

Ce terme représente la convection de la quantité  $\rho A^{(k)}$  par le champ des vitesses  $u_i^{(k)}$ .

Nous pouvons remarquer que le résultat (VIII.1.1.3) reste inchangé si  $A^{(k)}$  est une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle.

Supposons que  $A^{(k)}$  est scalaire et qu'elle représente la masse contenue dans le volume  $\Omega$ . Dans ce cas, nous avons :  $\rho A^{(k)} = \rho^{(k)}$  et s'il n'y a pas de sources volumiques ou surfaciques nous mettons :  $\alpha_e^{(k)} = 0$ ,  $\mathcal{A}_e^{(k)} = 0$ . L'expression (VII.1.1.3) devient donc :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(k)} \cdot u_j^{(k)}) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{VII.1.1.4})$$

L'équation (VII.1.1.4) exprime la conservation de la masse d'un fluide quelconque. En appliquant la formule de GREEN, nous avons :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho^{(k)} u_j^{(k)} \cdot n_j \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{VII.1.1.5})$$

où  $n_j$  sont les composantes du vecteur unitaire  $\vec{n}$  perpendiculaire à la frontière  $\Gamma$ . Pour un fluide incompressible (hypothèse a) l'équation (VII.1.1.5) devient :

$$\int_{\Gamma} u_j^{(k)} n_j d\Gamma = 0 \quad (\text{VII.1.1.6})$$

qui exprime la conservation du flux total de la masse à travers la frontière  $\Gamma$ .

Etant donné que l'expression (VII.1.1.4) est valable dans tout volume  $\Omega$  quelconque, il s'ensuit l'équation de continuité valable à tout point situé à l'intérieur du domaine  $D_k(t)$ , sous la forme :

$$\frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(k)} \cdot u_j^{(k)}) = 0 \quad (\text{VII.1.1.7})$$

et lorsque le fluide  $k$  est incompressible, nous pouvons écrire simplement :

$$\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VII.1.1.8})$$

Examinons maintenant l'équation de la dynamique, exprimant l'équilibre des forces d'après le principe de Newton-d'Alembert. Cette équation traduit la conservation des quantités de mouvement dans le volume  $\Omega$ , suivant la formulation VII.1.1.3. Cette fois-ci, les grandeurs  $A^{(k)}$ ,  $\alpha_e^{(k)}$  et  $A_e^{(k)}$  sont vectorielles de la forme :

$$A^{(k)} = \rho^{(k)} \cdot u_i^{(k)}, \quad \alpha_e^{(k)} = T_i^{(k)}, \quad A_e^{(k)} = f_i^{(k)}$$

et elles expriment successivement la densité volumique des quantités du mouvement, la densité surfacique et la distribution volumique des forces extérieures.

En appliquant la formule (VII.1.1.3) nous aurons donc :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial (\rho^{(k)} u_i^{(k)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(k)} u_i^{(k)} \cdot u_j^{(k)}) \right\} d\Omega = \int_{\Gamma} T_i^{(k)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(k)} d\Omega$$

Les contraintes  $T_i^{(k)}$  représentent les forces surfaciques exercées sur un élément de la frontière  $\Gamma$ , dont l'orientation est définie par le vecteur unitaire normal  $n_i$ , la fonction vectorielle  $T_i^{(k)}(x_i, t, n_i)$  est entièrement définie par le tenseur des contraintes  $\Sigma^{(k)}$ , dont les composantes  $\sigma_{ij}^{(k)}$  ne dépendent que des variables eulériennes. En tout point du domaine  $D_k(t)$  nous avons :

$$T_i^{(k)}(x_i, t, n_i) = \sigma_{ij}^{(k)}(x_i, t) n_j \quad (\text{VII.1.1.10})$$

Lorsque le fluide  $k$  est visqueux et newtonien (hypothèse a), en décomposant le tenseur des contraintes en une partie sphérique et une partie déviatrice, nous pouvons faire intervenir les composantes du tenseur des déformations  $e_{ij}^{(k)}$  sous la forme :

$$\sigma_{ij}^{(k)} = -p^{(k)} \cdot \delta_{ij} + 2\mu^{(k)} \cdot e_{ij}^{(k)} \quad (\text{VII.1.1.11})$$

où :

$$e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{VII.1.1.12})$$

$p^{(k)}$  désigne la pression dans le domaine  $D_k(t)$ ,  $\delta_{ij}$  la matrice diagonale unité et  $\mu^{(k)}$  la viscosité dynamique du fluide  $k$ .

En utilisant l'expression (VII.1.1.10) et la formule de GREEN, nous pouvons écrire la loi de conservation des quantités de mouvement (VII.1.1.9) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho^{(k)} \cdot u_i^{(k)})}{\partial t} + \int_{\Gamma} (\rho^{(k)} u_i^{(k)}) u_j^{(k)} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{(k)} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(k)} d\Omega \quad (\text{VII.1.1.13})$$

Nous pouvons introduire dans (VII.1.1.13) le tenseur des déformations à l'aide de (VII.1.1.11) et (VII.1.1.12) en écrivant :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{(k)} n_j d\Gamma = - \int_{\Gamma} p^{(k)} n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu^{(k)} \left( \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma$$

(VII.1.1.14)

Nous utiliserons la formulation intégrale (VII.1.1.13) sous forme discrète, dans l'algorithme de la méthode numérique, que nous exposerons par la suite.

Mais, pour le moment, examinons l'équation aux dérivées partielles locales.

En utilisant l'expression (VII.1.1.10) et la formule de GREEN, nous pouvons écrire la loi de conservation (VII.1.1.9) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial (\rho^{(k)} u_i^{(k)})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^{(k)} u_i^{(k)} u_j^{(k)})}{\partial x_j} - \frac{\partial (\sigma_{ij}^{(k)} - f_i^{(k)})}{\partial x_j} \right\} d\Omega = 0$$

(VII.1.1.15)

Etant donné que le volume  $\Omega$  est arbitraire et en tenant compte des expressions (VII.1.1.11) et (VII.1.1.12) nous aurons :

$$\rho^{(k)} \left\{ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial (u_i^{(k)} u_j^{(k)})}{\partial x_j} \right\} = f_i^{(k)} - \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x_i} + \mu^{(k)} \nabla^2 u_i^{(k)}$$

(VII.1.1.16)

(i = 1, 2      j = 1, 2      k = 1, 2)

où le symbole  $\nabla^2 = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  représente l'opérateur Laplacien.

Les équations (VII.1.1.16) sont connues comme équations de NAVIER-STOKES et elles expriment la conservation des quantités de mouvement dans le cylindre  $D_k(t) \times [0 \leq t \leq T]$ . Toutefois, il est bien évident du point de vue physique, qu'au voisinage de l'interface  $S(t)$ , la variation brusque des propriétés physiques du fluide k rend

l'équation (VII.1.16) inapplicable. Nous allons donc examiner tout de suite l'expression des lois générales de conservation au voisinage de la surface de discontinuité  $S(t)$ .

### VII.1.2. Les conditions sur l'interface

Examinons maintenant les lois de conservation dans un volume  $\Omega$  borné par la frontière  $\Gamma$  et situé au voisinage de l'interface  $S(t)$ . L'interface divise le volume  $\Omega$  en deux parties telles que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et  $\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$  (figure 56).

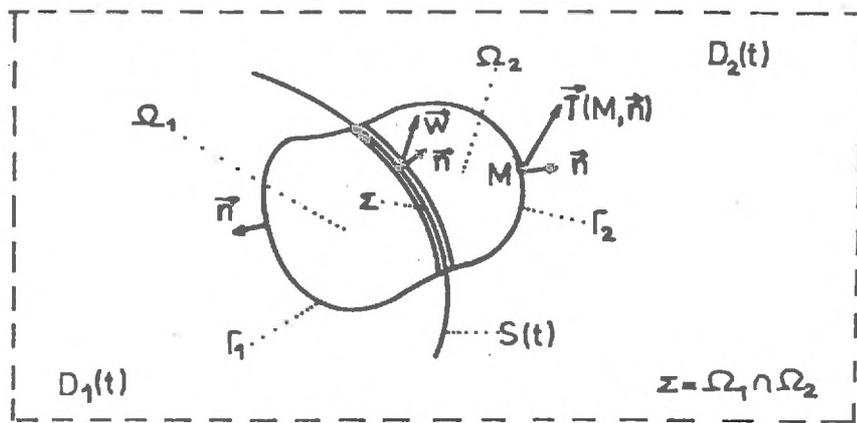


Figure 56.

Pour ne pas perdre de vue la généralité, nous allons supposer que l'interface  $S(t)$ , est le lieu géométrique des particules, qui se déplacent avec une vitesse  $\vec{W}(x_i, t)$  en général bien distincte des champs de vitesse  $u_i^{(k)}(x_i, t)$ .

La conservation de la masse de l'ensemble des particules contenues dans le volume  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  nous conduit à l'expression :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho^{(1)} d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho^{(2)} d\Omega = 0 \quad (\text{VII.1.2.3})$$

Appliquons maintenant le développement de la forme (VII.1.1.5). Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho^{(1)} d\Omega &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \rho^{(1)} (u_j^{(1)} \cdot n_j) d\Gamma + \int_{\Sigma} \rho^{(1)} (w_j n_j) d\Sigma \\ &= \int_{\Omega_1} \left\{ \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(1)} u_j^{(1)}) \right\} d\Omega - \int_{\Sigma} \rho^{(1)} (u_j^{(1)} - w_j) n_j d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{VII.1.2.4})$$

De la même manière et compte tenu de l'orientation du vecteur  $\vec{n}$  sur l'interface  $\Sigma$ , nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega_2} \left\{ \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(2)} u_j^{(2)}) \right\} d\Omega + \int_{\Sigma} \rho^{(2)} (u_j^{(2)} - w_j) n_j d\Sigma \quad (\text{VII.1.2.5})$$

En remplaçant les expressions (VII.1.2.4) et (VII.1.2.5) dans la formule (VII.1.2.3) et en tenant compte du fait que d'après (VII.1.1.7) les deux premières intégrales de volume sont nulles, nous avons :

$$\int_{\Sigma} \left\{ \rho^{(2)} (u_j^{(2)} - w_j) - \rho^{(1)} (u_j^{(1)} - w_j) \right\} d\Sigma = 0 \quad (\text{VII.1.2.6})$$

Etant donné que  $\Sigma$  représente une portion arbitraire de l'interface  $S(t)$ , la relation intégrale (VII.1.2.6) nous conduit à la condition de raccordement locale :

$$\left[ \rho (u_j - w_j) n_j \right] = 0 \quad (\text{VII.1.2.7})$$

où  $\llbracket f(.) \rrbracket$  désigne la différence  $f^{(2)}(.) - f^{(1)}(.)$  entre les valeurs de la fonction  $f(.)$  calculées des deux côtés de l'interface.

Du point de vue physique, la condition (VII.1.2.7) exprime la continuité des débits massiques calculés des deux côtés de l'interface selon la direction normale  $\vec{n}$ . Toutefois, la surface séparant deux fluides non miscibles en mouvement est une surface de contact, qui constitue une barrière infranchissable pour les molécules situées des deux côtés. Par conséquent, aucun débit ne traverse  $S$  de part et d'autre et la condition (VII.1.2.7) devient :

$$u_j^{(1)} n_j = u_j^{(2)} n_j = w_j n_j \quad (\text{VII.1.2.8})$$

La condition (VII.1.2.8) traduit la continuité des vitesses normales à travers l'interface, qui se réduit ainsi à une surface de glissement. Il est intéressant de retrouver ce résultat en considérant l'interface comme lieu géométrique d'un ensemble de particules fluides, selon l'équation  $F(x, t) = 0$ ,  $x = \{x_1, x_2\}$  (figure 57).

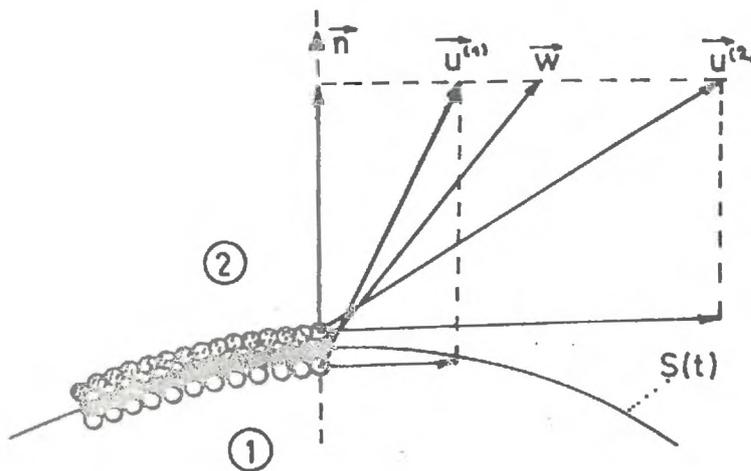


Figure 57.

En effet, en suivant le mouvement des particules inter-  
faciales qui se déplacent avec une vitesse  $w_j = \frac{dx_j}{dt}$ , la variation

de la fonction  $F(x, t) = 0$  dans le temps ou sa dérivée particulaire doit être nulle. Nous avons donc :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + w_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial t} + w_j n_j |\text{grad } F| = 0 \quad (\text{VII.1.2.9})$$

Si nous faisons le même raisonnement pour les particules des fluides 1 et 2 qui suivent constamment le mouvement de l'interface, sans se mélanger, nous aurons :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_j^{(k)} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_j^{(k)} n_j |\text{grad } F| = 0 \quad (\text{VII.1.2.10})$$

$$k = 1, 2$$

En comparant les relations (VII.1.2.9) et (VII.1.2.10) nous retrouvons l'égalité des débits normaux, sous la forme :

$$u_j^{(1)} n_j = u_j^{(2)} n_j = w_j n_j \quad (\text{VII.1.2.11})$$

La condition (VII.1.2.11) traduit le fait que l'interface est une surface de contact ; comme le montre la figure 57, l'interface se réduit donc à une surface de glissement pour les particules fluides, selon la direction tangentielle.

Pour les fluides visqueux, nous admettons d'une manière générale, que les vitesses relatives tangentielles des deux fluides par rapport à l'interface sont égales : ceci revient à remplacer les conditions de glissement par des conditions d'adhérence. Les raisons physiques et mathématiques de cette hypothèse sont les mêmes que lors-

que nous admettons pour un fluide visqueux la condition du non glissement sur une paroi solide.

L'égalité des vitesses tangentielles de chacun des deux fluides au voisinage de l'interface, combinée avec la condition (VII.1.2.11), nous amène à la continuité des vecteurs vitesse à la traversée du front. Nous avons donc :

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} = w_i \quad (\text{VII.1.2.12})$$

Examinons maintenant la conservation des quantités de mouvement dans le volume  $\Omega$  (figure 56), au voisinage de l'interface.

Nous allons admettre l'hypothèse que la tension interfaciale  $T_s$  provoque des contraintes normales à l'interface et proportionnelles à sa courbure.

Si  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons principaux de courbure et  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  la courbure moyenne de l'interface, nous aurons donc :

$$T_i = -2 H T_s n_i \quad \text{sur } S(t) \quad (\text{VII.1.2.13})$$

Les contraintes interfaciales (VII.1.2.13) seront bien entendu pour les volumes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des forces surfaciques extérieures appliquées sur la frontière :  $\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$  (figure 56).

Appliquons maintenant le théorème général de conservation (VII.1.1.2) dans le domaine  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  en posant :

$$\mathcal{A} = \rho u_i, \quad \alpha_e = T_i, \quad \mathcal{A}_e = f_i$$

Compte tenu de la convention sur l'orientation du vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$  (figure 56) et de la relation (VII.1.2.13) nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho^{(1)} u_i^{(1)} d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho^{(2)} u_i^{(2)} d\Omega &= \int_{\Gamma_1} T_i^{(1)} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_2} T_i^{(2)} d\Gamma - \int_{\Sigma} 2 H T_s n_i d\Sigma + \int_{\Omega_1} f_i^{(1)} d\Omega + \int_{\Omega_2} f_i^{(2)} d\Omega \end{aligned}$$

(VII.1.2.14)

On développe maintenant les dérivées particulières des deux intégrales de volume qui apparaissent dans le premier membre de la relation (VII.1.2.14). En utilisant la vitesse  $\vec{w}$  de l'interface et la formule de GREEN, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho^{(1)} u_i^{(1)} d\Omega &= \int_{\Omega_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(1)} u_i^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(1)} u_i^{(1)} u_j^{(1)}) \right\} d\Omega \\ &- \int_{\Sigma} \rho^{(1)} (u_j^{(1)} - w_j) n_j d\Sigma \quad (\text{VII.1.2.15}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \rho^{(2)} u_i^{(2)} d\Omega &= \int_{\Omega_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{(2)} u_i^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{(2)} u_i^{(2)} u_j^{(2)}) \right\} d\Omega \\ &+ \int_{\Sigma} \rho^{(2)} (u_j^{(2)} - w_j) n_j d\Sigma \quad (\text{VII.1.2.16}) \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions (VII.1.2.15) et (VII.1.2.16) dans l'équation (VII.1.2.14) et compte tenu de la loi de conservation

(VII.1.1.9), appliquée dans les volumes  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ , nous trouvons :

$$\int_{\Sigma} \left[ \rho(u_j - w_j)n_j \right] d\Sigma = \int_{\Sigma} \left[ T_i \right] d\Sigma - \int_{\Sigma} 2 H T_s n_i d\Sigma \quad (\text{VII.1.2.17})$$

L'équation (VII.1.2.17) exprime la loi générale de conservation des quantités de mouvement sur l'interface  $S(t)$ . Nous rappelons que le symbole  $\left[ f(.) \right] = f^{(2)}(.) - f^{(1)}(.)$  exprime le saut de la fonction  $f(.)$  à la traversée du front.

Etant donné que la relation (VII.1.2.17) est valable pour tout  $\Sigma \in S$  nous aurons la condition de raccordement locale :

$$\left[ \rho(u_j - w_j)n_j \right] = \left[ T_i \right] - 2 H T_s n_i \quad (\text{VII.1.2.18})$$

La condition (VII.1.2.18) est très générale. Elle est valable par exemple dans le cas où l'interface représente une onde de choc : dans ces conditions, les molécules fluides traversent effectivement la surface  $S(t)$  et le premier terme de l'équation (VII.1.2.18) n'est pas nul.

Dans le cas d'une surface de contact, la continuité des débits normaux, exprimée par l'équation (VII.1.2.7) nous permet de simplifier la condition (VII.1.2.18) sous la forme :

$$\left[ T_i \right] = 2 H T_s n_i \quad (\text{VII.1.2.19})$$

La condition (VII.1.2.19) exprime le raccordement des contraintes exercées par les fluides 1 et 2 sur l'interface.

Utilisons maintenant les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes et l'hypothèse du fluide newtonien, afin de développer la condition (VII.1.2.19). En tenant compte des relations (VII.1.1.10)

et (VII.1.1.11-13) et du fait que  $n_i = \delta_{ij} n_j$ , la relation (VII.1.2.19) devient :

$$\left[ -p n_i + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] = 2 H T_s n_i \quad (\text{VII.1.2.20})$$

Dans le cas spécial où le fluide poussant est non visqueux (un gaz par exemple) la condition (VII.1.2.20) devient :

$$(p^{(1)} - p^{(2)}) n_i + \mu^{(2)} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_j = 2 H T_s n_i$$

et si on considère deux fluides parfaits, on trouve :

$$p^{(1)} - p^{(2)} = 2 H T_s$$

### VII.1.3. Le modèle mathématique complet

Ayant donc étudié les lois générales de conservation des quantités de mouvement et de masse et après avoir examiné en détail les conditions de raccordement des vitesses et des contraintes sur l'interface en mouvement, nous allons maintenant formuler le problème mathématique complet.

Reprenons la schématisation du problème selon la figure 58.

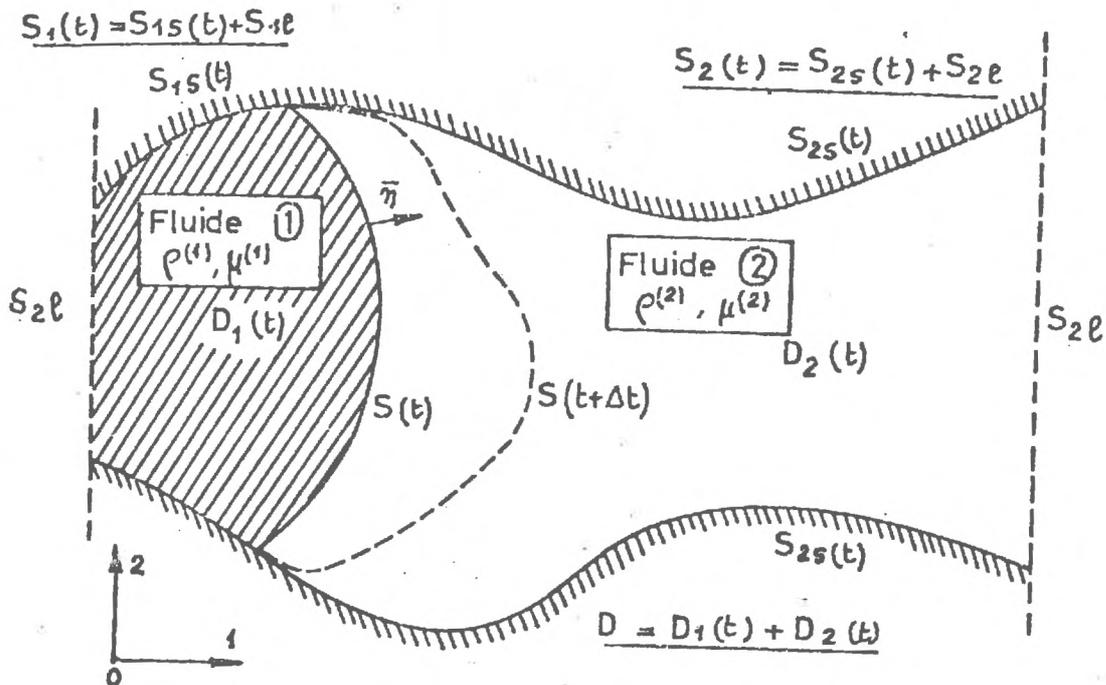


Figure 58.

Les inconnues sont les fonctions  $u_i^{(k)}$  et  $p^{(k)}$ , définies dans les cylindres  $Q_{kT} = D_k(t) \times [0 \leq t \leq T]$ , ( $k = 1, 2$ ); elles doivent vérifier les équations de Navier-Stokes (VII.1.1.16) et de la continuité (VII.1.1.8), qui ont la forme :

$$\rho^{(k)} \left\{ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial (u_i^{(k)} u_j^{(k)})}{\partial x_j} \right\} = f_i^{(k)} - \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x_i} + \nu^{(k)} \cdot \nabla^2 u_i^{(k)} \quad (\text{VII.1.3.1})$$

$$\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VII.1.3.2})$$

pour  $x = \{x_1, x_2\} \in D$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$

Sur l'interface  $S(t)$  les vitesses  $u_i^{(k)}$  sont continues (équation VII.1.2.12), tandis que les contraintes se raccordent selon (VII.1.2.20.) Nous avons donc :

$$u_i^{(1)}(x,t) = u_i^{(2)}(x,t) \quad (\text{VII.1.3.3})$$

$$\left[ -p n_i + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] = 2 H T_s n_i \quad (\text{VII.1.3.4})$$

$$x \in S(t), 0 \leq t \leq T$$

Sur les parois solides  $S_{ks}(t)$  (figure 58), nous admettons les conditions d'adhérence :

$$u_i^{(k)}(x,t) = 0 \quad x \in S_{ks}(t) \quad (\text{VII.1.3.5})$$

$$0 \leq t \leq T$$

Sur les limites libres et fixes, on connaît la distribution des vitesses qui permet de définir un débit liquide à l'entrée et à la sortie. Nous avons donc :

$$u_i^{(k)}(x,t) = \varphi_i^{(k)}(x,t) \quad (\text{VII.1.3.6})$$

$$\int_{S_{1l}} u_j^{(1)} n_j dS = \int_{S_{2l}} u_j^{(2)} n_j dS = Q(x,t) \quad (\text{VII.1.3.7})$$

$$x \in S_{kl}, 0 \leq t \leq T$$

Soit  $F(x,t)$  l'équation qui décrit l'interface  $S(t)$ .

A l'instant  $t = 0$ , nous connaissons la forme de l'interface initiale et la distribution des vitesses :

$$S(0) = F_0(x) \quad (\text{VII.1.3.8})$$

$$u_i^{(k)}(x,0) = u_{i0}^{(k)} \quad x \in D_k \quad (\text{VII.1.3.9})$$

Ceci étant, nous pouvons par la suite, déterminer la progression de l'interface, en utilisant la condition cinématique

(VII.1.2.10), mise sous la forme :

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} + u_j^{(k)} \cdot \frac{\partial F(x,t)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VII.1.3.10})$$

Dans ces conditions, le problème mathématique consiste à déterminer les fonctions  $u_i^{(k)}$ ,  $p^{(k)}$  comme solutions du système des équations aux dérivées partielles (VII.1.3.1) et (VII.1.3.2) et qui remplissent les relations de raccordement (VII.1.3.3) et (VII.1.3.4) sur l'interface en mouvement, les conditions aux limites (VII.1.3.6) et (VII.1.3.7) et les conditions initiales (VII.1.3.8) et (VII.1.3.9).

L'équation  $F(x,t)$  qui décrit l'interface peut être déterminée par la suite à partir de l'équation (VII.1.3.10).

Nous allons maintenant mettre le modèle mathématique sous forme adimensionnelle : cette formulation se prête beaucoup plus aisément à l'analyse numérique et elle nous permettra de mettre en évidence les groupes adimensionnels qui caractérisent le problème.

Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous allons passer en revue critique les hypothèses, qui nous ont conduit à la formulation mathématique ci-dessus.

---

## VII.2. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE DU MODELE MATHEMATIQUE

Nous allons étudier les monômes adimensionnels, qui caractérisent le comportement dynamique du phénomène, d'une part à l'intérieur du domaine d'écoulement, et d'autre part au voisinage de l'interface. Il est évident que la géométrie particulière de la frontière du domaine fera intervenir, elle aussi, des groupes adimensionnels supplémentaires, sous forme de rapports de dimensions caractéristiques.

Les équations de NAVIER-STOKES et les conditions de raccordement des contraintes visqueuses sur l'interface, vont nous fournir les renseignements sur le rapport des forces qui règlent le développement du phénomène. Reprenons les équations (VII.1.3.1) et (VII.1.3.4). Nous avons :

$$\rho^{(k)} \left\{ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^{(k)} u_j^{(k)}) \right\} = f_i^{(k)} - \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x_i} + \mu^{(k)} \cdot \nabla^2 u_i^{(k)} \quad (\text{VII.2.1})$$

si  $x = \{x_1, x_2\} \in D_k(t)$  ,  $0 \leq t \leq T$  ,  $k = 1, 2$

$$\left( -p n_i + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) = 2 H T_s n_i \quad (\text{VII.2.2})$$

si  $x \in S(t)$  ,  $0 \leq t \leq T$

Les équations (VII.2.1) et (VII.2.2) font intervenir les paramètres du problème. Ces paramètres sont :

- les caractéristiques physiques des fluides 1 et 2

$$\rho^{(1)} , \rho^{(2)} , \mu^{(1)} , \mu^{(2)} , T_s$$

- les forces extérieures

$$f_i^{(1)}, f_i^{(2)} \quad (i = 1, 2)$$

- les fonctions inconnues du problème :

$$u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, p^{(1)}, p^{(2)} \quad (i = 1, 2)$$

- les variables

$$x = \{x_1, x_2\}, t$$

En choisissant des grandeurs de référence  $L, \tau, U, p^*, f^*$  effectuons le changement de variables adimensionnelles :

$$x' = \frac{x}{L}, t' = \frac{t}{\tau}, u_i^{(k)} = \frac{u_i^{(k)}}{U}, p^{(k)} = \frac{p^{(k)}}{p^*}, f_i^{(k)} = \frac{f_i^{(k)}}{f^*} \quad (\text{VII.2.3})$$

En omettant les primes, l'équation (VII.2.1.) devient :

$$\left\{ \frac{\rho^{(k)} \cdot U}{\tau} \right\} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + \left\{ \frac{\rho^{(k)} \cdot U^2}{L} \right\} \frac{\partial (u_i^{(k)} u_j^{(k)})}{\partial x_j} = f_i^{(k)} - \left\{ \frac{p^*}{L} \right\} \dots$$

$$\cdot \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x_i} + \left\{ \frac{\mu^{(k)} \cdot U}{L^2} \right\} \nabla^2 u_i^{(k)}$$

(VII.2.4)

Nous pouvons constater que dans les équations de Navier-Stokes (VII.2.1), la pression intervient par sa dérivée : ceci est valable pour l'écoulement d'un fluide incompressible et du point de vue physique, il traduit le fait que l'écoulement est affecté uniquement par les différences de pression. Nous pouvons donc choisir la pression de référence  $p^*$  de manière arbitraire.

Nous prenons :

$$p^* = \rho^{(1)} \cdot U^2 \quad (\text{VII.2.5})$$

ce qui permet de définir la pression adimensionnelle  $p^{(k)}$  sous la forme :

$$p^{(k)} = C_p^{(k)} = \frac{p^{(k)}}{\rho^{(1)} U^2} \quad (\text{VII.2.6})$$

où  $C_p^{(k)}$  désigne le coefficient de pression.

Nous pouvons aussi choisir le temps de référence  $\tau$  arbitrairement. Pour simplifier, nous prenons :

$$\tau = \frac{L}{U} \quad (\text{VII.2.7})$$

Quant aux forces extérieures, elles traduisent habituellement l'effet de la pesanteur sur la forme :

$$\vec{f}^{(k)} = \rho^{(k)} \cdot \vec{g} \quad (\text{VII.2.8})$$

On choisit :

$$f^* = \rho^{(1)} \cdot g \quad (\text{VII.2.9})$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

En tenant compte des définitions (VII.2.5), (VII.2.7), (VII.2.8) et (VII.2.9) nous pouvons écrire l'équation (VII.2.4) sous la forme :

$$\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial (u_i^{(k)} u_j^{(k)})}{\partial x_j} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(k)}} \cdot \frac{f_i^{(k)}}{F} - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(k)}} \cdot \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x_i} + \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(k)}} \cdot \frac{\mu^{(k)}}{\mu^{(1)}} \cdot \frac{1}{R_{e1}} \cdot \nabla^2 u_i^{(k)} \quad (\text{VII.2.10})$$

où  $F$  est le nombre de Froude :

$$F = \frac{U^2}{gL} \quad (\text{VII.2.11})$$

et  $R_{e1}$  le nombre de Reynolds, défini dans le fluide 1 :

$$R_{e1} = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{VII.2.12})$$

En introduisant le contraste des masses volumiques  $K$  et le contraste des viscosités dynamiques  $M$  sous la forme :

$$K = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \quad , \quad M = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}} \quad , \quad (\text{VII.2.13})$$

L'équation (VII.2.10) nous donne :

- fluide 1

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial (u_i^{(1)} u_j^{(1)})}{\partial x_j} = \frac{f_i^{(k)}}{F} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{R_{e1}} \nabla^2 u_i^{(1)} \quad (\text{VII.2.14})$$

- fluide 2

$$\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial (u_i^{(2)} u_j^{(2)})}{\partial x_j} = \frac{f_i^{(k)}}{KF} - \frac{1}{K} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{1}{K} \frac{M}{R_{e1}} \nabla^2 u_i^{(2)} \quad (\text{VII.2.15})$$

Les équations adimensionnelles (VII.2.14) et (VII.2.15) seront utilisées au cours de l'analyse numérique du problème.

Examinons maintenant sous forme adimensionnelle la condition de raccordement des contraintes sur l'interface.

En explicitant l'équation (VII.2.2) nous avons :

$$(\rho^{(1)} - \rho^{(2)})n_i + \mu^{(2)} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_j - \mu^{(1)} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) n_j = 2HT_s n_i$$

(VII.2.15)

Posons  $H' = H \cdot L$  la courbure moyenne adimensionnelle de l'interface, où  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

En effectuant le changement des variables réduites (VII.2.3), en omettant les primes et en tenant compte des définitions (VII.2.5) et (VII.2.13), nous pouvons mettre l'équation (VII.2.15) sous la forme adimensionnelle :

$$(\rho^{(1)} - \rho^{(2)})n_i + \frac{1}{K} \cdot \frac{M}{R_{e1}} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_j - \frac{1}{R_{e1}} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) n_j = \frac{2H}{W} n_i$$

(VII.2.16)

Dans le second membre de cette équation apparaît le nombre de Weber, sous la forme :

$$W = \frac{\rho^{(1)} L U^2}{T_s} \quad \text{(VII.2.17)}$$

Nous pouvons maintenant examiner la signification physique des nombres adimensionnels que nous avons mis en évidence.

Monôme	Interprétation	Désignation
$\frac{U^2}{gL}$	Rapport des forces d'inertie sur les forces de pesanteur	Nombre de Froude : F
$\frac{\rho^{(1)} L U^2}{T_s}$	Rapport des forces d'inertie sur les forces capillaires	Nombre de Weber : W
$\frac{UL}{\nu^{(1)}}$	Rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité	Nombre de Reynolds : $R_e$
$\frac{U\tau}{L}$	Nombre fixant l'échelle du temps du phénomène	Nombre T

Nous constatons que dans tous les monômes ci-dessus, il y a intervention des forces d'inertie. Toutefois, lorsque les vitesses de circulation sont faibles, comme en milieu poreux, c'est plutôt les forces de viscosité qui deviennent dominantes. Il serait donc utile pour les développements ultérieurs, de comparer l'action des différentes forces par rapport aux forces de viscosité.

Par exemple, le rapport entre les forces de gravité sur les forces de viscosité, peut être estimé en divisant le nombre de Reynolds par le nombre de Froude, nous trouvons le nombre adimensionnel :

$$B = \frac{\rho^{(1)} \cdot g L^2}{\mu^{(1)} \cdot U}$$

Le rapport entre les forces de viscosité sur les forces de tension interfaciale devient apparent si on divise le nombre

de Weber par le nombre de Reynolds. Il en résulte le nombre de capillarité  $C$  sous la forme :

$$C = \frac{\mu^{(1)} \cdot U}{T_s}$$

En conclusion, lorsque les forces de viscosité deviennent dominantes, nous pouvons faire appel aux nombres adimensionnels suivants :

Monôme	Interprétation	Désignation
$\frac{\rho^{(1)} \cdot g \cdot L^2}{\mu^{(1)} \cdot U}$	Rapport des forces de pesanteur sur les forces de viscosité	Nombre B
$\frac{\mu^{(1)} \cdot U}{T_s}$	Rapport des forces de viscosité sur les forces de capillarité	Nombre de capillarité : $C$
$\frac{UL}{\nu^{(1)}}$	Rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité	Nombre de Reynolds: $R_e$
$\frac{U\tau}{L}$	Nombre fixant l'échelle de temps du phénomène	Nombre T

Si on réunit maintenant l'influence de tous les paramètres adimensionnels du phénomène, nous pouvons dire que le problème consiste à déterminer par voie numérique ou expérimentale les expressions donnant les fonctions inconnues du problème :  $u_1^{(k)}/U$  et  $C_p^{(k)} = p^{(k)}/\rho U^2$  sous la forme :

$$\frac{u_i^{(k)}}{U} = \mathcal{F}_i^{(k)} \left( \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}, \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\rho^{(1)} g L^2}{\mu^{(1)} U}, \frac{\mu^{(1)} U}{T_s}, \frac{UL}{v^{(1)}}, \frac{U\tau}{L}, \text{géométrie} \right)$$

$$C_p^{(k)} = \mathcal{F}_p^{(k)} \left( \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}, \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\rho^{(1)} g L^2}{\mu^{(1)} U}, \frac{\mu^{(1)} U}{T_s}, \frac{UL}{v^{(1)}}, \frac{U\tau}{L}, \text{géométrie} \right)$$

### VII.3. CRITIQUE DE LA FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le modèle mathématique que nous venons d'exposer, peut être critiqué sur un certain nombre de points, et en particulier en ce qui concerne :

- 1./ Le comportement rhéologique de l'interface en mouvement,
- 2./ Les conditions de raccordement de l'interface sur les parois solides,
- 3./ La stabilité du déplacement de l'interface.

1./ Tout d'abord, l'hypothèse selon laquelle l'interface en mouvement se comporte comme une membrane idéale soumise à une tension uniforme est assez sommaire ; étant parfaitement justifiée pour décrire une interface en équilibre statique, elle est insuffisante pour représenter le comportement rhéologique d'une interface en accélération ou décélération.

C'est ainsi que BOUSSINESQ a introduit la notion de la viscosité de surface, afin d'étudier le mouvement de petites gouttes d'un fluide dans un autre, et en particulier pour expliquer l'écart entre la vitesse de chute mesurée et celle prévue par la théorie de RIBCYNSKI-HADAMARD [52] .

SCRIVEN (1960, [53]) a examiné le comportement dynamique d'une interface de fluides newtoniens en faisant intervenir la tension interfaciale  $T_s$ , la viscosité de dilatation de surface et la viscosité tangentielle de surface.

Comme le montre le tableau ci-dessous, il existe une analogie parfaite entre les déformations dans l'espace tridimensionnel et celles d'une surface.

Ecoulement tridimensionnel	Ecoulement surfacique
pression	tension interfaciale
dilatation cubique	viscosité de dilatation de surface
viscosité dynamique	viscosité tangentielle de surface

Etant donné qu'une interface constitue un espace Riemannien (de courbure non nulle), pour étudier le mouvement des particules fluides sur l'interface, nous devons travailler sur un système de coordonnées curvilignes et intrinsèques à la surface selon les règles du calcul tensoriel. Dans [54] nous donnons les détails du développement mathématique qui conduit à une modification de la condition de raccordement des contraintes  $T_i^{(k)}$  (voir équation (VII.1.2.19)) sous la forme :

$$T_i^{(2)} - T_i^{(1)} = 2 H T_s \cdot n_i + a^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial x^1}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial T_s}{\partial u^\beta} + \left\{ \begin{array}{l} \text{contraintes dues à la} \\ \text{dilatation et la défor-} \\ \text{mation tangentielle de} \\ \text{la surface} \end{array} \right\}$$

(VII.3.1)

où  $x^i = x^i(u^1, u^2)$  est l'équation de l'interface,  $\alpha, \beta$ , des indices muets pour désigner les coordonnées en surface,  $a^{\alpha\beta}$  le tenseur conjugué du tenseur métrique de l'interface.

La variation de la tension interfaciale, qui apparaît dans le deuxième membre de l'équation (VII.3.1), peut être due à la variation éventuelle de la température, et surtout à la compression et la dilatation de la couche moléculaire au voisinage de l'interface suivant les accélérations ou décélérations du mouvement.

La présence de contaminant agissant sur la tension interfaciale et créant des contraintes supplémentaires compliquerait davantage la formulation du problème, comme le montre LEVICH [55].

2/. Les conditions de raccordement de l'interface sur les parois solides sont liées à l'épaisseur du film en fluide mouillant qui adhère sur les parois. Comme il a été constaté par plusieurs expérimentateurs, l'épaisseur de ce film augmente en fonction du nombre adimensionnel  $\frac{\mu^{(2)} \cdot U}{T_s}$  où  $U$  est la vitesse moyenne de l'interface.

Pour les valeurs élevées du nombre  $\frac{\mu^{(2)} \cdot U}{T_s}$  (vitesse d'injection élevée ou fluide en place très visqueux) l'épaisseur du film est importante et le fluide injecté progresse de manière annulaire.

Par contre, supposons qu'une couche interfaciale d'épaisseur  $e_1$  "glisse" sur une paroi solide aux faibles nombres de capillarité  $\frac{\mu^{(2)} \cdot U}{T_s}$  (figure 59). Dans le fluide déplacé, il existe une zone au voisinage de la paroi d'épaisseur  $e_2$  où les molécules sont immobiles suivant l'hypothèse de Poiseuille, tandis que derrière le ménisque, il se forme un film d'épaisseur  $e < e_1 + e_2$ , dont le comportement rhéologique n'est pas explicite. Comme l'épaisseur de

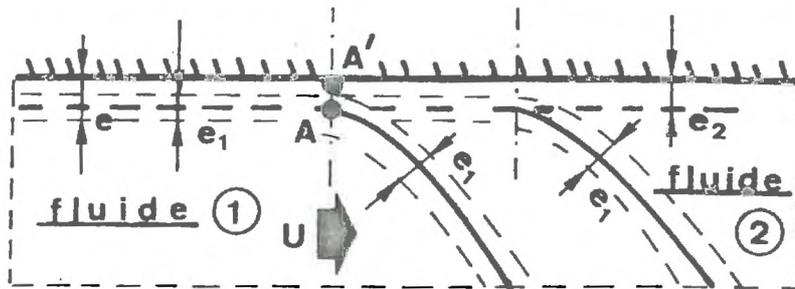


Figure 59. Raccordement du ménisque sur les parois pour faibles nombres

$$\mu^{(2)} \cdot U / T_s$$

ce film est de l'ordre de quelques microns [56], les points A et A' sont pratiquement confondus et du point de vue mathématique, il en résulte une discontinuité des vitesses au voisinage de A, entraînant un gradient de vitesse énorme dans le film. Nous reviendrons sur cette question très importante, au cours de la discussion des résultats du calcul numérique.

3./ Pour conclure la critique du modèle mathématique, on doit discuter des conditions de stabilités de l'interface en mouvement. Ce problème a été largement étudié par ARIBERT [57] à l'échelle macroscopique des milieux poreux et en modèle Hele-Shaw. Lorsque les forces de gravité n'interviennent pas, la stabilité de l'interface dépend du rapport des viscosités des deux fluides. En général, si  $\mu^{(2)} / \mu^{(1)} > 1$  l'interface est instable mais à notre avis, il existe une relation entre la longueur d'onde de la perturbation et la largeur du domaine de l'écoulement. Si la largeur du domaine est assez faible, comme dans les passages capillaires, les ménisques se déplacent de manière stable, même si  $\mu^{(2)} / \mu^{(1)} > 1$ . D'ailleurs, au cours de nos essais numériques ou expérimentaux, nous avons observé des déplacements stables.

## CHAPITRE VIII

## ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME

VIII.1. LE PROBLEME DE NAVIER-STOKES ET TRAVAUX NUMERIQUES ANTERIEURS

Le problème que nous avons formulé dans le chapitre précédent, consiste essentiellement à raccorder deux solutions des équations de NAVIER-STOKES sur une interface en mouvement. En examinant de plus près la structure du modèle mathématique, on peut se rendre compte que l'interface mise à part, plusieurs sortes de difficultés peuvent provenir de la forme des équations de NAVIER-STOKES.

Reprenons ces équations sous forme adimensionnelle, dans le cas d'un fluide homogène et incompressible. On a :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_i \quad (\text{VIII.1.1})$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.1.2})$$

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

1/. En raison du terme convectif, qui intervient dans l'équation (VIII.1.1), le problème est non linéaire. Sa structure est mixte du type hyperbolique-parabolique. Lorsque le nombre de Reynolds devient grand, le terme convectif devient prépondérant et provoque une forte variation des vitesses et des pressions près des frontières.

2/. Les équations (VIII.1.1) et (VIII.1.2) forment un système d'équations aux dérivées partielles avec comme inconnues les vitesses  $u_i$  et les pressions. Mais, si les vitesses interviennent dans les termes de convection et de diffusion, la fonction de la pression joue un rôle spécial puisqu'elle apparaît dans (VIII.1.1) uniquement pour sa dérivée.

3/. Le système (VIII.1.1), (VIII.1.2) n'est pas régulier : en effet, la forme elliptique de l'équation (VIII.1.2) montre que le système n'est pas du type de Cauchy-Covaleska.

Etant donné qu'on ne dispose pas en général de solutions "analytiques" à des problèmes non linéaires, nous nous sommes vite orientés vers l'analyse numérique qui, seule, peut nous fournir des résultats quantitatifs précis.

Un procédé classique pour aborder le problème numérique consiste à introduire la fonction de courant  $\psi$  et le tourbillon  $\omega$  selon la définition :

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \omega = -\nabla^2 \psi \quad (\text{VIII.1.3})$$

En utilisant les relations (VIII.1.3) nous pouvons faire abstraction des difficultés (2) et (3) que nous avons signalées, au prix d'une augmentation de l'ordre de l'équation aux dérivées partielles. En effet, on se rend compte facilement que l'équation de continuité (VIII.1.2) est satisfaite automatiquement par la fonction  $\psi$ , tandis qu'en éliminant le gradient de pression, nous

obtenons l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre par rapport à  $\psi$  :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = f_i + \frac{1}{R_e} \cdot \nabla^2 \omega, \quad \omega = -\nabla^2 \psi \quad (\text{VIII.1.4})$$

La solution numérique de l'équation (VIII.1.4) se heurte à des difficultés considérables surtout en ce qui concerne le traitement des conditions aux limites.

Parmi les travaux les plus importants concernant l'utilisation des variables  $\psi - \omega$  citons les noms de FROMM (1964, [58]), PEARSON (1965, [59]), HUNG et MACAGNO (1966, [60]), GREENSPAN (1968, [61]), BARRE (1968, [62]), ALEIX (1972, [63]).

Au cours de ce travail, nous nous sommes vite aperçu que la méthode  $\psi - \omega$  ne se prêtait pas à faciliter l'étude numérique de notre problème : en effet, étant donné que l'interface n'est pas une ligne de courant mais une surface de discontinuité, la traduction de la condition de raccordement des contraintes visqueuses en termes de  $\psi$  et  $\omega$  compliquait davantage le problème.

C'est pour cela que nous avons préféré travailler sur une méthode numérique faisant appel aux variables premières, telles que les vitesses et les pressions.

Depuis 1965 [64], l'équipe du laboratoire de Los Alamos en Californie, a travaillé sur la mise au point d'une méthode numérique aux différences finies, utilisant les variables  $u_i$  et  $p$  et connue comme méthode M.A.C. (Marker and Cell). Rappelons brièvement son principe : en appliquant la condition d'incompressibilité (VIII.1.2) à l'équation (VIII.1.1) on obtient l'équation de la pression :

$$\nabla^2 \cdot p = - \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \quad (\text{VIII.1.5})$$

Lorsque la pression est une solution de l'équation (VIII.1.5) nous pouvons montrer que les vitesses calculées d'après (VIII.1.1) remplissent la condition de la continuité. Autrement dit, le système des équations (VIII.1.1.) et (VIII.1.2) est équivalent au système des équations (VIII.1.1.) et (VIII.1.5). Ceci étant, l'algorithme de la méthode M.A.C. suit le cheminement suivant : l'équation (VIII.1.5) est discrétisée au niveau du temps  $t = n.\Delta t$  et les pressions  $p^n$  sont obtenues selon un processus itératif de relaxation ; les vitesses  $u_1^{n+1}$  sont par la suite calculées après discrétisation explicite de l'équation (VIII.1.1) et on passe au niveau du temps suivant.

Toutefois, au cours du calcul, les difficultés demeurent majeures, surtout pour obtenir la solution itérative de l'équation (VIII.1.5). En effet, cette équation est une équation de Poisson non linéaire, couplée avec l'équation du mouvement et surtout soumise à ces conditions aux limites du type de NEUMANN. Les conditions sur la pression sont obtenues en introduisant les conditions aux limites pour les vitesses dans l'équation dynamique (VIII.1.1.) : par exemple, sur une paroi solide  $x_1 = \text{cte}$ , la condition d'adhérence

$$u_1 = u_2, \text{ donne : } \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}. \text{ Pour exprimer sous forme discrète}$$

les conditions de NEUMANN pour la pression le long des parois, la méthode M.A.C. prévoit une série de points du maillage à l'extérieur du domaine réel d'écoulement où on détermine les vitesses par extrapolation.

A notre avis, le succès des premières versions de la méthode M.A.C. [64] tient au fait qu'elle a été utilisée pour traiter des écoulements à surface libre, sur laquelle il a été admis la condition de DIRICHLET  $p = 0$  ; en plus, la méthode devient efficace grâce à une formulation aux différences ingénieuse, faisant appel aux maillages décalés.

Pour éviter les inconvénients provenant de l'équation de la pression, l'idée de base est l'utilisation d'une itération simultanée sur les vitesses et les pressions, qui évite la discrétisation directe de l'équation (VIII.1.5).

D'autre part, le processus itératif est basé sur le modèle naturel du liquide faiblement compressible. L'idée semble apparaître pour la première fois dans les travaux de JANENKO (1966, [65]). CHORIN A.J. (1967, [66]) a proposé une méthode numérique basée sur un modèle de relaxation analogue et il a construit plusieurs algorithmes numériques d'intérêt pratique [66] [67]. D'ailleurs, sa méthode a été reprise par la suite par l'équipe de Los Alamos, dans les versions récentes de la méthode M.A.C. (1973, [68]).

En France, TEMAM R. (1969, [69], [70]) a formulé mathématiquement le problème dans le cas d'une approximation basée soit sur la méthode des pas fractionnaires [70], soit sur une perturbation du type Cauchy-Covaleska [69]; il a, par la suite, démontré la stabilité et la convergence de l'algorithme numérique.

La méthode que nous avons mis au point au cours de ce travail utilise simultanément une perturbation du type Cauchy-Covaleska et une discrétisation à pas fractionnaires. Dans ce sens, elle est liée aux travaux de TEMAM R. et de CHORIN A.J. Au cours des essais numériques, nous nous sommes aperçus que la méthode devient particulièrement efficace lorsqu'on l'associe aux maillages décalés de la méthode M.A.C. Toutefois, en ce qui concerne le traitement des conditions aux limites, nous avons évité l'introduction de points extérieurs au domaine, comme ceci a été fait selon la méthode M.A.C. Mais, à l'aide des approximations aux différences régressives ou progressives, nous avons respecté rigoureusement la géométrie du domaine.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons tout d'abord le principe de la méthode numérique que nous avons mis au point et que nous appelons méthode itérative des variables premières (I.V.P). Nous donnons ensuite les divers algorithmes numériques que nous avons expérimenté et nous montrons que l'utilisation des maillages décalés pour les vitesses et les pressions correspond à une discrétisation des lois fondamentales de conservation sous forme intégrale.

Enfin, nous complétons ce chapitre, en exposant l'extension de la méthode I.V.P. dans le cas de l'écoulement de deux fluides visqueux en contact (méthode DIPHA-I.V.P.).

## VIII.2. LA METHODE ITERATIVE DES VARIABLES PREMIERES (METHODE I.V.P.)

### VIII.2.1. Principe de la méthode

Comme nous l'avons déjà mentionné, le système des équations VIII.1.1 et VIII.1.2 n'est pas régulier à cause de la forme elliptique de l'équation (VIII.1.2). Pour le régulariser, nous associons au problème initial, le problème perturbé du type de Cauchy-Covaleska :

$$\frac{\partial u_{\epsilon i}}{\partial t} + u_{\epsilon j} \frac{\partial u_{\epsilon i}}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial x_i} + \frac{1}{R_{\epsilon}} \cdot \nabla^2 u_{\epsilon i} \quad (\text{VIII.2.1.1})$$

$$\epsilon \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\epsilon j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.2.1.2})$$

Dans ces équations, les fonctions  $u_{\epsilon i}$  et  $p_{\epsilon}$  sont les fonctions perturbées des vitesses  $u_i$  et des pressions  $p$  ;  $\epsilon$  est un nombre positif très petit. R. TEMAM (1969, [69]) a montré que pour  $\epsilon$  fixé, le problème (VIII.2.1.1), (VIII.2.1.2) a une solution unique et que lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , les fonctions  $u_{\epsilon i}$  et  $p_{\epsilon}$  tendent vers les solutions  $u_i$  et  $p$  du problème de Navier-Stokes (VIII.1.1) et (VIII.1.2).

En négligeant les forces extérieures, reprenons le système (VIII.2.1.1), (VIII.2.1.2) sous la forme :

$$\frac{\partial u_{\epsilon i}}{\partial t} = - \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial x_i} + \mathcal{L} u_{\epsilon i} \quad (\text{VIII.2.1.3})$$

$$\frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\epsilon j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.2.1.4})$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur différentiel de la forme :

$$\mathcal{L} = - u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{R_{\epsilon}} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Du point de vue physique, le système (VIII.2.1.3), (VIII.2.1.4) est basé sur le modèle du liquide faiblement compressible. Toutefois, en comparant les équations (VIII.2.1.3), (VIII.2.1.4) aux équations décrivant le mouvement d'un fluide compressible, on se rend compte qu'il s'agit d'une analogie, puisque dans l'équation dynamique (VIII.2.1.3) on ne tient pas compte de la dilatation cubique. En effet, soit  $\rho_{\epsilon}$  la masse volumique fictive du fluide compressible, qui obéit à une équation d'état de la forme :  $\rho_{\epsilon} = 1 + \epsilon p_{\epsilon}$ . L'équation (VIII.2.1.4) devient :

$$\frac{\partial \rho_{\epsilon}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\epsilon j}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.2.1.5})$$

et représente l'équation de continuité du fluide fictif. Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , la masse volumique fictive  $\rho_{\epsilon} \rightarrow 1$  et l'équation (VIII.2.1.5) tend vers l'équation de continuité d'un fluide incompressible.

Une interprétation différente du problème perturbé (VIII.2.1.3), (VIII.2.1.4) nous conduit à introduire le temps fictif  $\tau = t/\epsilon$ . En faisant ce changement de variables, nous pouvons écrire l'équation (VIII.2.1.4) sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.2.1.6})$$

Ceci revient à remplacer l'opérateur elliptique (VIII.1.2) par un opérateur parabolique, dont on suit l'évolution dans un temps fictif  $\tau$ .

On peut aussi montrer que nous pouvons obtenir des solutions du système initial (VIII.1.1) et (VIII.1.2) sans avoir nécessairement  $\epsilon \rightarrow 0$ . En effet, si  $\epsilon$  est arbitraire, il suffit de considérer la solution asymptotique de l'équation (VIII.2.1.6) lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Dans ces conditions, on satisfait l'équation de continuité VIII.1.2 du fluide incompressible et nous pouvons ainsi suivre à tout instant  $t$  réel, l'évolution de la solution du problème non stationnaire.

Ceci est très important pour traiter le problème du déplacement des interfaces, puisqu'il s'agit d'un phénomène non stationnaire.

Pour simplifier l'écriture, reprenons les équations (VIII.2.1.3) (VIII.2.1.6) en omettant l'indice  $\epsilon$ . On a :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mathcal{L}u_i \quad (\text{VIII.2.1.7})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.2.1.8})$$

Examinons maintenant le principe de la discrétisation du système (VIII.2.1.7), (VIII.2.1.8) selon la méthode I.V.P. Nous faisons appel à un schéma à pas fractionnaires 65 ; pour cela, on construit une suite de fonctions  $u_i^{n+1/2}$  ( $i = 1, 2$ ) et on remplace le système (VIII.2.1.7), (VIII.2.1.8) par les équations aux différences :

$$\frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\Delta t} = L u_i^n + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.1.9})$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\Delta t} = -G_i p^n + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.1.10})$$

$$\frac{p^{n,m+1} - p^{n,m}}{\Delta \tau} = -D u^{n+1} + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.1.11})$$

où  $\Delta t$  et  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$  indiquent les pas de temps et du maillage,  $\Delta \tau = \Delta t/\epsilon$  le pas du temps fictif,  $u_i^n, p^n$  les valeurs discrètes qui se rapprochent de la solution au temps  $t = n \Delta t$  et  $p^{n,m}$  les approximations successives de la pression  $p^n$  ; lorsque ces approximations convergent, on satisfait l'équation de continuité au temps  $(n+1) \Delta t$  ;  $L, G_i$  et  $D$  sont des opérateurs aux différences qui se rapprochent des opérateurs différentiels  $L, \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Nous constatons que l'approximation aux différences est de l'ordre de  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  et que pour le moment, nous présentons une discrétisation explicite dans le temps.

Nous donnerons les détails des équations aux différences et des algorithmes implicites, que nous pouvons utiliser, dans les paragraphes qui suivent. Mais pour le moment, examinons les fondements de la méthode I.V.P. et la signification du schéma à pas fractionnaires.

En comparant le système discrétisé (VIII.2.1.9), (VIII.2.1.10) (VIII.2.1.11), au système différentiel (VIII.2.1.7), (VIII.2.1.8), on s'aperçoit que la somme des équations (VIII.2.1.9), (VIII.2.1.10) nous conduit à une version discrète de l'équation du mouvement (VIII.2.1.7). Toutefois, la résolution numérique du problème semble plus facile puisque nous pouvons reconnaître l'équation classique de la diffusion convective sous la forme discrète (VIII.2.1.9). Evidemment, la résolution effective des équations (VIII.2.1.9), (VIII.2.1.10) et (VIII.2.1.11) séparément, peut présenter des difficultés en relation avec les conditions aux limites. Nous verrons dans le chapitre suivant, que la formulation intégrale de ces équations nous permettra d'éviter ces difficultés.

Nous pouvons désormais calculer à partir de l'équation (VIII.2.1.9) les champs des vitesses auxiliaires  $u_i^{n+1/2}$ , sous la forme :

$$u_i^{n+1/2} = u_i^n + \Delta t L u_i^n \quad (\text{VIII.2.1.12})$$

Le problème se ramène à résoudre donc le système des équations (VIII.2.1.10), (VIII.2.1.11) mis sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+1/2} - \Delta t G_i p^n \quad (\text{VIII.2.1.13})$$

$$p^{n,m+1} = p^{n,m} - \Delta \tau D u^{n+1} \quad (\text{VIII.2.1.14})$$

Si on applique l'opérateur de divergence  $D$  sur tous les membres de l'équation (VIII.2.1.13), on peut éliminer facilement  $u_i^{n+1}$  entre (VIII.2.1.13) et (VIII.2.1.14), ce qui nous donne :

$$p^{n,m+1} = p^{n,m} - \Delta \tau D u^{n+1/2} + \Delta \tau \Delta t D G_i p^n \quad (\text{VIII.2.1.15})$$

Nous constatons que l'équation (VIII.2.1.15) est un schéma itératif pour la pression  $p^n$ . Si l'itération est convergente, on peut donc en déduire  $p^n$  et en utilisant l'équation (VIII.2.1.13)

calculer le champ des vitesses  $u_i^{n+1}$ . L'algorithme numérique devient donc très souple : tout d'abord on calcule les vitesses auxiliaires d'après (VIII.2.1.12) ; puis la divergence des vitesses auxiliaires  $D u^{n+1/2}$  qu'on utilisera dans l'équation (VIII.2.1.15) pour en déduire les pressions  $p^n$  ; enfin, nous calculons les vitesses  $u_i^{n+1}$  selon l'équation (VIII.2.1.13) et on recommence le procédé en calculant de nouveau les vitesses auxiliaires.

Toutefois, la mise en oeuvre de cet algorithme peut se heurter à un certain nombre de difficultés considérables : en particulier en ce qui concerne les conditions aux limites, que l'on doit faire intervenir, pour obtenir les vitesses auxiliaires et les pressions. Toutes ces difficultés disparaissent, si on abandonne la formulation ponctuelle et donc mathématique du modèle au profit d'une formulation intégrale et donc plus naturelle selon les premiers principes de conservation.

### VIII.2.2. Discrétisation des équations sous forme intégrale et utilisation des maillages décalés

Au cours des premières expériences numériques, que nous avons effectuées, selon l'algorithme I.V.P., nous avons rencontré beaucoup de difficultés pour obtenir des solutions stables et d'une précision satisfaisante. En regardant de plus près, nous nous sommes rendu compte que les erreurs venaient principalement des conditions aux frontières, sur lesquelles l'approximation des opérateurs différentiels devenait trop compliquée.

Par contre, nous avons eu grande satisfaction en utilisant l'algorithme I.V.P. sur les maillages décalés de la méthode M.A.C. Nous avons ensuite constaté, que tous ces avantages tiennent à une

raison bien physique. En effet, la formulation aux différences sur les maillages décalés, correspond à la discrétisation des équations intégrales, que l'on obtient après l'application des principes de conservation des quantités de mouvement et de masse, dans un volume élémentaire  $\Delta\Omega$ . Les équations différentielles (VIII.1.1) et (VIII.1.2), ne sont que la limite des relations intégrales, lorsque  $\Delta\Omega \rightarrow 0$ .

Ceci étant, rappelons brièvement la formulation intégrale du problème de Navier-Stokes. Dans un volume élémentaire  $\Delta\Omega$  limité par la frontière  $\Gamma$  examinons la variation des quantités de mouvement et de masse du fluide. En suivant le mouvement du volume  $\Delta\Omega$ , la variation de ces quantités dans le temps, en absence de forces extérieures, nous donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta\Omega} (\rho u_i) d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (\text{VIII.2.2.1})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (\text{VIII.2.2.2})$$

$\frac{d}{dt}$  représente la dérivée particulaire et  $\sigma_{ij}$  le tenseur des con-

traintes lié au tenseur des déformations selon la relation :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{VIII.2.2.3})$$

Si on développe les dérivées particulières et on tient compte de la relation (VIII.2.2.3), en passant en grandeurs adimensionnelles comme dans le paragraphe (VIII.2.), pour un fluide homogène, incompressible et newtonien, les expressions (VIII.2.2.1) et (VIII.2.2.) nous donnent :

$$\int_{\Delta\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma} (u_i u_j) n_j \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} p n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma$$

(VIII.2.2.4)

$$\int_{\Gamma} u_j n_j d\Gamma = 0$$

(VIII.2.2.5)

L'équation (VIII.2.2.4) traduit l'équilibre des forces exercées sur la frontière  $\Gamma$ , tandis que la condition (VIII.2.2.5) annule le flux total de la masse qui traverse  $\Gamma$ .

Comme dans le cas de l'équation (VIII.2.1.8) perturbons maintenant la relation (VIII.2.2.5) sous la forme :

$$\int_{\Delta\Omega} \frac{\partial p}{\partial \tau} d\Omega + \int_{\Gamma} u_j n_j d\Gamma = 0 \quad \text{(VIII.2.2.6)}$$

où  $p$  est la pression et  $\tau$  un temps fictif. La raison physique qui nous conduit à introduire le premier terme dans l'équation (VIII.2.2.6) est la suivante : lorsque le flux total de la masse à travers la frontière  $\Gamma$  n'est pas nul, nous provoquons, dans un temps fictif des variations de la pression  $p$ , qui compensent les pertes et réduisent les accumulations de la masse : ainsi, si le flux de masse est positif, la pression exercée sur le volume  $\Delta\Omega$  diminue et elle augmente lorsque la quantité de masse supplémentaire entre dans ce volume. Lorsque la pression se stabilise dans le temps  $\tau$ , la condition d'incompressibilité VIII.2.2.5. est satisfaite.

Supposons maintenant, qu'en coordonnées Cartésiennes, les volumes  $\Delta\Omega$  sont arbitrairement les parallélépipèdes de l'ordre de  $O(\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3)$  que l'on peut former en traçant des plans successifs, parallèles aux axes de référence. Ces volumes représentent

un ensemble de volumes élémentaires, dont chacun englobe un paquet de molécules du fluide en mouvement. Abandonnant donc la formulation ponctuelle des lois de conservation, essayons de satisfaire les relations intégrales (VIII.2.2.4) et (VIII.2.2.6) dans chaque petit volume  $\Delta\Omega$ .

Simplifions d'abord le dernier terme de l'équation (VIII.2.2.4), qui traduit le flux des contraintes visqueuses sur la frontière  $\Gamma$ . Nous avons :

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j d\Gamma + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Gamma} u_j n_j d\Gamma$$

Compte tenu de la forme intégrale (VIII.2.2.5) de l'équation de continuité, le dernier terme de cette expression est nul. Nous pouvons donc simplifier l'équation dynamique (VIII.2.2.4) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma} p n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \left\{ - u_i u_j + \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} n_j d\Gamma$$

En regroupant les deux derniers termes de cette équation sous le signe de l'opérateur différentiel  $\mathcal{A}$ , nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma} p n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathcal{A} u_i \cdot n_j d\Gamma \quad (\text{VIII.2.2.7})$$

où :

$$\mathcal{A} u_i = \left\{ - u_j + \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} u_i \quad (\text{VIII.2.2.8})$$

En définitive, le problème numérique consiste à intégrer le système des équations de conservation des quantités de mouvement et de masse sous la forme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Gamma} p n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathcal{N} u_i \cdot n_j d\Gamma \quad (\text{VIII.2.2.9})$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial \tau} d\Omega + \int_{\Gamma} u_j n_j d\Gamma = 0 \quad (\text{VIII.2.2.10})$$

Pour simplifier la présentation des équations aux différences, supposons que l'écoulement est plan selon les directions  $x, y$ . Il est évident que la méthode peut être étendue sans aucune difficulté dans l'espace à trois dimensions.

Posons-nous désormais le problème discret de la manière suivante :

Le temps réel  $t$  est discrétisé et supposons qu'à l'instant  $t = n \Delta t$  on se donne un champ de vitesse  $u^n$  et  $v^n$  à tout point du domaine. Cherchons les pressions  $p^n$  et les vitesses  $u^{n+1}$  et  $v^{n+1}$  qui assurent la validité des relations intégrales (VIII.2.2.9) et (VIII.2.2.10). Pour mieux discrétiser les intégrales qui apparaissent dans ces équations, définissons les paramètres et les variables du problème sur le maillage décalé de la figure 60.

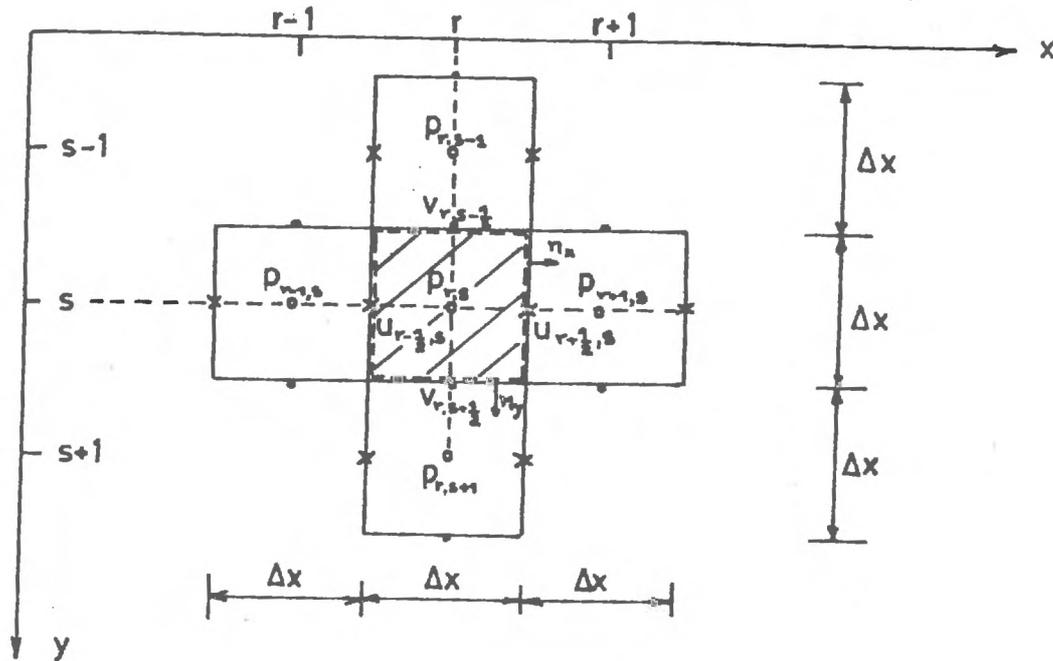


Figure 60. Définition des maillages décalés

Ce maillage est défini comme un ensemble de cellules, aux barycentres desquelles on définit la pression  $p_{rs}$  et les paramètres physiques du fluide tels que la masse volumique et la viscosité. Le long des parois de ces cellules, on définit les vitesses : les vitesses horizontales sont calées au milieu des côtés verticaux, tandis que les vitesses  $v$  au milieu des côtés horizontaux.

Pour les intégrales de surface et curvilignes, utilisons les approximations aux différences suivantes :

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y) \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (\text{VIII.2.2.11})$$

$$\int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} f(\xi) d\xi = f(x) \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.2.12})$$

Fixons maintenant notre attention sur la cellule de barycentre  $r_s$  (figure 60) et utilisons les approximations du type (VIII.2.2.11), (VIII.2.2.12), afin de discrétiser l'équation de continuité (VIII.2.2.10) sous la forme :

$$\left\{ \frac{\partial p^n}{\partial \tau} \right\}_{rs} + \frac{1}{\Delta x} \{ u_{r+1/2,s}^{n+1} - u_{r-1/2,s}^{n+1} \} + \frac{1}{\Delta x} \{ v_{r,s+1/2}^{n+1} - v_{r,s-1/2}^{n+1} \} = 0 \quad (\text{VIII.2.2.13})$$

Dans cette équation nous avons tenu compte de la pression  $p^n$  au pas de temps  $n$  et du flux des vitesses à travers la frontière de la cellule au temps  $n + 1$  : ceci provient du fait que le premier terme dans l'équation (VIII.2.2.13) est tout à fait artificiel et provient directement de la pression  $p^n$  que nous allons utiliser dans la forme discrète de l'équation dynamique. Autrement dit, nous perturbons la pression au niveau du temps  $n$  pour vérifier la continuité des vitesses au pas de temps suivant. Ceci apparaît mieux encore si on écrit l'équation (VIII.2.2.13) sous la forme :

$$p_{rs}^{n,m+1} = p_{rs}^{n,m} - \Delta \tau \{ DV^{n+1} \}_{rs} \quad (\text{VIII.2.2.14})$$

où  $\Delta \tau$  est le pas de temps fictif  $\tau = m \Delta \tau$  et  $D$  l'opérateur aux différences qui se rapproche de la divergence du vecteur vitesse  $V = \{u, v\}$ , avec une approximation de l'ordre  $O(\Delta x^2)$ .

Les composantes des vitesses qui apparaissent dans le second membre de (VIII.2.2.14) doivent satisfaire la forme discrète de l'équation intégrale du mouvement (VIII.2.2.9).

Comme dans le cas des équations aux dérivées partielles ponctuelles, décomposons la forme discrète de l'équation (VIII.2.2.9) en deux parties, selon un algorithme à pas fractionnaires : dans la première, nous ferons apparaître les termes de convection et de diffusion et dans la deuxième l'action de la pression.

Nous écrivons donc :

$$\int_{\Delta\Omega} \left\{ \frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\Delta t} \right\} d\Omega = \int_{\Gamma} \Lambda u_i^n \cdot n_j d\Gamma + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad \text{(VIII.2.2.15)}$$

$$\int_{\Delta\Omega} \left\{ \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\Delta t} \right\} d\Omega = - \int_{\Gamma} p^n n_i d\Gamma + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad \text{(VIII.2.2.16)}$$

$\Lambda$  est l'opérateur aux différences qui se rapproche de l'opérateur  $\mathcal{D}$  défini par (VIII.2.2.8) avec une approximation de l'ordre de  $\Delta x^2$ .

Evaluons maintenant la forme discrète de la projection de chaque terme des équations (VIII.2.2.15, 16) sur l'axe 0 - x.

Posons donc  $i = 1, j = 1, 2, u_1 = u, u_2 = v, n_1 = n_x, n_2 = n_y$  et fixons notre attention sur la cellule centrée sur le point  $r + 1/2, s$  (figure 61).

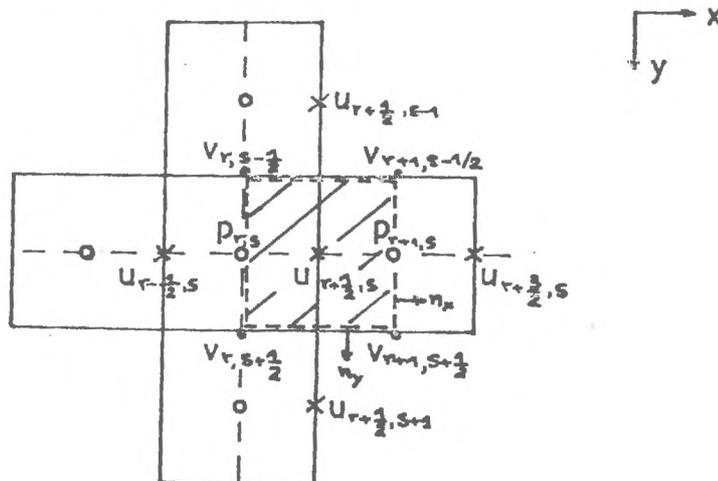


Figure 61 . Discrétisation de l'équation dynamique dans la cellule  $r + 1/2, s$

Les intégrales exprimant la variation dans le temps et centrées sur le point  $r + 1/2, s$ , nous donnent :

$$\int_{\Delta\Omega} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t} d\Omega = \left\{ \frac{u_{r+1/2,s}^{n+1/2} - u_{r+1/2,s}^n}{\Delta t} \right\} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

$$\int_{\Delta\Omega} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} d\Omega = \left\{ \frac{u_{r+1/2,s}^{n+1} - u_{r+1/2,s}^{n+1/2}}{\Delta t} \right\} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

(VIII.2.2.17)

Souvenons-nous maintenant de la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}$  (expression VIII.2.2.8) et en faisant la somme sur l'indice muet  $j = 1, 2$  pour la projection sur l'axe  $O - x$ , on a :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A} u_i n_j d\Gamma = - \int_{\Gamma} u \{ u n_x + v n_y \} d\Gamma + \frac{1}{R_e} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right\} d\Gamma$$

En tenant compte de l'équation de continuité, on peut remplacer le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}$  par  $-\frac{\partial v}{\partial y}$  et écrire la dernière relation

sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A} u_i n_j d\Gamma = - \int_{\Gamma} (u^2 n_x + u v n_y) d\Gamma + \frac{1}{R_e} \int_{\Gamma} \left( - \frac{\partial v}{\partial y} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma$$

En revenant à la cellule  $r + 1/2, s$  de la figure 61 la discrétisation des différents termes sur la frontière nous donne :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A} u_i n_j d\delta = - \{ u_{r+1,s}^2 - u_{r,s}^2 + (uv)_{r+1/2,s+1/2} - (uv)_{r+1/2,s-1/2} \} \Delta x -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{R_e} \left\{ \frac{1}{\Delta x} (v_{r+1,s+1/2} - v_{r+1,s-1/2}) \Delta x + \frac{1}{\Delta x} (v_{r,s-1/2} - v_{r,s+1/2}) \Delta x \right\} + \\
& + \frac{1}{R_e} \left\{ \frac{1}{\Delta x} (u_{r+1/2,s+1} - u_{r+1/2,s}) \Delta x + \frac{1}{\Delta x} (u_{r+1/2,s-1} - u_{r+1/2,s}) \Delta x \right\} \\
& + O(\Delta x^2) \qquad \qquad \qquad \text{(VIII.2.2.18)}
\end{aligned}$$

Selon la figure 61, les termes  $u_{r+1,s}$ ,  $u_{r,s}$ ,  $v_{r+1/2,s+1/2}$  qui apparaissent dans cette équation ne sont pas définis sur le maillage décalé. Nous pouvons les évaluer par interpolation, par exemple linéaire, qui dans la pratique a donné de bons résultats. On écrit donc :

$$u_{r,s} = \frac{1}{2} (u_{r+1/2,s} + u_{r-1/2,s})$$

$$u_{r+1,s} = \frac{1}{2} (u_{r+3/2,s} + u_{r+1/2,s})$$

$$v_{r+1/2,s+1/2} = \frac{1}{2} (v_{r,s+1/2} + v_{r+1,s+1/2})$$

La projection du terme de la pression sur l'axe 0 - x nous donne :

$$\int_{\Gamma} p n_x d\Gamma = (p_{r+1,s} - p_{r,s}) \Delta x + O(\Delta x^2) \qquad \text{(VIII.2.2.19)}$$

En utilisant maintenant les expressions (VIII.2.2.16) (VIII.2.2.17), (VIII.2.2.18) et (VIII.2.2.19) les équations (VIII.2.2.15) et (VIII.2.2.16) deviennent :

$$\begin{aligned}
 u_{r+1/2,s}^{n+1/2} = & u_{r+1/2,s}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (u^2)_{r+1,s}^n - (u^2)_{r,s}^n \} \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (uv)_{r+1/2,s+1/2}^n - (uv)_{r+1/2,s-1/2}^n \} \\
 & + \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ u_{r+1/2,s+1}^n - 2u_{r+1/2,s}^n + u_{r+1/2,s-1}^n \} \\
 & - \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ v_{r+1,s+1/2}^n - v_{r+1,s-1/2}^n + v_{r,s-1/2}^n - v_{r,s+1/2}^n \}
 \end{aligned}$$

(VIII.2.2.20)

$$u_{r+1/2,s}^{n+1} = u_{r+1/2,s}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ p_{r+1,s}^n - p_{r,s}^n \} \quad \text{(VIII.2.2.21)}$$

De manière tout à fait analogue, la forme discrète des équations (VIII.2.2.15) (VIII.2.2.16), suivant l'axe 0 - y, nous donne :

$$\begin{aligned}
 v_{r,s+1/2}^{n+1/2} = & v_{r,s+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (v^2)_{r,s+1}^n - (v^2)_{r,s}^n \} \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (uv)_{r+1/2,s+1/2}^n - (uv)_{r-1/2,s+1/2}^n \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{v_{r+1,s+1/2}^n - 2v_{r,s+1/2}^n + v_{r-1,s+1/2}^n\} \\
& - \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{u_{r+1/2,s+1}^n - u_{r-1/2,s+1}^n + u_{r-1/2,s}^n - u_{r+1/2,s}^n\}
\end{aligned}$$

(VIII.2.2.22)

$$v_{r,s+1/2}^{n+1} = v_{r,s+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{p_{r,s+1}^n - p_{r,s}^n\} \quad \text{(VIII.2.2.23)}$$

Nous sommes maintenant en mesure de décrire en détail l'algorithme numérique I.V.P. dont le principe a été présenté dans le paragraphe (VIII.2.1). En effet, les équations (VIII.2.2.20) et (VIII.2.2.22) nous permettent de calculer tout d'abord les vitesses auxiliaires  $u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1/2}$ . D'autre part, les expressions (VIII.2.2.21), (VIII.2.2.23) en liaison avec l'équation itérative de la continuité (VIII.2.2.14) nous conduisent à calculer la pression  $p^n$  et les vitesses  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ . Regroupons ces dernières équations sous la forme :

$$p_{r,s}^{n,m+1} = p_{r,s}^{n,m} - \Delta \tau (DV_{rs}^{n+1}) \quad \text{(VIII.2.2.24)}$$

$$u_{r+1/2,s}^{n+1} = u_{r+1/2,s}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{p_{r+1,s}^n - p_{r,s}^n\} \quad \text{(VIII.2.2.25)}$$

$$v_{r,s+1/2}^{n+1} = v_{r,s+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{p_{r,s+1}^n - p_{r,s}^n\} \quad \text{(VIII.2.2.26)}$$

Pour calculer les pressions  $p^n$  et les vitesses  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ , nous pouvons appliquer l'itération suivante :

a) Partant d'une première approximation des pressions  $p^{n,m}$ , utiliser les équations du type (VIII.2.2.25, 26) afin de calculer les vitesses  $u^{n+1,m+1}$ ,  $v^{n+1,m+1}$ .

b) Calculer la divergence  $Dv^{n+1,m+1}$ .

c) Utiliser l'équation (VIII.2.2.24) pour calculer le nouveau champ des pressions  $p^{n,m+1}$  et revenir à l'étape a) jusqu'au moment où les variations de la pression deviennent infiniment petites.

Comme l'a suggéré CHORIN [66], nous avons constaté que dans la pratique nous pouvons accélérer la vitesse de convergence de l'itération sur la pression en utilisant un schéma implicite du type de DUFORT-FRANKEL [71] : selon ce schéma, nous remplaçons le terme  $p_{r,s}^{n,m}$ , qui intervient dans l'approximation du gradient des pressions (VIII.2.2.25,26) par  $\frac{1}{2}(p_{r,s}^{n,m} + p_{r,s}^{n,m+1})$ . Ecrivons donc

les équations du type (VIII.2.2.25, 26) pour les quatre côtés de la cellule  $rs$ . Nous aurons :

$$u_{r+1/2,s}^{n+1,m+1} = u_{r+1/2,s}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ p_{r+1,s}^{n,m} - \frac{1}{2} (p_{r,s}^{n,m} + p_{r,s}^{n,m+1}) \right\}$$

$$u_{r-1/2,s}^{n+1,m+1} = u_{r-1/2,s}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (p_{r,s}^{n,m} + p_{r,s}^{n,m+1}) - p_{r-1,s}^{n,m} \right\}$$

$$v_{r,s+1/2}^{n+1,m+1} = v_{r,s+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ p_{r,s+1}^{n,m} - \frac{1}{2} (p_{r,s}^{n,m} + p_{r,s}^{n,m+1}) \right\}$$

$$v_{r,s-1/2}^{n+1,m+1} = v_{r,s-1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (p_{r,s}^{n,m} + p_{r,s}^{n,m+1}) - p_{r,s-1}^{n,m} \right\}$$

A partir de ces expressions, nous pouvons calculer maintenant la divergence  $DV^{n+1,m+1}$  et en introduisant son expression dans l'équation (VIII.2.2.24), on aboutit à l'expression :

$$p_{r,s}^{n,m+1} = \frac{\alpha}{1+2\alpha} \left\{ p_{r-1,s}^{n,m} + p_{r,s-1}^{n,m} + p_{r+1,s}^{n,m} + p_{r,s+1}^{n,m} \right\} + \frac{1-2\alpha}{1+2\alpha} p_{r,s}^m - \frac{\Delta\tau}{1+2\alpha} (D V^{n+1/2})_{rs}$$

(VIII.2.2.27)

où  $\alpha = \frac{\Delta\tau \cdot \Delta t}{\Delta x^2}$  et  $DV^{n+1/2}$  la divergence des vitesses auxiliaires.

L'équation (VIII.2.2.27) représente une forme développée de l'équation (VIII.2.1.15) et permet d'obtenir de manière itérative le champ des pressions  $p^n$ . En effet, si l'itération est convergente, pour un nombre entier  $l > 0$  et  $\delta$  infiniment petit, nous aurons :

$$\max_{r,s} |p_{r,s}^{n,l+1} - p_{r,s}^{n,l}| \leq \delta \quad \text{(VIII.2.2.28)}$$

auquel cas nous pouvons prendre :

$$p_{r,s}^n = p_{r,s}^{n,l+1} + O(\delta)$$

Si nous examinons de plus près la structure de l'équation (VIII.2.2.27), on se rend compte qu'elle représente une approximation aux différences de l'équation de Poisson (VIII.1.5). En effet, en choisissant  $\alpha = 1$ , on peut faire apparaître l'approximation aux différences de l'opérateur laplacien  $\nabla^2 p$ . Apparemment

donc, la méthode I.V.P. conduit uniquement à un schéma itératif de l'équation de la pression (VIII.1.5), où le coefficient  $\alpha$ , lié au pas du temps fictif  $\Delta\tau$ , jouerait le rôle d'un coefficient de surrelaxation. Si cela était vrai, cet avantage serait très secondaire pour justifier les développements de la méthode.

En fait, la discrétisation des relations intégrales et la perturbation du type de Cauchy-Covaleska sur l'équation de la continuité, trouvent leur justification, comme nous allons le voir dans le traitement des conditions aux limites. Cette question est très importante dans la réalité et au cours de nos essais, nous avons constaté que des algorithmes numériques stables deviennent parfois instables à cause d'une approximation incohérente des conditions aux limites.

#### VIII.2.2.a. Traitement des conditions aux limites

Pour la méthode I.V.P., les conditions aux limites peuvent être formulées de manière naturelle. Supposons par exemple comme c'est le plus souvent le cas, que le domaine est limité par des frontières sur lesquelles nous connaissons d'avance la distribution des vitesses. Pour simplifier, supposons que le maillage est parfaitement adapté à la frontière, qui est composée ainsi par des plan parallèles aux axes de coordonnées. Cette restriction peut apparaître importante pour les problèmes pratiques, où la géométrie des limites est en général compliquée ; néanmoins, on peut toujours en principe, par des transformations conformes, ramener de tels domaines dans un rectangle. Examinons les équations aux différences pour la cellule  $(r,2)$  près de la paroi  $y = 0$  (figure 62).

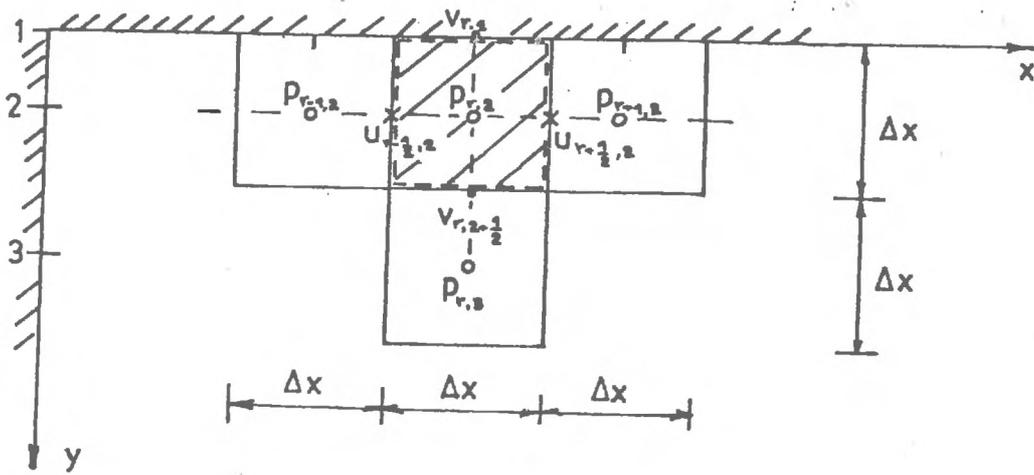


Figure 62.

Nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$p_{r,2}^{n,m+1} = p_{r,2}^{n,m} - \Delta\tau \{DV^{n+1,m+1}\}_{r,2} \quad (\text{VIII.2.2.a.1})$$

$$u_{r+1/2,2}^{n+1,m+1} = u_{r+1/2,2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ p_{r+1,2}^{n,m} - \frac{1}{2} (p_{r,2}^{n,m} + p_{r,2}^{n,m+1}) \right\} \quad (\text{VIII.2.2.a.2})$$

$$u_{r-1/2,2}^{n+1,m+1} = u_{r-1/2,2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (p_{r,2}^{n,m} + p_{r,2}^{n,m+1}) - p_{r-1,2}^{n,m} \right\} \quad (\text{VIII.2.2.a.3})$$

$$v_{r,1}^{n+1,m+1} = v_{r,1}^{n+1} \equiv \text{donnée} \quad (\text{VIII.2.2.a.4})$$

$$v_{r,2+1/2}^{n+1,m+1} = v_{r,2+1/2}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ p_{r,3}^{n,m} - \frac{1}{2} (p_{r,2}^{n,m} + p_{r,2}^{n,m+1}) \right\} \quad (\text{VIII.2.2.a.5})$$

Combinant les équations (VIII.2.2.a.1,2,3,4,5) on trouve :

$$p_{r,2}^{n,m+1} = \frac{1 - 1,5\alpha}{1 + 1,5\alpha} p_{r,2}^{n,m} + \frac{\alpha}{1 + 1,5\alpha} (p_{r+1,2}^{n,m} + p_{r-1,2}^{n,m} + p_{r,3}^{n,m}) - \frac{\Delta\tau}{1 + 1,5\alpha} (DV^{n+1/2})_{r,2} \quad (\text{VIII.2.2.a.6})$$

Pour simplifier l'écriture dans l'expression de  $DV^{n+1/2}$ , la vitesse  $v_{r,1}^{n+1/2}$  sur la paroi est interprétée comme la vitesse à la limite  $v_{r,1}^{n+1}$ , connue d'avance.

Lorsque la cellule se trouve au voisinage de deux parois limites (figure 63), l'équation (VIII.2.2.a.6) est légèrement modifiée.

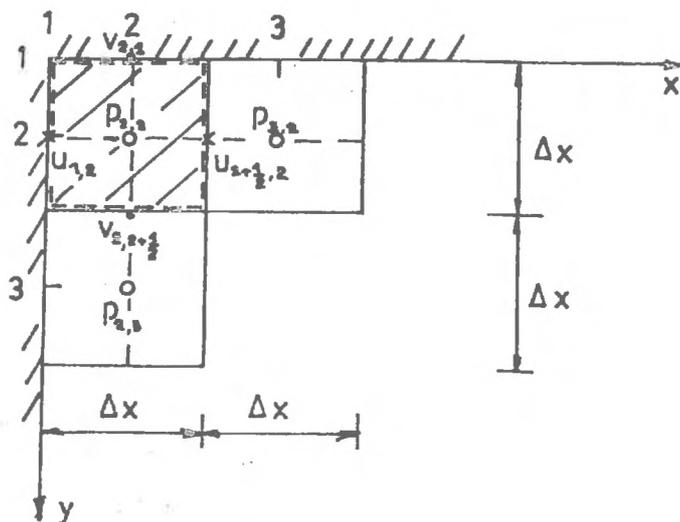


Figure 63.

En reprenant le calcul, on trouve :

$$p_{2,2}^{n,m+1} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} p_{2,2}^{n,m} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} (p_{3,2}^{n,m} + p_{2,3}^{n,m}) - \frac{\Delta\tau}{1 + \alpha} (DV^{n+1/2})_{2,2}$$

(VIII.2.2.a.7)

Dans cette expression, l'écriture a été simplifiée en confondant sur les limites les vitesses  $u_{1,2}^{n+1}$ ,  $v_{2,1}^{n+1}$  qui sont connues aux vitesses auxiliaires  $u_{1,2}^{n+1/2}$ ,  $v_{2,1}^{n+1/2}$ , qui entrent dans le terme  $(DV^{n+1/2})_{2,2}$ .

Les vitesses auxiliaires  $v^{n+1/2}$ , qui apparaissent dans les équations (VIII.2.2.a.6), (VIII.2.2.a.7) peuvent être calculées d'après les expressions (VIII.2.2.20) (VIII.2.2.22) en modifiant l'approximation aux différences des termes de diffusion.

Par exemple, dans le cas de la figure 62, nous pouvons calculer la dérivée des vitesses  $u$  au point  $(r+1/2,1)$ , en utilisant une approximation aux différences progressives de l'ordre de  $\Delta x^2$ . Nous écrirons donc :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{r+1/2,1} = \frac{1}{3 \Delta x} \{-8 u_{r+1/2,1} + 9 u_{r+1/2,2} - u_{r+1/2,3}\} + O(\Delta x^2)$$

(VIII.2.2.a.8)

A l'aide des expressions de la forme (VIII.2.2.a.8) nous pouvons utiliser directement la distribution des vitesses, connues d'avance sur la frontière ; ceci nous dispense de l'introduction de points du maillage à l'extérieur du domaine comme dans le cas de la méthode M.A.C.

D'une manière générale, nous pouvons donc conclure que l'utilisation des expressions (VIII.2.2.a.6) (VIII.2.2.a.7) et des opérateurs aux différences progressifs ou régressifs rend le traitement des conditions aux limites souple et consistant, ce qui représente beaucoup d'avantages sur la stabilité du calcul.

Récapitulons donc maintenant l'algorithme complet de la solution numérique :

a) Connaissant les vitesses  $u^n$ ,  $v^n$ , on calcule à l'aide des expressions (VIII.2.2.20), (VIII.2.2.22) les vitesses auxiliaires

$u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1/2}$  sur tous les points situés à l'intérieur du domaine ; en utilisant des approximations aux différences progressives ou régressives du type (VIII.2.2.a.8) nous calculons les vitesses auxiliaires au voisinage des limites.

b) On calcule la divergence des vitesses auxiliaires à tout point. Sur les limites, d'après la convention utilisée dans les formules (VIII.2.2.a.6, 7), au lieu des vitesses auxiliaires, nous utilisons les vitesses prescrites  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ .

c) Nous faisons appel aux formules d'itération (VIII.2.2.27), (VIII.2.2.a.6,7) pour calculer les pressions à tout point du domaine et au voisinage des limites. L'itération s'arrête lorsque le critère de convergence (VIII.2.2.28) est satisfait.

d) Les vitesses  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  sont calculées d'après les formules (VIII.2.2.21) (VIII.2.2.23).

Il est évident que l'utilisation des maillages décalés nous conduit à calculer la pression, à une distance par rapport à la paroi égale au demi pas du maillage. Il est par la suite, facile d'obtenir la pression sur la frontière par extrapolation. Par exemple, dans le cas de la figure 62, par extrapolation linéaire, nous aurons :

$$p_{i,1} = \frac{1}{2} (3 p_{i,2} - p_{i,3})$$

Ayant formulé le problème aux différences, la première question qu'on peut se poser concerne le choix du pas de temps  $\Delta t$  et du pas de maillage  $\Delta x$ , qui conduisent, pour un nombre de Reynolds donné, à un calcul stable.

Nous examinerons la question de stabilité numérique, dans le paragraphe VIII.4, où nous ferons le point sur l'ensemble des algorithmes numériques, liés à la méthode de base I.V.P. Ces

algorithmes peuvent être implicites et nous allons voir tout de suite qu'ils présentent un intérêt pratique considérable.

### VIII.2.3. Schémas implicites

La méthode I.V.P. que nous venons d'exposer, opère en deux temps : tout d'abord en faisant abstraction de la pression, elle définit un champ de vitesses auxiliaires  $V^{n+1/2}$ , d'après l'équation non linéaire de la diffusion convective (équation VIII.2.1.12). Vient ensuite la détermination de la fonction de la pression, qui permet de satisfaire la continuité (équation VIII.2.1.14) et de corriger les vitesses au pas de temps suivant (équation (VIII.2.1.13).

Comme nous pouvons le constater, la définition des vitesses auxiliaires d'après les équations aux différences VIII.2.2.20 et VIII.2.2.22 suit un schéma explicite dans le temps. Ceci peut imposer un temps effectif de calcul important, surtout lorsque le nombre de Reynolds est faible. En effet, dans ce cas, les termes de diffusion deviennent prépondérants et le pas de temps  $\Delta t$  doit être choisi faible, pour empêcher la propagation d'instabilités numériques.

Nous nous sommes donc très vite orientés vers l'utilisation de schémas implicites, qui permettent par extrapolation d'exprimer les termes de diffusion au pas de temps suivant. Les schémas implicites les plus efficaces pour leurs applications sont les schémas des directions alternées (Peaceman-Rachford) [72], et les schémas itératifs de surrelaxation.

Au cours de ce travail, nous avons expérimenté une variante de la méthode des directions alternées, analysée par SAMARSKII (1962, [73]) et reprise par CHORIN (1967, [66]). TEMAM (1969, [70]) a montré la stabilité et la convergence de l'algorithme numérique.

Le principe de la méthode consiste à désintégrer l'opérateur  $\mathcal{L}$ , qui apparaît dans l'équation (VIII.2.1.7) selon les directions des axes des coordonnées. Dans ce sens, elle constitue un algorithme à pas fractionnaires.

Reprenons le système des équations (VIII.2.1.7), (VIII.2.1.8) et écrivons l'opérateur  $\mathcal{L}$  sous la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

où 
$$\mathcal{L}_1 = -u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \mathcal{L}_2 = -u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Construisons maintenant une suite de fonctions  $u_i^{n+k/3}$ ,  $k = 1, 2, 3$  qui vérifient les équations aux différences :

$$\frac{u_i^{n+1/3} - u_i^n}{\Delta t} = \Lambda_1 u_i^{n+1/3} \quad (\text{VIII.2.3.1})$$

$$\frac{u_i^{n+2/3} - u_i^{n+1/3}}{\Delta t} = \Lambda_2 u_i^{n+2/3} \quad (\text{VIII.2.3.2})$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+2/3}}{\Delta t} = -G_i p^{n+1} \quad (\text{VIII.2.3.3})$$

Il est évident qu'en faisant la somme des équations (VIII.2.3.1) et (VIII.2.3.2) nous obtenons un schéma implicite aux différences qui correspond à l'équation (VIII.2.1.9). Si on fait la somme des trois équations ci-dessus, nous trouvons :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -G_i p^{n+1} + \Lambda_1 u_i^{n+1/3} + \Lambda_2 u_i^{n+2/3} \quad (\text{VIII.2.3.4})$$

Cette équation représente une discrétisation aux différences implicite de l'équation dynamique (VIII.2.1.7). Les vitesses intermédiaires  $u_i^{n+1/3}$ ,  $u_i^{n+2/3}$  obéissent aux équations (VIII.2.3.1) (VIII.2.3.2) et les opérateurs aux différences  $G_1$ ,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  sont des approximations du second ordre par rapport à  $\Delta x$  et du premier ordre par rapport à  $\Delta t$ . Nous pouvons donc écrire :

$$G_i p^{n+1} = G_i p^n + O(\Delta t) = \frac{\partial p^n}{\partial t} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\Lambda_k u_i^{n+k/3} = \Lambda_k u_i^n + O(\Delta t) = \mathcal{L}_k u_i^n + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad k = 1, 2$$

Si on choisit un pas de temps  $\Delta t = O(\Delta x^2)$  le schéma global aux différences constitue une approximation du second ordre par rapport à  $\Delta x$ .

Une question très importante qui se pose maintenant est la consistance de l'approximation aux différences (VIII.2.3.1), (VIII.2.3.2), (VIII.2.3.3). Un schéma aux différences est dit consistant, lorsque pour  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendant vers zéro, l'approximation aux différences tend vers le système initial aux dérivées partielles. Cette condition est essentielle, puisque si elle n'est pas assurée, on peut obtenir de solutions aux différences stables, mais qui convergent vers la solution d'une autre équation différentielle.

Vérifions donc la consistance du schéma (VIII.2.3.1.,2,3) avec l'équation aux dérivées partielles (VIII.2.1.7). En éliminant les vitesses intermédiaires entre les équations (VIII.2.3.1,2,3) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = & -G_i p^{n+1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2) u_i^{n+1} - \Delta t \{ \Lambda_1 \Lambda_2 (u_i^{n+1} - u_i^n) + \\ & + \Lambda_1 G_i p^{n+1} + \Lambda_2 G_i p^{n+1} \} + \Delta t^2 \Lambda_1 \Lambda_2 G_i p^{n+1} \end{aligned}$$

(VIII.2.3.5)

Nous constatons que lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  l'équation (VIII.2.3.5) tend vers une limite qui est l'équation différentielle (VIII.2.1.7)

Le schéma (VIII.2.3.1), (VIII.2.3.2), (VIII.2.3.3) peut être incorporé très facilement dans la méthode I.V.P. En effet, il suffit d'obtenir d'abord les vitesses intermédiaires  $u_i^{n+1/3}$ ,  $u_i^{n+2/3}$  à l'aide des équations (VIII.2.3.1), (VIII.2.3.2) et combiner par la suite, l'équation (VIII.2.3.3) avec l'équation perturbée de la continuité (VIII.2.2.13) exactement comme nous l'avons examiné pour la méthode I.V.P.

L'obtention des vitesses intermédiaires à l'aide des équations (VIII.2.3.1) (VIII.2.3.2) ne constitue pas un problème difficile. En effet, nous pouvons remarquer que chacune de ces équations comprend des dérivées selon une direction seulement : ceci nous conduit à des systèmes d'équations algébriques dont les matrices sont tridiagonales.

Pour mieux montrer le processus du calcul, reprenons les équations (VIII.2.3.1), (VIII.2.3.2) sous la forme suivante :

$$(I - \Delta t \Lambda_1) u_i^{n+1/3} = u_i^n \quad (\text{VIII.2.3.6})$$

$$(I - \Delta t \Lambda_2) u_i^{n+2/3} = u_i^{n+1/3} \quad (\text{VIII.2.3.7})$$

Afin d'aboutir à un système d'équations algébriques linéaires, introduisons une approximation de l'ordre de  $\Delta t$  dans le terme convectif, et prenons :

$$\Lambda_1 u_i^{n+1/3} = -u_1^n \cdot G_1 u_i^{n+1/3} + \frac{1}{R_e} \Delta_1^2 u_i^{n+1/3} + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.3.8})$$

$$\Lambda_2 u_i^{n+2/3} = -u_2^{n+1/3} \cdot G_2 u_i^{n+2/3} + \frac{1}{R_e} \Delta_2^2 u_i^{n+2/3} + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.3.9})$$

où  $G_1$ ,  $G_2$  sont des approximations aux différences de l'ordre de  $O(\Delta x^2)$  pour les dérivées premières et  $\Delta_1^2$ ,  $\Delta_2^2$  pour les dérivées secondes.

Par exemple dans un maillage à pas homogène  $\Delta x$ , au point  $x_1 = r \Delta x$ ,  $x_2 = s \Delta x$  on aura :

$$(\Delta_1 u_i^{n+1/3})_{r,s} = \frac{1}{2\Delta x} \{u_{i(r+1,s)}^{n+1/3} - u_{i(r-1,s)}^{n+1/3}\} + O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.2.3.10})$$

$$(\Delta_1^2 u_i^{n+1/3})_{r,s} = \frac{1}{\Delta x^2} \{u_{i(r+1,s)}^{n+1/3} - 2u_{i(r,s)}^{n+1/3} + u_{i(r-1,s)}^{n+1/3}\} + O(\Delta x^2)$$

(VIII.2.3.11)

En développant maintenant les opérateurs aux différences  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  dans les équations (VIII.2.3.6) et (VIII.2.3.7), nous arrivons aux équations aux différences :

$$-\left\{\frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot u_{1(r,s)}^n + \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2}\right\} u_{i(r-1,s)}^{n+1/3} + \left\{1 + 2 \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2}\right\} u_{i(r,s)}^{n+1/3} -$$

$$- \left\{-\frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot u_{1(r,s)}^n + \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2}\right\} u_{i(r+1,s)}^{n+1/3} = u_{i(r,s)}^n$$

(i = 1, 2)

(VIII.2.3.12)

$$-\left\{\frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot u_{2(r,s)}^n + \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2}\right\} u_{i(r,s-1)}^{n+2/3} + \left\{1 + \frac{2\Delta t}{R_e \Delta x^2}\right\} u_{i(r,s)}^{n+2/3} -$$

$$- \left\{-\frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot u_{2(r,s)}^{n+1/3} + \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2}\right\} u_{i(r,s+1)}^{n+2/3} = u_{i(r,s)}^{n+1/3}$$

(i = 1, 2)

(VIII.2.3.13)

Chacune de ces équations conduit pour  $i = 1, 2$  à deux systèmes d'équations algébriques selon la direction de l'axe 0-1 et 0-2. Les propriétés de ces systèmes peuvent être mises en évidence, si nous écri-

vons les équations aux différences ci-dessus, sous la forme générale :

$$-A_k X_{k-1} + B_k X_k - C_k X_{k+1} = D_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{VIII.2.3.14})$$

où  $N$  est le nombre total des noeuds du maillage selon la direction considérée. Si nous notons  $U_k X$  la forme matricielle du premier membre de l'équation (VIII.2.3.14), on se rend compte que la matrice  $U_k$  est une matrice tridiagonale. L'inversion d'un tel système peut être rapide et efficace, si on utilise un algorithme direct, issu d'une modification de l'algorithme de l'élimination Gaussienne [72].

Il reste encore à préciser les conditions aux limites sur  $u_i^{n+1/3}$ ,  $u_i^{n+2/3}$  qui sont nécessaires pour obtenir la solution effective du système des équations linéaires. En effet, examinons en détail le système qui résulte de l'équation (VIII.2.3.6) (selon la direction 0-1); nous devons connaître les vitesses intermédiaires  $u_i^{n+1/3}$  sur les frontières  $\Gamma_2$ , perpendiculaires à l'axe 0-1. Evidemment, on peut penser que connaissant à tout moment les vitesses  $u_i$  sur la frontière on pourrait prendre :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1/3} &= u_i^n + O(\Delta t) \\ &= u_i^{n+1} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.3.15})$$

Ou bien, pour s'approcher de la forme de l'équation (VIII.2.3.6), inverser cette relation selon un algorithme explicite de la forme :

$$u_i^{n+1/3} = (I + \Delta t \cdot \Lambda_1) u_i^n + O(\Delta t) \quad (\text{VIII.2.3.16})$$

Toutefois, les approximations (VIII.2.3.15) (VIII.2.3.16) ne respectent pas la consistance du schéma général et peuvent conduire à des erreurs importantes près de la frontière.

Nous pouvons respecter la consistance du schéma si on suppose pour le moment que les vitesses  $u_i^{n+2/3}$  sont données sur la frontière  $\Gamma_2$ ; dans ce cas, les vitesses  $u_i^{n+1/3}$  peuvent être obtenues selon le schéma aux différences général.

En effet, en introduisant l'opérateur  $\Lambda_2$  d'après l'expression (VIII.2.3.9) dans l'équation (VIII.2.3.7), on a :

$$u_i^{n+2/3} = u_i^{n+1/3} - \Delta t u_2^{n+1/3} (G_2 u_i^{n+2/3}) + \frac{\Delta t}{R_e} \Delta_2^2 u_i^{n+2/3} \quad (\text{VIII.2.3.17})$$

En appliquant cette relation sur la frontière  $\Gamma_2$  ( $i = 2$ ), on obtient :

$$u_2^{n+1/3} = \frac{u_2^{n+2/3} - \Delta t/R_e \cdot \Delta_2^2 u_2^{n+2/3}}{1 - \Delta t \cdot G_2 u_2^{n+2/3}} \quad (\text{VIII.2.3.18})$$

Connaissant donc  $u_2^{n+2/3}$  sur  $\Gamma_2$  on peut déduire  $u_2^{n+1/3}$  (sauf aux coins). Les vitesses  $u_1^{n+1/3}$  peuvent par la suite être obtenues en utilisant la relation (VIII.2.3.17). En effet, on trouve :

$$u_1^{n+1/3} = u_1^{n+2/3} + \Delta t u_2^{n+1/3} (G_2 u_1^{n+2/3}) - \frac{\Delta t}{R_e} \Delta_2^2 u_1^{n+2/3}$$

La détermination maintenant des vitesses  $u_i^{n+2/3}$  sur  $\Gamma_2$  pose des problèmes aigus. On peut évidemment ne pas respecter la consistance du schéma en prenant :

$$\begin{aligned} u_i^{n+2/3} &= u_i^n + O(\Delta t) \\ &= u_i^{n+1} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.3.19})$$

ou encore à partir de (VIII.2.3.7), l'approximation :

$$u_i^{n+2/3} = (I + \Delta t \cdot \Lambda_2) u_i^n + O(\Delta t) \quad (\text{VIII.2.3.20})$$

Mais si on veut respecter le schéma général, nous sommes obligés de recourir à l'équation (VIII.2.3.3), qui nous donne :

$$u_i^{n+2/3} = u_i^{n+1} + \Delta t G_i p^{n+1} \quad (\text{VIII.2.3.21})$$

Cette condition étant implicite, nous pouvons envisager deux procédés d'approximation : ou bien approcher (VIII.2.3.21) par itération ou la remplacer par la condition explicite :

$$u_i^{n+2/3} = u_i^{n+1} + \Delta t G_i p^n \quad (\text{VIII.2.3.22})$$

Nous donnerons les détails sur l'influence des conditions aux limites intermédiaires dans le chapitre suivant sur un exemple précis de calcul. Mais déjà, nous pouvons dire que la difficulté d'assurer la consistance du schéma sur la frontière, constitue l'inconvénient principal de la méthode.

Nous avons pensé nous affranchir des difficultés causées par les conditions aux limites des vitesses intermédiaires en adoptant un procédé implicite de surrelaxation. En effet, on peut résoudre l'équation qui donne les vitesses auxiliaires  $u_i^{n+1/2}$ , en adoptant un paramètre de pondération faisant intervenir les vitesses  $u_i$  aux niveaux de temps  $n$  et  $n + 1/2$ . Notre objectif étant d'obtenir des solutions économiques aux faibles nombres de Reynolds, nous avons introduit ce coefficient de pondération uniquement pour les termes de diffusion. Au cours des expériences numériques, nous avons constaté que dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux seul, le schéma implicite n'était guère plus économique que le schéma direct de la méthode I.V.P. : ceci tient au fait que le gain obtenu en augmentant le pas du temps  $\Delta t$ , est compensé par le temps de calcul supplémentaire, qui nécessite l'itération sur les vitesses. D'ailleurs, lorsque le nombre de Reynolds est faible, le temps nécessaire pour obtenir le régime permanent est réduit, ce qui justifie l'efficacité de la méthode I.V.P. directe.

Toutefois, le schéma implicite de surrelaxation s'est révélé particulièrement efficace dans le cas du déplacement des interfaces. En effet, dans ces conditions et lorsque le nombre de Reynolds est faible, on peut suivre le déplacement du front avec un pas  $\Delta t$  beaucoup plus élevé que le pas nécessaire, pour assurer la stabilité du schéma explicite.

Référons-nous à la figure 61 et modifions le schéma aux différences (VIII.2.2.20) en introduisant le coefficient de pondération  $0 \leq \lambda \leq 1$ . On a :

$$\begin{aligned}
 u_{r+1/2,s}^{n+1/2} = & u_{r+1/2,s}^n + Q_1^n + \frac{\lambda \Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ u_{r+1/2,s+1}^{n+1/2} - 2 u_{r+1/2,s}^{n+1/2} + u_{r+1/2,s-1}^{n+1/2} \} \\
 & + \frac{(1-\lambda)\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ u_{r+1/2,s+1}^n - 2 u_{r+1/2,s}^n + u_{r+1/2,s-1}^n \} \\
 & - \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ v_{r+1,s+1/2}^n - v_{r+1,s-1/2}^{n+1/2} + v_{r,s-1/2}^{n+1/2} - \\
 & - v_{r,s+1/2}^n \} \qquad \qquad \qquad \text{(VIII.2.3.23)}
 \end{aligned}$$

où  $Q_1^n$  représente l'approximation aux différences du terme de convection par rapport à l'axe 0-1.

De manière analogue, partant de l'équation (VIII.2.2.22) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 v_{r,s+1/2}^{n+1/2} = & v_{r,s+1/2}^n + Q_2^n + \frac{\lambda \Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ v_{r+1,s+1/2}^{n+1/2} - 2 v_{r,s+1/2}^{n+1/2} + v_{r-1,s+1/2}^{n+1/2} \} \\
 & + \frac{(1-\lambda)\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ v_{r+1,s+1/2}^n - 2 v_{r,s+1/2}^n + v_{r-1,s+1/2}^n \} \\
 & - \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \{ u_{r+1/2,s+1}^n - u_{r-1/2,s+1}^{n+1/2} + u_{r-1/2,s}^{n+1/2} - u_{r+1/2,s}^n \} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{(VIII.2.3.24)}
 \end{aligned}$$

Nous constatons que les équations (VIII.2.3.23) (VIII.2.3.24) peuvent nous amener à deux systèmes d'équations algébriques linéaires couplées entre elles, avec comme inconnues les vitesses  $u^{n+1/2}$  et  $v^{n+1/2}$ . Leur résolution peut devenir efficace en adoptant la méthode

itérative de Gauss-Seidel. Pour améliorer la vitesse de convergence de l'itération, on peut introduire le paramètre  $\omega$  d'accélération de convergence. Si  $\phi^{(k+1)}$  représente la valeur de  $u^{n+1/2}$  ou de  $v^{n+1/2}$  à la  $(k+1)$ ème itération, on prend par extrapolation :

$$\phi^{(k+1)} = \phi^{(k)} + \omega (\tilde{\phi}^{(k+1)} - \phi^{(k)}) \quad (\text{VIII.2.3.25})$$

où  $\tilde{\phi}^{(k+1)}$  est donné selon les expressions (VIII.2.3.23), (VIII.2.3.24).

En ce qui concerne la résolution du système, on a parcouru le domaine ligne par ligne et à chaque noeud du maillage, on a calculé la vitesse  $u^{n+1/2}$ , puis la vitesse  $v^{n+1/2}$ . Sur la frontière, nous avons calculé les vitesses  $u_i^{n+1/2}$  en utilisant en général l'expression (VIII.2.3.22). Nous discuterons sur la détermination du coefficient de surrelaxation optimal dans le paragraphe (VIII.4.1) où il sera question de la stabilité de la méthode numérique.

Il est temps maintenant de revenir au problème physique, que nous nous sommes fixé au début de cette étude, à savoir l'écoulement de deux fluides visqueux en contact.

Rapportons-nous au chapitre VII, où nous avons analysé le modèle mathématique du problème. En combinant les avantages de la méthode I.V.P. et la formulation intégrale des premiers principes de conservation de la masse et des quantités du mouvement, nous allons exposer la méthode numérique I.V.P. en écoulement diphasique (DIPHA-I.V.P.).

### VIII.3. LA METHODE ITERATIVE DES VARIABLES PREMIERES EN ECOULEMENT DIPHASIQUE (METHODE DIPHA-I.V.P)

Le modèle mathématique que nous avons examiné dans le chapitre VII, fait apparaître les propriétés de l'interface séparant deux fluides immiscibles. En particulier, il met en évidence le rôle singulier de l'interface en tant que frontière mobile déli-

mitant deux fluides en mouvement. La brusque discontinuité des propriétés physiques de ces fluides, conduit aux conditions de raccordement des contraintes visqueuses.

Une telle présentation du problème mathématique, peut nous amener tout naturellement à considérer l'interface comme une couche limite, sur laquelle viennent se raccorder deux solutions des équations de Navier-Stokes.

Du point de vue mathématique, le problème est bien posé. En effet, compte tenu du fait que les équations de Navier-Stokes sont de second ordre, sur la frontière commune, il reste à déterminer quatre constantes. Ceci est tout à fait compatible avec les quatre conditions de raccordement, deux pour les vitesses et deux pour les contraintes.

Du point de vue numérique, nous avons essayé tout au début de ce travail, d'exprimer sous forme de différences, les équations de raccordement des contraintes au voisinage de l'interface. Toutefois, étant donné que le maillage n'est pas adapté sur l'interface, les approximations aux différences étaient trop compliquées. Par ailleurs, au cours du déplacement de l'interface, les distances entre les points interfaciaux et les noeuds du maillage devenaient parfois trop petites, ce qui faisait tendre la valeur de l'expression discrète des dérivées progressives ou régressives à l'infini.

Nous avons pu penser donc que la meilleure solution était d'adapter le maillage à l'interface et de traiter le problème en coordonnées Lagrangiennes. Cette manière de procéder, entraîne évidemment une déformation continue des mailles ; lorsque les gradients de vitesse deviennent trop importants, la distorsion des cellules peut provoquer une erreur appréciable [74]. Étant donné la géométrie non cylindrique du domaine d'écoulement dans le cas de notre problème, on risquait de se trouver dans ces conditions.

La solution que nous avons adoptée enfin et qui nous a conduit à mettre au point la méthode DIPHA-I.V.P. consiste à découpler l'interface du reste du maillage. Pour cela, nous avons intro-

duit un ensemble de particules qui simulent de manière discontinue l'interface ; ces particules se déplacent en coordonnées Lagrangiennes sur le maillage Eulérien et fixe, qui couvre l'ensemble du domaine.

Dans ce qui suit, nous allons examiner comment ce traitement de l'interface et la formulation intégrale des premiers principes de la mécanique des fluides, peuvent nous conduire à la méthode numérique DIPHA-I.V.P.

### VIII.3.1. Principe de la méthode et les équations aux différences

Revenons aux équations de Navier-Stokes en écoulement diphasique. Selon la forme adimensionnelle (VII.2.10) de ces équations et en l'absence de forces extérieures, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + u_j^{(k)} \cdot \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} = \mathcal{K} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 u_i^{(k)} \quad (\text{VIII.3.1.1})$$

où les coefficients  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{R}$  sont variables, suivant les propriétés physiques du fluide considéré. Dans le domaine  $D_1(t)$ , occupé par le fluide ①, nous avons :

$$\mathcal{K} = 1 \quad , \quad \mathcal{R} = R_{e1} = \frac{UL}{\nu_1} \quad \text{si } x \in D_1(t)$$

tandis que dans le domaine ② :

$$\mathcal{K} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{R_{e1}}{M} \cdot K = R_{e1} \cdot \frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}} \quad \text{si } x \in D_2(t)$$

L'approche numérique de l'équation (VIII.3.1.1) est particulièrement difficile au niveau de l'interface, où la variation des coefficients  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{R}$  est brutale ; en fait, comme nous l'avons montré dans le paragraphe (VII.2), sur l'interface, l'équation dynamique nous conduit aux relations de raccordement des contraintes visqueuses.

Nous pouvons faire abstraction de ces difficultés en reprenant la formulation intégrale de l'équation de conservation des quantités de mouvement au voisinage de l'interface : la brusque discontinuité des coefficients  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{R}$  disparaît et les approximations aux différences deviennent plus naturelles.

Partons de l'équation intégrale de la conservation des quantités de mouvement à l'intérieur du domaine  $D_{(k)}$  occupé par les particules du fluide  $k$ . Nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta\Omega} (\rho^{(k)} \cdot u_i^{(k)}) d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^{(k)} n_j d\Gamma$$

Le développement de la dérivée particulaire du premier membre de cette relation, l'utilisation de la loi contraintes-déformations du fluide newtonien et la mise sous forme adimensionnelle de l'équation résultante nous a amené dans le chapitre VII à l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} d\Omega &= - \int_{\Gamma} \mathcal{K} p^{(k)} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u_i^{(k)} u_j^{(k)} n_j d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right\} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.1.2})$$

où :

$$\mathcal{K} = 1, \quad \mathcal{R} = R_{e1} = \frac{UL}{\nu_1} \quad \text{si } x \in D_1(t) \quad (\text{VIII.3.1.3})$$

$$\mathcal{K} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}, \quad \mathcal{R} = R_{e1} \times \frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(2)}} \quad \text{si } x \in D_2(t)$$

D'autre part, pour le fluide k, nous avons l'équation de continuité :

$$\int_{\Gamma} u_j^{(k)} n_j d\Gamma = 0$$

Discretisons maintenant suivant le principe de la méthode I.V.P. l'équation (VIII.3.1.2) suivant un algorithme à pas fractionnaires. En omettant l'indice k, nous avons :

$$\int_{\Delta\Omega} \left\{ \frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\Delta t} \right\} d\Omega = - \int_{\Gamma} u_i u_j n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathcal{R} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma + O(\Delta t) \quad (\text{VIII.3.1.4})$$

$$\int_{\Delta\Omega} \left\{ \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\Delta t} \right\} d\Omega = - \int_{\Gamma} \mathcal{K} p n_i d\Gamma + O(\Delta t) \quad (\text{VIII.3.1.5})$$

Dorénavant, la méthode DIPHA-I.V.P. suit le même cheminement que la méthode I.V.P. : en effet, la discrétisation de la relation intégrale (VIII.3.1.4) peut nous fournir le champ des vitesses auxiliaires  $u_i^{n+1/2}$ , tout en tenant compte du coefficient de diffusion variable  $1/\mathcal{R}$ . Ensuite, la combinaison entre la forme discrète de l'équation (VIII.3.1.5) et la formulation itérative de l'équation de la continuité sous la forme :

$$p_{r,s}^{n,m+1} = p_{r,s}^{n,m} - \Delta\tau (DV^{n+1,m+1}) \quad (\text{VIII.3.1.6})$$

peut nous donner simultanément  $p^n$  et les vitesses au niveau du temps  $n + 1$ .

Le point fondamental donc de la méthode est la discrétisation de l'équation (VIII.3.1.4) et le traitement des conditions sur les frontières macroscopiques du domaine d'écoulement.

Reprenons les maillages décalés de la figure 64 et examinons la discrétisation de l'équation VIII.3.1.4 au voisinage de l'interface.

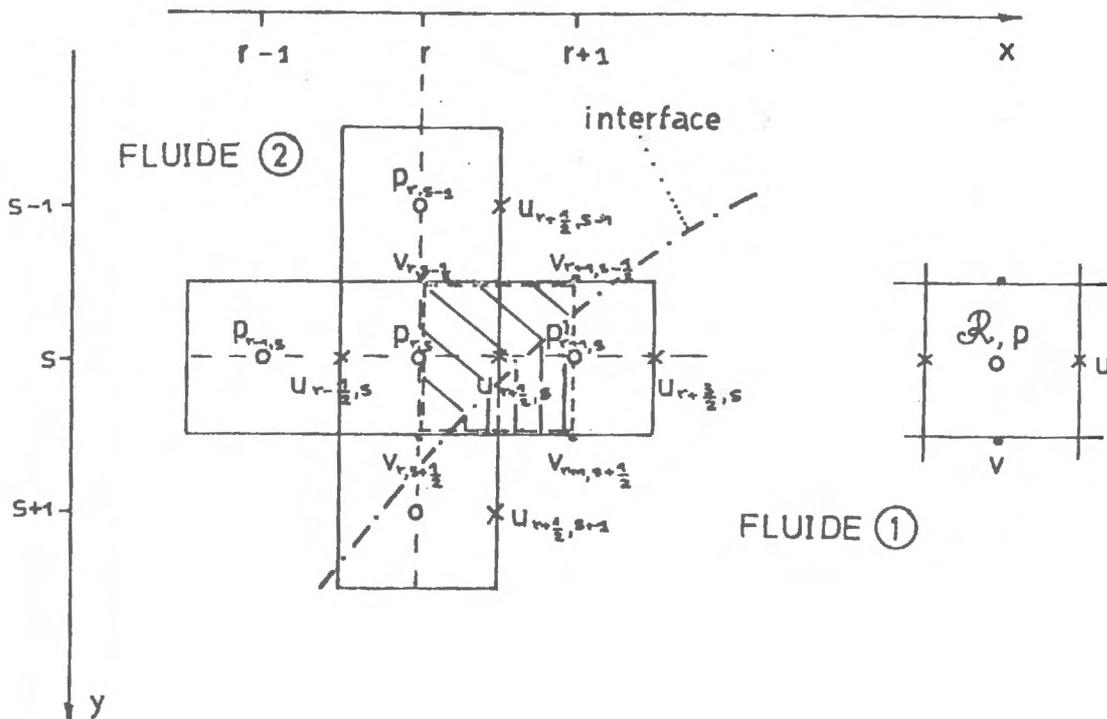


Figure 64. Discrétisation de l'équation dynamique au voisinage de l'interface

Nous rappelons que les pressions sont définies aux barycentres des cellules, les vitesses horizontales aux milieux des côtés verticaux, tandis que les vitesses  $v$  au milieux des côtés horizontaux. En plus, cette fois-ci, nous introduisons un tableau de valeurs discrètes  $R_{rs}$ , qui détermine le coefficient  $\mathcal{R}$ , au barycentre de chaque cellule. Selon les relations (VIII.3.1.4) lorsque  $rs$  appartient au fluide (1)  $R_{rs}$  représente le nombre de Reynolds  $R_{e1}$ . Si  $rs$  se trouve à l'intérieur du fluide (2)  $R_{rs}$  est

$$\text{égal à } R_{e1} \times \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} .$$

Ceci étant, examinons maintenant la discrétisation de l'intégrale :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \, d\Gamma$$

qui figure dans l'équation (VIII.3.1.4). Prenons tout d'abord la projection de ce terme suivant l'axe  $O-x$  ( $i = 1, j = 1, 2, n_1 = n_x, n_2 = n_y$ ). On a :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{2}{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot n_x \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \, d\Gamma$$

(VIII.3.1.7)

En utilisant l'approximation (VIII.2.2.12) et selon la figure 64 pour une cellule centrée sur le point  $r+1/2, s$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \mathcal{R} \left( \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) d\Gamma &= \left\{ \frac{2}{R_{r+1,s}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{r+3/2,s} - u_{r+1/2,s}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{R_{rs}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{r+1/2,s} - u_{r-1/2,s}) \right\} \Delta x \\
 &+ \left\{ \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{r+1/2,s+1} - u_{r+1/2,s} + v_{r+1,s+1/2} - v_{r,s+1/2}) \right\} \Delta x \\
 &- \left\{ \frac{1}{R_{r+1/2,s-1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{r+1/2,s} - u_{r+1/2,s-1} + v_{r+1,s-1/2} - v_{r,s-1/2}) \right\} \Delta x \\
 &+ o(\Delta x^2) \qquad \qquad \qquad \text{(VIII.3.1.8)}
 \end{aligned}$$

De la même manière, selon la direction 0-y, nous pouvons écrire :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{R} \left( \frac{1}{\Delta y} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathcal{R} \left( \frac{2}{\Delta y} \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathcal{R} \left( \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x \right) d\Gamma \quad \text{(VIII.3.1.9)}$$

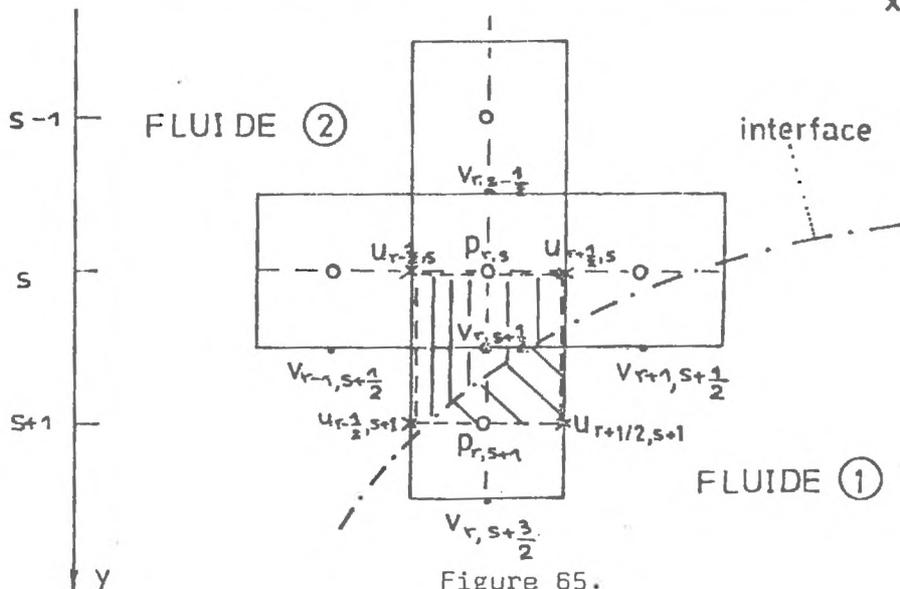


Figure 65.

Suivant la figure 65, discrétisons maintenant l'équation (VIII.3.1.9) sur la frontière  $\Gamma$  de la cellule centrée sur le point  $r, s+1/2$ .

$$\int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] n_j d\Gamma = \left\{ \frac{2}{R_{r,s+1}} \cdot \frac{1}{\Delta x} [v_{r,s+3/2} - v_{r,s+1/2}] - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{R_{r,s}} \cdot \frac{1}{\Delta x} [v_{r,s+1/2} - v_{r,s-1/2}] \right\} \Delta x$$

$$+ \left\{ \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} [v_{r+1,s+1/2} - v_{r,s+1/2} + u_{r+1/2,s+1} - u_{r+1/2,s}] \right\} \Delta x$$

$$- \left\{ \frac{1}{R_{r-1/2,s+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} [v_{r,s+1/2} - v_{r-1,s+1/2} + u_{r-1/2,s+1} - u_{r-1/2,s}] \right\} \Delta x$$

$$+ O(\Delta x^2) \quad \text{(VIII.3.1.10)}$$

Pour le calcul effectif des vitesses auxiliaires  $u_i^{n+1/2}$  suivant les schémas (VIII.3.1.8) et (VIII.3.1.10) on doit déterminer les coefficients  $R_{rs}$ , qui correspondent aux cellules  $rs$ . Dans la méthode DIPHA-I.V.P., la détermination des coefficients  $R_{rs}$  s'effectue automatiquement, en fonction de la position de l'interface. Ensuite, les valeurs  $R_{r+1/2,s+1/2}$ ,  $R_{r+1/2,s-1/2}$ ,  $R_{r-1/2,s+1/2}$  sont déterminées par interpolation de la valeur du coefficient de viscosité cinématique.

Examinons le principe du calcul. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'interface  $S(t)$  est simulée à l'instant  $t$ , par un ensemble de particules. Les coordonnées  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) de ces particules sont considérées en tant que coordonnées Lagrangiennes ;

en général, elles ne sont pas confondues avec les noeuds du maillage.

Supposons donc, comme le montre la figure 66, qu'à l'instant  $t$ , nous connaissons les coordonnées  $x_i$  des particules interfaciales. Par exemple, on peut disposer d'une formule analytique qui

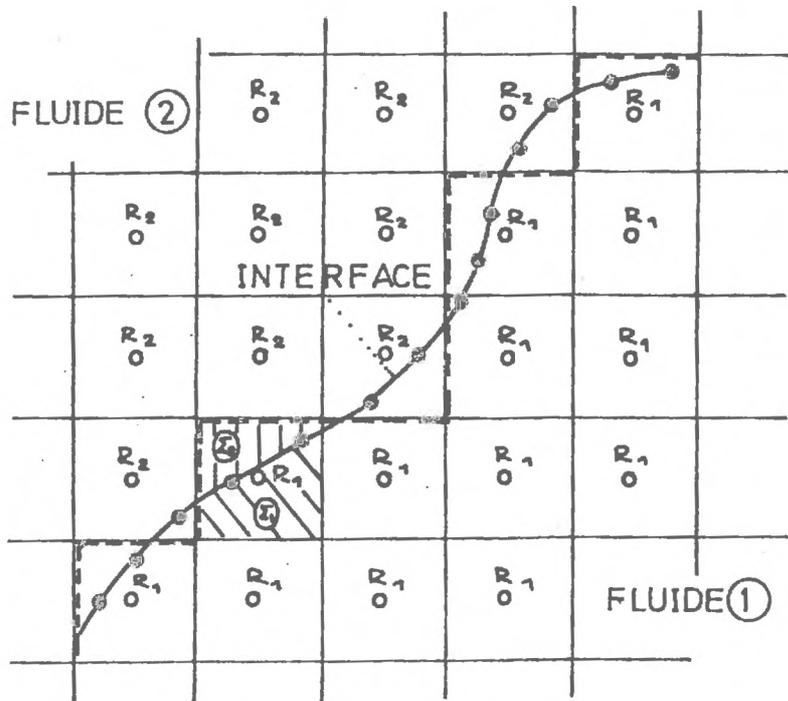


Figure 66.

nous donne la forme initiale de l'interface. Alors le premier pas du calcul consiste à relier les points successifs par des segments de droites et trouver les intersections de ces droites avec le maillage Eulerien. Ensuite, on peut représenter l'interface à l'intérieur de chaque cellule par une ligne droite, qui relie les points d'intersection de l'interface, avec les côtés de la cellule. On suppose à ce moment-là, que le maillage Eulerien est assez fin pour

avoir deux points d'intersection seulement par cellule.

Il est maintenant aisé de calculer pour chaque cellule les surface  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , qui appartiennent au fluide 1 ou fluide 2 (figure 66 ). Le coefficient R pour la cellule en question, est ensuite déterminé de la manière suivante : si la surface  $\Sigma_1$  est plus grande que la moitié de la surface totale de la cellule, on prend  $R = R_1 = R_{e1} = UL/v^{(1)}$  ; sinon on pose :

$$R = R_2 = R_{e2} = \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} R_{e1} = R_{e2} = \frac{UL}{v^{(2)}} .$$
 Etant donné que ces coefficients

sont définis au centre de chaque cellule, leur détermination selon le rapport des surfaces occupées par l'un ou l'autre fluide à l'intérieur des cellules limites, correspond à l'approximation de l'interface par une ligne polygonale, brisée, suivant les lignes du maillage Eulérien (figure 66 ).

Les résultats numériques que nous rapportons dans le chapitre XI, montrent que ce traitement de l'interface conduit à des résultats lisses et satisfaisants, même dans le cas de contrastes de viscosité élevés. Par exemple, on peut vérifier que pour  $M = 10$ , les conditions de raccordement des contraintes sur l'interface sont satisfaisantes.

Il reste encore à préciser la manière selon laquelle nous déplaçons les particules interfaciales au temps  $n + 1$ . Ceci ne constitue pas une difficulté essentielle. En effet, en coordonnées Lagrangiennes, les vitesses  $u_i$  des particules interfaciales sont définies comme :

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}$$

où  $x_i$  sont les coordonnées des particules.

La discrétisation de cette relation, peut nous permettre de définir l'interface au temps  $n + 1$ .

En effet, nous avons :

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t \cdot u_i^n \quad (\text{VIII.3.1.11})$$

Les vitesses  $u_i$  sur l'interface peuvent être déterminées par interpolation. Dans la pratique, l'interpolation linéaire à deux dimensions, que nous avons utilisée, nous a donné de bons résultats.

Le schéma d'interpolation proposé par la méthode M.A.C. [64] utilise une pondération sur les surfaces. Comme le montre la figure 67, imaginons une cellule centrée sur la particule  $k$  en déplacement sur le maillage Eulérien.

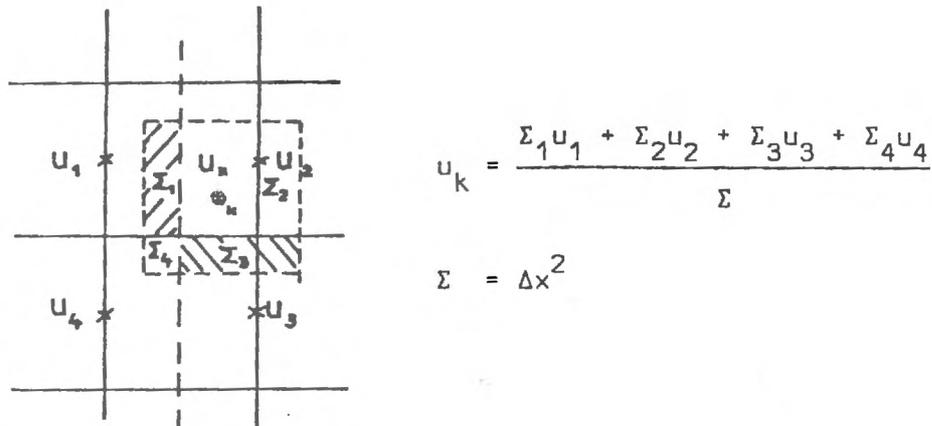


Figure 67. Interpolation de la vitesse  $u_k$

La vitesse horizontale  $u_k$  sera une pondération des vitesses voisines  $u_1, u_2, u_3, u_4$  avec les coefficients de pondération les surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ .

Examinons maintenant le traitement des conditions aux limites extérieures tout en tenant compte de l'interface.

### VIII.3.2. Les conditions aux limites

Près des frontières, les équations aux différences ont été modifiées en utilisant des approximations progressives ou régressives.

Examinons par exemple la modification du terme de diffusion suivant la direction 0-x.

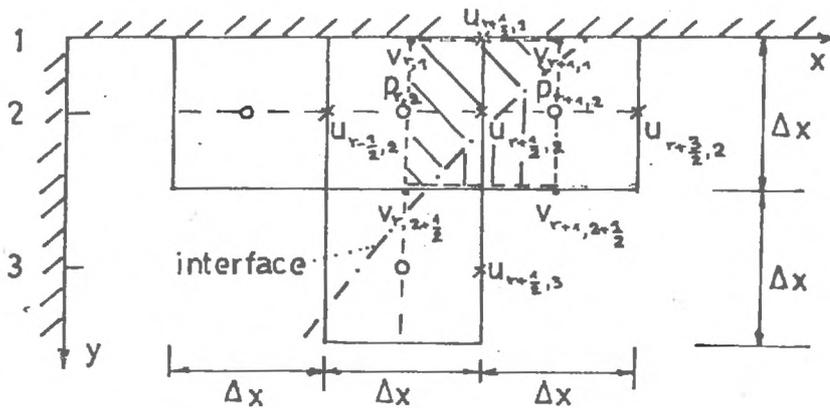


Figure 68.

Pour la cellule centrée sur le point  $r + 1/2, 2$ , nous avons :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{R} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{2}{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} n_x \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathcal{R} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \, d\Gamma$$

$$= \left\{ \frac{2}{R_{r+1,2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{r+3/2,2} - u_{r+1/2,2}) - \frac{2}{R_{r,2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{r+1/2,2} - u_{r-1/2,2}) \right\} \Delta x +$$

$$+\left\{ \frac{1}{R_{r+1/2,2+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} [u_{r+1/2,3} - u_{r+1/2,2} + v_{r+1,2+1/2} - v_{r,2+1/2}] \right\} \Delta x$$

$$-\left\{ \frac{1}{R_{r+1/2,1}} \cdot \frac{1}{\Delta x} \left[ -\frac{8}{3} u_{r+1/2,1} + 3 u_{r+1/2,2} - \frac{1}{3} u_{r+1/2,3} \right] \right\} \Delta x$$

$$-\left\{ \frac{1}{R_{r+1/2,1}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (v_{r+1,1} - v_{r,1}) \right\} \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.3.2.1})$$

Pour trouver l'équation correspondante selon la direction 0-y posons :  $i = 2, j = 1, 2, n_1 = n_x, n_2 = n_y$ . Pour la cellule centrée, sur le point  $2, s+1/2$ , (figure 69), nous aurons :

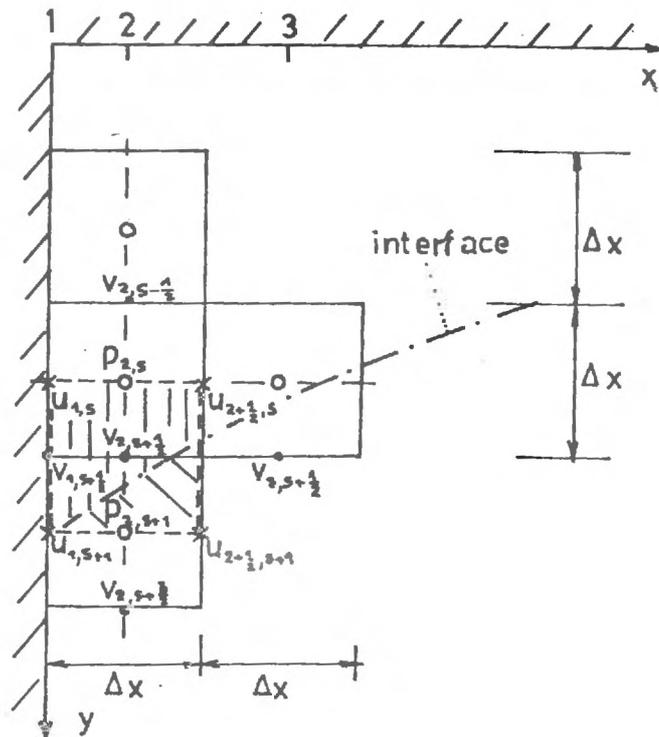


Figure 69.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma &= \int_{\Gamma} \frac{2}{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} n_y d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x d\Gamma \\
&= \left\{ \frac{2}{R_{2,s+1}} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot (v_{2,s+3/2} - v_{2,s+1/2}) - \frac{2}{R_{2s}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (v_{2,s+1/2} - v_{2,s-1/2}) \right\} \Delta x \\
&+ \left\{ \frac{1}{R_{2+1/2,s+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (v_{3,s+1/2} - v_{2,s+1/2} + u_{2+1/2,s+1} - u_{2+1/2,s}) \right\} \Delta x \\
&- \left\{ \frac{1}{R_{1,s+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} \left( -\frac{8}{3} v_{1,s+1/2} + 3v_{2,s+1/2} - v_{3,s+1/2} \right) \right\} \Delta x \\
&- \left\{ \frac{1}{R_{1,s+1/2}} \cdot \frac{1}{\Delta x} (u_{1,s+1/2} - u_{1,s}) \right\} \Delta x + O(\Delta x^2)
\end{aligned}$$

(VIII.3.2.2)

La détermination des coefficients  $R_{rs}$  qui figurent dans les expressions (VIII.3.2.1) et (VIII.3.2.2) s'effectue de la même manière que pour les molécules du calcul situées à l'intérieur du domaine.

Nous allons exposer maintenant, brièvement, un algorithme implicite de surrelaxation, que nous avons expérimenté en liaison avec la méthode DIPHA-I.V.P ; tout de suite après, nous présenterons l'organigramme général du calcul.

### VIII.3.3. Algorithme implicite

Pour déterminer le champ des vitesses auxiliaires  $u_i^{n+1/2}$  selon l'équation (VIII.3.1.4) nous avons appliqué un algorithme implicite d'itération simultanée sur les vitesses  $u$  et  $v$ .

Pour s'affranchir du critère de stabilité très sévère dû aux termes de diffusion (faibles nombres de Reynolds), nous avons remplacé les vitesses  $u, v$  qui apparaissent dans les équations (VIII.3.1.8, 10), par les mêmes vitesses prises au pas de temps  $n+1/2$  (coefficient de pondération  $\lambda = 1$ ). On aboutit ainsi à des expressions sur lesquelles nous pouvons appliquer la méthode itérative de Jacobi. Cette itération devient plus efficace en introduisant le coefficient de surrelaxation  $\omega$  défini d'après l'équation (VIII.2.3.25). Nous arrivons ainsi à la formulation itérative des équations (VIII.3.1.4), sous la forme suivante :

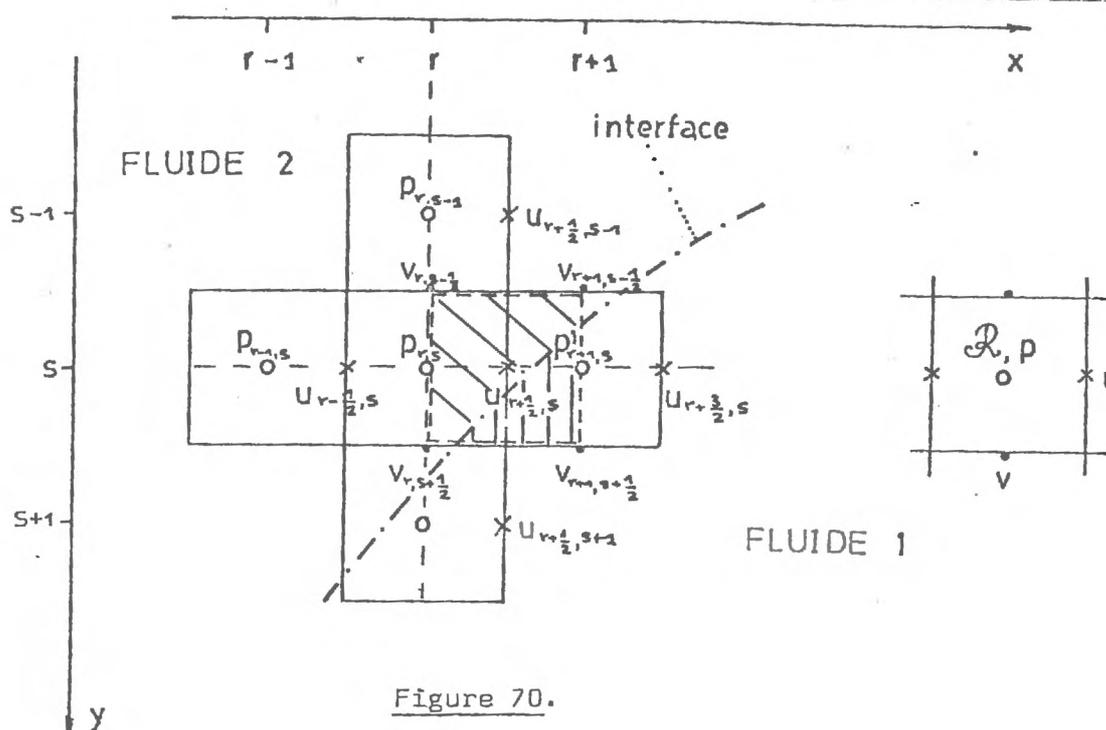


Figure 70.

Direction 0-x

On pose :

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left\{ \frac{2}{R_{r+1,s}} + \frac{2}{R_{r,s}} + \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} + \frac{1}{R_{r+1/2,s-1/2}} \right\}$$

$$u_{r+1/2,s}^{n+1/2,k+1} = (1 - \omega) u_{r+1/2,s}^{n+1/2,k} + \frac{\omega}{1 + \alpha} \cdot Q_1^n$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\omega}{1+\alpha} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left\{ \frac{2}{R_{rs}} \cdot u_{r-1/2,s}^{n+1/2,k+1} + \frac{1}{R_{r+1/2,s-1/2}} \cdot u_{r+1/2,s-1}^{n+1/2,k} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} \cdot u_{r+1/2,s+1}^{n+1/2,k} + \right. \\ & + \frac{2}{R_{r+1,s}} \cdot u_{r+3/2,s}^{n+1/2,k} + \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} \cdot (v_{r+1,s+1/2}^{n+1/2,k} - v_{r,s+1/2}^{n+1/2,k+1}) \\ & - \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} (v_{r+1,s-1/2}^{n+1/2,k+1} - v_{r,s-1/2}^{n+1/2,k+1}) \end{aligned} \quad \text{(VIII.3.3.1)}$$

où  $Q_1^n$  indique les termes de convection selon la direction 0-x.

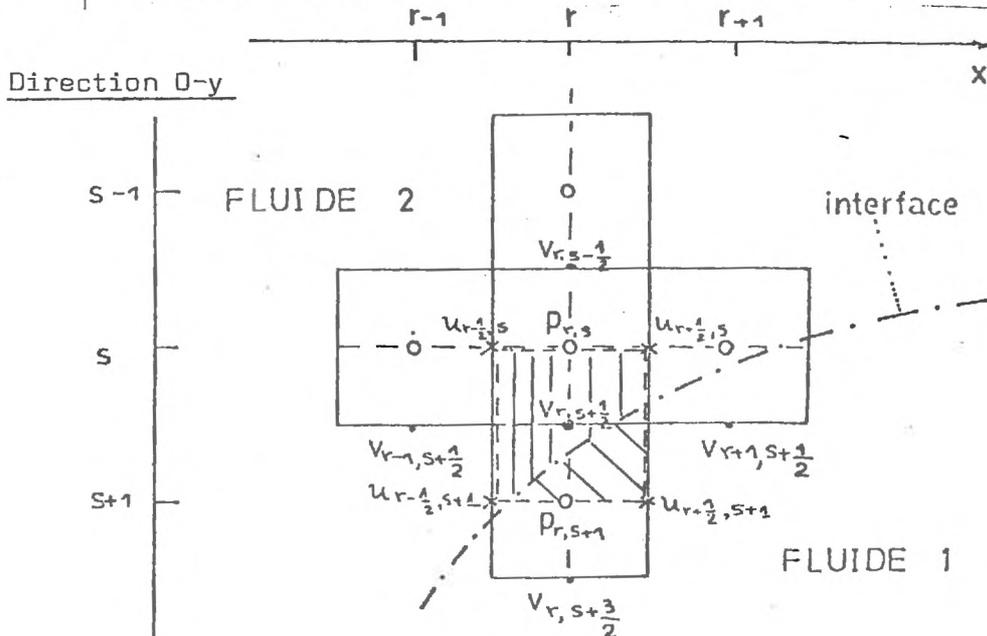


Figure 71.

On pose :

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left\{ \frac{2}{R_{r,s+1}} + \frac{2}{R_{rs}} + \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} + \frac{1}{R_{r-1/2,s+1/2}} \right\}$$

$$v_{r,s+1/2}^{n+1/2,k+1} = (1 - \omega) v_{r,s+1/2}^{n+1/2,k} + \frac{\omega}{1 + \beta} Q_2^n$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\omega}{1 + \beta} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left\{ \frac{2}{R_{r,s}} \cdot v_{r,s-1/2}^{n+1/2,k+1} + \frac{1}{R_{r-1/2,s+1/2}} \cdot v_{r-1,s+1/2}^{n+1/2,k} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} \cdot v_{r+1,s+1/2}^{n+1/2,k} \right. \\ & + \frac{2}{R_{r,s+1}} \cdot v_{r,s+3/2}^{n+1/2,k} + \frac{1}{R_{r+1/2,s+1/2}} \cdot (u_{r+1/2,s+1}^{n+1/2,k} - u_{r+1/2,s}^{n+1/2,k+1}) \\ & \left. - \frac{1}{R_{r-1/2,s+1/2}} \cdot (u_{r-1/2,s+1}^{n+1/2,k} - u_{r-1/2,s}^{n+1/2,k+1}) \right\} \quad \text{(VIII.3.3.2)} \end{aligned}$$

Près des limites, les formules VIII.3.3.1 et VIII.3.3.2 sont modifiées à l'aide des différences progressives. Pour le calcul, l'itération s'effectue ligne par ligne en ajustant simultanément les vitesses  $u$  et  $v$ .

#### VIII.3.4. Organigramme de calcul

Faisons maintenant la synthèse des résultats partiels concernant la résolution des écoulements diphasiques selon la méthode DIPHA-I.V.P.

1./ La première étape du calcul consiste à lire les données telles que le pas du maillage  $\Delta x$ , le pas du temps  $\Delta t$ , les constantes

qui fixent la géométrie du domaine et les critères de convergence des diverses itérations qui interviennent. On donne ensuite lecture aux valeurs initiales des vitesses et des pressions ainsi que de la forme initiale  $S_0$  de l'interface. Ces valeurs initiales peuvent par exemple être obtenues selon une formule analytique approchée, qui dépend du problème spécifique. D'autre part, l'interface initiale permet de délimiter les domaines  $D_1(0)$ ,  $D_2(0)$  occupés par les deux fluides et d'affecter ainsi les coefficients  $R_{rs}$  convenables au centre de chaque cellule.

2./ Le temps ayant progressé d'un pas, on calcule d'abord le champ des vitesses auxiliaires  $u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1/2}$ . Si on adopte un schéma explicite on utilisera les équations (VIII.3.1.4) dans lesquelles les termes de diffusion sont donnés par les expressions (VIII.3.1.8, 10). Près des frontières, on utilisera les expressions modifiées (VIII.3.2.1), (VIII.3.2.2). Si on choisit un algorithme implicite, on peut utiliser les équations (VIII.3.3.1) et (VIII.3.3.2) dûment modifiées près des frontières. Dans ce cas, les vitesses  $u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1/2}$  sur la frontière peuvent être calculées d'après l'expression (VIII.2.3.21) ou (VIII.2.3.22).

3./ On calcule la divergence des vitesses auxiliaires  $DV^{n+1/2}$ .

4./ On calcule le champ des pressions suivant le procédé itératif (VIII.2.2.27) (VIII.2.2.a.6). On remarque que ces formules restent valables dans le cas de la méthode DIPHA-I.V.P., lorsque le contraste des masses volumiques  $K = \rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 1$ . Si  $K \neq 1$ , elles sont légèrement modifiées.

L'itération de la pression peut être effectuée dans un sous-programme, après la détermination du coefficient  $\Delta\tau_{opt}$ .

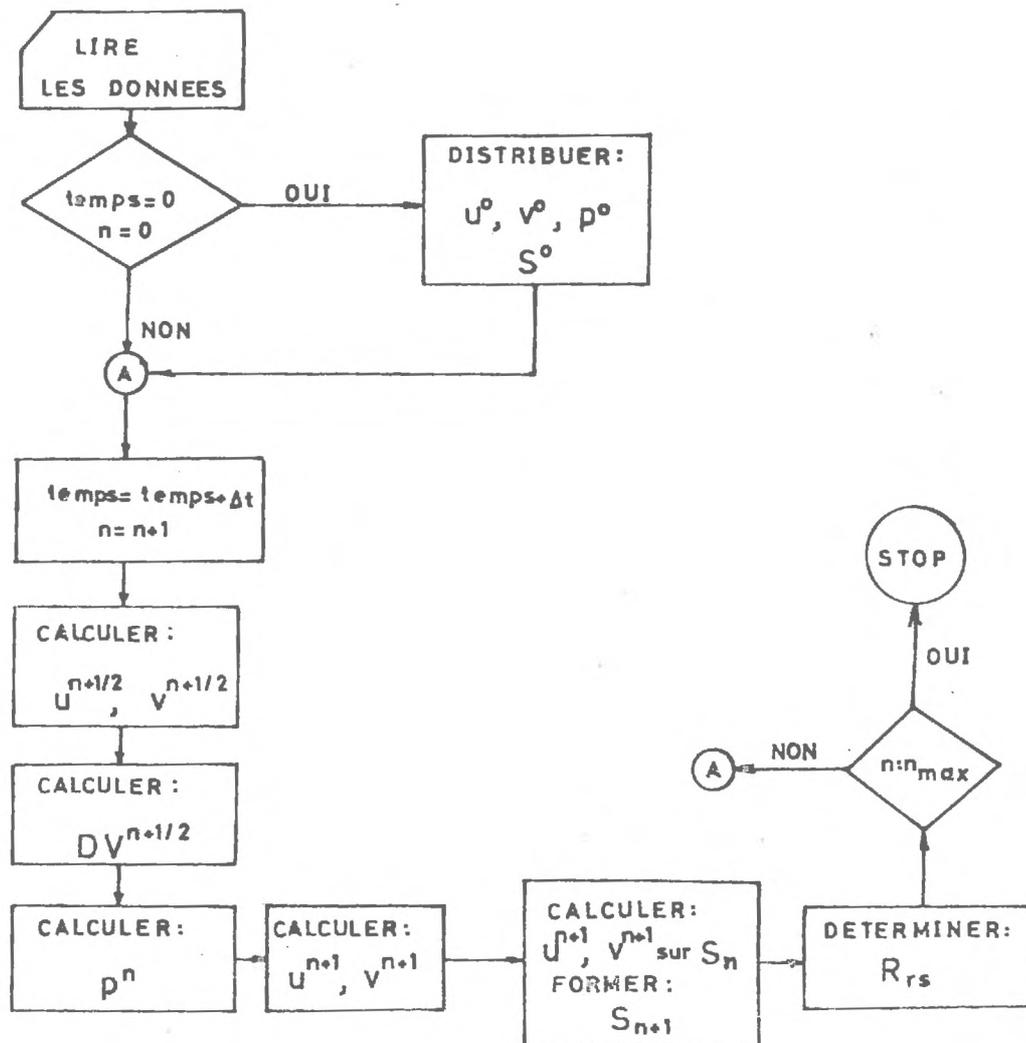
5./ On calcule les vitesses  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  selon la forme discrète de l'expression (VIII.3.1.5) (voir formules VIII.2.2.21, 23).

On calcule les vitesses des particules interfaciales par interpolation. L'interface  $S_{n+1}$  est ensuite avancée en utilisant les expressions (VIII.3.1.11).

7./ On détermine les points d'intersection de l'interface avec le maillage Eulérien et on affecte les coefficients  $R_{rs}$  au centre de chaque cellule.

8./ A la sortie, on imprime les résultats tels que les vitesses  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ , les pressions  $p^n$  et les coordonnées  $x_i^{n+1}$  des particules de l'interface. On revient à l'étape 2 du calcul, jusqu'à obtenir la solution au temps  $t$ , fixé d'avance.

Les différents stades du calcul peuvent être résumés dans l'organigramme suivant :



#### VIII.4. STABILITE ET CONVERGENCE NUMERIQUE

Pour étudier la stabilité numérique du problème de Navier-Stokes, nous devons constater tout d'abord qu'il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type mixte, parabolique-hyperbolique. En plus, dans le cas de l'écoulement diphasique, les coefficients qui interviennent dans les équations ne sont pas constants. Dans ces conditions, il n'existe pas actuellement une méthode rigoureuse permettant l'étude de la stabilité numérique du problème.

Toutefois, si on examine la structure de l'opérateur différentiel, nous pouvons se rendre compte que le risque d'apparition d'instabilités locales devient apparent dans deux cas asymptotiques :

a) aux faibles nombres de Reynolds, à cause d'une diffusion excessive, due aux forces de viscosité,

b) aux nombres de Reynolds importants, à cause de la prépondérance des termes convectifs.

En effet, dans les deux cas, au cours du calcul, les erreurs d'arrondi peuvent ne pas rester bornées ; ceci provoque les instabilités numériques, qui conduisent à des solutions physiquement aberrantes.

Examinons donc tout d'abord le premier cas asymptotique. Lorsque le nombre de Reynolds est très faible, en négligeant les termes de convection, on aboutit à l'équation linéaire de la diffusion :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 u_i \quad (\text{VIII.4.1.})$$

Sur un maillage homogène de pas  $\Delta x$ , prenons les approximations suivantes :

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{rs} = \frac{u_{i,rs}^{n+1} - u_{i,rs}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{VIII.4.2})$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} = \frac{u_{i(r+1,s)} - 2u_{i(r,s)} + u_{i(r-1,s)}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.4.3})$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} = \frac{u_{i(r,s+1)} - 2u_{i(r,s)} + u_{i(r,s-1)}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.4.4})$$

Nous pourrions étudier la stabilité de l'équation (VIII.4.1) suivant la méthode classique de VON NEUMANN [72]. En appliquant une décomposition harmonique sur l'erreur de discrétisation des différents termes de l'équation aux différences, on aboutit à la condition de stabilisation de l'erreur, sous la forme :

$$\frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (\text{VIII.4.5})$$

Examinons maintenant le deuxième cas limite lorsque les termes convectifs deviennent prépondérants.

Le nombre de Reynolds étant très élevé, nous pouvons négliger les termes de diffusion. On obtient ainsi l'équation quasi-linéaire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{VIII.4.6})$$

Afin de pouvoir appliquer la méthode de VON NEUMANN, nous pouvons linéariser cette équation par l'intermédiaire de la vitesse maximale  $|V|_m$  du fluide dans le domaine d'écoulement. Nous écrirons donc l'équation (VIII.4.6) linéarisée sous la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + |V|_m \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (\text{VIII.4.7})$$

Pour le terme convectif, choisissons une approximation régressive du premier ordre de la forme :

$$|V|_m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{r,s} = |V|_m \cdot \frac{u_i(r,s) - u_i(r-1,s)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{VIII.4.8})$$

Dans ces conditions, la méthode de VON NEUMANN nous conduit au critère :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V|_m} \quad (\text{VIII.4.9})$$

Par contre, si on choisit une approximation aux différences centrée par les termes convectifs et donc de l'ordre de  $\Delta x^2$ , l'analyse linéaire de la stabilité montre qu'aucune valeur de  $\Delta t$  n'assure la stabilité. Ceci est la conséquence immédiate de l'absence de viscosité physique (termes de diffusion nuls) dans l'équation (VIII.4.6).

On peut donc penser qu'en considérant les deux cas limites selon les équations (VIII.4.1) et (VIII.4.6), le critère de stabilité le plus strict assurerait la stabilité de l'équation complète. Néanmoins, la superposition du terme convectif et du terme de diffusion, peut nous conduire à un critère de stabilité plus sévère. En effet, considérons l'équation linéarisée :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + |V|_m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{R_e} \nabla^2 u_i \quad (\text{VIII.4.10})$$

Avec les approximations aux différences du types (VIII.4.2) pour la dérivée par rapport au temps, du type (VIII.4.7) et donc régressive pour les termes de convection et centrée comme (VIII.4.3., 4) pour les termes de diffusion, l'analyse de VON NEUMANN nous conduit au critère de stabilité :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\left( \frac{|V|_m}{\Delta x} + \frac{4}{R_e \Delta x^2} \right)} \quad (\text{VIII.4.11})$$

Utilisons maintenant un schéma centré de l'ordre de  $O(\Delta x^2)$  pour le terme convectif. En écrivant :

$$|V|_m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{r,s} = |V|_m \frac{u_{i(r+1,s)} - u_{i(r-1,s)}}{2 \Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (\text{VIII.4.12})$$

L'analyse linéaire de la stabilité de l'équation (VIII.4.10) nous conduit aux critères :

$$\Delta t \leq \frac{R_e \Delta x^2}{4} \quad (\text{VIII.4.13})$$

$$\Delta t \leq \frac{2}{R_e |V|_m^2} \quad (\text{VIII.4.14})$$

Etant donné que la méthode I.V.P. utilise des schémas centrés du type (VIII.4.12) pour les termes convectifs, nous pouvons dire qu'en général les critères (VIII.4.13) et (VIII.4.14) constituent les critères de stabilité de la méthode. On peut remarquer que la condition (VIII.4.13) est identique à la condition de stabilité locale (VIII.4.5) ; lorsqu'elle n'est pas satisfaite, la solution présente des oscillations, qui évoluent de manière exponentielle. De l'autre côté, lorsque la condition (VIII.4.14) n'est pas satisfaite, la solution diverge exponentiellement et de manière monotone.

Pour mieux comprendre la signification physique des instabilités dues au non respect de la condition (VIII.4.14) appliquons la méthode de l'analyse des erreurs de discrétisation (HIRT, 1968 [75]).

Pour simplifier, reprenons l'équation linéarisée (VIII.4.10) à une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |V|_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{VIII.4.15})$$

Appliquons les approximations du type (VIII.4.2), (VIII.4.3) et (VIII.4.12). Nous aurons :

$$\frac{u_r^{n+1} - u_r^n}{\Delta t} + \frac{|V|_m}{2 \Delta x} \{u_{r+1}^n - u_{r-1}^n\} = \frac{1}{R_e \Delta x^2} \{u_{r+1}^n - 2 u_r^n + u_{r-1}^n\}$$

(VIII.4.16)

Si nous considérons les termes de l'équation (VIII.4.16) comme des fonctions continues, en développant chaque terme en séries de Taylor autour du point  $(x, t)$ , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |V|_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \Delta t \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2)$$

(VIII.4.17)

où on a arrêté les développements aux termes de l'ordre de  $\Delta x^2$  et de  $\Delta t^2$ . La dérivée seconde par rapport au temps, peut être exprimée à l'aide de l'équation (VIII.4.15). En effet, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = |V|_m^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2|V|_m}{R_e} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta t) \quad (\text{VIII.4.18})$$

En combinant les équations (VIII.4.18), (VIII.4.17) et en tenant compte rien que des termes de l'ordre  $\Delta t$  et  $\Delta x^2$ , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + |V|_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{1}{R_e} - \frac{\Delta t}{2} |V|_m^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{VIII.4.19})$$

Cette équation est l'équation linéarisée de la diffusion convective, avec un coefficient de diffusion égal à la quantité

$$\frac{1}{R_e} - \frac{\Delta t}{2} |V|_m^2.$$

Nous concluons donc que les erreurs de discrétisation

ont fait apparaître une diffusion numérique négative, qui se superpose à la diffusion due à la viscosité physique. Le calcul est stable, lorsque la diffusion due à la viscosité physique est plus grande que la diffusion numérique. A d'autre termes si :

$$\frac{1}{R_e} \geq \frac{\Delta t}{2} \cdot |V|_m^2 \quad (\text{VIII.4.20})$$

Nous constatons que ce critère est tout à fait équivalent à la condition (VIII.4.14). Lorsqu'il n'est pas satisfait, l'équation VIII.4.19 présente un coefficient de diffusion négatif, et donc sa solution diverge de manière exponentielle.

Mais l'avantage de la méthode de l'analyse des erreurs de troncature apparaît dans le cas des problèmes non linéaires. On peut ainsi obtenir des critères de stabilité approximatifs, mais très précieux dans la pratique, pour les opérateurs non linéaires.

Examinons par exemple l'équation de NAVIER-STOKES a une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R_e} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si nous appliquons la même méthode d'analyse que pour l'équation (VIII.4.15), nous trouvons à la place de l'équation (VIII.4.19), le résultat :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{1}{R_e} - \frac{\Delta t}{2} u^2 - \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dans ce cas, le critère (VIII.4.20) doit être remplacé par la condition :

$$\frac{1}{R_e} \geq \frac{\Delta t \cdot |V|_m^2}{2} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_m \quad (\text{VIII.4.21})$$

où  $|V|_m$  et  $\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_m$  sont la vitesse et le gradient de vitesse maximaux

dans le domaine d'écoulement. Le critère (VIII.4.21) est un critère de stabilité non-linéaire.

Comparons maintenant les termes qui apparaissent dans les conditions de stabilité (VIII.4.20) et (VIII.4.21). Nous constatons tout d'abord que le terme commun :

$$\frac{\Delta t \cdot |V|_m^2}{2}$$

est dû aux erreurs d'approximation de premier ordre pour la dérivée des vitesses par rapport au temps. Du point de vue physique, ce terme montre qu'il y a risque d'instabilités dans les régions d'écoulement où les vitesses deviennent élevées. Ces instabilités sont bornées, lorsque le pas de temps est suffisamment petit pour respecter la condition :

$$\Delta t \leq \frac{2}{R_e |V|_m^2} \quad (\text{VIII.4.22})$$

Le second terme qui apparaît dans le critère (VIII.4.21) est dû à l'approximation centrée du terme convectif. Du point de vue physique, ce terme montre qu'on peut s'attendre à des instabilités dans les régions où les gradients de vitesse sont élevés ; pour éviter cela on doit prévoir un pas de maillage  $\Delta x$  assez faible pour que le critère (VIII.4.21) soit satisfait. Nous pouvons donc

ainsi déterminer approximativement et à partir de la relation (VIII.4.21) la dimension  $\Delta x$  du maillage en fonction du nombre de Reynolds et du gradient maximal des vitesses. En particulier, le maillage doit être fin dans les régions où le gradient des vitesses est important ; d'ailleurs, c'est dans ces endroits que les instabilités physiques, dues à la turbulence, apparaissent d'abord.

Les expériences numériques que nous présenterons par la suite, confirment le bien fondé des critères (VIII.4.20) et (VIII.4.21) et font apparaître la différence entre le critère de stabilité linéaire et non linéaire.

En écoulement diphasique, nous avons respecté les mêmes critères en tenant compte du nombre de Reynolds le plus défavorable ( $R_e$  défini dans le fluide 1 ou 2). En plus, pour s'assurer que l'interface se déplace au cours du temps  $\Delta t$  sur une distance inférieure à la moitié du pas de maillage  $\Delta x$ , nous avons respecté la condition :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2|V|_m} \quad (\text{VIII.4.23})$$

L'analyse de la stabilité numérique que nous venons d'exposer, est valable pour le comportement de l'opérateur différentiel à l'intérieur du domaine. Très souvent, dans la pratique, les instabilités viennent des limites, surtout lorsque les approximations de l'opérateur différentiel sur les frontières ne sont pas consistantes aux approximations de l'opérateur à l'intérieur. L'application de la méthode I.V.P. dans des cas concrets de calcul, nous a montré que pour cette méthode, ces risques d'instabilité sont minimes.

En tout état de cause, lorsque le calcul est stable, on peut se poser la question de savoir si la solution est convergente, c'est à dire si pour  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta t \rightarrow 0$  la solution numérique tend vers la solution exacte du problème. A ce propos, il suffit de rap-

peler le théorème d'équivalence de LAX [76] selon lequel un problème bien posé et formulé aux différences de manière consistante, amène nécessairement à une solution convergente du moment où les conditions de stabilité sont satisfaites.

#### VIII.4.1. Stabilité numérique de l'équation de la pression et coefficients de convergence optimaux

Nous devons remarquer que les critères de stabilité, que nous avons évoqués jusqu'ici, concernent exclusivement les termes de diffusion et de convection, sans tenir compte de l'intervention de la pression.

Selon la méthode I.V.P. la pression peut être calculée suivant le processus itératif exprimé par les équations (VIII.2.2.27). Le choix du pas de temps fictif  $\Delta\tau$  qui intervient dans ces relations, peut conduire à des instabilités numériques. Pour mieux comprendre la source des ces instabilités, examinons tout d'abord une approximation explicite du gradient des pressions. En combinant les équations du type (VIII.2.2.25) et (VIII.2.2.26) avec l'équation (VIII.2.2.24), on obtient :

$$p_{r,s}^{n,m+1} = p_{r,s}^{n,m} + \frac{\Delta\tau \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \{p_{r+1,s}^{n,m} + p_{r-1,s}^{n,m} + p_{r,s+1}^{n,m} + p_{r,s-1}^{n,m} - 4p_{r,s}^{n,m}\} - \Delta\tau (DV)_{rs}^{n+1/2} \quad (\text{VIII.4.1.1})$$

Il est évident que l'expression (VIII.4.1.1) est une approximation aux différences de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \sigma \nabla^2 p - f \quad , \quad \sigma = \Delta t \quad (\text{VIII.4.1.2})$$

Lorsque l'itération (VIII.4.1.1) converge, on atteint la limite asymptotique de l'équation (VIII.4.1.2). Cette limite représente d'ailleurs la solution de l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 p = f/\sigma \quad (\text{VIII.4.1.3})$$

L'analyse linéaire de la stabilité (VON NEUMANN) appliquée à l'équation (VIII.4.1.1) nous amène au critère de la stabilité :

$$\Delta\tau \leq \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} \quad (\text{VIII.4.1.4})$$

Ce critère est plutôt draconien et conduit à un pas  $\Delta\tau$  très faible. Le temps de calcul devient alors important.

Une première amélioration, nous conduit à appliquer la méthode de surrelaxation. En écrivant l'itération (VIII.4.1.1) sous la forme :

$$p_{r,s}^{n,m+1} = p_{r,s}^{n,m} + \frac{\Delta\tau\Delta t}{\Delta x^2} \cdot \{p_{r+1,s}^{n,m} + p_{r-1,s}^{n,m+1} + p_{r,s+1}^{n,m} + p_{r,s-1}^{n,m+1} - 4 p_{r,s}^{n,m}\} - \Delta\tau (DV^{n+1/2})_{rs} \quad (\text{VIII.4.1.5})$$

La méthode de VON NEUMANN nous conduit au critère de stabilité :

$$\Delta\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \quad (\text{VIII.4.1.6})$$

La vitesse de convergence de l'itération (VIII.4.1.4) peut être augmentée davantage en utilisant le schéma implicite de DUFORT-FRANKEL. Nous avons déjà constaté que ce schéma nous conduit à la formule itérative (VIII.2.2.27). Dans ce cas, la valeur opti-

male du coefficient de convergence  $(\Delta\tau)_{opt}$  dépend fortement des conditions aux limites. Etant donné que pour la pression, ces conditions sont du type de NEUMANN, l'analyse théorique de l'optimisation devient compliquée. Mais on peut avoir recours à l'expérience.

Au cours de nos essais numériques, nous avons constaté que la valeur  $(\Delta\tau)_{opt}$  se situe au voisinage de la valeur limite donnée par le critère (VIII.4.1.6). Pour les problèmes que nous avons traités  $(\Delta\tau)_{opt}$  dépasse de 10 à 20 % la valeur de  $\Delta x^2/2\Delta t$  donnée par l'expression VIII.4.1.6.

Il reste encore à examiner la valeur optimale du coefficient de relaxation  $\omega_{opt}$  qui intervient au cours de la détermination implicite des champs des vitesses auxiliaires. Dans le cas de l'écoulement diphasique l'étude théorique du problème selon les équations (VIII.3.1.1) est très difficile du moment que le coefficient  $\mathcal{R}$  est variable. Toutefois, nous pouvons chercher quelques indications sur la valeur  $\omega_{opt}$  lorsqu'on tient compte du coefficient  $\mathcal{R}$  le plus défavorable.

Dans ce cas, et en tenant compte de l'équation de continuité, nous pouvons vérifier que les équations (VIII.3.3.1., 2) constituent un schéma itératif de surrelaxation de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{R_e} \nabla^2 u + Q \quad (\text{VIII.4.1.7})$$

où  $u$  représente les vitesses auxiliaires et  $Q$  les termes de convection au temps  $n \Delta t$ .

Si on discrétise l'équation (VIII.4.1.7) selon le schéma implicite qui correspond aux équations (VIII.3.3.1, 2), on a :

$$\frac{u_{r,s}^{m+1} - u_{r,s}^m}{\Delta t} = \frac{1}{R_e \Delta x^2} \{u_{r+1,s}^{m+1} + u_{r,s-1}^{m+1} + u_{r,s-1}^{m+1} + u_{r-1,s}^{m+1} - 4 u_{r,s}^{m+1}\} + Q'$$

$$(\text{VIII.4.1.8})$$

L'équation (VIII.4.1.8) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$A u = B \quad (|A| \neq 0) \quad (\text{VIII.4.1.9})$$

où  $u$  est la matrice colonne de la solution et  $B$  la matrice colonne comprenant les termes de convection et les valeurs de  $u$  au niveau  $m$ .

En décomposant la matrice  $A$ , selon l'expression :

$$A = I - L - U$$

et en introduisant le coefficient de relaxation  $\omega$  (voir équation (VIII.2.3.25)), nous pouvons écrire l'équation VIII.4.1.9 sous la forme :

$$(I - \omega L) u^{m+1} = \{(1 - \omega) I + \omega U\} u^m + B$$

Il est classique de montrer [71] que lorsque la matrice  $A$  satisfait à la condition de YOUNG, la valeur optimale du coefficient de convergence  $\omega_{\text{opt}}$  est donné par l'expression :

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (\text{VIII.4.1.10})$$

où  $\mu$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $L + U$ .

Pour le schéma VIII.4.1.8 nous avons :

$$\mu = \frac{2 \alpha_0}{1 + 4\alpha_0} \{2 \cos \pi \Delta x\} \quad (\text{VIII.4.1.11})$$

$$\text{où : } \alpha_0 = \frac{\Delta t}{R_e \Delta x^2} \quad (\text{VIII.4.1.12})$$

Nous devons insister sur le fait que la détermination du coefficient optimal de convergence selon les expressions (VIII.4.10) (VIII.4.11) et (VIII.4.12) ne correspondent pas rigoureusement à l'itération donnée par les expressions (VIII.3.3.1, 2). Toutefois, au cours des essais numériques, la formule (VIII.4.10) nous a été un guide précieux.

---

## CHAPITRE IX

## VERIFICATION PRELIMINAIRE DE LA METHODE ITERATIVE

## DES VARIABLES PREMIERES

Avant de procéder à l'étude numérique du problème diphasique, nous avons vérifié au préalable la justesse et la précision de la méthode I.V.P. Deux problèmes ont été retenus : la circulation d'un fluide visqueux à l'intérieur d'une cavité rectangulaire (figure 72 a) et l'écoulement unidimensionnel dans un conduit rectangulaire (figure 72 b).

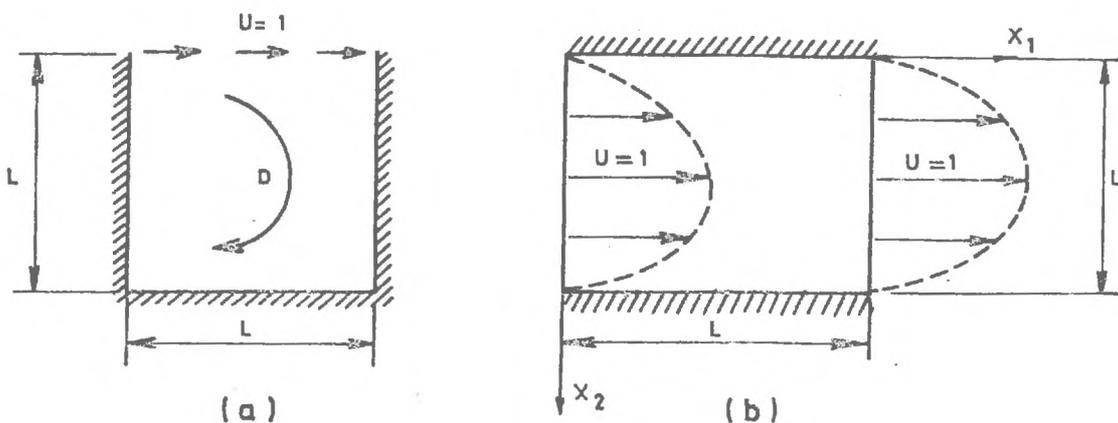


Figure 72.

Le premier problème constitue le prototype des écoulements à lignes de courant fermées et il a été largement étudié dans la littérature. Nous avons pu ainsi vérifier la justesse et la précision des résultats de nos expériences numériques. Le deuxième problème, quoique trivial, permet d'éprouver la méthode numérique dans le cas où il y a des vitesses perpendiculaires à la frontière (vitesses de suction).

En reprenant la chronologie de nos expériences, nous avons pensé tout au début de ce travail, que l'association d'un algorithme implicite à la méthode I.V.P. présenterait beaucoup d'avantages. En effet, compte tenu de la stabilité inconditionnelle de l'opérateur implicite à l'intérieur du domaine, nous pouvons choisir un pas de temps  $\Delta t$  assez large, ce qui réduit le temps réel du calcul. Quant à la précision il suffit de prendre  $\Delta t = O(\Delta x^2)$ , afin que l'approximation globale soit du second ordre par rapport au pas du maillage.

Nous avons donc expérimenté tout d'abord l'algorithme implicite présenté dans le paragraphe VIII.2.3. Cet algorithme, lié à la méthode des directions alternées, permet la désintégration de l'opérateur différentiel à une dimension ; nous pouvons l'appeler "méthode localement unidimensionnelle" (I.V.P.-L.U.D.). Toutefois, les essais numériques que nous allons présenter, nous ont révélé un certain nombre d'inconvénients de la part de cette méthode. C'est pour cela que nous avons repris nos essais avec un schéma permettant de calculer les champs des vitesses auxiliaires de manière explicite. Nous allons vérifier dans la suite de ce travail, que cette version de la méthode I.V.P. associée aux maillages décalés, est un moyen de calcul particulièrement efficace.

## IX.1. ESSAIS NUMERIQUES SUIVANT L'ALGORITHME IMPLICITE (I.V.P.-L.U.D.)

### IX.1.1. Organisation du calcul

La figure 73 résume les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites du problème de la circulation d'un fluide visqueux dans une cavité.

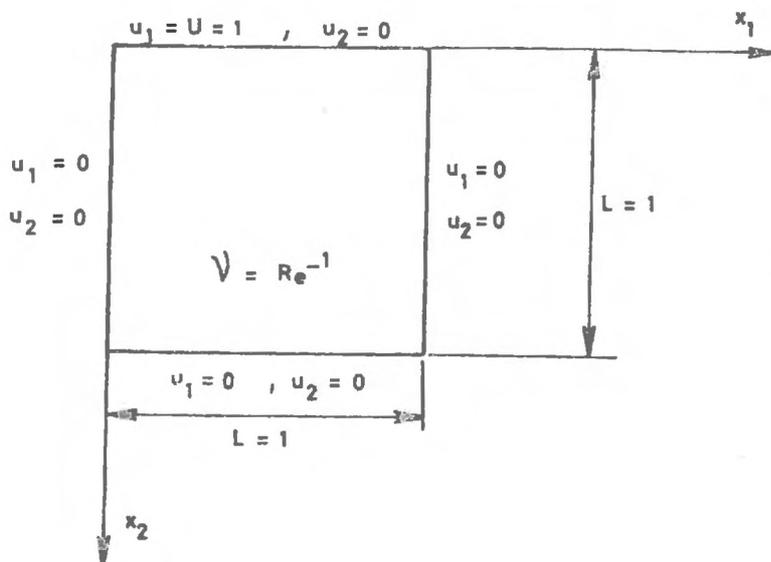


Figure 73.

La vitesse de référence  $U$  est la vitesse horizontale et uniforme imposée le long de la face supérieure, tandis que la longueur de référence  $L$  correspond à la dimension du domaine carré. Le choix de ces grandeurs caractéristiques nous permet de dire que la viscosité cinématique du fluide en mouvement  $\nu$  est égale à  $1/R_e$  où  $R_e$  est le nombre de Reynolds.

La méthode numérique permet d'obtenir les solutions en régime non permanent par la suite d'une brusque application des conditions aux limites. On impose donc à  $t = 0$  les vitesses sur la limite supérieure :

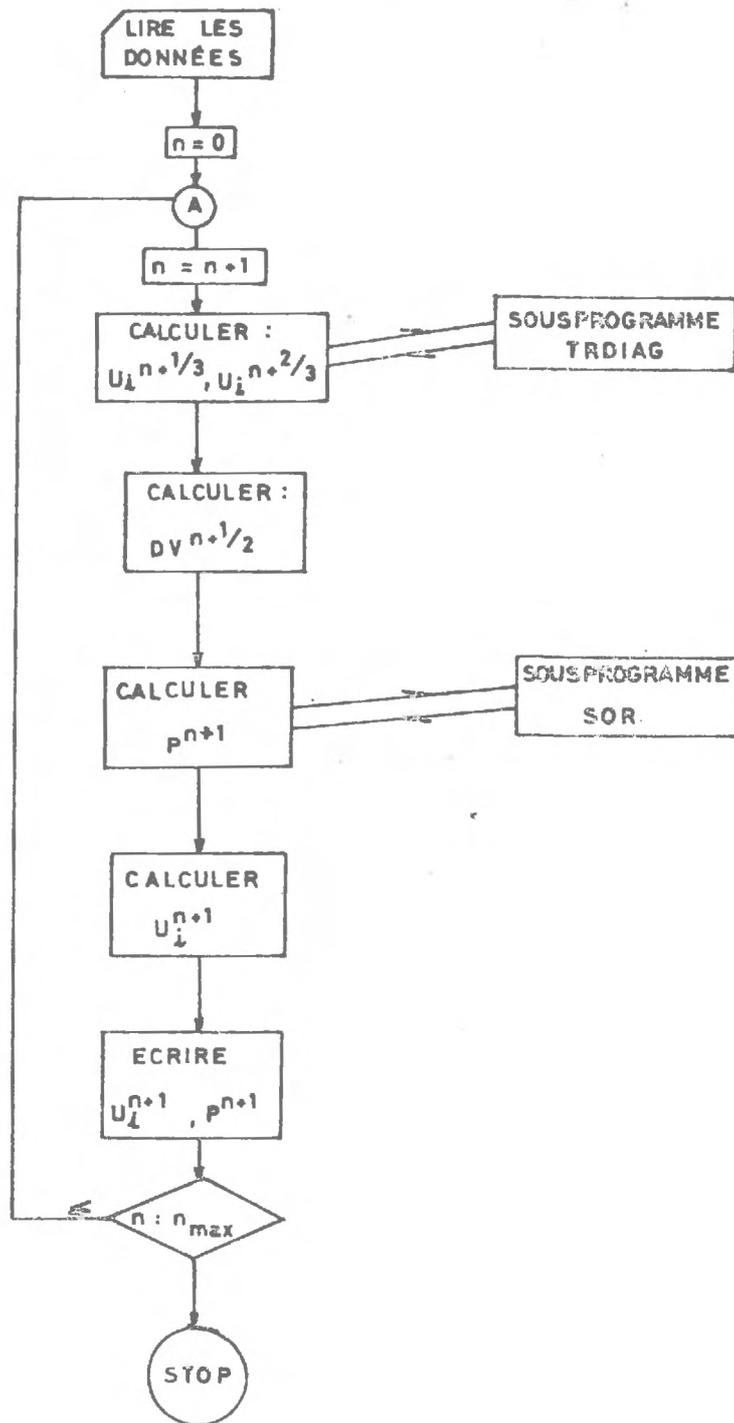
$$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad 0 < x_1 < 1 \quad , \quad x_2 = 0 \quad (\text{IX.1.1.1})$$

et nous atteignons le régime permanent comme la limite asymptotique de l'écoulement instationnaire. Dans la plupart des cas, nous sommes partis d'une solution initiale très grossière en posant les vitesses et les pressions nulles dans tout le domaine. Etant donné les conditions aux limites IX.1.1.1, le champ des vitesses initial ne vérifie pas l'équation de la continuité. Ceci n'est pas grave puisque l'algorithme I.V.P. permet d'obtenir par itérations au pas de temps suivant, un champ de vitesses conservatif.

Le programme du calcul, rédigé en FORTRAN IV, comprend un programme principal et deux sous-programmes. Le premier sous-programme appelé TROIAG, traite les systèmes linéaires à une dimension, qui nous donnent les vitesses auxiliaires  $u_i^{n+1/3}$ ,  $u_i^{n+2/3}$ . Comme nous l'avons vu dans le paragraphe (VIII.2.3) la matrice de ces systèmes est tridiagonale et nous l'avons inversée suivant une adaptation de l'élimination Gaussienne .

Le deuxième sous-programme, appelé SOR, effectue l'itération sur la pression, suivant la formule (VIII.2.2.27). L'itération est analogue à une surrelaxation et on estime au préalable la valeur du coefficient  $(\Delta\tau)_{\text{opt}}$ .

Le calcul est effectué selon l'organigramme suivant :



### IX.1.2. Stabilité et précision de l'algorithme I.V.P.-L.U.D.

Les premières expériences ont été effectuées sur un maillage centré. On définit donc au même point les vitesses  $u_i$  et la pression  $p$ . Nous avons vérifié tout d'abord la stabilité inconditionnelle de l'algorithme implicite en choisissant un pas de temps  $\Delta t$  très large. Expérimentalement, nous pouvons juger de la stabilité du calcul en suivant la variation dans le temps de la valeur maximale des variables dépendantes : si la méthode est stable, le graphe ne présente pas des oscillations ou bien les oscillations initiales finissent par s'amortir.

Pour chaque expérience numérique, nous distinguons deux notions :

#### a) Convergence de l'itération sur l'équation de la pression

Le critère de convergence que nous avons adopté est le suivant :

$$\frac{\max_{rs} |p^{n+1,m+1} - p^{n+1,m}|}{\max_{rs} |p^{n+1,m}|} \leq \delta \quad (\text{IX.1.2.1})$$

où  $\delta$  est une constante de l'ordre de  $O(\Delta x^2)$  ou de  $O(\Delta x^3)$ . Dans la plupart des cas, nous avons pris :  $\delta = 8 \times 10^{-4}$ .

#### b) Convergence dans le temps

L'obtention du régime permanent est reconnue selon le critère :

$$\frac{\max_{rs} |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\max_{rs} |u_i^n|} \leq c \quad (\text{IX.1.2.2})$$

où  $c$  a une valeur que nous avons choisi de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$ .

Dans le tableau suivant, nous présentons les caractéristiques de l'essai 1 A.

N°	$R_e$	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	$c$	Temps de calcul sur IBM 7044
1A	100	1/10	$0,2 = \frac{2 \Delta x}{\Delta t}$	$0,001 = \frac{\Delta x^3}{\Delta t^3}$	$10^{-4}$	2' 50"

Dans la figure 74, nous avons porté la valeur  $\left| \frac{u_1}{U} \right|_{\max}$  du domaine D en fonction du temps. On voit bien l'amortissement asymptotique de la solution selon une loi de type exponentiel. Etant donné que le pas de temps est large et que la précision du schéma numérique est de l'ordre de  $O(\Delta t)$ , la solution obtenue est assez loin de la solution exacte. Toutefois, la description qualitative du phénomène est correcte. En effet, après 50 pas de calcul, c'est à dire au temps adimensionnel  $t = 10$ , nous obtenons d'après le critère IX.1.2.2., la solution en régime permanent. Dans la figure 75, la représentation des vecteurs vitesse montre bien le mouvement tourbillonnaire du fluide.

Nous avons par la suite examiné la justesse et la précision de la méthode en affinant le pas du maillage  $\Delta x$  et le pas du temps  $\Delta t$ . Le tableau suivant, résume les caractéristiques des essais, que nous avons en général effectués sur l'ordinateur C.I.I. 10070.

N°	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	c	Temps de calcul sur CII 10070
2A	1/10	$0,02=2\Delta x^2$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	1 mn 30 s
3A	1/10	$0,01 = \Delta x^2$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	3 mn 0 s
4A	1/10	$0,005=\frac{1}{2} \Delta x^2$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	5 mn 30 s
5A	1/14	$0,01\approx 2\Delta x^2$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	4 mn 45 s
6A	1/14	$0,01\approx 2\Delta x^2$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sur IBM 7044 $\approx$ 20 mn
7A	1/14	$0,005\approx \Delta x^2$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	10 mn 15 s
8A	1/20	$0,005=2\Delta x^2$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	17 mn 24 s

Les figures 76 a, b, c, représentent la distribution des vitesses horizontales le long de la ligne verticale au centre de la cavité. Dans ces figures, les résultats sont comparés aux solutions obtenues par MILLS (1965, [77]) et BUGGRAF (1966, [78]). Tous les deux ont utilisé la méthode de la fonction de courant et de la fonction tourbillon afin de résoudre les équations de NAVIER-STOKES en régime permanent. BUGGRAF [78] a utilisé des maillages très fins (50 x 50) et nous pouvons admettre que la solution qu'il propose est la solution exacte.

L'examen des figures 76 a, b, c, entraîne les remarques suivantes :

1/ Pour un maillage donné, la diminution du pas de temps  $\Delta t$  entraîne une diminution de l'erreur de l'approximation. Néanmoins, la réduction de l'erreur n'est pas appréciable d'autant plus que le temps du calcul augmente de manière inversement proportionnelle au pas  $\Delta t$ .

2/ La précision du calcul est déterminé surtout par la dimension du pas de maillage  $\Delta x$ . Du point de vue physique, ceci est naturel, puisque la structure de l'écoulement, produit des gradients de vitesse et de pression très élevés et dont l'appréciation n'est possible que pour  $\Delta x$  faible.

3/ D'une manière générale, l'algorithme souffre d'un manque de précision. En cherchant les causes, nous nous sommes aperçus que les erreurs provenaient surtout des approximations aux limites pour le calcul des vitesses auxiliaires.

En effet, nous avons déjà remarqué dans le paragraphe (VIII.2.3) qu'étant donné le caractère implicite de l'algorithme, on doit connaître les conditions aux limites des vitesses auxiliaires. Les essais que nous avons déjà présentés, utilisent comme vitesses auxiliaires sur les limites les vitesses obtenues d'après les formules (VIII.2.3.16), à savoir :

$$u_i^{n+1/3} = (I + \Delta t \Lambda_1) u_i^n + O(\Delta t) \quad (\text{IX.1.2.3})$$

$$u_i^{n+2/3} = (I + \Delta t \Lambda_2) u_i^n + O(\Delta t) \quad (\text{IX.1.2.4})$$

L'utilisation des expressions (VIII.2.3.22) ne nous a pas permis d'obtenir une itération convergente, probablement à cause de la brusque augmentation de la pression au voisinage de  $t = 0$  (due à la discontinuité provoquée par les conditions aux limites).

Pour mieux juger de l'importance des conditions aux limites intermédiaires, nous avons effectué l'essai N° 9A en posant comme vitesses auxiliaires :

$$u_i^{n+1/3} = u_i^{n+2/3} = u_i^n + O(\Delta t) \quad (\text{IX.1.2.5})$$

La comparaison entre les résultats des essais 8A et 9A dans la figure 76 d, souligne l'importance des conditions aux limites intermédiaires.

L'examen des résultats ci-dessus, nous montre que l'amplitude de l'erreur se propage selon une longueur d'onde égale à  $2\Delta x$ . Ceci est normal lorsqu'on songe qu'en définissant la pression sur les noeuds du maillage, l'itération sur la pression s'effectue sur un maillage de pas  $2 \Delta x$ .

Tous ces inconvénients disparaissent lorsqu'on adopte les maillages décalés, que nous avons présenté dans le paragraphe (VIII.2.2) en même temps qu'un schéma explicite pour le calcul des vitesses auxiliaires.

## IX.2. ESSAIS NUMERIQUES SUIVANT L'ALGORITHME SEMI-EXPLICITE

Cet algorithme utilise un schéma explicite de la forme (VIII.2.2.20, 22) pour le calcul des vitesses auxiliaires et un schéma implicite pour le calcul de la pression (équations VIII.2.2.27). L'organisation du calcul suit l'organigramme de la méthode I.V.P.-L.U.D. (paragraphe IX.1) à la seule exception que les vitesses auxiliaires sont calculées directement dans le programme principal.

### IX.2.1. Stabilité, justesse et précision

Avant tout, les essais 1B et 2B nous ont permis de vérifier les critères de stabilité (VIII.4.13), (VIII.4.14). Voici les caractéristiques de ces essais :

N°	$R_e$	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	$c$	Temps de calcul sur CII 10070
1B	1	1/20	$5 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$	$10^{-5}$	5,4 mn
2B	100	1/20	0,02	$8 \times 10^{-4}$	$10^{-5}$	8,8 mn

Dans la figure 77 on a représenté la variation de la pression maximale adimensionnelle dans le domaine D, en fonction du temps (essai 1B). Etant donné que les conditions initiales sont très défavorables à la suite de l'application brusque des conditions aux limites, on observe une augmentation importante de la pression au cours des premiers pas de temps. Cette augmentation tend à compenser la discontinuité provoquée par l'application des conditions aux limites et tend à se stabiliser par la suite lorsqu'on s'approche du régime permanent.

Sur le plan du calcul, ceci correspond à un nombre élevé d'itérations pour atteindre la convergence sur la pression, aux premiers pas de temps ; peu d'itérations suffisent par la suite, pour arriver au même résultat. Dans la figure 78, nous pouvons nous rendre compte de la diminution du nombre des itérations en fonction du temps.

Ce nombre d'itérations dépend fortement du choix du paramètre  $\Delta \tau$ , qui intervient dans l'itération sur la pression. Etant donné que cette itération intervient à chaque pas de temps, il est absolument nécessaire pour l'économie du calcul, de rechercher le paramètre  $\Delta \tau$  optimal. Dans la figure 79, nous avons porté la variation du nombre des itérations cumulées après 50 pas de temps, en fonction du paramètre  $\Delta \tau$ . Dans ce cas particulier, des conditions aux limites, nous avons trouvé :

$$(\Delta \tau)_{\text{opt}} = 1,12 \left( \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \right)$$

Ce résultat confirme les prévisions théoriques que nous avons données dans le paragraphe (VIII.4.1).

Afin de vérifier maintenant la justesse et la précision de la méthode I.V.P., nous comparons dans la figure 80, la distribution des vitesses horizontales, le long de l'axe de symétrie de la cavité, obtenue selon l'essai 2B, aux résultats de BURGGRAF [78]. Nous constatons que la concordance est remarquable.

L'avantage considérable de la méthode I.V.P. explicite, c'est que nous pouvons avoir une grande précision sur les vitesses et surtout les pressions de manière économique. En effet, pour l'essai 2B par exemple ( $R_e = 100$ ,  $\Delta x = 1/20$ ,  $\Delta t = 0,02$ ) on atteint le régime permanent après 8,8 mn de calcul sur C.I.I. 10070 (compilation comprise).

Examinons maintenant le problème-test de l'écoulement d'un fluide dans un conduit prismatique (figure 72 b). La solution est triviale puisqu'elle nous donne le profil parabolique de Poiseuille dans tout le domaine. Toutefois, l'utilisation de l'algorithme I.V.P. complet à deux dimensions va nous permettre d'examiner son comportement, lorsqu'il y a intervention des vitesses de suction sur les limites.

Dans le carré  $0 \leq x_1 \leq 1$ ,  $0 \leq x_2 \leq 1$ , imposons donc les conditions aux limites :

$$u_1 = 4 x_2 (1 - x_2), \quad u_2 = 0 \quad \text{pour } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = 1$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{pour } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 1$$

La vitesse de référence est donc la vitesse maximale sur la ligne desymétrie, tandis que la longueur L du carré est choisie comme longueur de référence. La solution exacte du problème stationnaire est la solution de Poiseuille :

$$u_1 = 4 x_2 (1 - x_2), \quad u_2 = 0, \quad p = C - x_1 \quad \text{dans } D$$

C est une constante arbitraire.

Pour obtenir la solution numérique, nous imposons brusquement au temps  $t = 0$ , les conditions aux limites les vitesses  $u_1$  et les pressions  $p$  étant nulles à tout point à l'intérieur du domaine. La solution du régime permanent est donc atteinte comme la limite asymptotique du régime transitoire. Nous avons constaté que les résultats sont identiques pour n'importe quel nombre de Reynolds.

Le tableau ci-dessous, donne les caractéristiques de l'essai 3B.

N°	$R_e$	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	$c$	Temps de calcul sur CII 10070
3B	100	1/20	0,02	$8 \times 10^{-4}$	$10^{-5}$	4,77 mn

En comparant les résultats du régime permanent à la solution de Poiseuille, les erreurs absolues maximales ont été les suivantes :

$$e(u_1) = 2,5 \times 10^{-3} \quad , \quad e(u_2) = 2 \times 10^{-5} \quad , \quad e(p) = 1,5 \times 10^{-3}$$

Nous avons donc pu constater que la méthode numérique se comporte bien dans le cas où on a un écoulement à lignes de courant fermées ou lorsqu'interviennent les vitesses de suction.

Nous allons maintenant étudier le problème de l'écoulement dans une succession de pores qui fera apparaître ces deux effets juxtaposés.

## CHAPITRE X

STRUCTURE HYDRODYNAMIQUE ET ENERGETIQUE  
DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX  
DANS UNE SUCCESSION PERIODIQUE DE CONVERGENTS-DIVERGENTS

---

Nous disposons maintenant de tous les éléments qui nous permettent d'aborder le problème que nous nous sommes posé au début de cette deuxième partie de notre travail. Ayant schématisé une succession de pores suivant un schéma périodique d'éléments convergents et divergents, nous allons étudier par voie numérique les mécanismes fondamentaux du déplacement d'un fluide visqueux par un autre. Dans un premier temps, nous nous sommes efforcé d'étudier en détail la structure hydrodynamique et énergétique du problème en écoulement d'un seul fluide.

### X.1. INTERET DU PROBLEME ET SYNTHÈSE DES RESULTATS ANTERIEURS

L'écoulement laminaire d'un fluide incompressible dans des canaux non prismatiques, présente des caractéristiques très particulières, la géométrie du domaine faisant apparaître, parfois de manière spectaculaire, des tourbillons à la suite d'un décollement des lignes de courant. La détermination des caractéristiques hydrodynamiques de ces tourbillons, et en particulier l'interaction énergi-

que entre le domaine d'écoulement à lignes de courant fermées et l'écoulement principal, présente un caractère fondamental.

Lorsqu'on essaie d'étudier l'effet des irrégularités des parois sur la structure de l'écoulement par voie analytique approchée, le problème devient vite inextricable à cause de l'importance des termes non linéaires intervenant dans les équations de NAVIER-STOKES, en fonction de la géométrie du domaine et du nombre de Reynolds.

La plupart des travaux antérieurs étudient le problème d'une variation locale brusque ou régulière de la section par voie numérique (MACAGNO et HUNG, 1967, [60] ) ; (BARRE, 1968, [62] ) ; (ALEIX, 1972, [63] ) ; (LÉE et FUNG, 1970, [79] ). FORRESTER et YOUNG ont étudié le même problème par voie analytique approchée (1970, [80] ). CHOW (1970, [81] ) et récemment CHOW et SODA (1972, [82] ) ont utilisé la méthode des perturbations, afin d'étudier l'écoulement dans un tube à section périodiquement variable ; le petit paramètre est le rapport entre l'amplitude de la rugosité des parois sur le diamètre moyen du tube ou le diamètre moyen sur la longueur d'onde des parois. Les résultats obtenus sont qualitatifs et en tout cas valables pour les faibles nombres de Reynolds.

Le tableau VII, résume les caractéristiques des travaux antérieurs.

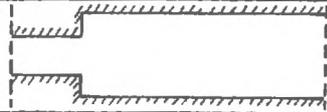
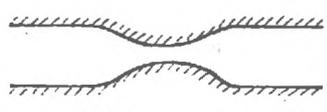
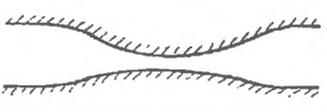
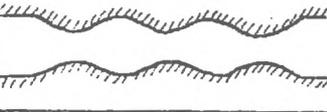
Auteurs	Problème	Méthode d'approche		
		Expérience	Calcul numérique	Analytique approchée
MACAGNO et HUNG (1967)		OUI	OUI	NON
BARRE (1968)		NON	OUI	NON
ALEIX (1972)		NON	OUI	NON
FUNG et LEE (1970)		NON	OUI	NON
FORRESTER et YOUNG (1970)		OUI	NON	OUI
CHOW (1970)		NON	NON	OUI
CHOW et SODA (1972)		NON	NON	OUI

Tableau VII. Synthèse des travaux antérieurs

Pour notre part, nous avons choisi une perturbation triangulaire de la forme des parois (figure 81).

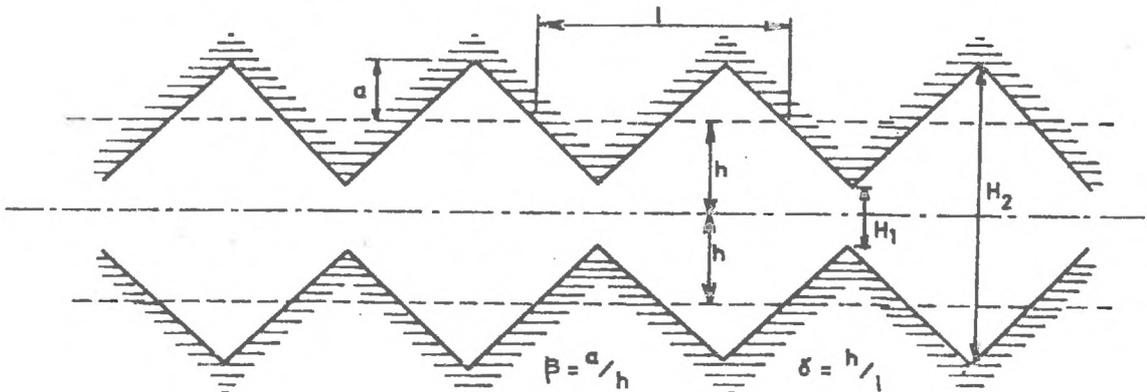


Figure 81.

Les rapports  $\beta = a/h$  et  $\gamma = h/\lambda$  nous fixent la géométrie du domaine ;  $a$  est l'amplitude et  $\lambda$  la longueur d'onde des parois irrégulières.

En fait, la géométrie de la figure a été proposée par HOUPEURT (1959, [83]) en tant que modèle analogique du problème de l'écoulement d'un fluide visqueux en milieu poreux. Les expériences faites au laboratoire (CHAUVETEAU, 1965, [25]), (BATRA et col., 1970, [84]) ont montré que la corrélation entre le coefficient des pertes de charge  $\lambda$  et le nombre de Reynolds est de la même forme dans le modèle et dans un milieu poreux naturel. Le modèle analogique sert ainsi à élucider le domaine non linéaire de la loi des pertes de charge en écoulement laminaire.

Le même problème a retrouvé depuis quelques années, son actualité afin d'étudier l'écoulement du sang dans les artères de l'homme. En effet, les artères humaines présentent des rétrécissements (sténoses) qui modifient fortement les conditions de l'écoulement du sang et sont à l'origine de certaines maladies. Par exemple, l'augmentation de la résistance à l'écoulement, l'existence de régions à basse pression, qui provoquent un effet de succion ou de zones de fortes contraintes, peuvent endommager les globules rouges et détériorer les parois surtout dans les zones de séparation où il y a manque d'oxygène.

Dans ce qui suit, nous étudions en détail l'écoulement plan d'un fluide visqueux dans la géométrie de la figure 81. Le nombre de Reynolds varie entre 1 et 1000. Nous donnons par la suite les champs des contraintes et le bilan énergétique de l'écoulement.

## X.2. TRAITEMENT NUMERIQUE DU PROBLEME

### X.2.1. Définition du maillage et des conditions aux limites

Afin de faciliter la logique du programme numérique, le maillage a été choisi perpendiculaire au parois solides (figure 82).

Ceci simplifie les expressions aux différences sur la frontière.

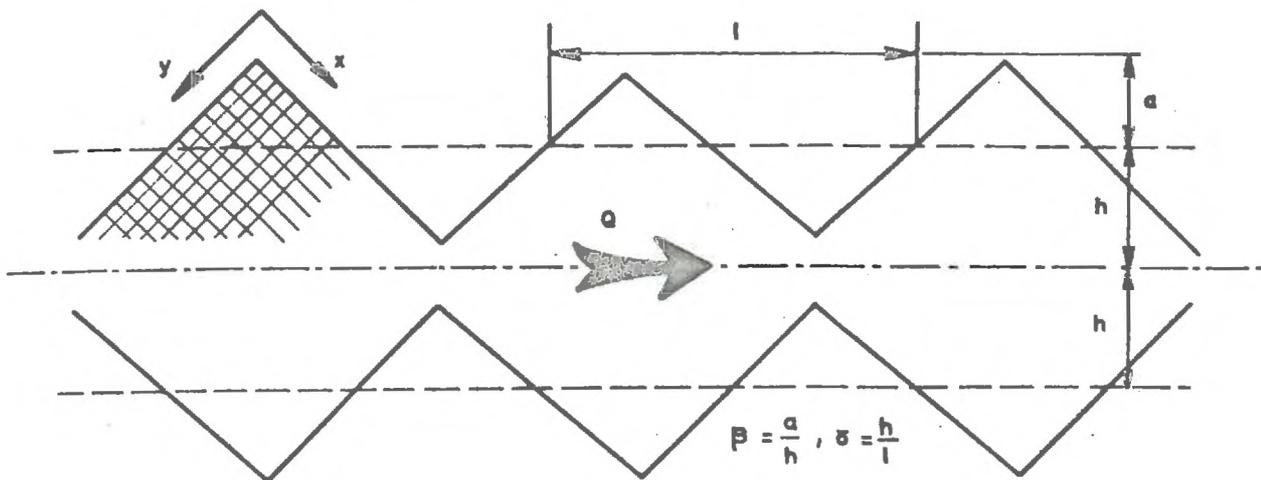


Figure 82.

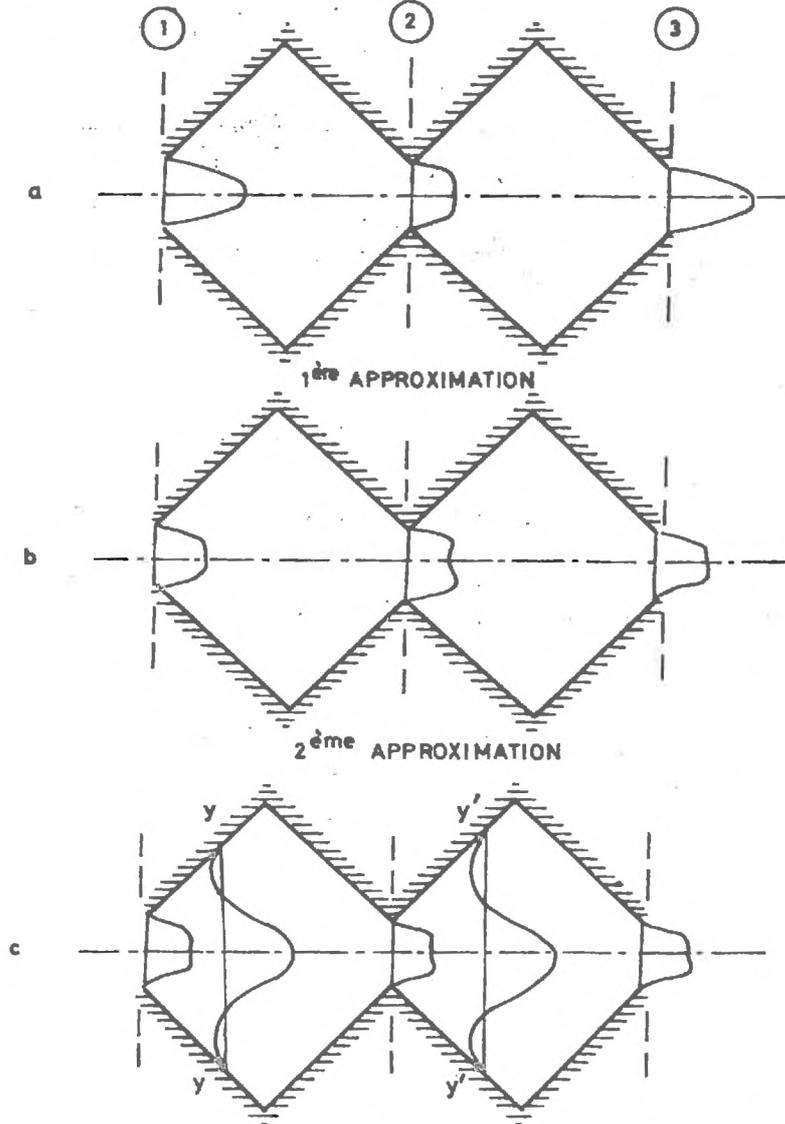
Les équations de NAVIER-STOKES ont été donc écrites par rapport au système de référence  $xy$  de la figure 82. En utilisant les conditions de symétrie par rapport à l'axe horizontal, les équations ont été intégrées dans la moitié du domaine.

En ce qui concerne les conditions d'entrée et de sortie, de sérieux problèmes se posent lorsqu'on ne connaît que la condition intégrale du débit  $Q$ . En effet, pour bien poser le problème numérique, nous devons imposer la distribution des vitesses le long des frontières d'entrée et de sortie. Or, nous pouvons obtenir le même débit  $Q$  selon une multitude de lois de distribution aplaties ou effilées.

Pour dépasser cette difficulté, nous avons utilisé la condition de périodicité de la solution en régime permanent. En effet, étant donné la périodicité de la géométrie, les caractéristiques hydrodynamiques telles que les vitesses et les pressions, doivent varier de manière périodique et avec la même longueur d'onde que la géométrie du domaine. Nous pouvons ainsi, au cours du temps, reprendre la distribution des vitesses calculées dans une section et l'imposer dans la section située en aval à une distance égale à la longueur d'onde.

Dans la pratique, nous avons procédé par itération dans deux éléments successifs.

Comme le montre la figure 83, en première approximation,



RÉGIME PÉRIODIQUE

Figure 83.

nous imposons une distribution de vitesses arbitraire, mais respectant la conservation du débit, à l'entrée ① et à la sortie ③. Nous suivons ensuite l'évolution de la solution dans le temps. Lorsque le régime permanent est atteint, nous obtenons une distribution des vitesses dans le col ② (figure 83 a).

En deuxième approximation, nous reprenons la distribution des vitesses de la section (2) et nous l'imposons en tant que condition à l'entrée et à la sortie ; en suivant la solution dans le temps, une deuxième approximation est obtenue, en régime permanent (figure 83 (b)).

Le même procédé itératif se répète jusqu'à obtenir la même distribution des vitesses dans les sections (1), (2) et (3) (figure 83 c). Dans ce cas, on atteint le régime périodique et permanent ; les vitesses dans deux sections (y-y) et (y'-y') (figure 83 c) situées sur une distance égale à la longueur d'onde  $\lambda$ , sont identiques.

Comme nous allons le préciser par la suite, le procédé itératif ci-dessus nous a donné pleine satisfaction ; le nombre des itérations nécessaires pour atteindre le régime périodique dépend du nombre de Reynolds et du choix de la première approximation.

Avant de présenter les résultats du calcul nous allons discuter de quelques problèmes de stabilité numérique et d'économie du calcul, que nous avons rencontrés au cours de cette étude.

### X.2.2. Stabilité et précision du calcul

La structure hydrodynamique du phénomène physique est largement influencée par le nombre de Reynolds, mais surtout par la géométrie non cylindrique du domaine d'écoulement. Cette géométrie, comme nous l'avons définie dans la figure 81, est déterminée par les paramètres adimensionnels  $\beta = a/h$  et  $\gamma = h/l$ . Pour  $\beta = 0$  le conduit devient prismatique, tandis que pour  $\beta = 1$  nous avons fermeture des cols. Dans la plupart de nos essais numériques, nous avons pris  $\beta = 2/3 = 0,667$ , ce qui correspond à un rapport des largeurs  $H_1/H_2 = 5$  (figure 81).

D'autre part, le paramètre  $\gamma = h/l$  fixe le rapport entre la largeur moyenne et la longueur d'onde des parois. Lorsque  $\gamma$  est petit, les cols apparaissent sur des longueurs d'onde importantes, tandis que pour  $\gamma$  grand on rencontre les rétrécissements beaucoup plus souvent. Pour nos essais, nous avons choisi  $\gamma = 3/8 = 0,375$ .

Le choix des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  nous a permis par la suite de comparer les résultats du calcul numérique aux résultats expérimentaux obtenus par G. CHAUVETEAU (1965, [25]).

Compte tenu de la géométrie non cylindrique du domaine, on peut s'attendre à des gradients de vitesse élevés et à une structure de l'écoulement très déformée. Le problème devient crucial juste après les cols où l'échelle locale du phénomène est très fine, par la suite d'un décollement. Dans cette zone, l'intensité et le gradient de vitesse devient élevé, ce qui entraîne des risques d'instabilité. Dans la pratique du calcul, les critères de stabilité que nous avons examinés dans le paragraphe VIII.4 ont été un guide précieux. Dans la figure 84 nous montrons comment une diminution du pas de temps  $\Delta t$ , peut nous conduire à un calcul stable. Dans cette figure, nous avons représenté les distributions des vitesses juste après le col, obtenues au cours des essais 3T et 4T. Les caractéristiques de ces essais sont les suivantes :

N°	$R_e$	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	remarques
3T	100	1/28	0,01	$8 \times 10^{-4}$	stabilité
4T	100	1/28	0,02	$8 \times 10^{-4}$	instabilité

Nous constatons qu'en régime non permanent ( $t = 0,1$ ), l'équation de continuité est satisfaite pour les deux essais, mais que dans le cas de l'essai 4T, l'instabilité numérique provoque une distribution des vitesses qui n'a aucun sens physique. Ceci peut être

expliqué à partir des critères (VIII.4.20) et (VIII.4.21). En effet, comme le montre la figure 84, dans la section située à  $\frac{x}{L} = 0,4425$ , le gradient des vitesses maximum au point situé à une distance égale à  $y/H = 0,15$  par rapport à l'axe. A ce point la vitesse est égale à 0,9. Lorsque  $\Delta t$  est égal à 0,02 le critère de la stabilité linéaire (VIII.4.20) est à peine respecté mais on viole le critère non linéaire (VIII.4.21) dans lequel intervient le terme supplémentaire contenant le gradient des vitesses. En choisissant  $\Delta t = 0,01$  on respecte strictement les deux critères et le calcul devient stable.

On aboutit aux mêmes observations lorsqu'on étudie l'évolution de la pression maximale dans le domaine D au cours du temps. Dans le cas de l'essai 3T, nous obtenons une stabilisation asymptotique qui suit une brusque augmentation, tandis que l'essai 4T nous amène à une divergence exponentielle et monotone ; ceci provient de la diffusion numérique qui masque la diffusion due à la viscosité en conduisant à un coefficient de diffusion globale négatif.

Nous allons maintenant examiner l'influence du temps de temps et du pas de maillage sur la précision du calcul. Le pas de temps, choisi selon les critères de stabilité, est en général assez faible et n'influence pas de beaucoup la précision du calcul. Nous avons donc insisté surtout sur l'influence du pas de maillage  $\Delta x$ .

Dans la figure 85, nous comparons les profils des vitesses longitudinales en régime non permanent, calculées avec les maillages 1/16, 1/20, 1/28. Le nombre de Reynolds est égal à 100 et le temps adimensionnel  $t = 2$ . Le tableau ci-dessous, résume les caractéristiques des trois essais.

N°	$R_e$	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	$\sigma$	Temps de calcul sur CII 10070
1T	100	1/16	0,02	$8 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$	13,5 mn (régime périodique)
2T	100	1/20	0,02	$8 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$	18,5 mn (régime périodique)
3T	100	1/28	0,01	$8 \times 10^{-4}$	-	16,0 mn (après 100 pas)

Pour fixer les idées sur l'erreur, voici les valeurs des vitesses calculées à la distance  $y/H = 0,20$ , où les trois maillages ont le point commun :

$x/l$	Maillages		
	1/16	1/20	1/28
- 0,25	0,4895	0,4907	0,4734
0	0,4932	0,4991	0,4851
0,50	0,4937	0,4976	0,4964

Vitesses  $u/U$  à  
 $y/H = 0,20$

Dans la section  $x/l$  où apparaît le décollement, les erreurs sont légèrement plus importantes. L'écart maximal par rapport aux résultats afférents au maillage 1/16 est de l'ordre de 1,2 % pour le maillage 1/20 et 3,3 % pour 1/28.

La précision globale est encore meilleure, lorsqu'on tend vers le régime permanent et périodique. Dans la figure 86 nous avons tracé les profils de vitesse en régime périodique calculés avec les maillages 1/16 et 1/20 (essais 1T, 2T). Dans le tableau, nous comparons les résultats à l'abscisse  $y/H = 0,20$ .

$x/l$	1/16	1/20
- 0,50	0,4856	0,4806
- 0,25	0,5683	0,5605
0	0,5370	0,5319

Vitesses  $v/U$   
à  $y/H = 0,20$

Nous constatons que la différence entre les valeurs calculées est de l'ordre de 1,4 %.

La précision sur la pression est aussi très bonne. Dans la figure 87 nous avons tracé la répartition du coefficient de la pression adimensionnel  $C_p = (p - p_I)/\rho U^2$  le long de l'axe du modèle pour les maillages 1/16 et 1/20. Le régime est permanent et périodique ;  $p_I$  est la pression dans la section élargie.

Etant donné la bonne précision de la méthode, nous avons effectué la plupart de nos essais avec le maillage 1/16. Avant de présenter les résultats du calcul, nous allons examiner la question des conditions initiales et de l'économie du calcul.

### X.2.3. Conditions initiales et économie du calcul

Le temps du calcul dépend du nombre des points du maillage  $N$  ( $\Delta x = 1/N$ ), du nombre de pas de temps nécessaires pour obtenir le régime permanent  $NT$  ( $\Delta t = t_\infty/NT$ ) et du nombre des itérations nécessaires pour obtenir la convergence de la pression, à chaque pas de temps. En général, le temps du calcul varie comme  $N^2 \times NT$ .

Entre le pas de temps  $\Delta t$  et le nombre des itérations sur la pression, il y a une corrélation. En effet, nous avons constaté que les pas de temps larges, nécessitent un nombre d'itérations pour la pression plus important, mais le temps total du calcul est réduit. En tout cas, les résultats du régime non permanent peuvent être plus précis avec un pas de temps réduit, mais le choix de  $\Delta t$  n'affecte pas la précision du régime permanent. Lorsqu'on s'intéresse surtout aux caractéristiques du régime permanent, nous avons une économie sur le temps de calcul en choisissant un  $\Delta t$  large et très proche de la limite d'instabilité.

Le coût du calcul dépend surtout de la vitesse de convergence de l'équation de la pression, fonction du paramètre de relaxation  $\Delta r$ . Au cours des essais préliminaires, nous avons constaté que pour notre problème, la valeur  $(\Delta r)_{opt}$  dépasse de 20 à 30 % la valeur critique de stabilité  $\Delta x^2/2\Delta t$  (voir aussi paragraphe VIII.4.1). Néanmoins, un nombre excessif d'itérations a été observé pendant les premiers pas de temps, et ceci à cause des conditions initiales très défavorables (vitesses et pressions nulles dans tout le domaine sauf sur les frontières d'entrée et de sortie).

Pour diminuer le temps de calcul, nous avons donné comme distribution des vitesses initiales la distribution qui résulte de la solution des équations de STOKES ( $R_e = 0$ ) dans un simple convergent ou divergent (BERKER, [85]).

Nous avons admis l'approximation suivante : à l'intérieur du domaine d'écoulement, il existe deux zones  $D_1$  et  $D_2$  dans lesquelles les lignes de courant sont des droites concourantes vers les points A ou B (figure 88).

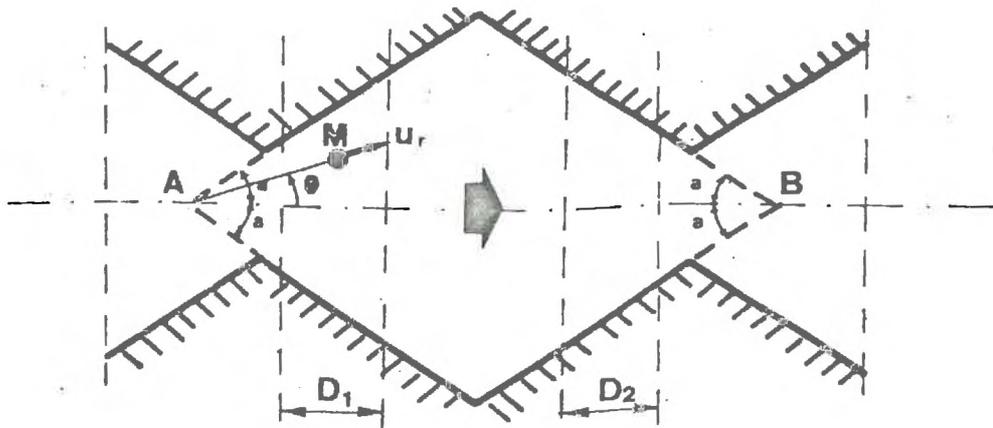


Figure 88.

En coordonnées polaires, pour  $M \in D_1$ , nous avons:

$$\psi = F(\theta)$$

$$u_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \cdot f(\theta) \quad (\text{X.9.3.1})$$

$$u_\theta = 0 \quad (\text{X.9.3.2})$$

où  $\psi$  est la fonction de courant et  $u_r$ ,  $u_\theta$  les composantes du vecteur vitesse au point M. Compte tenu de ces relations, les équations de STOKES deviennent :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (\text{X.9.3.3})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (\text{X.9.3.4})$$

En éliminant la pression entre les équations (X.2.3.3) et (X.2.3.4) et compte tenu de la relation (X.2.3.1), on aboutit à l'équation différentielle :

$$f'' + 4 f' = 0 \quad (\text{X.2.3.5})$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$f = \frac{C}{4} + A \cos 2\theta + B \sin 2\theta \quad (\text{X.2.3.6})$$

En tenant compte des conditions :

$$\text{- aux limites : } f = 0 \text{ pour } \theta = \pm \alpha \quad (\text{X.2.3.7})$$

$$\text{- du débit : } \int_{-a}^{+\alpha} r u_r d\theta = \int_{-a}^{+\alpha} f(\theta) d\theta = Q \quad (\text{X.2.3.8})$$

on peut déterminer les constantes A, B, C dans l'équation (X.2.3.6). On trouve donc :

$$f(\theta) = Q \cdot \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\theta}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$$

et d'après (X.2.3.1) et (X.2.3.4) la solution :

$$u_r = \frac{Q}{r} \cdot \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\theta}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha} \quad (\text{X.2.3.9})$$

$$p = \frac{-\mu Q}{r^2} \cdot \frac{2 \cos 2\theta}{2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha} \quad (\text{X.2.3.10})$$

Nous avons donc effectué des essais numériques en partant d'une solution initiale de la forme (X.2.3.9). Il est évident que cette solution représente une bonne approximation aux faibles nombre de Reynolds, à l'intérieur des zones  $D_1$  et  $D_2$  de la figure 88, mais elle conduit à des incompatibilités dans la zone commune

de recouvrement. Ceci n'est pas grave, puisque l'algorithme numérique corrige automatiquement et par itérations, le champ des vitesses et des pressions ; l'équation de continuité et l'équation dynamique sont ainsi satisfaites pour un nombre de Reynolds imposé.

L'injection de la solution initiale (X.2.3.9) dans le calcul numérique nous a conduit à un gain de 40 % environ sur le temps de calcul aux premiers pas de temps. Pour illustrer ceci, nous présentons les résultats des essais 6T et 7T, dont les caractéristiques sont les suivantes :

N°	$R_e$	$\Delta x$	$\Delta t$	$\delta$	c	conditions initiales
6T	100	1/16	0,02	$8 \times 10^{-4}$	$10^{-4}$	$u = v = p = 0$
7T	100	1/16	0,02	$8 \times 10^{-4}$	$10^{-4}$	solution STOKES

Après 50 pas de temps de calcul 4023 itérations sur la pression sont nécessaires pour atteindre la solution dans le cas 6T, tandis que 1376 itérations suffisent pour l'essai 7T. Du point de vue temps de calcul 5 mn environ sont nécessaires pour l'essai 6T, tandis qu'on atteint la solution dans le cas 7T en moins de 3 mn ( $t = 1$ ). Dans la figure 89 nous pouvons constater que les instabilités initiales qui apparaissent au cours de l'essai 6T, disparaissent lorsqu'on part du régime de STOKES (essai 7T).

Si on s'intéresse plus particulièrement au régime permanent, nous pouvons avoir une économie supplémentaire sur le temps de calcul, en partant d'une solution initiale, qui correspond à un nombre de Reynolds assez proche au nombre de Reynolds qu'on étudie.

Le temps de calcul dépend enfin du choix des divers critères de convergence. Pour l'itération sur la pression, la valeur  $\delta = 8 \times 10^{-4}$  nous a donné satisfaction puisqu'il conduit à satisfaire l'équation de la continuité avec une précision de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Pour obtenir le régime périodique, l'itération sur les conditions aux limites, que nous avons définie dans le paragraphe (X.1.2) a été effectuée avec une précision allant de  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$  sur la vitesse maximale de la section contractée. Nous obtenons alors le régime périodique dans tout le domaine avec une bonne précision. Voici par exemple, les résultats obtenus pour l'essai 1T.

$y/H$	$x/l = - 0,50$	$x/l = + 0,50$
0	1,1340	1,1340
0,1	0,9297	0,9316
0,2	0,4856	0,4876
0,3	0,1229	0,1222
0,4	- 0,0289	- 0,0303
0,5	- 0,0431	- 0,0437
0,6	∅	∅

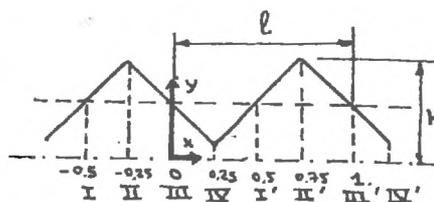


Figure 90.

$y/H$	$x/l = - 0,25$	$x/l = 0,75$
0	0,9330	0,9327
0,1	0,8263	0,8265
0,2	0,5683	0,5692
0,3	0,2896	0,2907
0,4	0,0829	0,0835
0,5	- 0,0341	- 0,0340
0,6	- 0,0766	- 0,0766
0,7	- 0,0665	- 0,0665
0,8	- 0,0325	- 0,0325
0,9	- 0,0052	- 0,0052
1,0	∅	∅

y/H	x/l = 0	x/l = + 1,0
0	0,8197	0,8194
0,1	0,7404	0,7402
0,2	0,5370	0,5372
0,3	0,2894	0,2900
0,4	0,0813	0,0820
0,5	- 0,0214	- 0,0210

y/H	x/l = 0,25	x/l = 1,25
0	1,140	1,140
0,1	1,075	1,075
0,2	∅	∅

En ce qui concerne les pressions, nous avons trouvé (figure 90) :

$$P_I - p_{II} = - 0,0314$$

$$P'_I - p'_{II} = - 0,0326$$

$$P_I - p_{III} = + 0,0250$$

$$P'_I - p'_{III} = + 0,0255$$

$$P_{III} - p_{IV} = 0,1476$$

$$P'_{III} - p'_{IV} = 0,1482$$

Les résultats ci-dessus nous montrent que le régime périodique est atteint avec une précision de l'ordre de  $10^{-3}$  pour les vitesses et pour les pressions.

### X.3. ETUDE DES CARACTERISTIQUES HYDRODYNAMIQUES

#### X.3.1. Visualisation automatique des lignes de courant

Disposant des vitesses  $u$  et  $v$ , nous pouvons calculer facilement la fonction de courant  $\psi$ , en intégrant les relations fondamentales :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{X.3.1.1})$$

Les conditions aux limites nécessitent quelques précautions.

Soit  $y = h(x)$  l'équation qui décrit la géométrie des parois solides (figure 91).

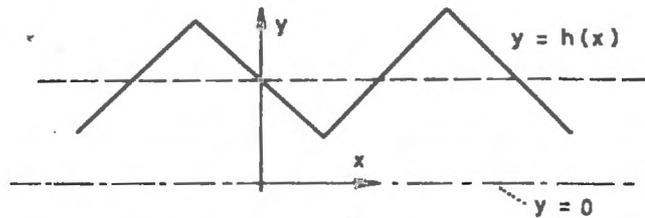


Figure 91.

La conservation du débit  $q$ , qui circule dans une couche d'unité d'épaisseur ( $q$  : cm<sup>2</sup>/s), le long de la section perpendiculaire à l'axe de l'écoulement, nous donne :

$$\int_0^{h(x)} u \, dy = \frac{q}{2} \quad \forall x \quad (\text{X.3.1.2})$$

Tenant compte de la définition de  $u$  en termes de  $\psi$  (X.3.1.1) l'expression (X.3.1.2) nous donne :

$$\psi_{h(x)} - \psi_0 = \frac{q}{2} \quad \forall x \quad (\text{X.3.1.3})$$

Nous introduisons alors la fonction de courant adimensionnelle  $\psi^* = -\psi/q$  et on a :

$$\psi_0^* - \psi_{h(x)}^* = 0,5 \quad (\text{X.3.1.4})$$

Nous avons choisi sur les parois solides  $\psi_{h(x)}^* = 0$  et d'après (X.3.1.4) sur l'axe nous avons :  $\psi_0^* = 0,5$ . Partant ainsi de la valeur  $\psi^* = 0$  aux limites et en écrivant sous forme discrète les équations (X.3.1.1) (mises sous forme adimensionnelle) nous pouvons calculer à tout point la fonction de courant  $\psi^*$ . Arrivés à l'axe, nous vérifions ainsi la justesse de la relation (X.3.1.4).

Au cours des expériences numériques, nous avons visualisé les lignes de courant de manière automatique. Les figures (92 a,b,c) qui suivent, montrent la morphologie des lignes de courant en écoulement transitoire. A la fin de l'expérience, le régime permanent et périodique est établi.

La visualisation automatique a été effectuée sur l'imprimante du calculateur CII 10070, ligne par ligne. Pour cela, nous avons rédigé un programme qui tout d'abord divise le domaine bidimensionnel de l'écoulement à un certain nombre de sous-domaines ; ensuite, chaque sous-domaine est rempli d'un caractère spécifique traduisant l'intensité de la fonction de courant. Dans les figures qui suivent, nous avons divisé le domaine où  $\psi^*$  est positive ( $\psi^* \in [0,0.5]$ ) en dix sous-domaines ; chaque zone correspond à une variation de la fonction de courant de 0,05 et elle est hachurée par le 0 lorsque  $0 \leq \psi^* < 0,05$ , le blanc lorsque  $0,05 \leq \psi^* < 0,10$ , le 1 pour  $0,10 \leq \psi^* < 0,15$ , le blanc pour l'intervalle suivant, et ainsi de suite. Dans le tourbillon qui apparaît après décollement, les valeurs de  $\psi^*$  deviennent négatives.

Pour bien signaler cette zone, nous avons choisi  $|\Delta\psi^*| = 0,01$  ( $\psi^* < 0$ ) et les caractères : blanc pour le premier sous-domaine, X pour le second, blanc pour le troisième, Y pour le quatrième et ainsi de suite.

Pour les figures 92 a,b,c le nombre de Reynolds est égal à 100, tandis que la solution initiale est la solution approchée de STOKES. Nous pouvons donc interpréter la naissance et le développement du tourbillon instationnaire comme la conséquence de la variation brutale à  $t = 0$  de la viscosité du fluide. En effet, en faisant varier le nombre de Reynolds de 0 (équations de STOKES) à 100, on diminue brusquement de la même proportion la viscosité du fluide; alors les forces d'inertie (non linéaires) prennent le dessus et les particules fluides sentent une accélération violente dans le convergent suivie d'une brusque décélération dans le divergent. Dans cette zone donc, l'écoulement est retardé et les gradients de pression sont dirigés en sens inverse du mouvement ; près de la paroi solide, la faible énergie cinétique des particules fluides ne leur permet pas de pénétrer dans les zones de pression croissante ; alors, elles sont transportées par le courant principal en créant par décollement un mouvement séparé. D'autre part, les particules qui se trouvent de l'autre côté du point de séparation, suivent le gradient de pression et se déplacent dans la direction opposée à l'écoulement extérieur. Il se crée donc un tourbillon laminaire dont le volume et l'intensité augmente dans le temps, son centre se déplaçant vers l'aval.

Dans la figure 93 nous suivons dans le temps adimensionnel et dans l'espace du point d'arrêt du tourbillon, ainsi que la variation de la valeur de  $\psi$  au même point. Cette valeur est négative et maximale et elle caractérise l'intensité du tourbillon. Comme nous le voyons dans la figure 93 après un brusque démarrage le tourbillon se stabilise en volume et en intensité ; nous atteignons en ce moment le régime permanent.

Le premier régime permanent est ainsi atteint au temps  $t = 4,16$ . En ce moment, nous commençons à appliquer l'itération sur les conditions aux limites (voir paragraphe X.2.1) et nous obtenons au temps  $t = 10,30$  le régime permanent et périodique. Le temps réel du calcul pour cet essai est de 10 mn environ sur calculateur CII 10070 avec la compilation et les sorties des lignes de courant comprises.

Nous avons, par la suite, obtenu des solutions en régime transitoire aux nombres de Reynolds inférieurs à 100. Lorsque le nombre  $R_e$  est très faible, partant toujours de la solution de STOKES, on atteint le régime permanent très vite sans une modification essentielle des lignes de courant.

En fixant notre attention sur le régime permanent et périodique, nous présentons dans les figures 94 a,b,c, l'influence du nombre de Reynolds sur la morphologie de l'écoulement.

En examinant ces figures, nous constatons que même aux faibles nombres de Reynolds, il existe un décollement très léger au voisinage de l'angle droit de la section élargie. Toutefois, ce décollement est imperceptible pour un nombre de Reynolds inférieur à 30. Pour  $R_e = 40$ , le décollement devient apparent et le tourbillon augmente progressivement jusqu'à  $R_e = 100$ . A partir de ce nombre, les lignes de courant deviennent presque des droites parallèles à l'axe, tandis que le point d'arrêt du tourbillon se déplace de plus en plus à l'aval. Nous avons tracé dans la figure 95 la variation de l'intensité maximale du tourbillon en fonction du nombre de Reynolds et dans la même figure, nous avons suivi le déplacement de son centre dans l'espace. Nous pouvons constater que lorsque le nombre de Reynolds devient très grand le tourbillon tend à occuper asymptotiquement une position fixe et qu'à partir de  $R_e = 400$ , il est définitivement bloqué entre le courant principal et les parois solides.

Connaissant ainsi la morphologie de l'écoulement, nous allons à présent examiner de plus près sa structure hydrodynamique et énergétique.

### X.3.2. Distribution des vitesses et des pressions

Les figures 96, 97, 98 montrent la distribution des vecteurs vitesse pour les nombres de Reynolds 1, 100 et 600. Nous constatons que les effets non linéaires dus aux forces d'inertie et à la géométrie du domaine interviennent de manière significative : d'un écoulement essentiellement symétrique dans la partie convergente et divergente (faible  $R_e$ ) on passe à un écoulement nettement asymétrique ( $R_e$  élevé). On peut déjà imaginer les particules fluides en mouvement dans une succession de pores : l'allongement des lignes de courant et la viscosité du fluide (nombre  $R_e$ ) peuvent donner lieu à des vitesses variées. Par conséquent, le temps de séjour de ces particules, peut varier beaucoup d'une ligne de courant à l'autre. Ceci apparaît mieux dans la figure 99 où on peut voir comment la géométrie et le nombre de Reynolds interviennent pour modifier les profils des vitesses longitudinales.

Les figures 100 a, b, montre le tracé des lignes isobares. Pour cette sortie automatique, nous avons utilisé la même méthode que pour la fonction de courant. Le programme divise le domaine de variation de la fonction de pression à un certain nombre d'intervalles auxquels on affecte les caractères A, blanc, B, blanc, C, blanc, D et ainsi de suite. Sur les figures 100 a, b, nous avons noté le nombre de Reynolds, la valeur maximale de la pression (VLMAX), la valeur minimale (VLMIN) et le nombre d'intervalles entre ces deux extrêmes (DI).

D'une manière générale, nous constatons qu'indépendamment du nombre de Reynolds, les lignes isobares partent du sommet de l'angle du col ; ce point constitue un point singulier pour la fonction  $p$ .

Pour mieux se rendre compte de la variation de la pression le long de l'axe et des parois, examinons la figure 101 . Nous remarquons qu'au faible nombre de Reynolds ( $R_e = 1$ ) la pression varie lentement : le long de l'axe, elle est une fonction décroissante,

monotone, ce qui montre que les particules fluides sont surtout sensibles à l'effort de frottement visqueux et peu aux variations d'énergie cinétique. Ceci peut être rapproché à l'écoulement de Poiseuille dans un conduit prismatique où la pression décroît linéairement dans le sens de l'écoulement. Par contre, la situation est totalement différente le long des parois solides, convergents et divergents: sur les deux, la pression est pratiquement constante, avec un grand décalage sur leurs valeurs absolues. La paroi convergente, subit une forte surpression par rapport à la paroi divergente. Ceci prouve une fois de plus, qu'à l'angle du col le gradient de la pression devient très grand. Théoriquement, il tend vers l'infini pour n'importe quel nombre de Reynolds (LADEVEZE et PEYRET, 1973, [86]). On doit préciser ici que la distribution des pressions est prise très près des parois à une distance égale au demi-pas du maillage, conformément à la définition des maillages décalés.

Pour le nombre de Reynolds élevé, la situation est complètement différente. Pour comprendre le sens de variation de la pression sur l'axe, tout d'abord, on doit revenir à l'image des lignes de courant (figure 94.b) qui définit la section vive de l'écoulement. La brusque augmentation de la vitesse juste au col, provoque une chute de la pression brutale, suivie d'une légère augmentation dans l'élargissement. D'autre part, pour interpréter la distribution des pressions le long de la paroi, on doit tenir compte du décollement et du tourbillon. Le long de la paroi convergente, le gradient des pressions est contraire au sens de l'écoulement principal et il représente la perte de pression due à l'écoulement secondaire due à la circulation du tourbillon. Le gradient de pression est également opposé au sens de l'écoulement principal, sur la paroi divergente.

Les considérations ci-dessus, nous permettent maintenant de mieux comprendre les figures 102 et 103 où nous avons tracé la distribution des pressions sur l'axe et sur la paroi, pour plusieurs nombres de Reynolds. Ces profils, complètent ainsi la représentation des tracés bidimensionnels que nous avons déjà présentés (figures 100, a, b).

### X.3.3. Comparaison avec l'expérience et conditions d'apparition de la turbulence

Les résultats de l'intégration numérique des équations de NAVIER-STOKES que nous venons d'exposer, confirment bien les expériences de visualisation sur modèle physique, conduites par G. CHAUVETEAU (1965, [25]).

La géométrie dans le plan de l'écoulement est la même dans le modèle physique et dans le modèle mathématique. Toutefois, il est très difficile d'obtenir expérimentalement un écoulement parfaitement plan puisqu'on est obligé de borner l'écoulement dans une couche, entre deux plaques parallèles : la présence des parois solides dans le sens perpendiculaire au plan de l'écoulement, rend ainsi le problème tridimensionnel, surtout au voisinage du col. Evidemment, on peut se rapprocher de l'écoulement plan, en choisissant judicieusement l'écartement entre les deux plaques.

Nous allons comparer d'abord les résultats du calcul aux résultats expérimentaux du point de vue qualitatif. Dans la figure 104 nous avons porté deux photographies prises par G. CHAUVETEAU, qui visualisent les lignes de courant par émission de filets colorés. Dans la même figure et pratiquement à la même échelle, nous avons représenté les lignes de courant visualisées automatiquement sur l'imprimante du calculateur CII 10070. Nous constatons d'abord qu'aux faibles nombres de Reynolds les résultats du calcul confirment le fait que les lignes de courant suivent le tracé des parois solides. Par ailleurs, lorsque le nombre de Reynolds devient plus important, le calcul met bien en évidence et conformément à l'observation physique le décollement des lignes de courant derrière le col.

Nous allons maintenant comparer la variation du coefficient des pertes de charge  $\lambda$ , calculé et mesuré expérimentalement en fonction du nombre de Reynolds. Pour que la comparaison ait un sens, nous allons utiliser le concept de l'analogie hydraulique proposé par le

Professeur C. THIRRIOT (1969, [87] ).

Le principe de cette analogie consiste à définir l'anamorphose du nombre de Reynolds et du coefficient des pertes de charge, afin de caler le graphe  $\lambda = f(R_e)$  par rapport au régime de Poiseuille.

Rappelons d'abord la définition du coefficient des pertes de charge  $\lambda$ . Nous avons :

$$\lambda = \frac{2 J g d}{U^2} = \frac{2 \Delta p}{\rho U^2} \times \frac{d}{\Delta L} = 2 C_p \cdot \frac{d}{\Delta L} \quad (\text{X.3.3.1})$$

où  $J = \frac{\Delta H}{\Delta L}$  est le gradient hydraulique et  $C_p$  le coefficient de pression

que nous avons défini égal à  $\Delta p / \rho U^2$ . En écoulement laminaire, à très faible nombre de Reynolds dans une géométrie quelconque, nous avons :

$$\lambda \cdot R_e = C \quad (\text{X.3.3.2})$$

où  $C$  est une constante qui dépend de la géométrie.

Soit maintenant  $d^*$  le diamètre d'un tube cylindrique, qui pour la même vitesse caractéristique  $U$ , provoque la même perte de charge  $J$ , que dans la géométrie initiale. Le diamètre  $d^*$  peut être alors un diamètre caractéristique, permettant la définition du coefficient  $\lambda^*$  et du nombre de Reynolds  $R_e^*$  anamorphosés, selon la formule de Poiseuille :

$$\lambda^* \cdot R_e^* = 64 \quad (\text{X.3.3.3})$$

En utilisant les relations (X.3.3.3), (X.3.3.2) et l'expression (X.3.3.1) nous pouvons déduire le diamètre caractéristique  $d^*$  en fonction du diamètre  $d$  et de la constante  $C$ .

Examinons d'abord la validité de la relation (X.3.3.2) pour les résultats du calcul numérique. Dans le tableau VIII, nous avons porté le produit  $C_p \times R_e$  en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$ .

Le coefficient  $C_p$  correspond à la perte de pression par la longueur d'onde du modèle.

$R_e$	$C_p R_e$	$\frac{C_p R_e (R_e)}{C_p R_e (1)}$
1	30,400	1,000
4	30,440	1,001
6	30,468	1,002
8	30,552	1,005
10	30,630	1,008
20	31,654	1,038
40	34,964	1,150
70	41,202	1,355
100	45,960	1,512
200	55,340	1,820
400	73,772	2,427
600	83,874	2,759

Tableau VIII

A partir de ces résultats, nous pouvons constater que jusqu'au nombre de Reynolds égal à 10, le produit  $C_p R_e$  augmente très doucement. En première approximation, nous pouvons admettre que dans cette gamme,  $C_p R_e$  est constant et par conséquent la loi de pertes de charge est linéaire. Par contre, lorsque le nombre de Reynolds augmente, les effets non linéaires deviennent prépondérants et provoquent une augmentation du produit  $C_p \cdot R_e$ .

Ceci apparaît clairement dans la figure 105 où on a représenté la corrélation anamorphosée  $\lambda^* R_e^* = f(R_e^*)$ , suivant l'analogie hydraulique. Dans la même figure, apparaissent les résultats expérimentaux de G. CHAUVETEAU sur lesquels nous avons appliqué la même anamorphose des coordonnées. Nous constatons que le comportement de la corrélation dans la plage de la loi non linéaire, est certes similaire, mais pas exactement la même : pour le même nombre de Reynolds  $R_e^*$  équivalent, la valeur du coefficient des pertes de charge du modèle physique est plus petite que dans le cas du modèle numérique plan. Ceci est facilement compréhensible puisque la présence des plaques planes du modèle physique conduit à un diamètre équivalent  $d^*$  plus faible ( $d^* = 2,37$ ) que dans le cas du modèle numérique plan ( $d^* = 13,8$ ).

Il est intéressant d'examiner l'allure du phénomène physique vers la limite supérieure du régime non linéaire. Expérimentalement et d'après la forme de la corrélation  $\lambda = f(R_e)$ , G. CHAUVETEAU a observé la fin du régime non linéaire et par conséquent le début de l'apparition de la turbulence, au nombre de Reynolds 750. Ceci correspond au nombre de Reynolds équivalent  $R_e^* = 1100$ . Pour notre part, nous avons essayé d'obtenir une solution numérique pour  $R_e = 800$  ou  $R_e^* = 976$ .

La figure 106 montre les résultats du calcul et permet de bien comprendre l'impossibilité d'obtention d'une solution numérique stationnaire. En effet, nous pouvons voir que dans le deuxième tronçon, le jet central est instable et la ligne de séparation entre le courant principal et le tourbillon subit des oscillations dans le temps, qui ne se stabilisent pas. L'instabilité semble avoir son origine au point de contact entre la ligne de séparation et le tourbillon. On peut mieux comprendre ce mécanisme si on revient à la figure 95 où on a représenté la trajectoire du centre du tourbillon laminaire en fonction du nombre de Reynolds. Nous pouvons constater qu'après un déplacement vers l'aval, le tourbillon semble définitivement bloqué entre les parois et le courant principal au nombre  $R_e = 400$  environ. Pour  $R_e = 600$  par exemple, il occupe toujours pratiquement la même position, mais comme le montre la figure 99 les

gradients de vitesses dans la section  $\sqrt{\frac{x}{\rho}} = 0$  deviennent de plus en plus élevés. Si on diminue davantage la viscosité, les gradients de vitesse provoquent des instabilités locales, qui du point de vue physiques, déclenchent des mouvements microscopiques qu'on attribue à la turbulence. Sur le plan numérique, et compte tenu de la dimension du maillage, le même phénomène provoque un mouvement oscillatoire du centre du tourbillon vers l'amont ou vers l'aval. Evidemment, une étude plus approfondie de ce phénomène nous aurait conduit à étudier l'influence du pas de maillage et de l'algorithme numérique sur les caractéristiques du jet (amplitude, fréquence).

Ceci n'étant pas l'objectif de notre travail, nous pouvons pourtant apprécier, d'après ce résultat, la puissance et les limitations de la méthode numérique I.V.P. Nous pouvons dire avec prudence, que pour les écoulements laminaires, l'algorithme numérique permet d'obtenir des solutions satisfaisantes jusqu'à la fin du régime laminaire non linéaire, déterminé expérimentalement.

#### X.4. CARACTERISTIQUES ENERGETIQUES

Une question fondamentale qui se pose, est le rôle énergétique des tourbillons laminaires, qui apparaissent lorsque le nombre de Reynolds devient important. En effet, du moment où le gradient local des vitesses devient important, les travaux intérieurs augmentent, ainsi que la dissipation de l'énergie.

Nous allons donc examiner tout de suite les zones du domaine d'écoulement, qui présentent une activité dissipative et comment ces zones se répartissent en fonction du nombre de Reynolds.

Les travaux intérieurs sont décrits à l'aide de la fonction de dissipation  $\Phi$ , dont la signification physique peut apparaître

en rappelant le théorème de l'énergie cinétique. Selon ce théorème, la variation dans le temps de l'énergie cinétique à l'intérieur d'un volume fluide  $\Omega$ , que l'on suit dans son mouvement est égale à la puissance des efforts extérieurs et intérieurs. On a donc :

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i \quad (\text{X.4.1})$$

où  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée particulaire et :

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u_i u_i d\Omega$$

Pour un milieu continu, on peut expliciter la relation (X.4.1) partant du principe des puissances virtuelles appliqué au mouvement réel ; mais le plus simple est d'utiliser l'expression qui résulte des équations du mouvement.

Multiplions scalairement tous les termes de l'équation de NAVIER-STOKES, par la vitesse  $u_i$ . Sous forme adimensionnelle, ceci nous donne :

$$u_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i u_i + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

où  $f_i$  sont les forces extérieures sous forme adimensionnelle et

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad \text{Nous pouvons écrire cette relation}$$

sous la forme :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i u_i}{\partial x_j} \right\} = f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{X.4.2})$$

En intégrant cette relation dans le volume  $\Omega$  et selon la définition de la dérivée particulaire et la formule de GREEN, nous aurons :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i u_i + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j u_i d\Sigma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dérivée particulaire} \\ \text{de l'énergie cinéti-} \\ \text{que} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{puissance des efforts} \\ \text{extérieurs} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{puissance des} \\ \text{efforts intérieurs} \end{array} \right\} \quad (\text{X.4.3})$$

Le résultat (X.4.3) est la forme développée du théorème de l'énergie cinétique (X.4.1).

On introduit maintenant la fonction de dissipation :

$$\Phi = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{X.4.4})$$

et selon (X.4.3) on a :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \Phi d\Omega \quad (\text{X.4.5})$$

La fonction de dissipation exprime donc la puissance des travaux intérieurs par unité de volume. La connaissance de la fonction  $\Phi$  peut nous conduire à l'évaluation de l'augmentation de l'énergie interne spécifique  $E$ .

Pour cela, on doit faire intervenir le premier principe de la thermodynamique selon lequel la dérivée particulaire de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et du taux de chaleur reçue  $Q$ . On a donc :

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_e + \dot{Q} \quad (\text{X.4.6})$$