta\theta$  de teneur en eau volumique. Après chaque introduction, on recalcule le gonflement de l'argile, son potentiel matriciel à partir de la relation  $\Psi(\theta)$ , de la phase argileuse, le nouveau diamètre des grains enrobés et le nouveau diamètre et pores équivalent. Si le potentiel qui en résulte est supérieur au potentiel de l'argile, toute l'eau introduite est attribuée à l'argile et on poursuit l'adjonction des incréments

. Si le potentiel capillaire calculé du squelette enrobé est inférieur ou égal au potentiel de l'argile, on remplit alors, à potentiel constant, le vide correspondant sans augmenter la teneur en eau de l'argile. Lorsque cette classe de vide est pleine, on poursuit l'humectation du système, conditionné par la relation  $\Psi(\theta)$  de l'argile. Quand on atteint l'indice de plasticité de l'argile, le gonflement de l'argile ne produit plus le gonflement de l'enrobage, c'est-à-dire l'augmentation de diamètre des grains enrobés et celui du diamètre des pores équivalentes. Au contraire, on suppose alors que tout gonflement de l'argile va tendre à diminuer la taille des lacunes, donc à diminuer les rayons équivalents et à diminuer le potentiel capillaire calculé.

On compare sans cesse ce potentiel à celui de l'argile pour savoir si l'on continue à attribuer l'eau à l'argile ou si l'on remplit les vides lacunaires d'un diamètre équivalent donné. On cesse l'introduction des incréments  $\Delta\theta$  lorsqu'on atteint la teneur en eau à saturation.

Le principe de ce modèle implique bien sûr davantage de données initiales que les modèles précédents. En effet, les caractéristiques physiques de l'argile doivent être déterminées au préalable. Ceci n'est contraignant que si l'on veut faire une prévision sur des échantillons d'origines différentes.

Si par contre, on s'intéresse à un grand nombre d'échantillons de même provenance, on peut admettre que la nature de l'argile présente moins de variabilité que les proportions relatives d'argile, de sables et de limon. En particulier, si l'on étudie la variabilité spatiale au sein d'une unité de sol, ou d'une parcelle homogène, on peut tester auparavant l'homogénéité de la nature de la phase argileuse et ensuite réaliser un grand nombre d'analyses granulométriques dont on déduira la variabilité de la relation  $\Psi(\theta)$ . Il semble que chaque grand type d'argile ait des relations propres  $\Psi/\theta/g$ , assez constantes et qu'il suffit de vérifier que pour des mélanges, les propriétés de la phase argileuse varient selon les proportions des types minéralogiques dans le mélange.

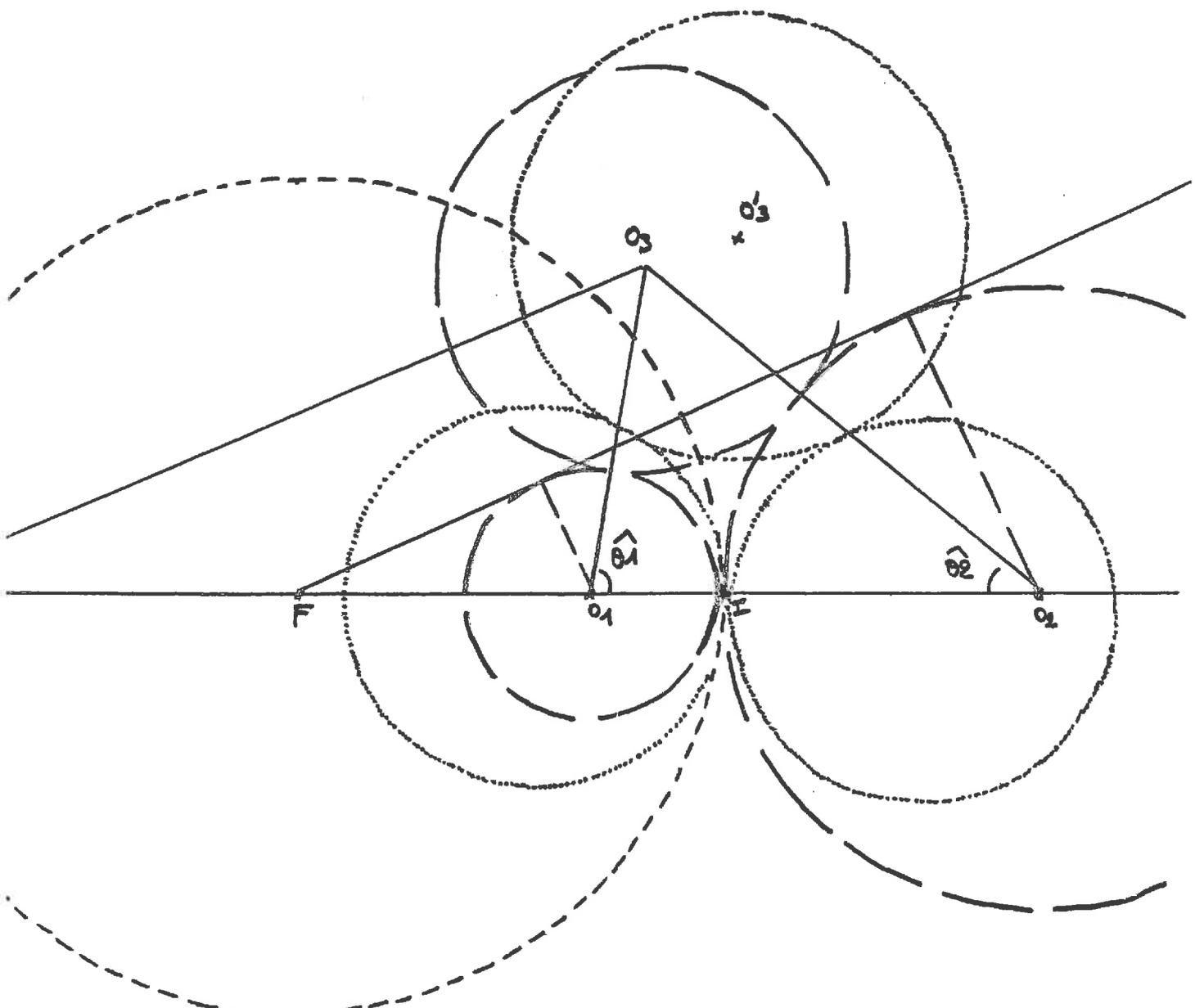
Par contre, la conception de ce modèle quant à l'importance relative des diverses classes du squelette, ne se différencie pas des modèles précédents : si l'on a affaire à des sols non argileux, des écarts importants par rapport à des valeurs mesurées peuvent se produire pour des sols sableux ou sablo-limoneux à granulométrie multimodale.

Pour simplifier, nous réduirons donc le problème à l'étude des arrangements de particules sphériques indéformables de différents diamètres.

## II A Calcul des diamètres des vides ménagés entre trois sphères tangentes

### a) Formule de calcul

CALCUL DU RAYON D'UN CERCLE TANGENT A 3 CERCLES INEGAUX



Soit F le centre d'une inversion qui transforme  $(\theta_1)$  en  $(\theta_2)$

$$FI = \left| \frac{2R_1R_2}{R_2-R_1} \right| \quad \text{car :}$$

F est un centre d'homothétie des deux cercles  
d'où :

$$\frac{FO_2}{R_2} = \frac{FO_1}{R_1} \quad (1)$$

$$FO_2 = FI + R_2$$

$$FO_1 = FI - R_1$$

$$(1) \iff \frac{FI + R_2}{R_2} = \frac{FI - R_1}{R_1}$$

$$R_1 FI + R_1R_2 = FIR_2 - R_1R_2$$

$$F_1 (R_2 - R_1) = 2R_1R_2$$

$$FI = \left| \frac{2R_1R_2}{R_2 - R_1} \right|$$

Le rapport d'inversion est  $h = FI^2 = \frac{4R1^2R2^2}{(R2-R1)^2}$ .

Le cercle ( $\Gamma$ ) de centre F est le cercle d'inversion de  $I_F, k$   
 $(\theta_3) \perp (\Gamma)$ .

Dans une inversion de centre P diamétralement opposé à I et de puissance  $k' = PI^2$

- ( $\Gamma$ )  $\longrightarrow$  droite  $\perp$  en I a  $O_1O_2 \longrightarrow (\Delta)$
- ( $\theta_3$ )  $\longrightarrow$  cercle de rayon  $R3'$  orthogonal à cette droite
- ( $\theta_1$ ) et ( $\theta_2$ )  $\longrightarrow$  2 cercles égaux tangents en I à la droite  
 $(\Delta)$  et au transformé de ( $\theta_3$ )

Si on connaît la puissance de P par rapport aux cercles  $\theta_3, \theta_1$  et  $\theta_2$ ,  
on calcule le rayon des cercles transformés.

1°) Puissance de P par rapport à ( $\theta_1$ ) et ( $\theta_2$ )

$$PI = 2FI = \frac{4R1R2}{R2-R1}$$

$$PO1 = PI - R1 = \frac{4R1R2}{R2-R1} - \frac{R1(R2-R1)}{R2-R1} = \frac{4R1R2 - R1R2 + R1^2}{R2-R1}$$

$$= \frac{3R1R2 + R1^2}{R2-R1} = \frac{R1(3R2 + R1)}{R2-R1}$$

$$PO2 = PI + R2 = \frac{4R1R2}{R2-R1} + \frac{R2(R2-R1)}{R2-R1} = \frac{4R1R2 - R1R2 + R2^2}{R2-R1}$$

$$= \frac{3R1R2 + R2^2}{R2-R1} = \frac{R2(3R1 + R2)}{R2-R1}$$

$$PO1 = \frac{R1(3R2 + R1)}{R2 - R1}$$

$$PO2 = \frac{R2(3R1 + R2)}{R2 - R1}$$

Par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\rho, \theta_1} &= PO_1^2 - R1^2 \\ &= \frac{R1^2(3R2 + R1)^2}{(R2 - R1)^2} - R1^2 \\ &= \frac{R1^2(9R2^2 + R1^2 + 6R1R2) - R1^2(R2^2 - 2R1R2 + R1^2)}{(R2 - R1)^2} \\ &= \frac{R1^2(8R2^2 + 8R1R2)}{(R2 - R1)^2} = \frac{8R1^2R2(R2 + R1)}{(R2 - R1)^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{\rho, \theta_1} = \frac{8R_1^2 R_2 (R_1 + R_2)}{(R_1 - R_2)^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\rho, \theta_2} &= \overline{P\theta_2^2} - R_2^2 \\ &= \frac{R_2^2(9R_1^2 + R_2^2 + 6R_1R_2) - R_2^2(R_2^2 + R_1^2 - 2R_1R_2)}{(R_2 - R_1)^2} \\ &= \frac{R_2^2(8R_1^2 + 8R_1R_2)}{(R_1 - R_2)^2} = \frac{8R_2^2 R_1 (R_1 + R_2)}{(R_2 - R_1)^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{\rho, \theta_2} = \frac{8R_2^2 R_1 (R_1 + R_2)}{(R_2 - R_1)^2}$$

Le rapport d'inversion est  $k' = \cdot PI^2 = \frac{16R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2}$

Les rapports d'homothétie sont :

$$\mathcal{H}_1 = \frac{k'}{\mathcal{P}_{\rho, \theta_1}} = \frac{16R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} \times \frac{(R_2 - R_1)^2}{8R_1^2 R_2 (R_1 + R_2)}$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{2R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{k'}{\mathcal{P}_{\rho, \theta_2}} = \frac{16R_1^2 R_2^2}{(R_1 - R_2)^2} \times \frac{(R_2 - R_1)^2}{8R_2^2 R_1 (R_1 + R_2)}$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}$$

Or l'inverse du cercle  $\theta_1$  est l'homologue dans l'homothétie  $(\rho, \frac{k}{\mathcal{P}_{\rho, \theta_1}})$  du cercle  $\theta_1$ . Et l'inverse du cercle  $\theta_2$  est l'homologue dans l'homothétie  $(\rho, \frac{k}{\mathcal{P}_{\rho, \theta_2}})$  du cercle  $\theta_2$ .

Donc le rayon du transformé de  $\theta_1$  est :

$$R'1 = \mathcal{H}_1 R_1$$

$$R'1 = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

et le rayon du transformé de  $\theta_2$  est :

$$R'2 = \mathcal{H}_2 R_2$$

$$R'2 = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Les inverses de  $R_1$  et  $R_2$  sont égaux.

Transformé de ( $\theta_3$ )

Puissance de P par rapport à  $\theta_3$

$$P_{P, \theta_3} = \overline{PO_3^2} - R_3^2$$

Calcul de  $PO_3$

$$(R_1+R_3)^2 = (R_1+R_2)^2 + (R_2+R_3)^2 - 2(R_1+R_2)(R_2+R_3)\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_2 = \frac{(R_1+R_2)^2 + (R_2+R_3)^2 - (R_1+R_3)^2}{2(R_1+R_2)(R_2+R_3)}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 + R_3^2 + 2R_2R_3 - R_1^2 - R_3^2 - 2R_1R_3}{2(R_1+R_2)(R_2+R_3)}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{2R_2^2 + 2R_1R_2 + 2R_2R_3 - 2R_1R_3}{2(R_1+R_2)(R_2+R_3)}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{R_2(R_1+R_2) + R_3(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)} \longrightarrow \overline{PO_3^2} \text{ dans } (PO_3\theta_2)$$

$$(R_2+R_3)^2 = (R_1+R_3)^2 + (R_1+R_2)^2 - 2(R_1+R_3)(R_1+R_2)\cos\theta_1$$

$$\cos\theta_1 = \frac{(R_1+R_3)^2 + (R_1+R_2)^2 - (R_2+R_3)^2}{2(R_1+R_3)(R_1+R_2)}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{R_1^2 + R_3^2 + 2R_1R_3 + R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 - R_2^2 - R_3^2 - 2R_2R_3}{2(R_1+R_3)(R_1+R_2)}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{2R_1^2 + 2R_1R_3 + 2R_1R_2 - 2R_2R_3}{2(R_1+R_3)(R_1+R_2)}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{R_1(R_1+R_2) - R_3(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)(R_1+R_3)} \longrightarrow$$

$$\overline{PO_3^2} = (R_2+R_3)^2 + \frac{R_2^2(3R_1+R_2)^2}{(R_2-R_1)^2} - 2 \frac{(R_2+R_3) \times R_2(3R_1+R_2)}{R_2-R_1} \times \frac{R_2(R_1+R_2) + R_3(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)(R_2+R_3)}$$

$$= R_3^2 + 2R_2R_3 - \frac{2R_2(3R_1+R_2)(R_2-R_1)}{(R_2-R_1)(R_1+R_2)} R_3 + R_2^2 + \frac{R_2^2(3R_1+R_2)^2}{(R_2-R_1)^2} - \frac{2R_2^2(3R_1+R_2)(R_1+R_2)}{(R_2-R_1)(R_1+R_2)}$$

$$= R_3^2 + 2R_2R_3 \left( \frac{R_1+R_2-3R_1-R_2}{R_1+R_2} \right) + R_2^2 + \frac{R_2^2(3R_1+R_2)^2}{(R_2-R_1)^2} - \frac{2R_2^2(3R_1+R_2)}{(R_2-R_1)}$$

$$= R_3^2 - \frac{4R_1R_2}{R_1+R_2} R_3 + R_2^2 \left[ \frac{(R_2-R_1)^2}{(R_2-R_1)^2} + \frac{(3R_1+R_2)^2}{(R_2-R_1)^2} - \frac{2(3R_1+R_2)(R_2-R_1)}{(R_2-R_1)^2} \right]$$

$$= R_3^2 - \frac{4R_1R_2}{R_1+R_2} R_3 + R_2^2 \left[ \frac{R_2^2 - 2R_1R_2 + R_1^2 + 9R_1^2 + 6R_2R_1 + R_2^2 - 6R_1R_2 + 6R_1^2 - 2R_2^2 + 2R_1R_2}{(R_2-R_1)^2} \right]$$

$$= R_3^2 - \frac{4R_1R_2}{R_1+R_2} R_3 + R_2^2 \left[ \frac{16R_1^2}{(R_2-R_1)^2} \right]$$

$$\overline{PO_3^2} = R_3^2 - \frac{4R_1R_2R_3}{R_1+R_2} + \frac{16R_1^2R_2^2}{(R_2-R_1)^2}$$

Puissance de P par rapport à  $(\theta_3)$

$$P_{\rho, \theta_3} = \overline{PO_3}^2 - R_3^2 = 4R_1R_2 \left[ \frac{4R_1R_2}{(R_2-R_1)^2} - \frac{R_3}{R_1+R_2} \right]$$

Le rapport d'homothétie est :

$$\mathcal{H}_3 = \frac{k'}{P_{\rho, \theta_3}} = \frac{16R_1^2R_2}{(R_2-R_1)^2} \times \frac{(R_2-R_1)^2(R_1+R_2)}{4R_1R_2(4R_1R_2(R_1+R_2) - R_3(R_2-R_1)^2)}$$

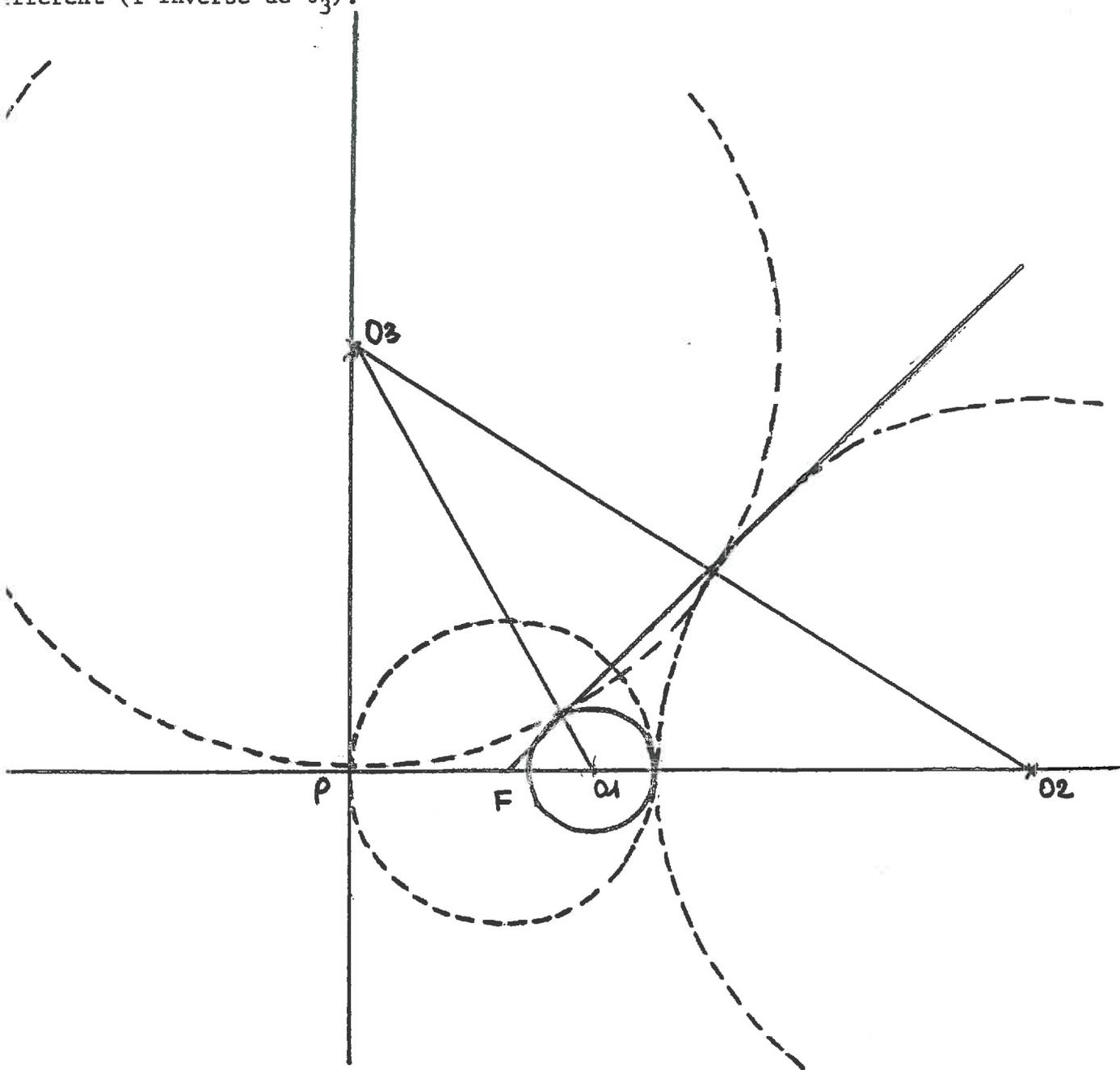
$$\mathcal{H}_3 = \frac{4R_1R_2(R_1+R_2)}{4R_1R_2(R_1+R_2) - (R_2-R_1)^2R_3}$$

Le transformé de  $\theta_3$  par l'inversion de centre P et de rapport

$$k = \frac{16R_1^2R_2^2}{(R_2-R_1)^2} \quad \text{a pour rayon :}$$

$$R'_3 = R_3 \cdot \frac{4R_1R_2(R_1+R_2)}{4R_1R_2(R_1+R_2) - (R_2-R_1)^2R_3}$$

On a obtenu 2 cercles égaux (les inverses de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ) et un troisième de rayon différent (l'inverse de  $\theta_3$ ).



cas

On est tel que  $O_3$  est sur la  $\perp$  en P à  $O_1O_2$ , le cercle  $(\theta_3)$  est orthogonal en P au cercle d'inversion, donc tangent en P à  $O_1O_2$ .

Calculons la valeur de  $R_3$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{O_3O_1}^2 - \overline{PO_1}^2 = \overline{O_3O_2}^2 - \overline{PO_2}^2 \\
 &= R_3^2 = (R_3 + R_1)^2 - \left( \frac{R_1(3R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{(R_3 + R_1)(R_2 - R_1) - R_1(3R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} \right) \times \left( \frac{(R_3 + R_1)(R_2 - R_1) + R_1(3R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} \right) \\
 &= \frac{(R_3R_2 - R_3R_1 + R_1R_2 - R_1^2 - 3R_1R_2 - R_1^2)}{(R_2 - R_1)} \times \frac{R_3R_2 - R_3R_1 + R_1R_2 - R_1^2 + 3R_1R_2 + R_1^2}{(R_2 - R_1)} \\
 &= \frac{R_3(R_2 - R_1) - 2R_1R_2 - 2R_1^2}{(R_2 - R_1)} \times \frac{4R_1R_2 + R_3(R_2 - R_1)}{R_2 - R_1}
 \end{aligned}$$

$$R_3^2 = \left( \frac{4R_1R_2}{R_2-R_1} + R_3 \right) \left( R_3 - \frac{2R_1R_2}{R_2-R_1} - \frac{2R_1^2}{R_2-R_1} \right)$$

$$R_3^2 = \frac{4R_1R_2R_3}{R_2-R_1} - \frac{8R_1^2R_2^2}{(R_2-R_1)^2} - \frac{8R_1^3R_2}{(R_2-R_1)^2} + R_3^2 - \frac{2R_1R_2R_3}{R_2-R_1} - \frac{2R_1^2R_3}{R_2-R_1}$$

$$R_3 \left( \frac{4R_1R_2}{R_2-R_1} - \frac{2R_1R_2}{R_2-R_1} - \frac{2R_1^2}{R_2-R_1} \right) = \frac{8R_1^2R_2(R_2+R_1)}{(R_2-R_1)^2}$$

$$R_3 \left( \frac{2R_1R_2}{R_2-R_1} - \frac{2R_1^2}{R_2-R_1} \right) = \frac{8R_1^2R_2(R_2+R_1)}{(R_2-R_1)^2}$$

$$R_3 = \frac{8R_1^2R_2(R_2+R_1)}{(R_2-R_1)^2} \times \frac{(R_2-R_1)}{2R_1(R_2-R_1)}$$

$$R_3 = \frac{4R_1R_2}{(R_2-R_1)^2} (R_2+R_1)$$

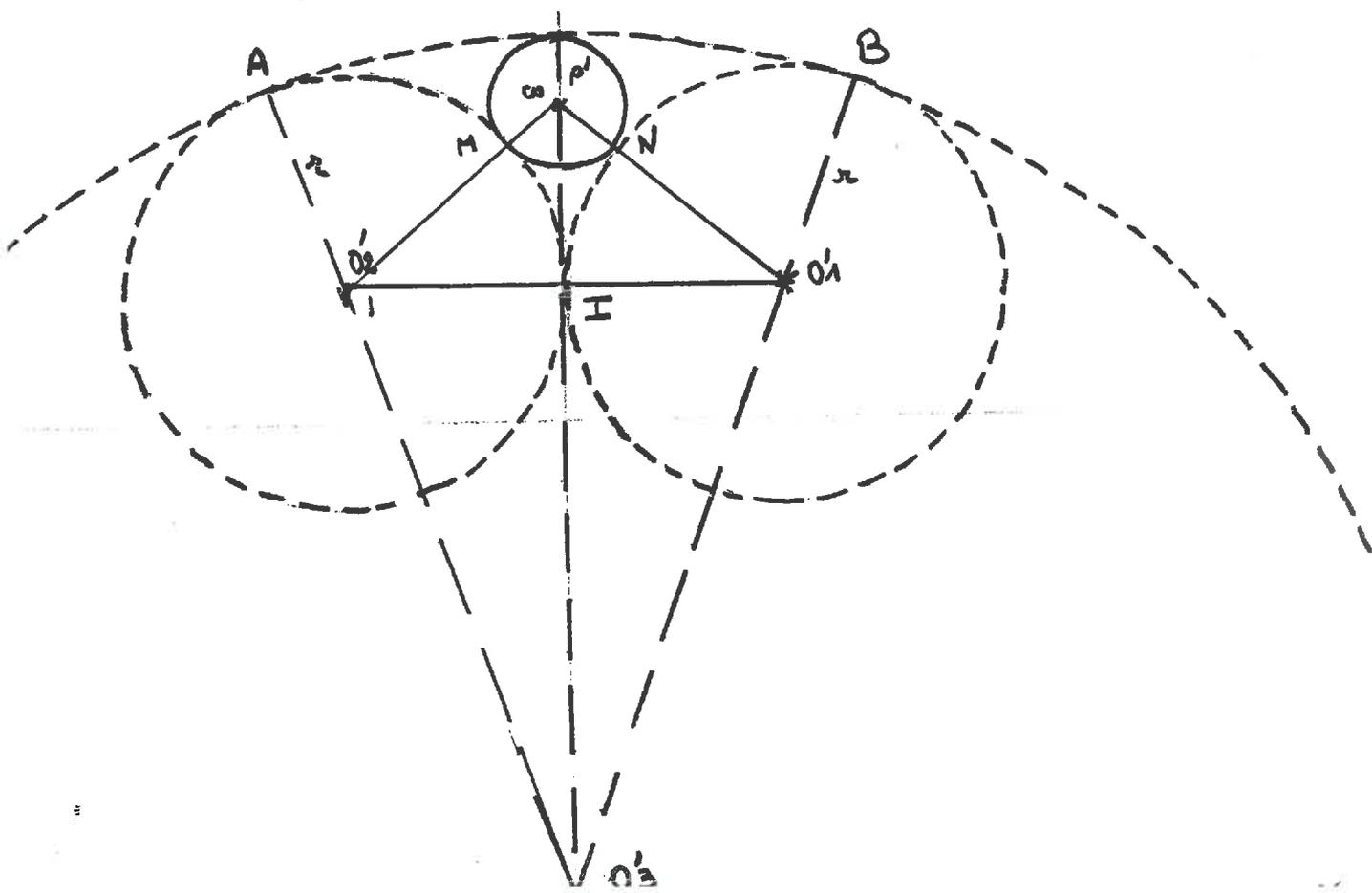
Le transformé du cercle  $\theta_3$  par l'inversion de centre P est alors la tangente commune aux 2 cercles égaux transformés des cercles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Notons que pour cette valeur de  $R_3$ , le rapport d'homothétie permettant de passer du cercle  $(\theta_3)$  à son transformé est :  $\infty$ .

Si  $R_3$  est supérieur à cette valeur,  $\theta_3$  passe de l'autre côté de la perpendiculaire en P à  $O_1O_2$ . Le rapport d'homothétie devient négatif. Le Centre  $\theta_3'$  passe en dessous de  $O_1O_2$ .

Les 2 cercles transformés de  $(\theta_1)$  et  $(\theta_2)$  sont alors tangents intérieurement au transformé de  $\theta_3$ .

Recherche du rayon du transformé du cercle  $\Omega \rightarrow \omega$



$$\begin{aligned}\overline{\omega I}^2 &= \overline{\omega O_1'}^2 - \overline{IO_1'}^2 \\ &= (r+\rho')^2 - r^2 = \rho'(2r+\rho')\end{aligned}$$

$$\overline{O_3' I}^2 = (R-r)^2 - r^2 = R(R-2r)$$

$$\omega O_3' = R - \rho'$$

$$\omega \overline{O_3' I} = \omega I + IO_3'$$

$$R - \rho' = \sqrt{\rho'(2r+\rho')} + \sqrt{R(R-2r)}$$

$$R - \rho' - \sqrt{R(R-2r)} = \sqrt{\rho'(2r+\rho')}$$

$$R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' + R(R-2r) - 2(R-\rho')\sqrt{R(R-2r)} = \rho'(2r+\rho')$$

$$R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' + R^2 - 2Rr - 2R\sqrt{R(R-2r)} + 2\rho'\sqrt{R(R-2r)} = 2\rho'r + \rho'^2$$

$$\rho'(2R - 2\sqrt{R(R-2r)} + 2r) = -2R\sqrt{R(R-2r)} - 2Rr + 2R^2$$

$$\rho' = R \cdot \frac{R-r+\sqrt{R(R-2r)}}{R+r-\sqrt{R(R-2r)}}$$

Soit  $\rho$  le rayon du cercle  $\Omega$

$\rho = \frac{1}{\mathcal{H}_\omega} P'$ , si  $\mathcal{H}_\omega$  est l'homothétie de centre P qui fait correspondre  $(\Omega')$  à  $(\Omega)$

La puissance de P par rapport au cercle  $(\Omega)$  de rayon  $\rho$  est

$$\mathcal{P}_{P,\Omega} = 4R_1R_2 \left[ \frac{4R_1R_2}{(R_2-R_1)^2} - \frac{P}{R_1+R_2} \right]$$

Le rapport d'homothétie est  $\mathcal{H}_\omega = \frac{k'}{\mathcal{P}_{P,\Omega}}$ .

$$\mathcal{H}_\omega = \frac{16R_1^2R_2^2}{(R_2-R_1)^2} \times \frac{(R_2-R_1)^2(R_1+R_2)}{4R_1R_2[4R_1R_2(R_1+R_2) - P(R_2-R_1)^2]}$$

$$\mathcal{H}_\omega = \frac{4R_1R_2(R_1+R_2)}{4R_1R_2(R_1+R_2) - \rho(R_2-R_1)^2}$$

$$\rho = \left( 1 - \frac{\rho(R_2-R_1)^2}{4R_1R_2(R_1+R_2)} \right) \rho'$$

$$\rho = \rho' - \frac{\rho\rho'(R_2-R_1)^2}{4R_1R_2(R_1+R_2)}$$

$$\rho \left( 1 + \frac{(R_2-R_1)^2\rho'}{4R_1R_2(R_1+R_2)} \right) = \rho'$$

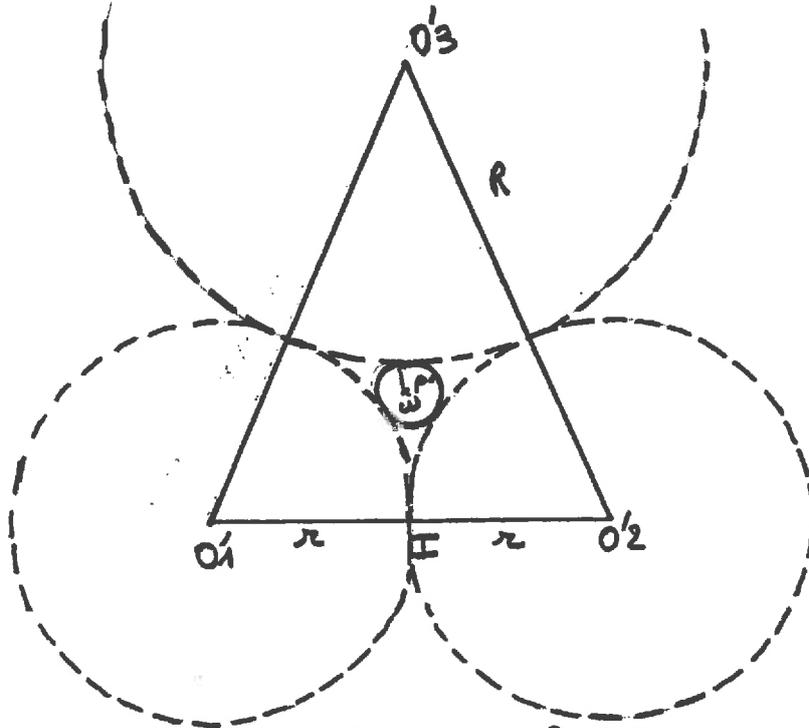
$$\rho \left( \frac{4R_1R_2(R_1+R_2) + (R_2-R_1)^2\rho'}{4R_1R_2(R_1+R_2)} \right) = \rho' \quad \text{d'où}$$

$$\rho = \frac{4R_1R_2(R_1+R_2)\rho'}{(R_2-R_1)^2\rho' + 4R_1R_2(R_1+R_2)}$$

2ème cas

Si  $R_3 < \frac{4R_1R_2}{(R_2-R_1)^2} (R_1+R_2)$

Les deux cercles transformés de  $(\theta_1)$  et  $(\theta_2)$  sont tangents extérieurement au transformé de  $\theta_3$



Recherche du rayon du transformé du cercle  $\Omega \rightarrow \omega$

$$\overline{\omega I}^2 = \overline{\omega O'1}^2 - \overline{IO'1}^2$$

$$= (r+\rho')^2 - r^2 = \rho'(2r+\rho')$$

$$\overline{O'3 I}^2 = (R+r)^2 - r^2$$

$$= R(R+2r).$$

$$\omega O'3 = R+\rho'$$

$$\omega O'3 = \omega' I + IO'3$$

$$R+\rho = \sqrt{(2r+\rho')^2} + \sqrt{R(R+2r)}$$

$$R+\rho - \sqrt{R(R+2r)} = \sqrt{\rho(2r+\rho')}$$

$$R^2+\rho^2 + 2R\rho + R(R+2r) - 2(R+\rho)\sqrt{R(R+2r)} = \rho(2r+\rho')$$

$$R^2+\rho^2 + 2R\rho + R^2+2rR - 2R\sqrt{R(R+2r)} - 2\rho\sqrt{R(R+2r)} = 2r\rho+\rho^2$$

$$\rho(2R-2\sqrt{R(R+2r)}-2r) = 2R\sqrt{R(R+2r)} - 2R^2-2rR$$

$$\rho(-R+\sqrt{R(R+2r)}+r) = R^2+rR - R\sqrt{R(R+2r)}$$

$$\rho = \frac{r + (R-\sqrt{R(2r+R)})}{r - (R-\sqrt{R(2r+R)})} \times R$$

Soit  $\rho$  le rayon de cercle  $\Omega$

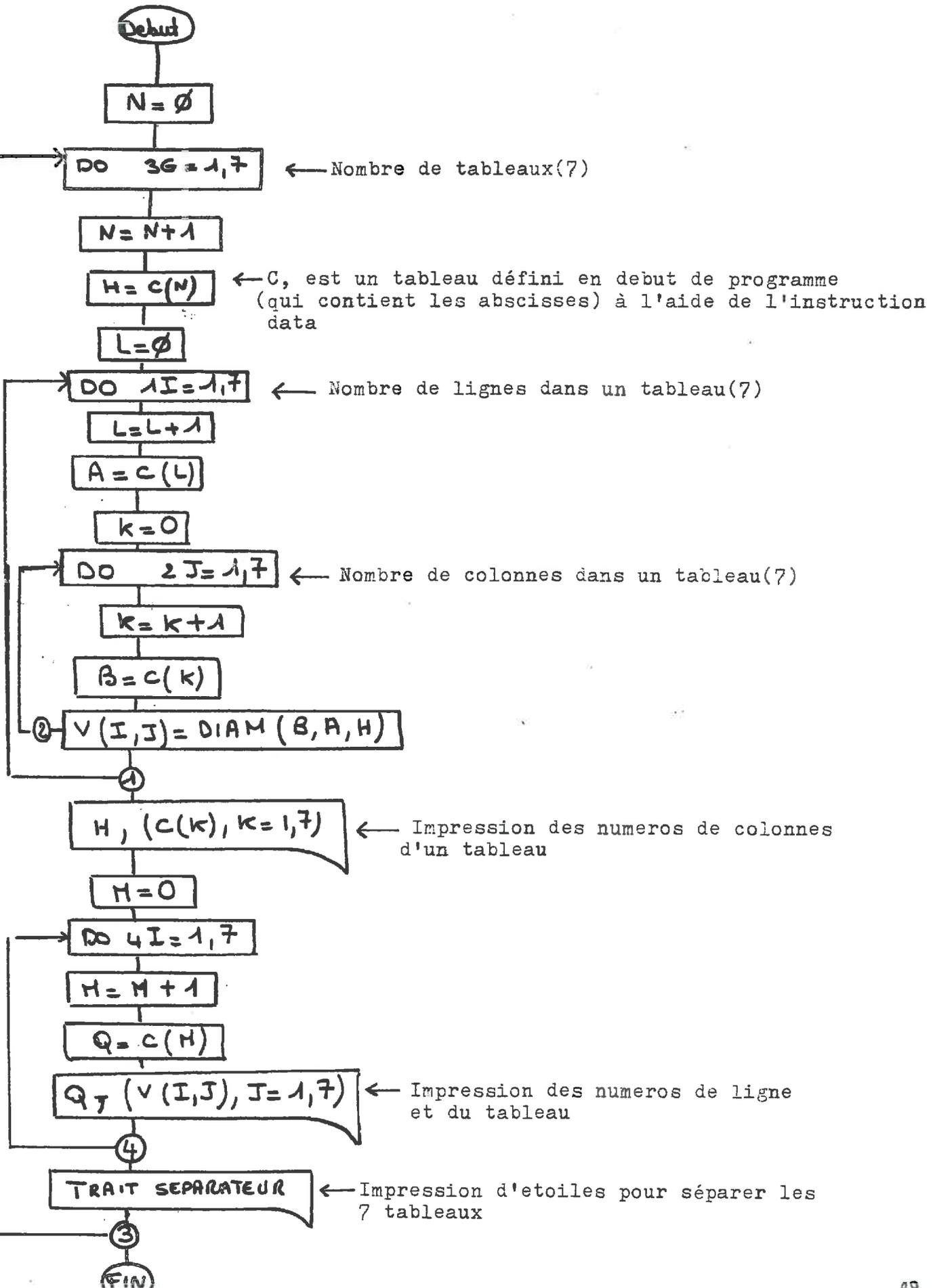
$\rho = \frac{1}{\alpha_\omega} \rho'$ , si  $\alpha_\omega$  est l'homothétie de centres  $\omega$  qui fait correspondre  $(\Omega')$  à  $(\Omega)$

d'après le premier cas :

$$\rho = \frac{4R_1 R_2 (R_1+R_2) \rho'}{(R_2-R_1)^2 \rho' + 4R_1 R_2 (R_1+R_2)}$$

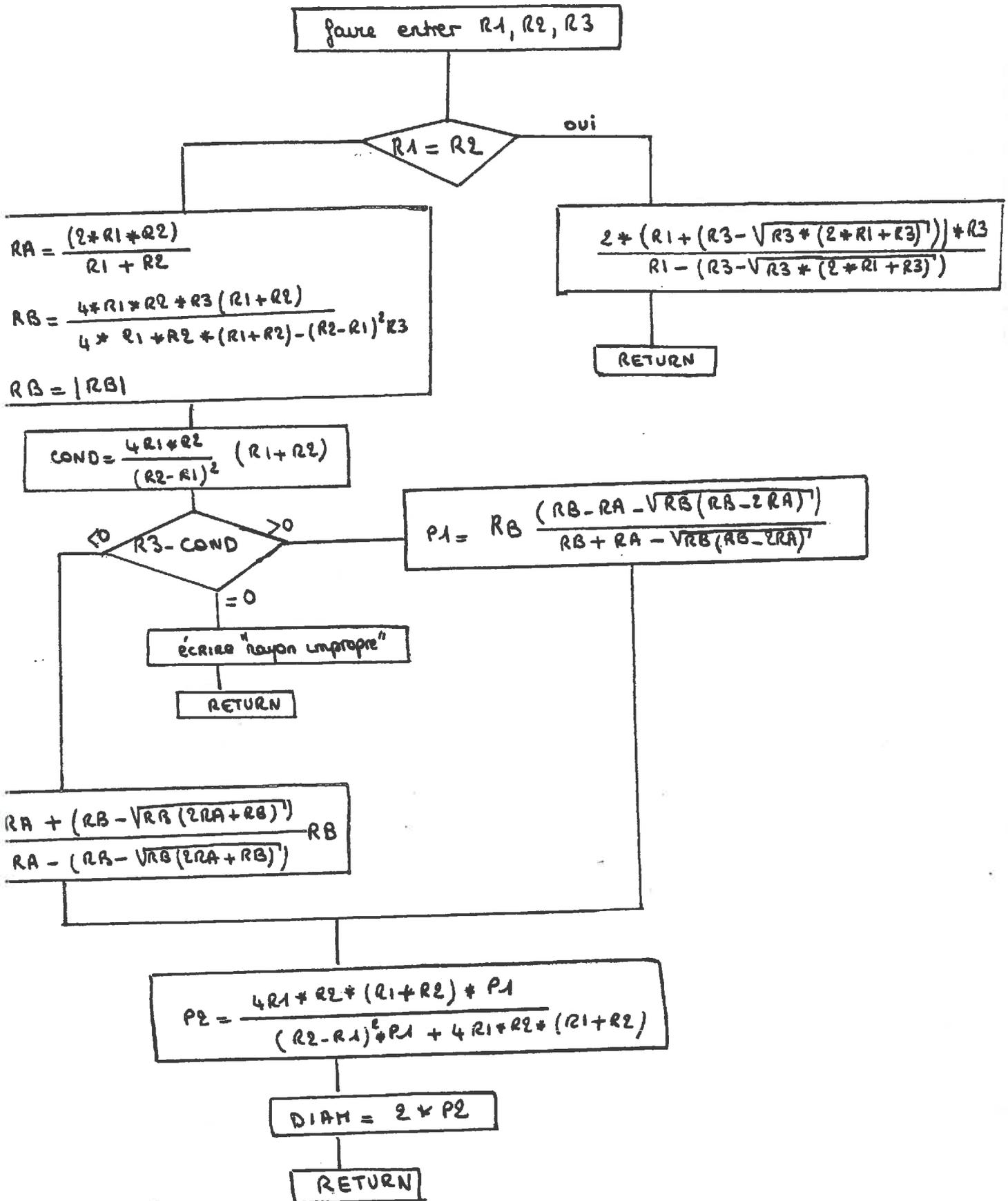
b) Etablissement du programme

Organigramme du programme principal



Le programme principal en faisant appel à une fonction DIAM calcule tous les éléments du 1er tableau, imprime ce tableau, trace un trait, puis calcule en refaisant appel à la fonction DIAM tous les éléments du 2ème tableau qu'il imprime en dessous de la ligne séparatrice et ainsi de suite. Il imprime au total 7 tableaux.

Organigramme de la fonction DIAM

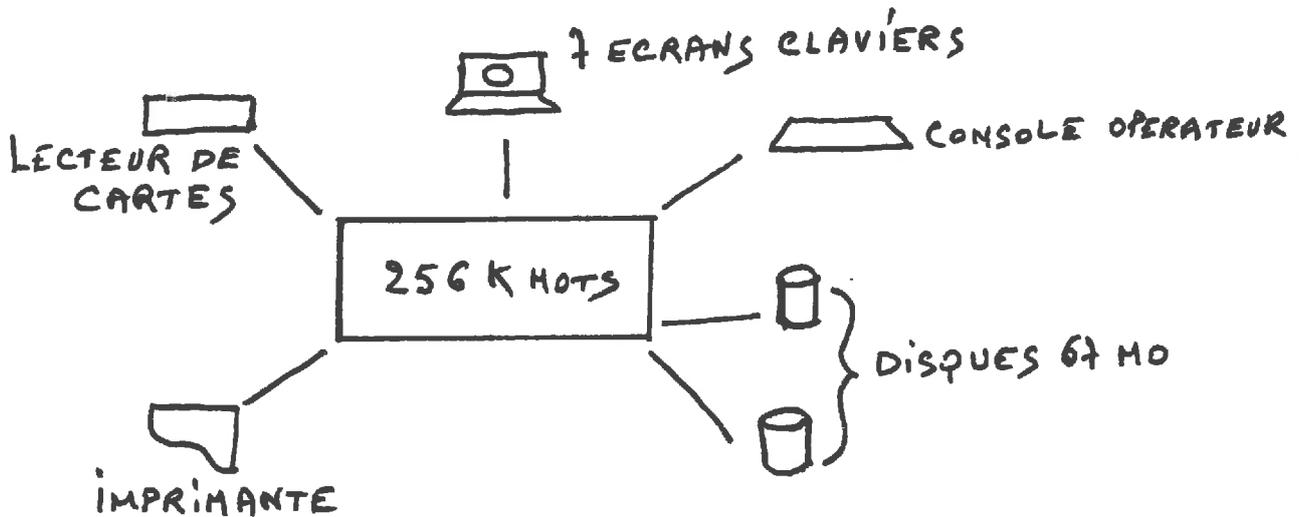


On considère des mélanges de particules de rayons 5-17,5 - 75 - 175 - 375 - 750 microns. Ces rayons sont mis en abscisse et en ordonnées. L'intérieur du tableau comprend les diamètres du cercle tangent (en microns).

c) Utilisation du mini 6 et resultats

## Instructions pour travailler sur un terminal du mini 6

### CONFIGURATION AVIGNON



### EDITEUR de texte

Appel de l'éditeur

ED N - PT N [-LL N n]

Le message suivant apparaît      EDIT 2.1.07/21/1441  
E?

- PT = provoque l'édition de E? Quand l'éditeur est prêt à recevoir une directive (paramètre fortement conseillé)
- LL n = n définit la longueur de la ligne de données lue (ou écrite) sur le fichier (par défaut n = 80)

Si la longueur de la ligne dépasse n, le message :

n° Ligne TRUNC AFTER n CHARACTERS

apparaît et la fin de ligne est ignorée

En mode insertion, l'éditeur passe à la ligne suivante au-delà du n<sup>e</sup> caractère

\* Si on veut travailler sur un fichier déjà existant, il faut aller le chercher, pour cela faire :

R    nom du fichier            RETURN            (R = read)

Lorsque l'éditeur répond E? on peut commencer à travailler

\* Création d'un fichier

Pour créer un fichier, il faut se mettre en mode "entrée", pour cela faire :

I ou A                    RETURN

I? apparaît et on peut introduire la première ligne

I signifie INPUT MODE

A la fin de chaque ligne, faire      RETURN            et introduire la ligne suivante.

Pour sortir du mode entrée, frapper !F RETURN

Faire ensuite : WA nom d'accès du fichier à créer ( W = write)

### Remarques très importantes

1. L'éditeur de texte ne travaille pas directement sur le fichier concerné, mais par l'intermédiaire de fichier de travail et de tampons en mémoire. En conséquence, toutes les modifications apportées à un fichier, ne sont réellement prises en compte que lorsque l'utilisateur le demande explicitement par la directive suivante

WA[nom d'accès du fichier]

Si nom d'accès est omis, la mise à jour est faite sur le fichier cité dans la directive R

De même, lorsqu'on crée un fichier, il ne l'est effectivement que lorsque la directive W est exécutée (nom d'accès est alors obligatoire)

2. Si on ajoute ou supprime des lignes dans un fichier, elles sont immédiatement, ainsi que toutes les autres, renumérotées en séquence.

Ex : dans le fichier il y a :

n° des lignes    1. ABCDEF  
                  2. NIJKLM  
                  3. NOPZXY  
                  4. WWWXXX

La directive 2D supprime la ligne n° 2. La ligne NOPZXY devient ligne n° 2 et WWWXXX, ligne n°3. Si on veut supprimer la ligne NOPZXY, il faudra refaire 2D.

3. Si l'on veut modifier plusieurs fichiers sous une même session éditeur, il faut entre chaque modification de fichier "vider" le tampon en mémoire. Pour cela faire = ~~1, 20~~ RETURN

4. Deux conseils :

- En cas de modification de gros fichier, il est conseillé de faire une copie du fichier initial avant toutes modifications.

- Si les modifications à apporter à un fichier sont importantes (en nombre de manipulations) il est conseillé de faire exécuter la directive de temps en temps.

### Principales directives de l'éditeur de texte

Format général :

$[adr\ 1\ \{;\}] [adr2] \times \left[ \begin{array}{l} \text{1 nom d'accès d'un fichier} \\ \text{texte !F} \\ \text{chaîne 1/chaîne 2/} \end{array} \right]$

Si adr1, adr2 : "," est un séparateur entre 2 adresses

Si adr1 ; adr2 : adr 1 devient la ligne courante et adr 2 est une adresse relative à l'adresse 1

Exemple : ligne courante = ligne numéro 5

-2,10P provoque l'impression des lignes 3 à 10

-2;10P provoque l'impression des lignes 3 à 13

Méthodes d'adressage des lignes :

. par le numéro de ligne :

ex : 2P : impression de la 2e ligne

2,10P : impression des lignes 2 à 10

. par la position, relativement à la ligne courante

ex : ligne courante = ligne numéro 5

+10P : impression de ligne 15

. par le contenu de la ligne

ex : /AKW/P : impression de la 1er ligne, après la ligne courante contenant la chaîne de caractères AXW

NOTA Ces différentes méthodes peuvent être combinées

ex : /END/+3 P impression de la ligne qui se trouve à 3 lignes après le 1er /END/rencontré



## Quelques commandes utiles

**NEW PROC** : réorganisation de la mémoire. On se retrouve dans l'état initial après s'être connecté

**BYE** : réorganisation de la mémoire. Il faut se reconnecter (ces deux ordres sont utiles quand la mémoire est top morcellée)

**LWD (List working directory)** : permet d'afficher le nom d'accès complet du répertoire où l'on est positionné (= répertoire de travail)

### Paramètres

**PR2**  $\wedge$  nom d'accès **[ $\wedge$ .LL  $\wedge$  132]**

Programme "maison" permettant d'afficher à l'écran le fichier cité 15 lignes par 15 lignes, pour continuer la liste faire RETURN ; pour arrêter la liste, frapper UW puis RETURN

Si l'argument  **$\wedge$ .LL  $\wedge$  132** est omis, une ligne comporte 80 caractères.

**ASSOC**  $\wedge$  1 Fn  $\wedge$  nom d'accès

Associe un nom de fichier à l'étiquette logique (1 Fn) citée dans le programme

**DISSOC**  $\wedge$  1 Fn

Termine l'association entre l'étiquette logique et le nom d'accès cité dans la commande ASSOC

A utiliser avec précautions

**CWD**  $\wedge$  nom d'accès

Permet de changer de répertoire de travail

**DP**  $\wedge$  Nom d'accès au fichier  $\wedge$  **[-DL]  $\wedge$  [-FTN]**

Permet l'impression du fichier cité (sur imprimante)

- DL = le fichier est effacé à la fin de l'impression

- FTN : le fichier à imprimer est un fichier créé par un programme FORTRAN et il faut tenir compte du caractère de contrôle

Utilisation de la touche BREAK (BRK) : touche rouge

La touche break permet d'interrompre un programme (utilisateur au "constructeur" lancé à partir du terminal. Pour cela, il suffit d'appuyer sur la touche BREAK BRK

Le message **\*\*BREAK\*\*** apparaît

On peut alors

- Frapper une commande. Dans ce cas, la commande s'exécute et un nouveau message **\*\*BREAK\*\*** apparaît lorsqu'elle est terminée : on revient dans le mode "break"

- Pour sortir du mode break, on peut faire :

- 1) SR return : le programme reprend son exécution au point où il a été interrompu
- 2) PI return Ces solutions ne sont possibles que pour les programmes
- 3) UW return "constructeur" (ex LINKER, Editeur, PR, ...). Elles marquent un abort, PI étant plus "faible" au UW

PI provoque l'abort de la directive en cours

UW provoque l'abort de la commande en cours

4) NEW \_ PROC return abort et reprise au niveau connection

5) BYE RETURN abort et on doit se reconnecter

(NEW \_ PROC et BYE sont des commandes non spécifiques au "break" et ont pour effet aussi de réorganiser la mémoire et de détruire les associations faites par ASSOC)

### Compilation

FØRTRANA appel de compilateur Fortran A

Syntaxe de la commande

FØRTRANA nom\_d'accès

où nom accès contient le programme source devant être lu par le compilateur

Attention

1°) Le nom du fichier source doit être suffixé par .F mais dans la commande FØRTRANA, il faut omettre le suffixe .F

2°) Les modules Ø seront créés dans le même répertoire que celui du fichier source (donc répertoire de travail en cas de nom \_ accès simple)

### Edition de liens

Plusieurs solutions

- la plus simple : utiliser l'une des procédures mises à la disposition des utilisateurs

EC ^ FORL ^ Nom \_ accès → édition de lien du programme FØRTRANA cité dans

nom d'accès

Directive à utiliser après FØRTRANA s'il n'y a pas d'erreur

EC ^ LNKB ^ nom \_ accès → édition de liens du programme Basic cité dans nom

d'accès

- Entrer soi-même les directives de l'éditeur de liens

Syntaxe de la commande

LIN KER ^ nom \_ accès ^ [ Liste d'arguments ]

où nom d'accès définit le nom du programme exécutable (bound unit) à créer

### Exécution d'un programme exécutable

Il suffit de spécifier le nom d'accès du programme exécutable (nom que l'on a attribué dans la commande LINKER). Ce nom est alors interprété comme une commande de chargement et lancement du programme)

## VI Procédure cataloguée (ou fichier de commandes)

VI.1. Définitions : d'une procédure cataloguée, d'une exécution en ligne, d'une exécution dans le batch (ou drain de travaux)

Une procédure cataloguée est mise dans un fichier suffisée EC, qui contient toutes les commandes nécessaires au travail à soumettre.

La procédure sera soumise soit en ligne, soit dans le batch. Si on travaille en ligne, la commande FORTRANA par exemple est prise en compte dès que l'on fait RETURN, de même le programme s'exécute dès que l'on tape l'ordre IAJF

Si on a groupé ces commandes dans un fichier EC et qu'on lance la procédure en ligne, on aura exactement le même déroulement.

Par contre, si on lance cette procédure "dans le batch", le travail sera mis dans une file d'attente et ne sera exécuté que lorsque toutes les demandes antérieures de lancement dans le batch seront finies.

### Remarque 1

Quand un fichier de commandes contient des commandes demandant des directives propres, il faut faire précéder la commande par  $\&A$

### Remarque 2

Dans une procédure cataloguée, on peut paramétrer une partie des commandes. On renseigne ces paramètres lors du lancement de la procédure. Ces paramètres sont désignés par  $\&$  suivi d'un numéro d'ordre.

### Remarque 3

Il est fortement conseillé de terminer un fichier de commandes par BYE : on est alors dispensé de faire les commandes DISSOC, et on évite des ennuis en utilisation batch

Lancement d'une procédure en ligne

EC  $\wedge$  nom - accès - procédure [  $\wedge$  paramètre 1  $\wedge$  paramètre 2... ]  
(sans .EC)

Lancement d'une procédure dans le batch

EBR  $\wedge$  nom - accès - procédure . EC  $\wedge$ -WD  $\wedge$  [  $\wedge$ . ARG  $\wedge$  paramètre 1  $\wedge$  paramètre 2  $\wedge$ ... ]

Les sorties ((messages d'erreurs, listing sur sortie "6" se trouveront après passage dans le batch dans le fichier nom - accès - procédure.  $A\emptyset$ )

Le fichier  $.A\emptyset$  se trouve dans le même répertoire que la procédure .EC.

Taille des noms de fichiers

\* 6 caractères maximum pour le nom d'un programme source

\* 12 caractères maximum pour le nom d'un fichier de données

#### d) Commentaires

On peut voir que si trois particules de 750  $\mu$  de rayon ménagent un cercle de 232 microns de diamètre, dès que l'une des particules est de 5 microns, le diamètre tombe à 8 microns. Si deux particules ont des rayons de 5 microns, le diamètre du pore ne varie que de 1,55 à 2,49 quand la troisième particule passe de 5 à 750 microns.

La dimension moyenne de la porosité est donc très fortement influencée par les petits éléments ; la démarche consistant à répartir la porosité au pro rata de proportions volumiques massiques est donc très critiquable. Il en est de même de considérer des domaines granulométriques distincts où la porosité aurait des dimensions de pores liées et du même ordre de grandeur que la dimension moyenne des particules du domaine.

#### B Arrangement de tetraedre - Calcul du vide interne à 4 sphères

##### a) Formules

(voir page 40 à 44 )

##### b) Etablissement du programme

Organigramme du programme principal (voir annexe A1)

Organigramme de la fonction TETRA (fonction qui calcule le volume du tétraèdre dont les sommets sont les centres des 4 sphères tangentes) voir (1)

Organigramme de la fonction VOLUM (fonction qui calcule le volume occupé la sphère à l'intérieur du tétraèdre) voir (2)

Organigramme de la fonction DIAM (fonction qui calcule le diamètre du cercle tangent à 3 autres cercles)

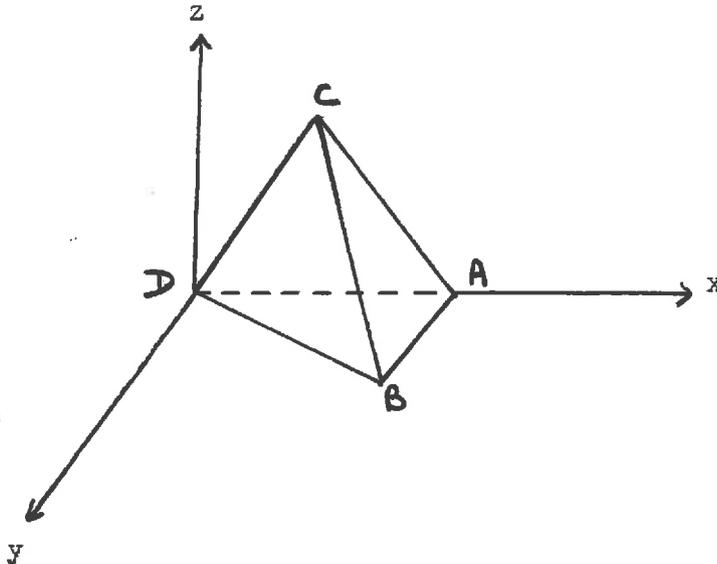
Voir : II A

On considère ici encore des particules de 5-17,5 - 37,5 - 75 - 175 - 375 - 750 microns.

PROBLEME N° 2

Etant données quatre sphères de rayons  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , tangentes deux à deux, et dont les centres sont les sommets d'un tétraèdre irrégulier.

1) Calcul du volume de ce tétraèdre



Soit un tétraèdre A, B, C, D, dont les sommets sont les centres des sphères de rayons  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , tangentes entre elles.

On a:  $AB=R_1+R_2$        $BC=R_2+R_3$        $CA=R_3+R_1$   
 $DA=R_4+R_1$        $DB=R_4+R_2$        $DC=R_4+R_3$

Soit un repère orthonormé  $D(x,y,z)$  tel que A soit sur  $Dx$  et B dans le plan  $xDy$

et:

|   |       |  |       |  |       |
|---|-------|--|-------|--|-------|
| A | $x_A$ |  | $x_B$ |  | $x_C$ |
|   | 0     |  | $y_B$ |  | $y_C$ |
|   | 0     |  | 0     |  | $z_C$ |

Le volume du tétraèdre est:

$$V = \frac{1}{6} (\vec{DC} \cdot (\vec{DA} \wedge \vec{DB}))$$

à pour mesure:

$$\frac{1}{6} \times \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ 0 & y_B & y_C \\ 0 & 0 & z_C \end{vmatrix}$$

Déterminons  $x_A, y_B, x_B, x_C, y_C, z_C$   
Calcul de  $x_A$

étant sur l'axe  $Dx$ , les coordonnées de A sont

$$x_A = R_1 + R_4$$

Calcul de  $x_B, y_B$

$$x_B = BD \cos \widehat{BDA} = (R_2 + R_4) \cos \widehat{BDA}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2AD \cdot DB \cos \widehat{ADB}$$

D'où:

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{AD^2 + DB^2 - \overline{AB}^2}{2AD \cdot DB}$$

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{(R_4 + R_1)^2 + (R_4 + R_2)^2 - (R_1 + R_2)^2}{2(R_4 + R_1)(R_4 + R_2)}$$

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{R_4^2 + R_1^2 + 2R_1R_4 + R_4^2 + R_2^2 + 2R_2R_4 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2}{2(R_4 + R_1)(R_2 + R_4)}$$

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{2R_4^2 + 2R_1R_4 + 2R_2R_4 - 2R_1R_2}{2(R_4 + R_1)(R_2 + R_4)}$$

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{R_4(R_2 + R_4) - R_1(R_2 - R_4)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_4)}$$

D'où:

$$x_B = \frac{R_4(R_2 + R_4) - R_1(R_2 - R_4)}{R_1 + R_4}$$
$$y_B = (R_2 + R_4) \sin \widehat{ADB} = (R_2 + R_4) \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{ADB}}$$
$$z_B = 0$$

Calcul de  $x_C, y_C, z_C$

Les vecteurs DC, BC, AC, ont pour composantes:

|            |       |            |             |            |             |
|------------|-------|------------|-------------|------------|-------------|
| $\vec{DC}$ | $x_C$ | $\vec{BC}$ | $x_C - x_B$ | $\vec{AC}$ | $x_C - x_A$ |
|            | $y_C$ |            | $y_C - y_B$ |            | $y_C$       |
|            | $z_C$ |            | $z_C$       |            | $z_C$       |

On a donc:

$$x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 = \overline{CD}^2 = (R_3 + R_4)^2 \quad (1)$$

$$(x_c - x_A)^2 + (y_c + z_c)^2 = (R_1 + R_3)^2 \quad (2)$$

$$(x_c - x_B)^2 + (y_c - y_B)^2 + z_c^2 = (R_2 + R_3)^2 \quad (3)$$

On pose:

$$R_3 + R_4 = d$$

$$R_1 + R_3 = a$$

$$R_2 + R_3 = b$$

En retranchant (2) de (1):

$$2x_A x_c - x_A^2 = d^2 - a^2$$

$$x_c = \frac{d^2 - a^2 + x_A^2}{2x_A}$$

En retranchant (3) de (2):

$$2(x_B - x_A)x_c + x_A^2 - x_B^2 + 2y_A y_B - y_B^2 = a^2 - b^2$$

$$y_c = \frac{a^2 - b^2 - x_A^2 + x_B^2 - 2(x_B - x_A)x_c + y_B^2}{2y_B}$$

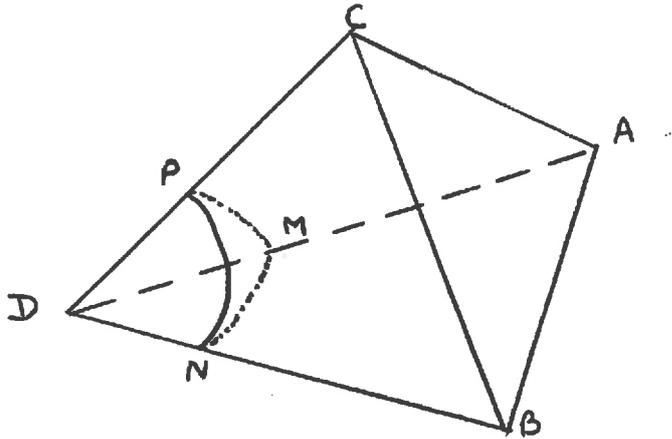
D'après (1):

$$z_c = \sqrt{d^2 - x_c^2 - y_c^2}$$

D'après (2):

$$z_c = \sqrt{a^2 - (x_c - x_A)^2 - y_c^2}$$

2) Calcul du volume occupé par les portions des quatre sphères intérieures à ce tétraèdre.



L'aire du triangle curviligne MNP est:

$$SD = \frac{\pi R_4^2}{180} (\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} - 180) \quad \text{Les angles étant exprimés en degrés.}$$

$$SD = \pi R_4^2 \left( \frac{\hat{M} + \hat{N} + \hat{P}}{\pi} - 1 \right) \quad \text{Les angles étant exprimés en radians.}$$

Soit  $m, n, p$ , les angles respectivement des vecteurs  $\vec{DP}, \vec{DN}, \vec{DP}, \vec{DM}$  et  $\vec{DM}, \vec{DN}$ . Ce sont les mesures en radians des arcs  $NP, PM, NM$ .

Soit  $\hat{M}, \hat{N}, \hat{P}$ , les angles dièdres, on a:

$$(1) \begin{cases} \cos m = \cos n \cos p + \sin n \sin p \cos \hat{M} \\ \cos n = \cos p \cos m + \sin p \sin m \cos \hat{N} \\ \cos p = \cos m \cos n + \sin m \sin n \cos \hat{P} \end{cases}$$

On a vu précédemment les calculs de  $\cos m, \cos n, \cos p$

$$\hat{m} = \hat{BDC} \quad \hat{n} = \hat{ADC} \quad \hat{p} = \hat{BDA}$$

$$\cos \hat{p} = \cos \hat{BDA} = \frac{R_4(R_2 + R_4) - R_1(R_2 - R_4)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_4)}$$

$$\cos \hat{m} = \cos \hat{ADC} = - \frac{R_3(R_1 - R_4) - R_4(R_1 + R_4)}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_4)}$$

$$\cos \hat{n} = \cos \hat{BDC} = - \frac{R_2(R_3 - R_4) - R_4(R_3 + R_4)}{(R_3 + R_4)(R_2 + R_4)}$$

$$\cos \hat{p} = \cos \hat{BDA} = \frac{R_4(R_4 + R_2) + R_1(R_4 - R_2)}{(R_4 + R_1)(R_4 + R_2)}$$

$$\cos \hat{m} = \cos \hat{BDC} = \frac{R_4(R_4 + R_3) + R_2(R_4 - R_3)}{(R_4 + R_2)(R_4 + R_3)}$$

$$\cos \hat{n} = \cos \hat{CDA} = \frac{R_4(R_4 + R_1) + R_3(R_4 - R_1)}{(R_4 + R_3)(R_4 + R_1)}$$

Forme plus adaptée à la permutation circulaire.

$$\sin p = \sqrt{1 - \cos^2 p}$$

$$\sin m = \sqrt{1 - \cos^2 m}$$

$$\sin n = \sqrt{1 - \cos^2 n}$$

On tire  $\cos M$ ,  $\cos N$ ,  $\cos P$  de (1), on a donc  $M$ ,  $N$ ,  $P$

On calcule ainsi la surface  $S$  du triangle curviligne  $SD$

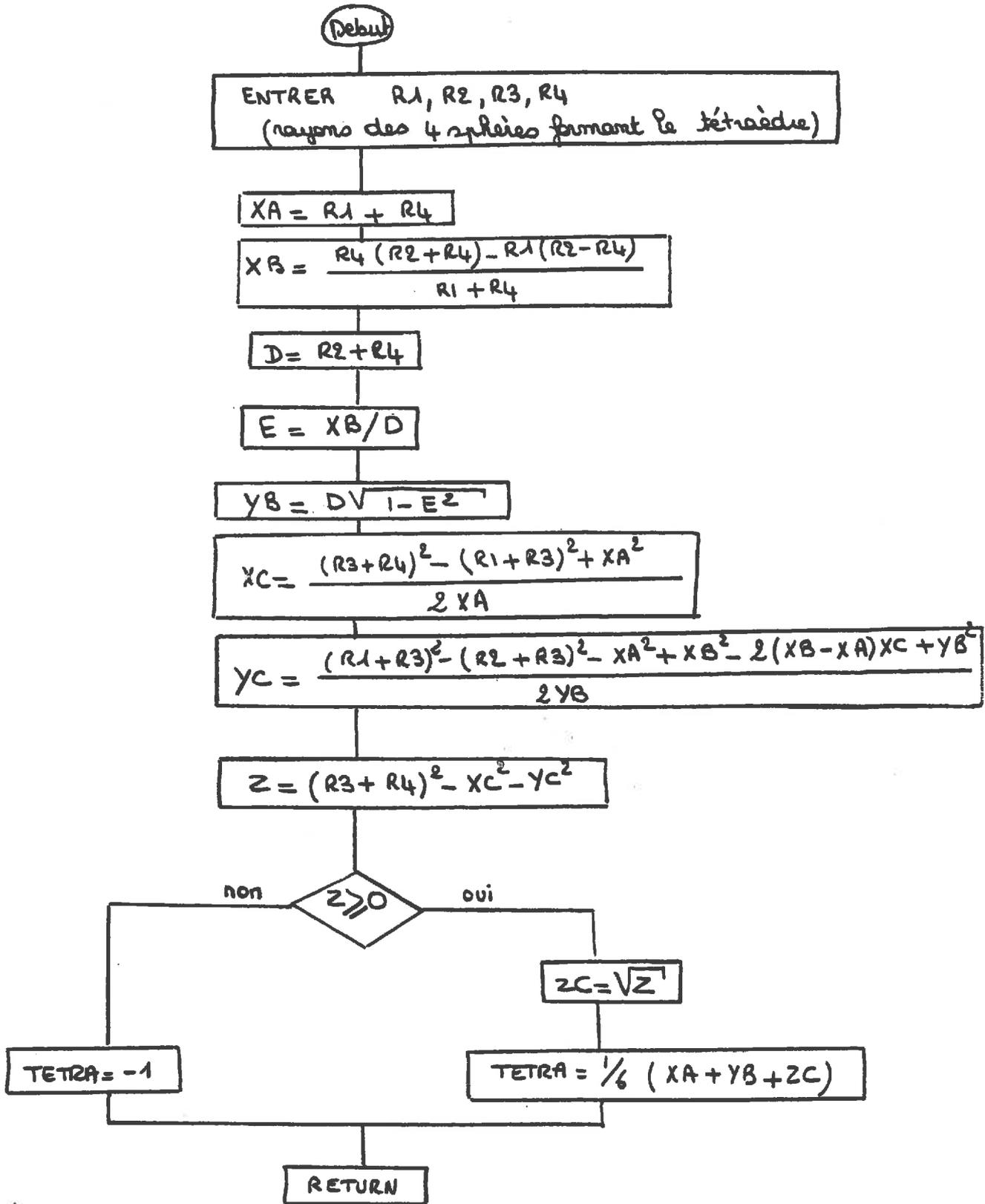
$$SD = K R_4^2 \quad \text{avec} \quad K = (\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} - \pi)$$

$$V_4 = K \int_0^{R_4} z^2 dz = \frac{K}{3} R_4^3$$

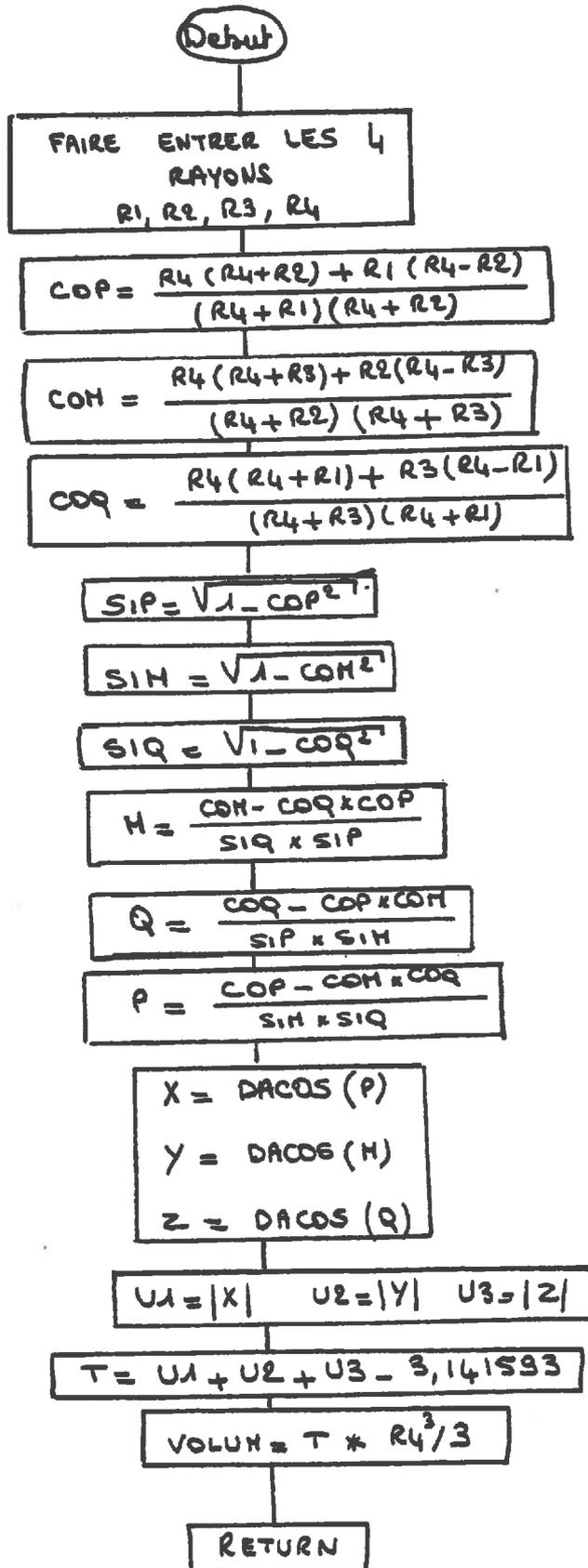
Par permutation circulaire on calcule les volumes  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , des morceaux de sphères de rayons  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , compris à l'intérieur du tétraèdre.

$$\text{VOLUME VIDE} = \text{VOLUME DU TETRAEDRE} - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

ORGANIGRAMME DE LA FONCTION TETRA (1)



ORGANIGRAMME DE LA FONCTION VOLUM (2)



## Commentaires sur l'établissement du programme.

---

---

Le programme principal est composé de 4 boucles imbriquées. En allant de la plus intérieure à la plus extérieure

- La première nous permet de remplir une ligne d'un tableau ( $J = 1,7$ )
- La seconde nous permet d'inscrire toutes les lignes d'un tableau ( $J = 1,7$ )

- La troisième nous permet d'écrire 7 tableaux. Ces 7 tableaux correspondant tous à un même rayon de sphère donné.

- La quatrième nous permet d'écrire 7 fois 7 tableaux. Cette quatrième boucle nous permet donc de donner 7 valeurs différentes à la 4<sup>ème</sup> bille.

Soit en tout 49 tableaux de 49 éléments chacun, c'est-à-dire 2401 vides à calculer.

### Cas particuliers

o Le volume du tétraèdre n'est pas calculable pour n'importe quelles valeurs des cotés formés par les rayons des quatre sphères. Dans ce cas, nous affectons à TETRA une valeur négative (qui est -1). C'est pour cette raison que dans le programme principal nous testons la valeur de TETRA. Si elle est négative, c'est donc que le volume du tétraèdre n'est pas calculable pour les valeurs des rayons  $R_1, R_2, R_3, R_4$  des 4 sphères. Dans le tableau, à l'emplacement correspondant aux valeurs  $R_1, R_2, R_3, R_4$  s'imprimera 0.2.

o Un autre cas pouvant se produire : celui où une bille passe à travers le vide formé par les 3 autres bille tangentes. Dans ce cas, dans le tableau, à l'endroit correspondant aux valeurs des 4 rayons considérés s'inscrira 0.0

Dans le programme, pour détecter ce cas particulier (quel que soit l'ordre des rayons  $R_1, R_2, R_3, R_4$  dans les tableaux) on détermine la plus petite bille. Puis on calcule le rayon du cercle tangent aux trois autres. Si la plus petite bille (de rayon  $PB$ ) a un rayon inférieur ou égal au rayon du cercle tangent, elle passe à travers ; le tétraèdre est indéterminé. Dans ce cas, on a choisit que "le vide" vaudrait 0.0

o Enfin, nous pouvons rencontrer le cas où une des boules (forcément la plus petite) est plus ou moins enfoncée entre les trois autres et où son rayon  $PB$  est strictement supérieur à la hauteur (hauteur passant par le centre de la boule de rayon  $PB$ ) du tétraèdre (d'où le test dans l'organigramme précédent :  $PB-HAUT \leq 0$ )

Dans ce cas, la méthode que nous avons employé pour calculer le vide et qui consistait à soustraire chaque morceau de sphères intérieures au tétraèdre au volume total du tétraèdre n'est plus valable, car dans ce cas on soustrairait un morceau de sphère qui ne serait pas compris à l'intérieur du tétraèdre d'où des résultats erronés. Dans ce cas, on choisira "le vide" égal à 0.1

c) Résultats et commentaires

On peut voir sur les tableaux obtenus que le volume intérieur à 4 sphères de rayons 750 microns est de  $87649598 \mu^3$  et si l'on a trois sphères et rayons 750  $\mu$  et une quatrième sphère de rayon 5  $\mu$ , on tombe à  $2002 \mu^3$ . Il se produit dans ce cas une très forte variation de volume.

Par contre, si l'on a 4 particules de 5 microns, on obtient un volume de  $25 \mu^3$  et si l'on a 3 particules de 5 microns et une quatrième de 750  $\mu$  on obtient un volume de  $130 \mu^3$ . Dans ce cas, on assiste à une faible variation de volume.

On aboutit donc aux mêmes conclusions : la dimension moyenne de la porosité est très fortement influencée par les petits éléments.

Il se produit un cas particulier quand on passe de  $R1 = 17,5 - R2 = 37,5 - R3 = 75 - R4 = 750$  (cas 1) à  $R1 = 17,5 - R2 = 37,5 - R3 = 175 - R4 = 750$ , le volume du vide compris entre les sphères de rayons  $R1, R2, R3, R4$  diminue alors que partout ailleurs il augmente.

Dans le cas 1      Volume total = 310131,65  
                           Volume occupé par les sphères à  
                           l'intérieur du tétraèdre = 287 146,36

Dans le cas 2      Volume total = 438 558,29  
                           Volume occupé par les sphères à l'intérieur  
                           du tétraèdre = 419 735,52

|              |              |  |
|--------------|--------------|--|
| 438 558,29   | 419 735,52   | ↗ du volume des morceaux<br>de sphères à l'intérieur du<br>tétraèdre |
| - 310 131,65 | - 287 146,36 |  |
| 128 416,64   | 132 589,16   |  |

du volume  
total

Cela est dû au fait que l'augmentation du volume total est plus faible que l'augmentation du volume des morceaux de sphères à l'intérieur du tétraèdre.

C Approche probabiliste

On cherche à savoir comment la porosité d'un système est influencée par la taille des particules.

Données de départ = % en Masse ou en volume

Critère à retenir = nombre de particules

Ainsi, l'on peut déterminer la fréquence d'existence d'un certain type de tétraèdre.

a) Dénombrement des types "d'arrangements" 4 à 4 de N types de particules (le type d'une particule étant caractérisé par son diamètre).

Tous les types "d'arrangements" 4 à 4 de N types de particules sont obtenus

de la manière suivante :

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |
|   |   |   | ⋮ |
| 1 | 1 | 1 | N |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 3 |
|   |   |   | ⋮ |
| 1 | 1 | 2 | N |
| 1 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 4 |
|   |   |   | ⋮ |
| 1 | 1 | 3 | N |
|   |   |   | ⋮ |
| 1 | 1 | N | N |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 3 |
|   |   |   | ⋮ |
| 1 | 2 | 2 | N |
|   |   |   | ⋮ |
| 1 | 2 | N | N |
| 1 | 3 | 3 | 3 |
|   |   |   | ⋮ |
| N | N | N | N |

ou 1 représente un certain diamètre,  
2 représente un autre diamètre, etc...

Exemples

- cas en N = 2

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

5 "arrangements"

- cas en N = 3

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

15 "arrangements"

b) Appréciation de la fréquence d'existence des arrangements.

Nous avons pris le cas où nous avons le pourcentage en volume.

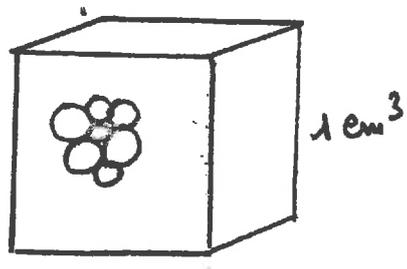
Dans 1 cm<sup>3</sup> de sable, il y a du solide constitué par des billes de N variétés (de rayons R1, R2, ....RN) et du vide (porosité).

$$\text{porosité} = 1 - (V1 + V2 + \dots + VN)$$

Détermination du nombre de billes de rayon RN = x

1 bille de rayon RN a pour volume  $\frac{4}{3} \pi RN^3 \text{ cm}^3$   
 x ont pour volume VN

$$x = \frac{VN}{\frac{4}{3} \pi RN^3}$$



Soit respectivement NB1, NB2, NB3, ....., NBN, le nombre de billes de rayon R1, le nombre de billes de rayon R2, ....., le nombre de billes de rayon RN.

Nombre total de billes T = NB1 + NB2 + NB3 + ..... + NBN

Probabilité de tirer un certain type d'arrangement

ex : si l'on a deux sortes de billes, on a vu que les "arrangements" sont les suivants :

|   |   |   |   |   |                  |
|---|---|---|---|---|------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | → | "arrangement" A1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | → | A2               |
| 1 | 1 | 2 | 2 | → | A3               |
| 1 | 2 | 2 | 2 | → | A4               |
| 2 | 2 | 2 | 2 | → | A5               |

Soit P1 la probabilité d'avoir l'arrangement 1 1 1 1

$$P_1 = \frac{NB_1}{T} \times \frac{NB_1-1}{T-1} \times \frac{NB_1-2}{T-2} \times \frac{NB_1-3}{T-3}$$

Soit P2 la probabilité d'avoir l'arrangement 1 1 1 2

$$P_2 = \frac{NB_1}{T} \times \frac{NB_1-1}{T-1} \times \frac{NB_1-2}{T-2} \times \frac{NB_2}{T-3}$$

Soit P3 la probabilité d'avoir l'arrangement 1 1 2 2

$$P_3 = \frac{NB_1}{T} \times \frac{NB_1-1}{T-1} \times \frac{NB_2}{T-2} \times \frac{NB_2-1}{T-3}$$

Soit P4 la probabilité d'avoir l'arrangement 1 2 2 2

$$P_4 = \frac{NB_1}{T} \times \frac{NB_2}{T-1} \times \frac{NB_2-1}{T-2} \times \frac{NB_2-2}{T-3}$$

Soit P5 la probabilité d'avoir l'arrangement 2 2 2 2

$$P_5 = \frac{NB_2}{T} \times \frac{NB_2-1}{T-1} \times \frac{NB_2-2}{T-2} \times \frac{NB_2-3}{T-3}$$

c) Programme et commentaire

- Organigramme du programme principal (voir annexe A2)

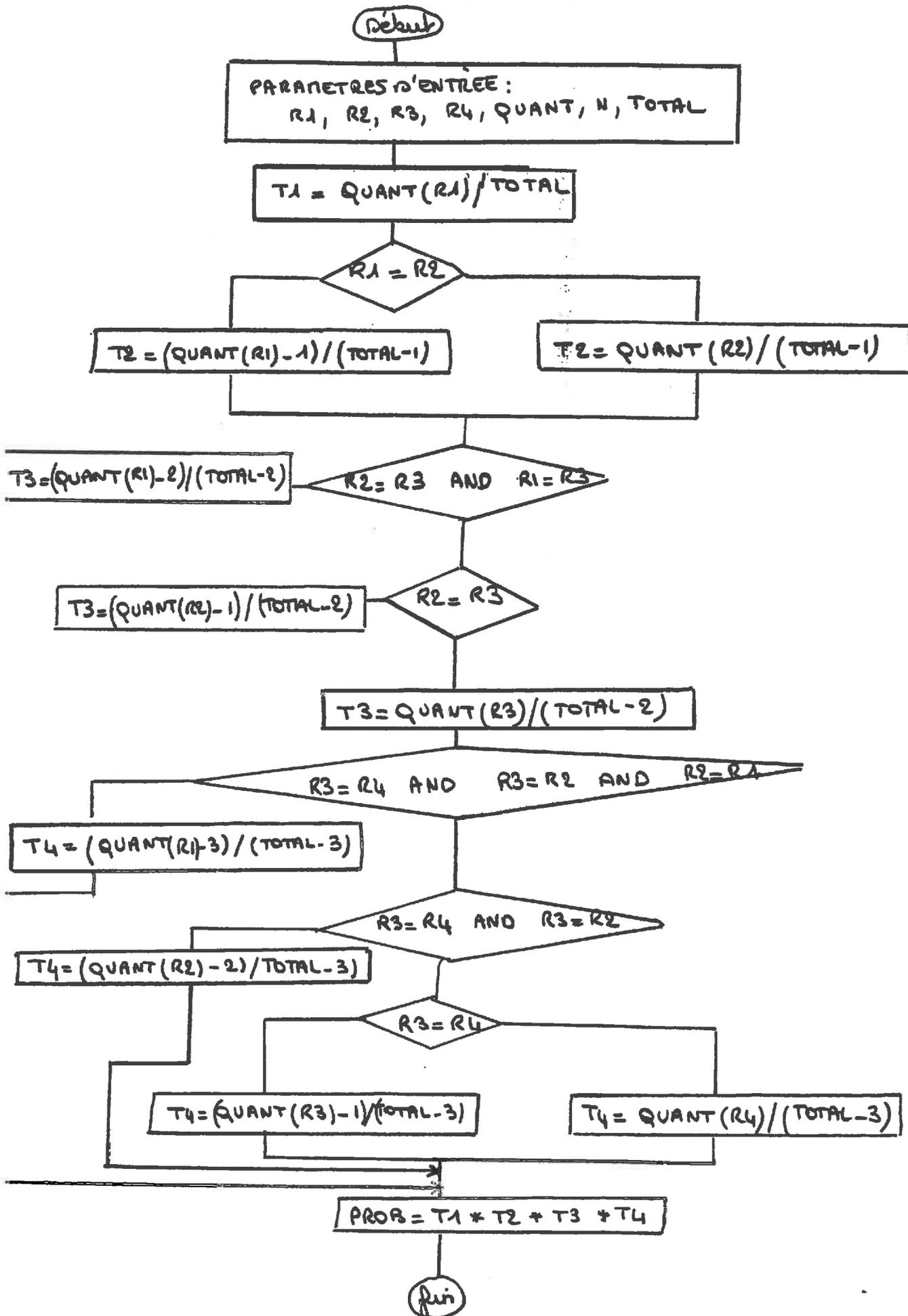
Il calcule et inscrit tous les "arrangements" 4 à 4 de N types de particules et sous chaque "Arrangements" il inscrit la fréquence d'existence de ce dernier.

- Organigramme de la fonction prob

La fonction prob calcule la fréquence d'existence d'un "arrangement"

La fonction bille calcule le nombre de particules pour un type donné (pour un rayon donné).

ORGANIGRAMME DE LA FONCTION PROB



### Commentaires sur les résultats obtenus

On voit que l'empilement ou la juxtaposition de quatre plus petites billes est majoritaire. Cela signifie que la quasi totalité des arrangements comprendront des combinaisons 4 à 4 où figureront surtout les plus petites particules : les diamètres des pores de vide équivalents seront toujours de faible diamètre (de l'ordre de grandeur de celui des plus petites particules). La taille des pores est gouvernée par le diamètre des petites particules ce qui vérifie bien les résultats du problème A) et du problème B)

### III Conclusion générale

L'objet de notre travail a été d'étudier les arrangements de particules sphériques indéformables de différents diamètres.

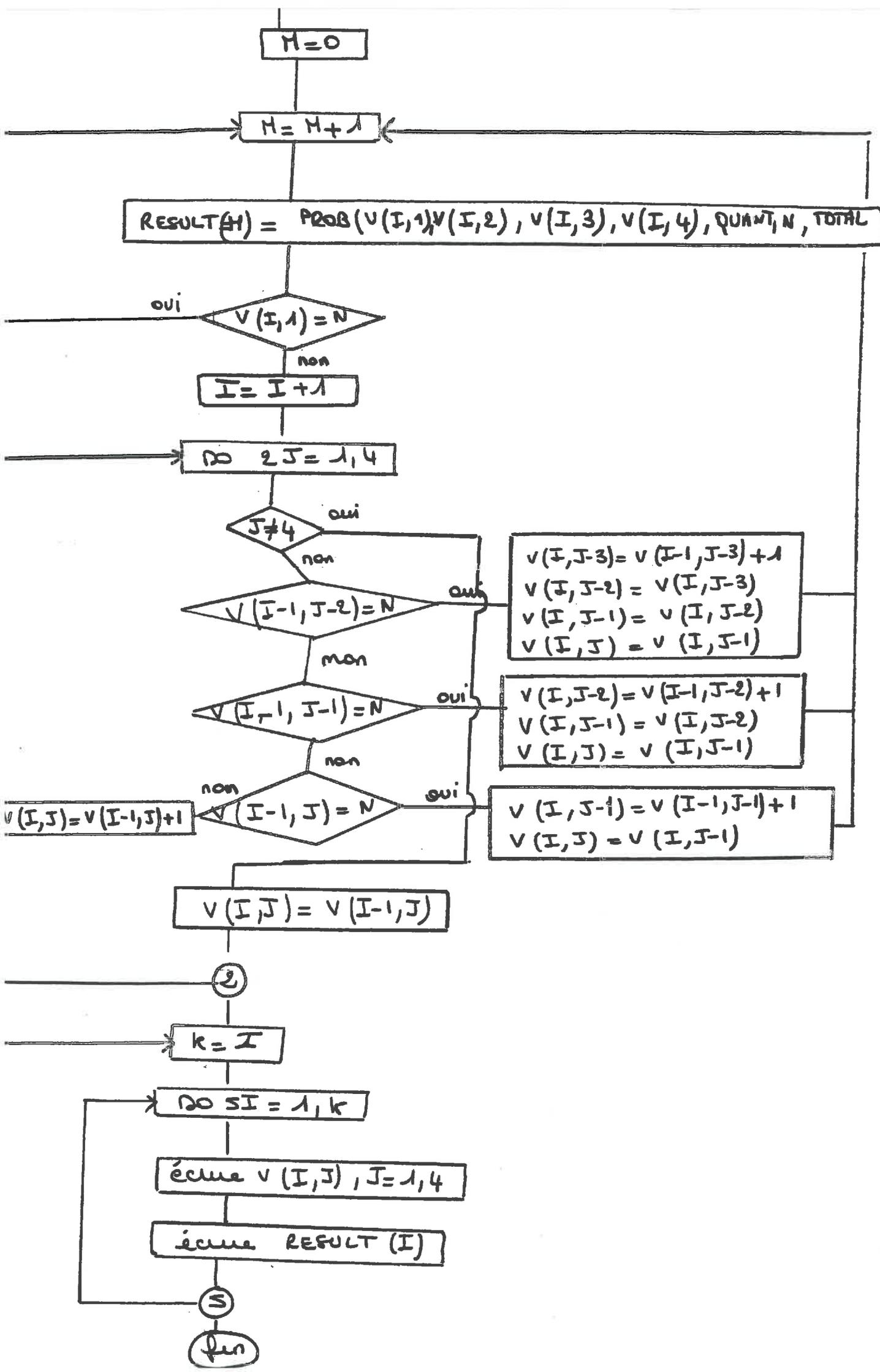
- Dans un premier temps, nous avons envisagé un problème géométrique dans le plan. Nous avons considéré des mélanges de particules de rayon 5.17,5 - 37,5 - 75 - 175 - 375 - 750 microns et cherché à connaître le diamètre moyen du pore dans un plan, existant entre 3 particules jointives de rayon différent. Les résultats obtenus montrent que la dimension des pores dépend fortement des petits éléments. En effet, quand on passe de trois particules de 750 microns à 2 particules de 750 microns et 1 particule de 5 micron le diamètre du cercle tangent diminue fortement. Par contre, quand on passe de 3 particules de 5 microns à 2 particules de 5 microns et une troisième de 750 microns le diamètre du cercle tangent varie très peu.

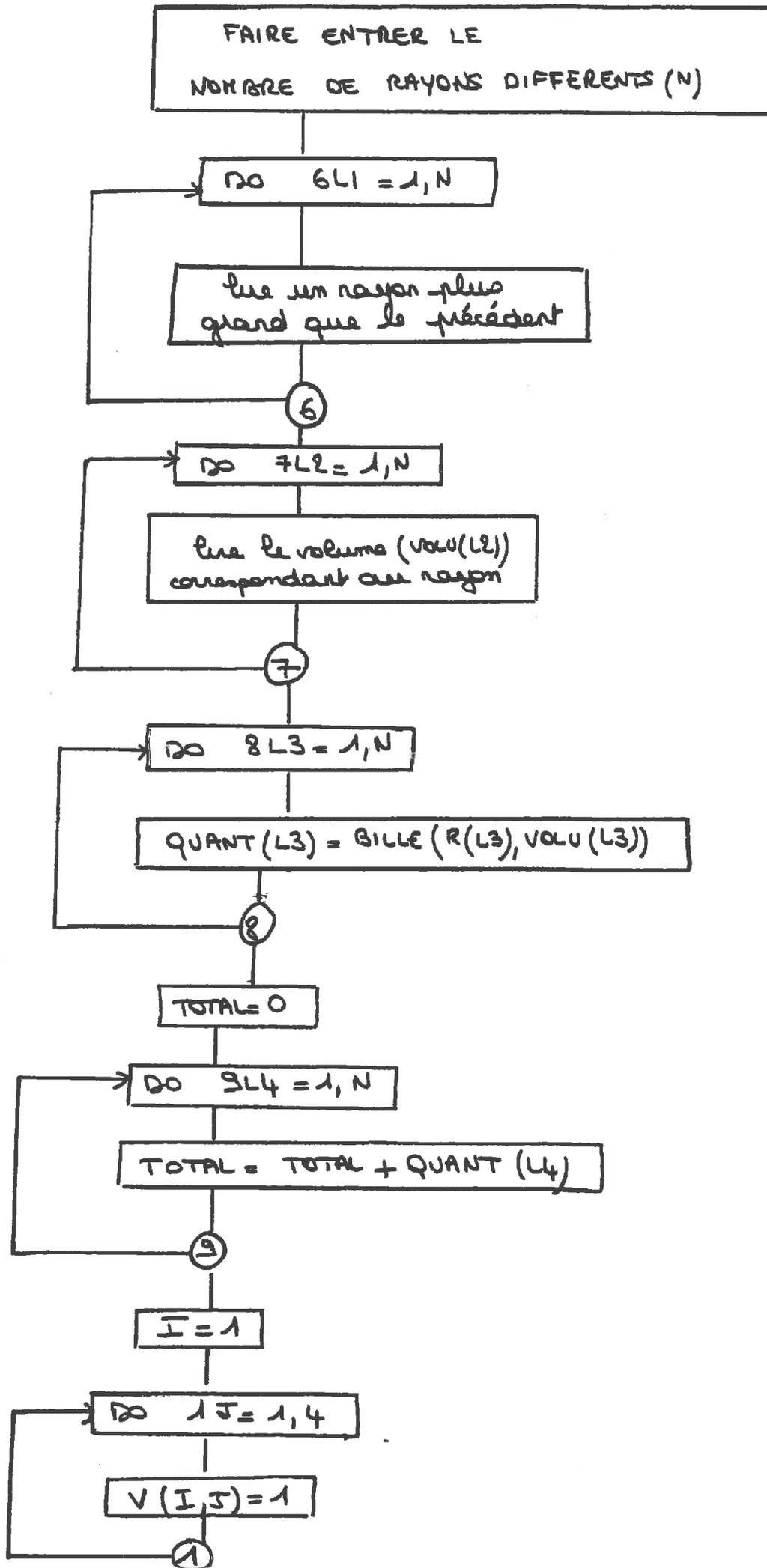
- Dans un second temps, nous avons calculé les dimensions des vides compris entre quatre particules de rayon différents (les particules ayant toujours 5. 17,5 - 37,5 - 75 - 175 - 375 ou 750 microns de rayon). Nous avons donc considéré le sol comme un ensemble de tétraèdre formés par un empilement irrégulier de particules de dimensions différentes. A chaque tétraèdre étant lié un volume de vide. Nous avons aboutit aux mêmes conclusions : la dimension du vide dépendait fortement des petits éléments.

- Enfin, notre travail s'est terminé par le calcul de la fréquence d'apparition d'un certain type de tétraèdre (le type étant défini par une combinaison de 4 particules dont les rayons sont soit 5 - 17,5 - 37,5 - 75 - 175 - 375 - 750 microns). Les résultats obtenus montrent que la majorité des empilements formés de 4 particules étaient constitués des billes de plus petit diamètre donc que les diamètres des pores du vide sont toujours de faible diamètre.

Tout ceci nous amène à conclure que les grosses particules agissent surtout sur la valeur globale de la porosité et les petites sur la taille des pores.

ANNEXE





M = 0

DO I = 1, 7

M = M + 1

LIGNE = C(M)

ECRIRE LIGNE, (V(I, J) | J = 1, 7)

4

ECRIRE LA LIGNE  
SEPARATIVE DES TABLEAUX

3

K1 = 0

7

fin



$$S1 = \frac{1}{2} (LH + D) + (A+K) \cdot (DTR)$$

$$S2 = \sqrt{S1 (S1 - (A+B)) (S1 - (A+R)) (S1 - (B+R))}$$

$$\frac{1}{2} ((A+B) + (A+H) + (B+H))$$

$$\sqrt{S1 (S1 - (A+B)) (S1 - (A+H)) (S1 - (B+H))}$$

$$HAUT = 3 + RESULT / S2$$

Oui  $PB - HAUT \leq 0$  Non

$$VOLU1 = VOLUM (R, H, A, B)$$

$$VOLU2 = VOLUM (R, H, B, A)$$

$$VOLU3 = VOLUM (R, A, B, H)$$

$$VOLU4 = VOLUM (H, A, B, R)$$

$$RESULT = 0.1$$

$$TOTAL = 0$$

$$TOTAL = VOLU1 + VOLU2 + VOLU3 + VOLU4$$

$$V(I, J) = RESULT - TOTAL$$

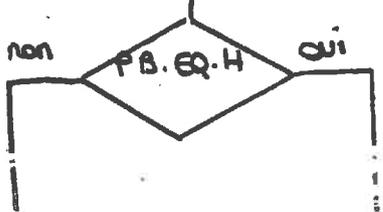
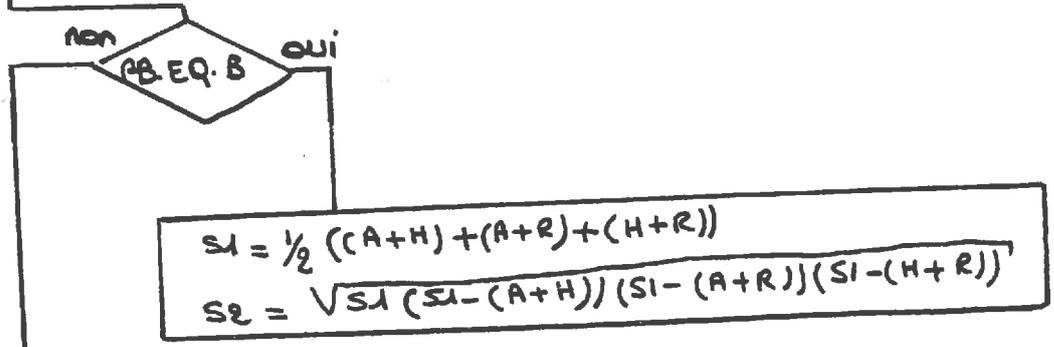
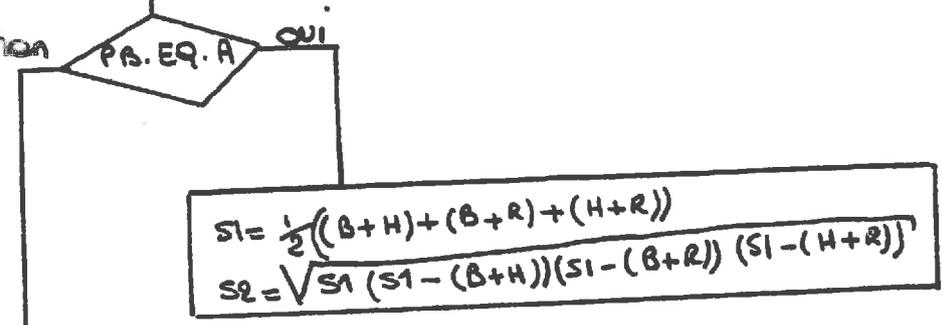
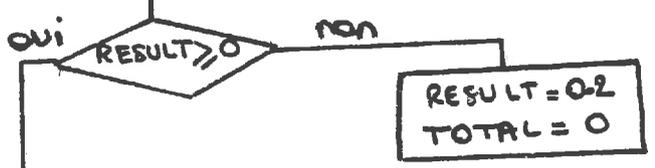
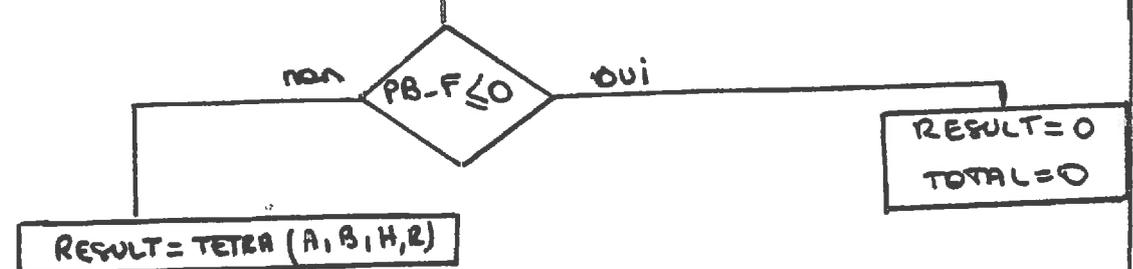
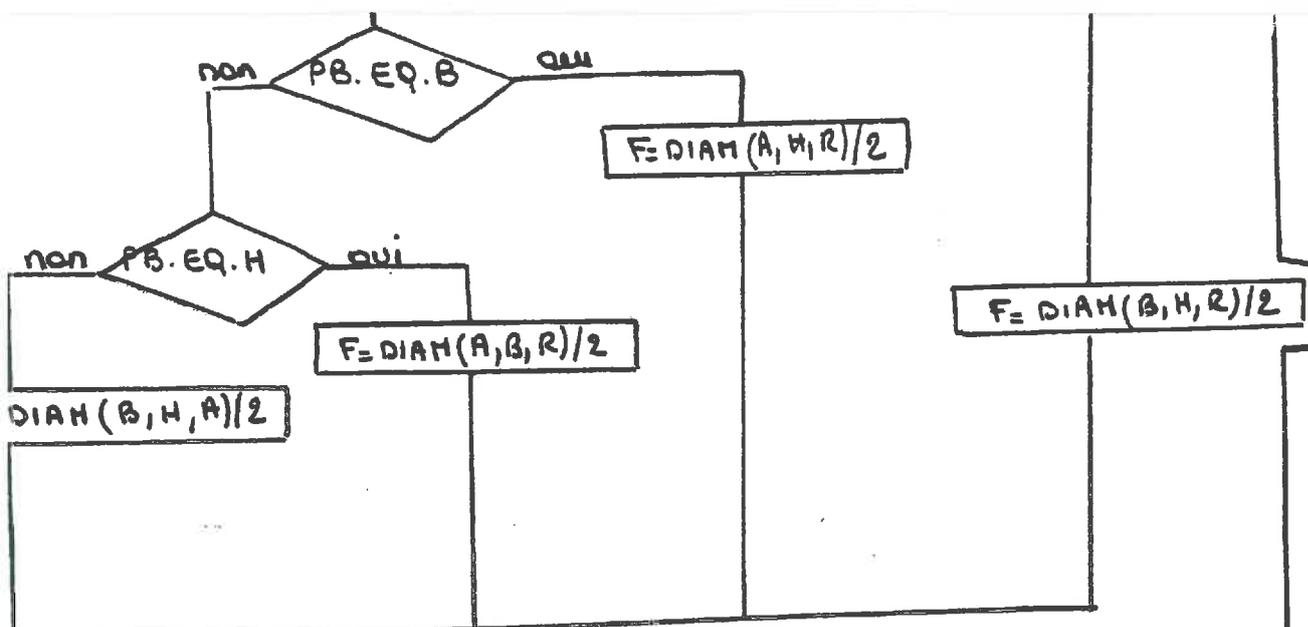
2

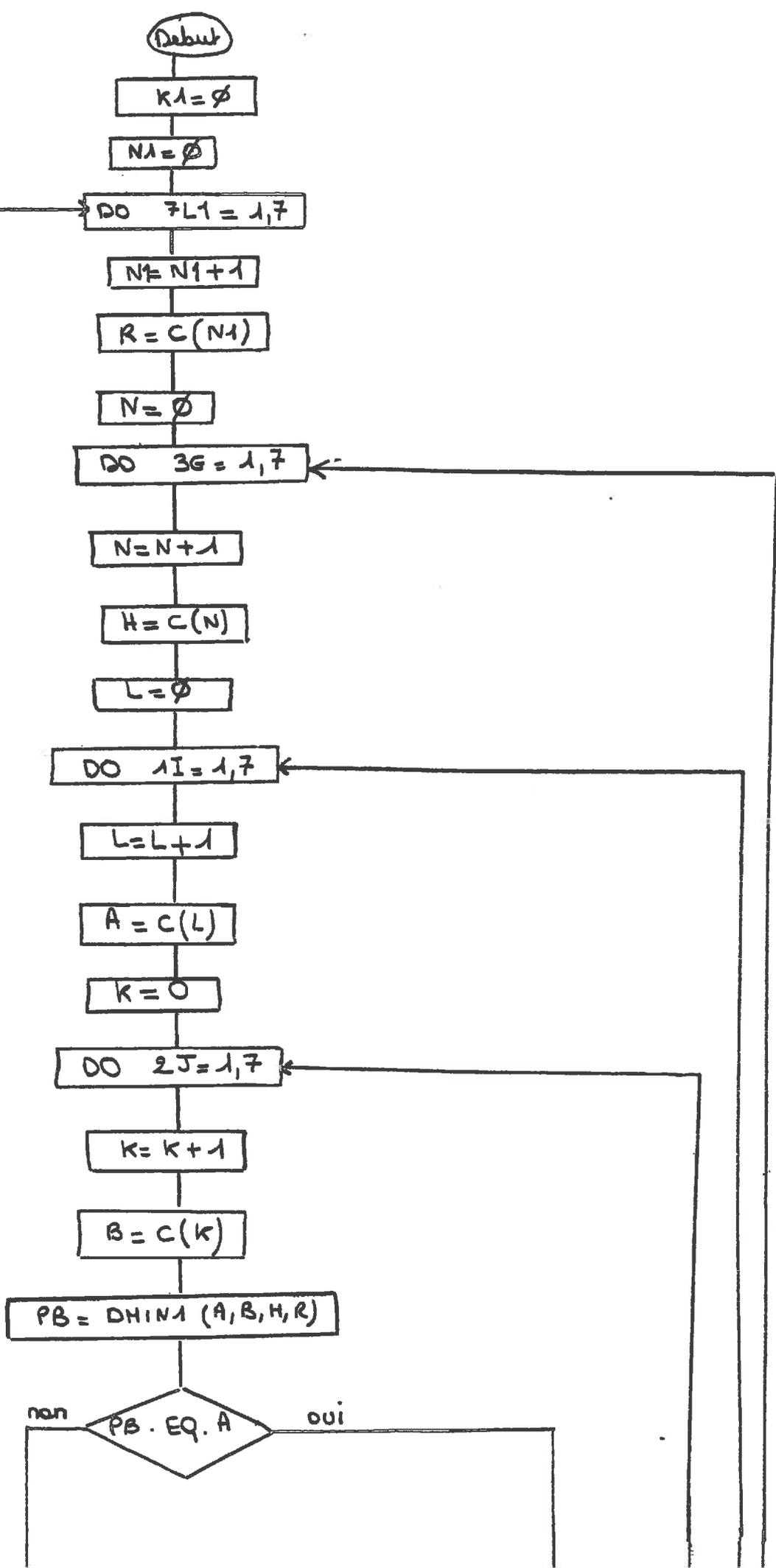
1

$$K1 = K1 + 1$$

$$T3 = C(K1)$$

Ecrire T3, (C(K), K=1,7)  
Tracer une ligne





| 5.00 *   | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 1.55 | 2.09  | 2.28  | 2.38  | 2.45   | 2.48   | 2.49   |
| 17.50 *  | 2.09 | 3.14  | 3.61  | 3.89  | 4.08   | 4.17   | 4.21   |
| 37.50 *  | 2.28 | 3.61  | 4.29  | 4.73  | 5.06   | 5.22   | 5.29   |
| 75.00 *  | 2.38 | 3.89  | 4.73  | 5.33  | 5.82   | 6.06   | 6.19   |
| 175.00 * | 2.45 | 4.08  | 5.06  | 5.82  | 6.50   | 6.88   | 7.08   |
| 375.00 * | 2.48 | 4.17  | 5.22  | 6.06  | 6.88   | 7.38   | 7.67   |
| 750.00 * | 2.49 | 4.21  | 5.29  | 6.19  | 7.08   | 7.67   | 8.03   |

| 17.50 *  | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 2.09 | 3.14  | 3.61  | 3.89  | 4.08   | 4.17   | 4.21   |
| 17.50 *  | 3.14 | 5.41  | 6.67  | 7.52  | 8.16   | 8.46   | 8.60   |
| 37.50 *  | 3.61 | 6.67  | 8.58  | 10.00 | 11.17  | 11.76  | 12.05  |
| 75.00 *  | 3.89 | 7.52  | 10.00 | 12.03 | 13.85  | 14.84  | 15.35  |
| 175.00 * | 4.08 | 8.16  | 11.17 | 13.85 | 16.54  | 18.18  | 19.10  |
| 375.00 * | 4.17 | 8.46  | 11.76 | 14.84 | 18.18  | 20.45  | 21.83  |
| 750.00 * | 4.21 | 8.60  | 12.05 | 15.35 | 19.10  | 21.83  | 23.63  |

| 37.50 *  | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 2.28 | 3.61  | 4.29  | 4.73  | 5.06   | 5.22   | 5.29   |
| 17.50 *  | 3.61 | 6.67  | 8.58  | 10.00 | 11.17  | 11.76  | 12.05  |
| 37.50 *  | 4.29 | 8.58  | 11.60 | 14.08 | 16.29  | 17.48  | 18.08  |
| 75.00 *  | 4.73 | 10.00 | 14.08 | 17.71 | 21.26  | 23.35  | 24.46  |
| 175.00 * | 5.06 | 11.17 | 16.29 | 21.26 | 26.73  | 30.33  | 32.42  |
| 375.00 * | 5.22 | 11.76 | 17.48 | 23.35 | 30.33  | 35.44  | 38.71  |
| 750.00 * | 5.29 | 12.05 | 18.08 | 24.46 | 32.42  | 38.71  | 43.10  |

| 75.00 *  | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 2.38 | 3.89  | 4.73  | 5.33  | 5.82   | 6.06   | 6.19   |
| 17.50 *  | 3.89 | 7.52  | 10.00 | 12.03 | 13.85  | 14.84  | 15.35  |
| 37.50 *  | 4.73 | 10.00 | 14.08 | 17.71 | 21.26  | 23.35  | 24.46  |
| 75.00 *  | 5.33 | 12.03 | 17.71 | 23.21 | 29.10  | 32.85  | 34.96  |
| 175.00 * | 5.82 | 13.85 | 21.26 | 29.10 | 38.49  | 45.20  | 49.34  |
| 375.00 * | 6.06 | 14.84 | 23.35 | 32.85 | 45.20  | 55.01  | 61.69  |
| 750.00 * | 6.19 | 15.35 | 24.46 | 34.96 | 49.34  | 61.69  | 70.87  |

| 175.00 * | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 2.45 | 4.08  | 5.06  | 5.82  | 6.50   | 6.88   | 7.08   |
| 17.50 *  | 4.08 | 8.16  | 11.17 | 13.85 | 16.54  | 18.18  | 19.10  |
| 37.50 *  | 5.06 | 11.17 | 16.29 | 21.26 | 26.73  | 30.33  | 32.42  |
| 75.00 *  | 5.82 | 13.85 | 21.26 | 29.10 | 38.49  | 45.20  | 49.34  |
| 175.00 * | 6.50 | 16.54 | 26.73 | 38.49 | 54.15  | 66.70  | 75.18  |
| 375.00 * | 6.88 | 18.18 | 30.33 | 45.20 | 66.70  | 85.80  | 100.04 |
| 750.00 * | 7.08 | 19.10 | 32.42 | 49.34 | 75.18  | 100.04 | 120.26 |

| 375.00 * | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 2.48 | 4.17  | 5.22  | 6.06  | 6.88   | 7.38   | 7.67   |
| 17.50 *  | 4.17 | 8.46  | 11.76 | 14.84 | 18.18  | 20.45  | 21.83  |
| 37.50 *  | 5.22 | 11.76 | 17.48 | 23.35 | 30.33  | 35.44  | 38.71  |
| 75.00 *  | 6.06 | 14.84 | 23.35 | 32.85 | 45.20  | 55.01  | 61.69  |
| 175.00 * | 6.88 | 18.18 | 30.33 | 45.20 | 66.70  | 85.80  | 100.04 |
| 375.00 * | 7.38 | 20.45 | 35.44 | 55.01 | 85.80  | 116.03 | 140.75 |
| 750.00 * | 7.67 | 21.83 | 38.71 | 61.69 | 100.04 | 140.75 | 177.05 |

| 750.00 * | 5.00 | 17.50 | 37.50 | 75.00 | 175.00 | 375.00 | 750.00 |
|----------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 5.00 *   | 2.49 | 4.21  | 5.29  | 6.19  | 7.08   | 7.67   | 8.03   |
| 17.50 *  | 4.21 | 8.61  | 12.05 | 15.35 | 19.10  | 21.83  | 23.63  |
| 37.50 *  | 5.29 | 12.05 | 18.09 | 24.46 | 32.42  | 38.71  | 43.10  |
| 75.00 *  | 6.19 | 15.35 | 24.46 | 34.96 | 49.34  | 61.69  | 70.87  |
| 175.00 * | 7.08 | 19.10 | 32.42 | 49.34 | 75.18  | 100.04 | 120.26 |
| 375.00 * | 7.67 | 21.83 | 38.71 | 61.69 | 100.04 | 140.75 | 177.05 |
| 750.00 * | 8.03 | 23.63 | 43.10 | 70.87 | 120.26 | 177.05 | 232.05 |

\*\*\*\*\*

Diamètre d'un cercle tangent à 3 cercles de rayons  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  compris entre 5 et 750 microns.

( $R_1$  figure en haut à gauche de chaque tableau,  $R_2$  et  $R_3$  forment les lignes et les colonnes).