

Moyen puissant d'investigation, le calcul numérique sert en quelque sorte de microscope, permettant d'évaluer en tout point la vitesse et la pression exercée sur les particules fluides. Grâce à l'algorithme numérique d'intégration des équations de Navier-Stokes, que nous avons mis au point, nous étudions, dans la deuxième partie, l'influence des divers paramètres, tels que le nombre de Reynolds et le contraste de viscosité sur les mécanismes du déplacement instationnaire d'une interface, en géométrie non cylindrique.

Dans les deux parties, l'exposé de nos résultats suit le même cheminement : après avoir posé le problème physique, nous présentons d'abord la formulation des modèles mathématiques et les principaux résultats théoriques afin de mieux mettre en évidence les divers paramètres physiques du phénomène. Toutefois, le recours à l'expérience occupe une place prépondérante dans notre travail. Dans ce domaine, nous avons été largement guidé par l'analogie : partant du phénomène physique complexe, l'analogie joue un rôle d'opérateur mathématique qui, d'abord par abstraction permet d'entrevoir les mécanismes essentiels du problème, puis par schématisation simple nous conduit à reproduire une image du phénomène. En raisonnant ainsi, on n'étudie plus le problème initial, mais son image, ce qui nous permet de mieux le comprendre et mieux l'expliquer.

Dans la première partie, nous présentons un modèle expérimental représentant par analogie, l'ensemble d'un milieu poreux et ayant une distribution des pores selon une loi statistique fixée d'avance. Nous exposons ensuite les résultats des expériences que nous avons effectuées sur l'équilibre capillaire et leur confrontation avec la théorie.

Si on descend à l'échelle des quelques pores, la complexité des formes nous contraint à la schématisation. Ainsi, dans la deuxième partie une succession périodique de convergents et de divergents a été utilisée pour schématiser par analogie un ensemble de quelques pores. Dans un tel modèle, plusieurs couples de fluides ont été utilisés pour faire varier les paramètres qui influencent la forme des interfaces en accélération ou en décélération. Les résul-

tats expérimentaux sont confrontés ensuite aux résultats du calcul numérique, qui complètent l'expérience en décrivant en détail la distribution des vitesses et des pressions.

La plupart de nos résultats sont de caractère fondamental certes, mais nombreuses sont les applications possibles. Ainsi, dans la première partie, les résultats théoriques du modèle probabiliste nous conduisent à proposer une correction des courbes porométriques, obtenues d'après les expériences classiques d'intrusion de mercure (essais de Purcell). A ce propos, et pour ne pas méconnaître la réalité, nous avons effectué des essais sur des milieux composés de billes de verre et nous avons approfondi l'influence des conditions aux limites sur l'allure des courbes capillaires.

Dans la deuxième partie enfin, les graphes donnant la quantité du fluide récupéré en fonction des divers paramètres tels que le contraste de viscosité ou le nombre de Reynolds, peuvent nous conduire à des considérations générales concernant la récupération secondaire dans les gisements pétrolifères.

P R E M I E R E P A R T I E

DEPLACEMENTS D'UN FLUIDE PAR UN AUTRE
SELON UNE SUCCESSION D' ETATS D'EQUILIBRE

CHAPITRE I

ANALYSE DU PROBLEME ET SYNTHÈSE DES TRAVAUX ANTERIEURS

I.1. POSITION DU PROBLEME PHYSIQUE

Imaginons pour le moment une expérience simplifiée, à l'aide de l'appareil idéal représenté dans la figure 1.

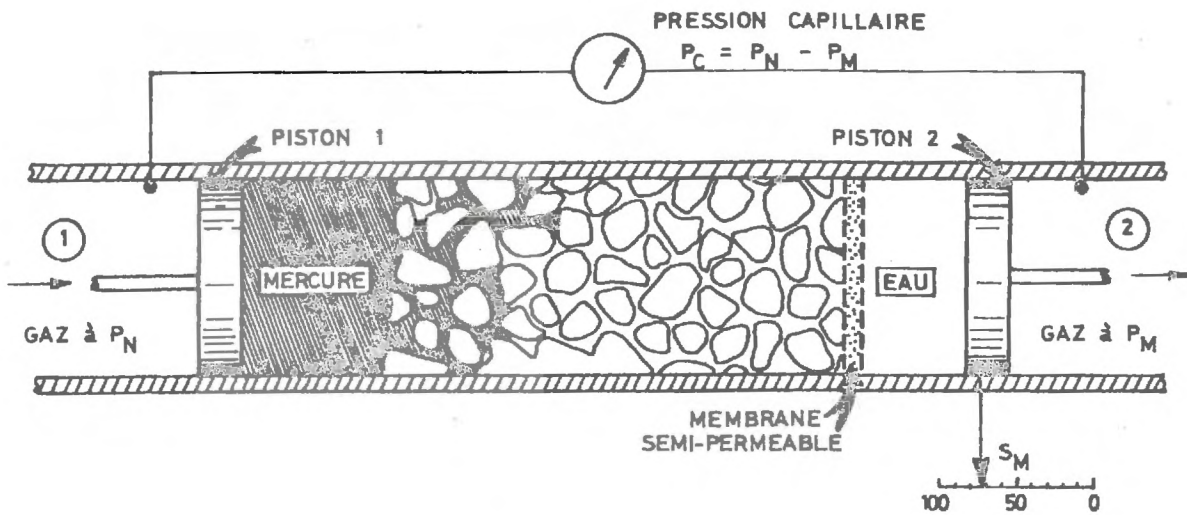


Figure 1. Déplacement capillaire idéalisé

Dans une enceinte cylindrique, munie de deux pistons qui coulissent sans frottements le long des parois solides, nous plaçons un échantillon de milieu poreux saturé d'eau. Le système est placé dans le plan horizontal afin de minimiser les effets de la gravité et avant de commencer l'expérience, nous amenons à l'aide du piston ①

une quantité de mercure, juste devant la face amont de l'échantillon. En augmentant légèrement la pression P_N dans l'enceinte ① on force très lentement et de manière réversible, au sens thermodynamique, une quantité de mercure à entrer dans les pores du milieu.

Négligeant les effets de la gravité, on peut se poser la question de savoir si sous l'effet du gradient des pressions imposé, le mercure va continuer à envahir les pores, auquel cas les pistons ① et ② vont se déplacer à vitesse constante. Or, l'expérience montre que le système atteint un état d'équilibre sous l'effet de forces adverses, qui éliminent le gradient des pressions extérieures. Ces forces sont réparties le long des interfaces microscopiques : c'est le coefficient de la tension interfaciale T_S qui, traduisant l'état de tension des molécules au voisinage de la surface de séparation entre les deux phases fluides, fixe leur intensité. Leur direction est déterminée par l'angle de contact θ entre l'interface et les parois solides. Cet angle traduit l'état énergétique de surface pour le système triphasique solide-fluide ① - fluide ②, et permet de distinguer le fluide mouillant du fluide non mouillant. En général, la phase non mouillante est celle pour laquelle θ , mesuré dans cette phase est supérieur à 90° (figure 2).

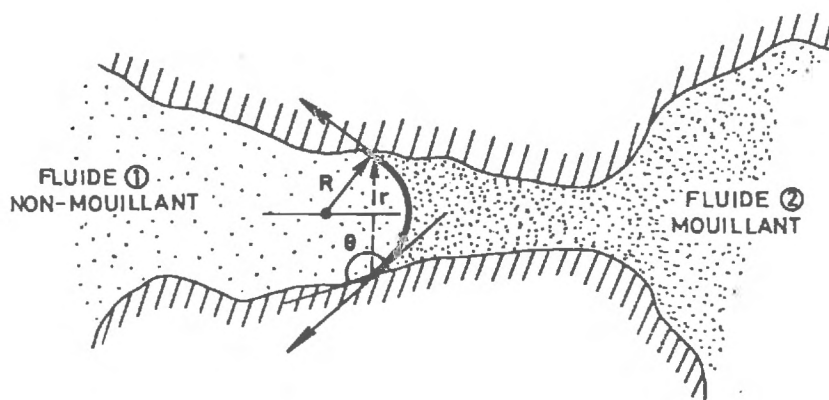


Figure 2. Interface microscopique en équilibre

Ainsi, quand le mercure déplace l'eau d'un espace de pore, l'angle de contact mesuré dans le mercure est supérieur à 90° . Les molécules d'eau ont eu tendance à se fixer sur la paroi et elles s'opposent donc à la pénétration du fluide étranger.

Les conditions d'équilibre des interfaces microscopiques dans un capillaire sont bien connues : quand il existe une différence de pression Δp entre les deux phases fluides, l'interface acquiert une courbure qui lui permet de satisfaire la relation de Laplace :

$$\Delta p = T_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{I.1.1})$$

où R_1 et R_2 sont les rayons principaux de courbure de l'interface. La relation (I.1.1) résulte de l'équilibre des forces exercées à tout point de l'interface et elle est indépendante des conditions de mouillabilité et de la forme du capillaire. Lorsque la différence Δp est constante le long de l'interface, ce qui est le cas lorsqu'on néglige par exemple l'influence de la gravité, la relation (I.1.1) nous montre que l'interface est une surface à courbure constante. Si en plus, la section droite du capillaire est un cercle de rayon r , l'interface est une calotte sphérique, pour laquelle R_1 et R_2 sont déterminés en fonction de r et de l'angle θ . Dans ce cas, on a donc :

$$R_1 = R_2 = \frac{r}{\cos \theta}$$

et la relation (I.1.1) devient :

$$\Delta p = \frac{2 T_S \cos \theta}{r} \quad (\text{I.1.2})$$

Revenant à l'expérience de la figure 1, on s'aperçoit que pour chaque état d'équilibre obtenu au cours de l'intrusion du mercure, nous pouvons enregistrer la valeur de deux variables : tout d'abord la différence de pression entre la phase non mouillante et la phase mouillante que l'on nomme couramment pression capil-

laire $p_c = p_N - p_M$. Ensuite, à l'aide d'un système de repérage fixé sur le piston 2 (figure 1), nous pourrions suivre la quantité du fluide mouillant, qui est sortie des pores. Il est plus aisé de ramener ce volume au volume total des pores et ce rapport, variant de 100% au début de l'expérience jusqu'à une valeur limite, s'appelle degré de remplissage en fluide mouillant S_M . La corrélation expérimentale $p_c(S_M)$ nous conduit à un graphe dit de drainage dont la forme est indiquée dans la figure 3.

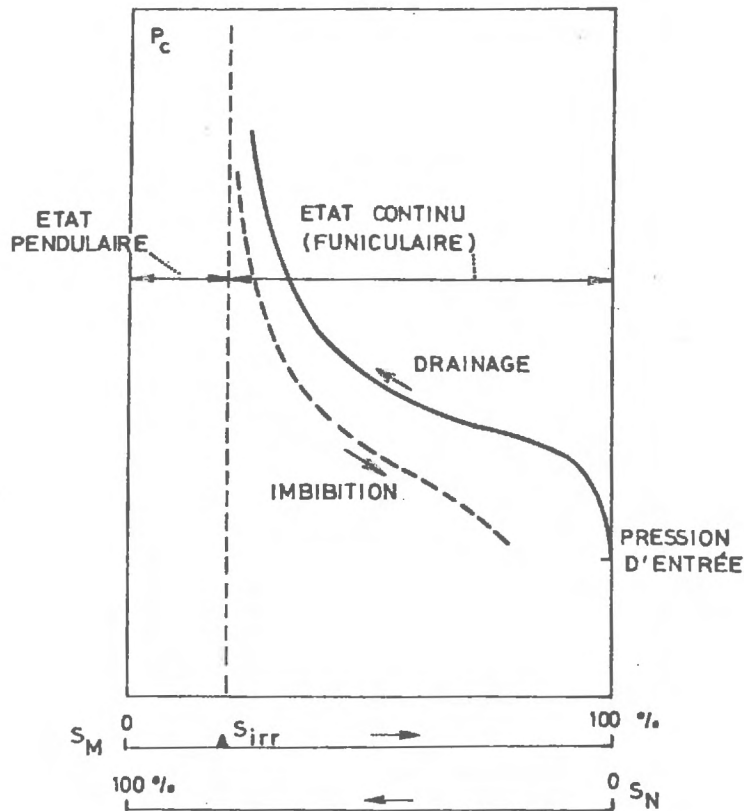


Figure 3

Une pression initiale, appelée "pression d'entrée" est nécessaire afin que le mercure puisse franchir le seuil des plus gros pores disposés sur la surface d'entrée. Etant donné que l'intrusion du fluide injecté s'effectue de manière progressive, pendant les étapes initiales du déplacement les deux phases fluides se répartissent de manière continue.

Pour les grandes valeurs de p_c , le remplissage en eau tend asymptotiquement vers une limite S_{irr} qualifiée comme saturation irréductible : dans ce cas, le fluide mouillant se trouve sous forme d'anneaux isolés et ne peut pas être déplacé sous l'action des pressions élevées.

Si maintenant on fait reculer le piston ②, la phase mouillante déplace le fluide non mouillant, mais le processus n'est pas exactement le processus inverse : pour chaque pression capillaire p_c , la teneur en phase mouillante est plus petite que précédemment, et nous obtenons la courbe dite d'imbibition, située en général plus bas que celle du drainage (en pointillés sur la figure 3). On conçoit donc que le phénomène n'est pas du tout réversible au sens thermodynamique, mais il est marqué d'une hystérésis importante.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons surtout au problème du premier déplacement du fluide mouillant en place (premier drainage), par injection d'un fluide non mouillant : cette opération nous fournit des renseignements précieux concernant la répartition détaillée des pores et leur disposition dans l'espace.

I.2. ANALYSE DES PARAMETRES DU PROBLEME ET SYNTHESE DES RESULTATS

ANTERIEURS

Examinant les résultats de la littérature [1], on s'aperçoit très vite que le problème des pressions capillaires constitue un vieux sujet, traité fréquemment par de nombreux chercheurs.

Notre but, ici, n'est pas de revoir tous ces travaux, mais après avoir analysé les paramètres du problème, de classer les grandes tendances d'investigation en insistant sur les résultats qui ont inspiré notre étude.

Revenant à l'expérience de la pénétration capillaire d'un fluide non mouillant, on remarque qu'on a été tenté de considérer la pression capillaire p_c comme la variable dépendante, fonction du degré de remplissage en fluide mouillant S_M . Cette corrélation est influencée par les paramètres du problème qui sont d'une part les forces en présence, et d'autre part les caractéristiques du milieu poreux.

En ce qui concerne les forces, on peut distinguer d'une part les forces de surface, exprimées à l'aide de la tension interfaciale T_S et de l'angle de mouillage θ , et d'autre part les forces de pesanteur : au voisinage des interfaces microscopiques, ces forces exprimées par unité de volume, font apparaître la différence entre les masses volumiques des deux fluides, sous la forme : $(\rho_2 - \rho_1) g$.

Quant aux caractéristiques du milieu poreux, on avoue qu'on se sent vite dérouté. A la question : qu'est-ce qu'un pore et quelle est sa dimension caractéristique ? plusieurs réponses sont possibles : dans la plupart des cas, on parle du "diamètre" de pore en pensant au diamètre de la sphère la plus proche de la cavité irrégulière du pore réel. Parfois, on définit le "diamètre" d'un petit tube capillaire cylindrique très proche de la dimension moyenne du pore ; mais alors, on doit faire intervenir la longueur de chaque petit tube capillaire. Ensuite, en ce qui concerne la définition du réseau des pores interconnectés, on pourrait imaginer un autre paramètre caractéristique, tel que le nombre des pores interconnectés en un point. Disons pour simplifier, qu'on peut conserver une dimension caractéristique des pores d^* et désigner

tous les autres paramètres par \mathcal{H} où \mathcal{H} est le même pour deux milieux homothétiques. Dans ces conditions, en appliquant les méthodes de l'analyse dimensionnelle de manière sommaire, nous pouvons grouper les différents monômes adimensionnels sous la forme :

$$\frac{p_c d^*}{T_S} = \mathcal{F} \left(\frac{(\rho_2 - \rho_1) g d^{*2}}{T_S}, \theta, \mathcal{H}, S_M \right) \quad (\text{I.2.1})$$

Dans le cas des milieux poreux naturels, les dimensions des pores varient habituellement entre 1 et 100 μ ; il est donc aisé de faire l'hypothèse que l'influence du nombre adimensionnel $(\rho_2 - \rho_1) g d^{*2} / T_S$ à l'échelle du pore est négligeable. D'autre part, guidés par la forme de la relation (I.1.2), nous pouvons simplifier l'expression (I.2.1) en écrivant :

$$p_c = \frac{T_S \cos \theta}{d^*} \cdot \mathcal{F}'(\mathcal{H}, S_M) \quad (\text{I.2.2})$$

où $\mathcal{F}'(\mathcal{H}, S_M)$ est une fonction quelconque de la porométrie du milieu et de la teneur en fluide mouillant.

Dès lors, une première tendance se dessine parmi les expérimentateurs, celle qui consiste à représenter de manière synthétique les résultats des expériences au laboratoire. LEVERETT [2] a choisi comme grandeur caractéristique des pores la racine carrée de la perméabilité totale du milieu k divisée par la porosité P ; il a ainsi introduit la fonction dite de Leverett, sous la forme :

$$\frac{p_c}{T_S \cos \theta} \cdot \sqrt{\frac{k}{P}}, \text{ grâce à laquelle les résultats expérimentaux,}$$

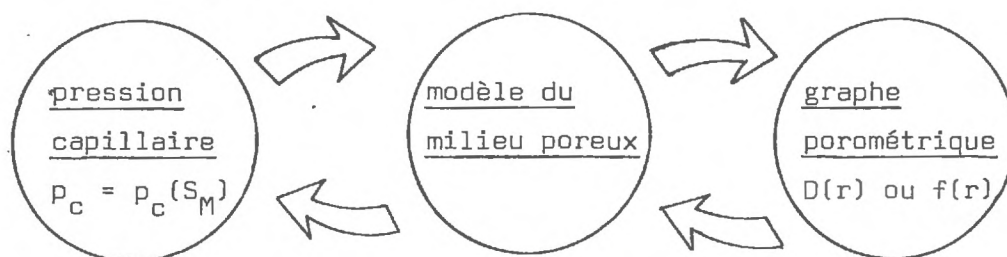
afférents à différents milieux et divers couples de fluides, peuvent se regrouper avec une bonne approximation, autour d'une courbe moyenne.

La deuxième tendance qui apparaît dans la littérature, conduit à l'interprétation des résultats expérimentaux, à l'aide

de modèles décrivant la porométrie du milieu. Il est évident qu'en observant la relation (I.2.2), on est conduit à penser que connaissant la corrélation expérimentale $p_c(S_M)$ pour un couple de fluides donné, on pourrait en déduire les caractéristiques structurales du milieu et en particulier sa courbe porométrique.

Cette idée qui remonte à 1921 [3], a été mise au point dans la pratique en 1945 par RITTER et DRAKE [4] et popularisée par la suite par PURCELL [5] en 1949, grâce à l'appareil d'injection du mercure qu'il a proposé et qui porte son nom.

Il est évident que pour passer du graphe $p_c(S_M)$ à la courbe donnant la distribution des tailles des pores, nous devons introduire un modèle représentant la structure du milieu naturel ; ceci étant fait, il sera aisé de poser le problème inverse et de partir d'une distribution porométrique appropriée, qui permet de retrouver le graphe $p_c(S_M)$. Le schéma ci-dessous montre les deux possibilités :



A propos du graphe porométrique, nous devons distinguer la fonction de la densité du volume des pores $D(r)$, introduite par RITTER et DRAKE [4] et la fonction de densité du nombre des pores $f(r)$, définie selon la théorie des probabilités. La signification physique de ces fonctions peut être mise en évidence par l'intermédiaire des fréquences observées. En effet, soit $\Delta\Omega(r)$ le volume des pores ayant comme rayon $r \in [r, r + \Delta r]$, $\Delta\eta(r)$ le nombre des pores du même rayon, Ω_p le volume total des pores et η_T le nombre total des pores contenu dans l'échantillon ; on aura donc :

$$D(r) \cdot \Delta r \approx \frac{\Delta\Omega(r)}{\Omega_p} \quad (\text{I.2.3})$$

$$f(r), \Delta r = \frac{\Delta \eta(r)}{\eta_T} \quad (\text{I.2.4})$$

La relation générale entre les fonctions $D(r)$ et $f(r)$ suppose obligatoirement une modélisation de la forme géométrique des pores. Admettons par exemple que les pores ont une forme cylindrique de rayon r variable, et de longueur ℓ constante. Dans ce cas nous aurons :

$$D(r) \Delta r = \frac{\pi r^2 \cdot \ell \cdot f(r) \Delta r}{\int_0^\infty \pi r^2 \ell f(r) dr}$$

où

$$D(r) = \frac{r^2 f(r)}{\int_0^\infty r^2 f(r) dr} \quad (\text{I.2.5})$$

La relation (I.2.5) compte tenu du fait que $\int_0^\infty f(r) dr = 1$ peut être inversée, ce qui nous donne :

$$f(r) = \frac{D(r)}{r^2 \int_0^\infty \frac{D(r)}{r^2} dr} \quad (\text{I.2.6})$$

Faisons maintenant l'hypothèse que les pores cylindriques ne sont pas reliés, mais qu'ils constituent un faisceau de tubes capillaires parallèles. Cette modélisation, quoique très sommaire, peut expliquer qualitativement l'influence de la porométrie sur l'allure des courbes capillaires ; à ce propos, il a été introduit en 1948 par CHILDS et COLLIS-GEORGE [6]. Le Professeur C. THIRRIOT (1969, [7]) a examiné sous forme adimensionnelle, l'influence de plusieurs lois porométriques sur la forme des courbes capillaires.

Les calculs basés sur le modèle du faisceau des tubes capillaires sont relativement simples : soit p_c la pression capil-

laire appliquée pour injecter le fluide non mouillant dans les pores du milieu. Selon la loi de Laplace (I.1.2), à la pression p_c correspond un rayon critique r_c tel que :

$$r_c = \frac{2 T_S \cos \theta}{p_c} \quad (\text{I.2.7})$$

Dans ces conditions, tous les pores ayant un rayon $r > r_c$ seront remplis par le fluide injecté, tandis que les pores dont le rayon est $r \leq r_c$ resteront bouchés en fluide mouillant. Etant donné la définition (I.2.4) on aura donc :

$$S_M = \frac{\int_0^{r_c} \pi r^2 \& f(r) dr}{\int_0^{\infty} \pi r^2 \& f(r) dr} = \frac{\int_0^{r_c} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr} \quad (\text{I.2.8})$$

La relation (I.2.8) permet de calculer S_M en fonction de r_c ou, compte tenu de l'expression (I.2.7) en fonction de p_c et ceci en termes de la loi $f(r)$.

D'une manière générale, nous pouvons caractériser le graphe porométrique $f(r)$ sous forme variationnelle : le moment d'ordre 1 par rapport à l'axe $r = 0$ nous donne la valeur moyenne de la taille des pores \bar{r} , tandis que les moments successifs d'ordre supérieur par rapport à l'axe $r = \bar{r}$, complètent nos informations sur l'étalement des valeurs de r autour de la valeur moyenne. Lorsque $f(r)$ a une forme symétrique, le moment d'ordre 2 par rapport à l'axe $r = \bar{r}$ suffit pour caractériser le graphe en question : il exprime le moment d'inertie du graphe par rapport à cet axe qu'on appelle variance σ^2 . Si le graphe est asymétrique, en principe, nous avons besoin au moins du moment d'ordre 3.

Dans le cas où $f(r)$ est symétrique, ce qui est intéressant, c'est l'influence de la variance σ^2 sur la forme de la corrélation $p_c(S_M)$. A titre d'exemple, considérons une porométrie suivant une distribution normale de la forme :

$$f(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(r-\bar{r})^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{I.2.9})$$

$$r > 0$$

Evidemment, l'équation (I.2.9) fait intervenir une valeur de $f(r)$ non nulle pour $r = 0$, mais qui est négligeable lorsque $\bar{r} \gg \sigma$. Si nous utilisons la loi normale (I.2.9) l'expression (I.2.8) nous conduit au résultat :

$$S_M = \frac{1}{2} + \operatorname{erf} \left(\frac{r_c - \bar{r}}{\sigma} \right) - \frac{\bar{r}\sigma}{\sqrt{2\pi}(\bar{r}^2 + \sigma^2)} \cdot \exp \left[-\frac{(r_c - \bar{r})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (\text{I.2.10})$$

L'expression (I.2.10) nous permet d'examiner numériquement l'influence de la variance σ^2 sur la corrélation $p_c(S_M)$. Etant donné que dans le cas des milieux poreux naturels le rapport entre le rayon maximum et le rayon minimum des pores varie entre 1 et 10, nous avons choisi la gamme de variation de r dans cet intervalle.

Les unités de r étant arbitraires, nous avons représenté dans la figure (4.a) trois courbes porométriques suivant la loi normale de moyenne 5 et variance σ^2 égale à 0,25, 1,0 et 4,0 respectivement.

Dans la figure 4.b nous avons représenté sous forme adimensionnelle les courbes des pressions capillaires qui correspondent aux trois valeurs de σ . La pression capillaire de référence p_{cm} a été choisie égale à la pression correspondante au rayon moyen \bar{r} , selon la loi (I.2.7). A partir de la figure (4.b) nous constatons que lorsque $\sigma \rightarrow 0$, la courbe donnant la pression capillaire tend vers une ligne horizontale. Ceci est parfaitement

concevable du point de vue physique : lorsque $\sigma \rightarrow 0$, $f(r)$ tend vers la fonction de Dirach $\delta(r - \bar{r})$, ce qui indique que le milieu poreux est composé de pores uniformes ayant comme dimension $r = \bar{r}$; la pénétration capillaire est alors une opération "tout" ou "rien" : si p_c est supérieur ou égal à p_{cm} , toute la quantité du fluide non mouillant envahit le milieu. Si non, le milieu reste complètement saturé en fluide mouillant.

L'exemple que nous venons d'étudier peut nous convaincre que le modèle du faisceau des tubes capillaires est un moyen simple pour analyser l'influence de la porométrie sur l'allure des courbes capillaires. Toutefois, étant donné qu'il ne tient pas compte des interactions entre les pores, il prévoit à chaque palier de pression, un degré de remplissage plus important qu'en réalité.

Les interactions entre les pores sont dues essentiellement à la variation séquentielle des rayons des pores. En effet, en suivant le fluide non mouillant le long de son chemin, nous verrons apparaître une succession d'élargissements et de cols, à l'intérieur desquels, comme nous l'avons déjà décrit dans la figure 2, les forces de tension interfaciale peuvent provoquer un engorgement.

En réalité, le phénomène est encore plus compliqué : si on considère un gros pore à l'intérieur du milieu, pour que celui-ci soit rempli par le fluide injecté, il doit être relié à la surface d'injection par un ensemble de pores, dont les dimensions permettent leur désaturation. Or, cette condition n'est pas toujours réalisable et en particulier lorsque la pression capillaire est faible : il existe à l'intérieur du milieu de gros pores qui sont entourés par des passages rétrécis et forment ainsi des pièges en fluide mouillant.

Le nombre moyen des interconnexions entre les pores est un paramètre favorable au remplissage du milieu. Lorsqu'à la limite, le nombre des interconnexions tend vers l'infini, tous les pores surcritiques sont remplis par le fluide injecté : on se rapproche ainsi de l'hypothèse du modèle du faisceau des tubes capillaires,

qui fournira donc à chaque pression capillaire, la limite supérieure de la teneur en fluide non mouillant.

Nous avons pensé qu'il serait intéressant d'encadrer la réalité par une limite inférieure du degré de remplissage S_N . En effet, en négligeant dans un premier temps les interconnexions entre les pores, nous avons été amenés à schématiser le milieu poreux par un ensemble de canaux indépendants, constitués de successions de tubes capillaires de rayons et de longueurs variables.

Ce modèle a été utilisé plusieurs fois dans la littérature, pour étudier des problèmes d'écoulement ou de diffusion d'un fluide à l'intérieur d'un milieu poreux et SCHEIDEGGER [1] l'appelle modèle cellulaire. C'est certainement ADZUMI (1937, [8]) qu'il l'a introduit pour la première fois, et depuis il a été repris par plusieurs auteurs comme HERCZYNSKI (1963, [9]), MARKIN (1963, [10]) ou FOSTER et BUTT (1966, [11]).

Mais avant de présenter nos résultats théoriques, nous allons rappeler brièvement une série de travaux, plutôt expérimentaux, qui concernent l'utilisation de réseaux géométriques de tubes capillaires interconnectés.

Le modèle des réseaux de tubes capillaires à deux dimensions a été introduit par FATT (1956, [12]). Nous rappellerons avec assez de détails les résultats de FATT, non pas seulement à cause de leur intérêt historique, mais parce qu'ils permettront de bien saisir notre préoccupation et l'aspect spécifique de notre démarche. En utilisant du "crayon" et du "papier" FATT a examiné l'influence des trois paramètres tels que la forme du réseau, la loi de distribution des rayons r des tubes capillaires et la loi de distribution de leurs longueurs.

La figure 5 résume les principaux résultats.

Tout d'abord, la partie 5 b indique les courbes capillaires déduites d'après les lois porométriques I et II (figure 5.a) : les courbes en traits pleins correspondent à un réseau hexagonal

tandis que les courbes en pointillés ont été calculées d'après le modèle du faisceau des tubes capillaires. Nous constatons que l'écart entre les deux modèles est accentué lorsque la variance du graphe porométrique augmente.

La figure 5.c montre l'influence de la loi de distribution des longueurs des pores sur l'allure des courbes capillaires.

Partant des observations directes sur les milieux poreux naturels, FATT a admis une relation entre les longueurs l et les rayons r des pores de la forme : $l = c \cdot r^\alpha$ où c et α sont deux constantes.

D'après la figure 5.c, nous constatons que l'influence de α est d'autant plus grande que la variance de la loi porométrique est élevée. Nous aurons l'occasion d'expliquer qualitativement ce résultat expérimental, dans le paragraphe suivant et à l'aide du calcul des probabilités.

Comme nous pouvons le constater sur la figure 5.b, le mécanisme de désaturation que FATT a utilisé, conduit à une teneur irréductible en fluide mouillant qui tend vers zéro. DODD et KIEL (1959, [13]) en utilisant des méthodes du type de MONTE-CARLO, ont tenu compte de la quantité du fluide mouillant qui reste piégé définitivement au cours de la désaturation. Enfin, HARRIS (1965, [14]) a étudié l'influence des conditions limites d'entrée et de sortie du fluide non mouillant, sur l'allure des courbes capillaires.

Dans ce qui suit, nous allons étudier à l'aide de modèles probabilistes, l'influence de la porométrie du milieu sur le phénomène de la pénétration capillaire.

Notre démarche sera plutôt inductive. Tout d'abord en négligeant les interconnexions entre les pores, nous allons examiner à l'aide du modèle cellulaire, l'influence de la variation séquentielle des rayons des pores. Le modèle cellulaire que nous proposons est en définitive très général puisqu'il tient compte de la distribution et de la dépendance entre les longueurs et les rayons des pores, considérés comme variables aléatoires. Les conséquences des interconnexions sont examinées par la suite.

CHAPITRE II

ETUDE PROBABILISTE DES EQUILIBRES CAPILLAIRES

Dans ce chapitre, l'utilisation des modèles probabilistes est inspirée des modèles employés en Recherche Opérationnelle (GIRAULT, [15]), ainsi que des travaux de MARKIN (1963 [10] , [16]). A l'aide de ces modèles, nous examinons l'influence de la distribution des longueurs et des rayons des pores sur le blocage du fluide non mouillant.

Dans un premier temps, ayant négligé les interconnexions entre les pores, nous montrons que lorsque la pression capillaire est constante le long du milieu, le fluide injecté est toujours piégé sur une profondeur moyenne finie.

Par contre, lorsque sous l'influence de la pesanteur la pression capillaire croît le long du milieu, nous arrivons à la conclusion qu'une pénétration complète du milieu est réalisable et que du point de vue mathématique, le problème est équivalent à un processus probabiliste non homogène.

Ensuite, après avoir estimé les interconnexions entre les pores, nous étudions en détail le processus aléatoire de la pénétration capillaire.

II.1. MODELE PROBABILISTE PROPOSE

Schématisons le milieu poreux par un ensemble de canaux non communicants, constitués de successions de tubes capillaires cylindriques de rayons r_i et de longueurs X_i variables (figure 6).

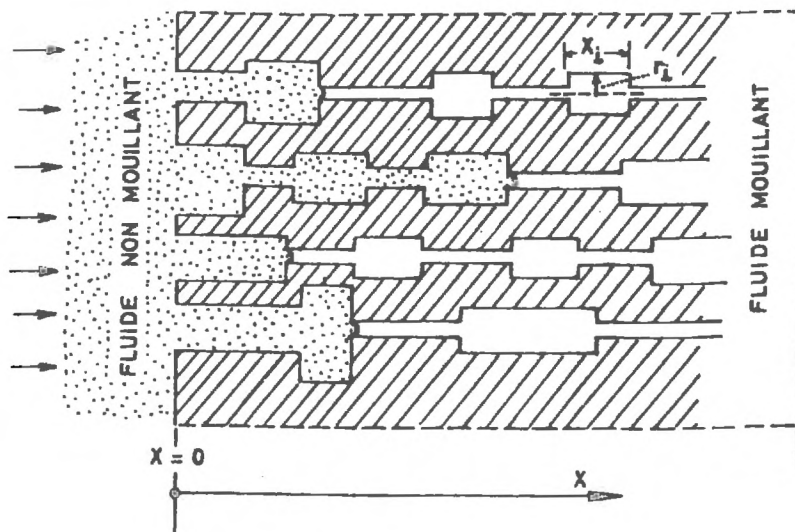


Figure 6. Modèle cellulaire

Le milieu étant complètement saturé en fluide mouillant, on injecte à la surface $x = 0$ un autre fluide non miscible avec le premier et non mouillant. Si la différence des pressions entre les deux phases fluides est égale à p_c , le fluide injecté est arrêté à la rencontre du premier pore sous-critique, ayant un rayon r inférieure ou égal au rayon critique r_c défini selon la relation de Laplace (I.2.7) (figure 6).

Le problème ainsi posé rappelle le phénomène d'engorgement d'une population (le fluide) arrivant de manière aléatoire à un "poste de service" représenté ici par le pore sous-critique ($r \leq r_c$), le plus proche à la surface d'injection. Cette situation est couramment rencontrée en Recherche Opérationnelle [15].

Si le nombre des canaux est suffisamment élevé, on peut se ramener à l'étude d'un seul cheminement (figure 7), à condition que les variables X_i et r_i soient considérées comme des variables aléatoires dont la réalisation suit la même loi de probabilité que dans le milieu initial.

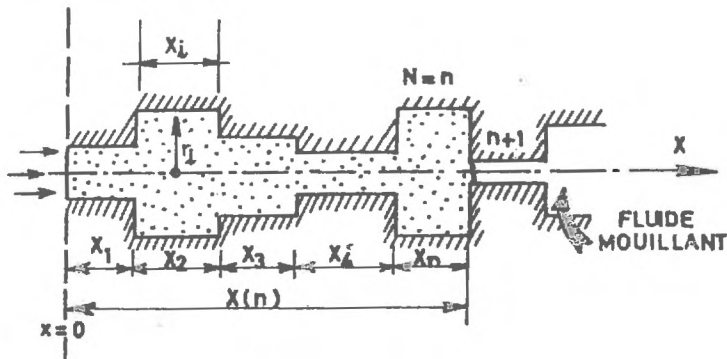


Figure 7

Afin de formuler le modèle probabiliste, nous faisons les hypothèses suivantes :

a) Homogénéité spatiale

Les deux familles des variables X_i et r_i , avec $i \geq 1$ sont composées par des variables aléatoires indépendantes, qui suivent la même loi de probabilité selon les fonctions de densité

$f_x(x)$ et $f_r(r)$, ou $0 \leq x < \infty$ et $0 \leq r \leq r_{\max}$.

Cette hypothèse ne donne aucune indication sur la dépendance en probabilité entre les variables aléatoires X_i et r_i ; elle traduit tout simplement l'homogénéité de la géométrie du milieu poreux. En effet, pour un milieu poreux homogène, la loi porométrique reste invariable par translation par rapport à x . Nous pouvons donc calculer la probabilité pour qu'un pore soit surcritique ($r > r_c$), selon l'expression :

$$a = P [r > r_c] = \int_{r_c}^{r_{\max}} f_r(r) dr \quad x \geq 0 \quad (\text{II.1.1})$$

où le symbole $P [.]$ signifie probabilité.

b) Absence d'interaction

L'apparition d'un pore de rayon r donné à l'abscisse x ne dépend pas de la séquence des tailles des pores qui le précèdent.

Arrivés à la formulation du modèle en termes de deux familles de variables aléatoires X_i et r_i qui définissent les pores, on peut se poser la question sur la signification physique de cette formulation. D'une manière générale, nous parlons d'un pore, lorsqu'il existe une corrélation entre sa longueur et son rayon. Autrement dit, la longueur moyenne est du même ordre de grandeur que le rayon moyen des pores \bar{r} . Du point de vue probabiliste, nous pouvons exprimer la dépendance entre les variables aléatoires X_i et r_i à l'aide d'une densité de probabilité conditionnelle. Néanmoins, les observations sur des milieux naturels [12] montrent plutôt une dépendance déterministe de la forme :

$$X_i = h(r_i) \quad (\text{II.1.2})$$

Ceci étant, nous pouvons maintenant réfléchir de l'importance relative des variables X_1 et r_1 sur le phénomène d'engorgement. Revenant à la figure 6, nous pouvons constater que c'est plutôt la dimension transversale des pores qui, par l'intermédiaire de la loi de Laplace, détermine le blocage du fluide injecté.

Afin de mieux comprendre donc le phénomène d'engorgement, nous allons, dans un premier temps, simplifier le problème : nous ferons l'hypothèse que tous les pores ont la même longueur, égale à la longueur moyenne ℓ et nous allons examiner l'influence de la variation séquentielle des rayons des pores sur la quantité du fluide piégé. Toutefois, nous ne perdrons pas de vue le cas plus général, lorsque les longueurs des pores varient selon une loi donnée autour de la longueur moyenne ℓ . Et dans le paragraphe II.1.2 nous étudions l'influence de la variation des longueurs des pores ; nous donnerons aussi un exemple d'application des résultats dans le cas de deux porométries caractéristiques.

II.1.1. Etude de la variation séquentielle des rayons des pores

Nous faisons l'hypothèse que tous les pores ont la même longueur ℓ .

Soit N une variable aléatoire dont la valeur observée n représente le nombre des pores surcritiques et donc remplis, qui précèdent la première réalisation d'un pore sous-critique et donc engorgé (figure 8).

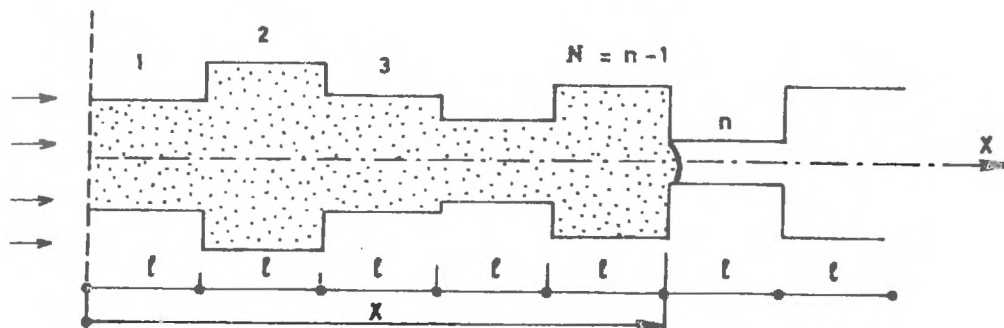


Figure 8

Suivant les hypothèses a) et b) et tenant compte de la formule (II.1.1), selon la figure 8, nous avons :

$$P [N = n - 1] = a^{n-1} (1 - a) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{II.1.1.1})$$

Soit maintenant N_x le nombre des pores situés dans l'intervalle $[0, x]$: N_x est donc égal au plus grand entier inférieur ou égal à x/l . La probabilité $F(x)$ pour qu'on rencontre au moins un pore sous-critique dans cet intervalle est :

$$F(x) = P [N \leq N_x] = \sum_{n=1}^{N_x} P [N = n - 1] = \sum_{n=1}^{N_x} a^{n-1} (1-a) = 1 - a^{N_x}$$

$$N_x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.1.1.2})$$

où :

$$a = \int_{r_c}^{r_{\max}} f_r(r) dr$$

Le résultat (II.1.1.2) montre que N est une variable aléatoire discrète qui suit une distribution géométrique. La fonction $F(x)$ est la fonction discrète de distribution.

Cherchons maintenant la distribution continue équivalente. Etant donné la définition de la quantité N_x , nous pouvons écrire l'équivalent de la relation (II.1.1.2) sous la forme :

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ \text{Log } a \cdot \frac{x}{l} \right\} = 1 - \exp (-\beta_1 x) \quad (\text{II.1.1.3})$$

$$\text{où} \quad \beta_1 = - \frac{\text{Log } a}{l} \quad (\text{II.1.1.4})$$

L'équation (II.1.1.3) montre que la fonction de distribution $F(x)$ a une forme exponentielle de paramètre β_1 .

La signification physique du paramètre β_1 peut être mise en évidence si on considère le développement asymptotique de la fonction $F(x)$. En effet, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= F(x) + F'(x) \Delta x + O(\Delta x^2) \\ &= F(x) + \beta_1 \{1 - F(x)\} \Delta x + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

d'où :

$$\beta_1 \Delta x = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \quad (\text{II.1.1.5})$$

L'expression (II.1.1.5) montre que la quantité $\beta_1 \Delta x$ exprime la probabilité pour qu'un pore soit engorgé dans l'intervalle $(x, x + \Delta x)$, étant donné qu'il est rempli par le fluide injecté jusqu'à l'abscisse x .

Le paramètre β_1 exprime donc en quelque sorte l'intensité de blocage du milieu poreux par unité de longueur et nous l'appellerons paramètre d'engorgement. Nous remarquons qu'étant donné son expression à partir des relations (II.1.1.4) et (II.1.1), il ne dépend pas de x mais uniquement de la pression capillaire p_c , qui fixe la borne inférieure de l'intégrale (II.1.1).

L'expression (II.1.1.4) du coefficient β_1 peut être améliorée en tenant compte de la tortuosité T . En effet, dans ce cas, nous supposons que les capillaires sont dirigés selon un angle quelconque autour de l'axe des x et la longueur moyenne des pores selon la direction moyenne Ox sera égale à $l \overline{\cos \varphi}$.

L'expression (II.1.1.4) devient donc :

$$\beta_1 = - \frac{1}{l \overline{\cos \varphi}} \cdot \text{Log } a = - \frac{T}{l} \text{Log } a \quad (\text{II.1.1.6})$$

où $T = 1/\overline{\cos \varphi}$ est le coefficient de tortuosité.

Nous ferons appel au résultat (II.1.1.6) dans le paragraphe (II.1.3) où il sera question de l'influence de la pesanteur sur la pénétration capillaire.

Mais auparavant, examinons l'influence de la variation des longueurs des pores sur la probabilité d'engorgement.

II.1.2. Influence de la loi de distribution des longueurs des pores

Supposons maintenant que les longueurs des pores sont représentées par les variables aléatoires X_i et revenons dans le cadre des hypothèses générales a) et b). Comme le montre la figure 7, supposons que le fluide non mouillant, après avoir traversé n pores surcritiques ($r > r_c$), rencontre le premier pore sous-critique et il s'arrête à une distance par rapport à l'origine égale à $X(n)$, où :

$$X(n) = \sum_{i=0}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{II.1.2.1})$$

où $X_0 = 0$ pour $i = 0$ et $0 < X_i < \infty$ pour $i \geq 1$.

Soit N la variable aléatoire dont la valeur observée représente le nombre des pores surcritiques et donc remplis, qui précèdent la première réalisation d'un pore engorgé. La probabilité $F(x)$ pour que le fluide non mouillant ayant traversé N pores surcritiques soit arrêté à une distance inférieure ou égale à x , peut être exprimée par la relation :

$$F(x) = P \left[\sum_{i=0}^N X_i \leq x \right] = P \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n X_i \leq x \text{ et } N = n \right) \right] \quad (\text{II.1.2.2})$$

Dans cette relation, l'évènement $(\sum_{i=0}^N X_i \leq x \text{ et } N = n)$

constitue une réalisation particulière de l'évènement $\sum_{i=0}^N X_i \leq x$

et nous considérons, sous le symbole de l'union, toutes ces réalisations possibles. Etant donné que dans la formule (II.1.2.2) les évènements qui suivent l'opérateur de l'union sont disjoints, il s'ensuit que :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P \left[\sum_{i=0}^N X_i \leq x \text{ et } N = n \right] \quad (\text{II.1.2.3})$$

En tenant compte de la notation (II.1.2.1) et en appliquant le théorème général des probabilités composées, nous pouvons écrire l'expression (II.1.2.3) sous la forme :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P \left[X(N) \leq x \text{ et } N = n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P \left[X(N) \leq x \mid N = n \right] \cdot P \left[N = n \right] \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.4})$$

où le symbole $P \left[\cdot \mid \cdot \right]$ caractérise la probabilité conditionnelle.

En réalité, la variable aléatoire $X(N)$ n'est pas discontinue, mais du fait que les longueurs X_i des pores peuvent devenir infiniment petites, elle devient continue. Soit $f_{X|N}(x)$ la densité de probabilité conditionnelle, définie par l'expression :

$$f_{X|N}(x) dx = P \left[x < X(N) \leq x + dx \mid N = n \right] \quad (\text{II.1.2.5})$$

Selon cette définition, nous aurons :

$$P \left[X(N) \leq x \mid N = n \right] = \int_0^x f_{X|N}(x') dx' \quad (\text{II.1.2.6})$$

Suivant les hypothèses a) et b) et tenant compte de l'expression (II.1.1) et de la définition de la variable aléatoire N , nous aurons :

$$P [N = n] = a^n \cdot (1 - a) \quad (II.1.2.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

En effet, la relation (II.1.2.7) exprime la probabilité d'avoir n pores surcritiques, suivis d'un pore sous-critique et ceci compte tenu de l'indépendance de ces événements.

Si nous remplaçons les expressions (II.1.2.6) et (II.1.2.7) dans la formule (II.1.2.4), nous avons :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x f_{X|N}(x') \, dx' \cdot a^n (1 - a) \quad (II.1.2.8)$$

La fonction $F(x)$ est en fait une fonction de distribution. Sa densité $f(x)$ est :

$$f(x) = \frac{d F(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{X|N}(x) \cdot a^n \cdot (1 - a) \quad (II.1.2.9)$$

On peut vérifier que la fonction $f(x)$ est une densité de probabilité, en prenant :

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_{X|N}(x) \, dx \cdot a^n (1 - a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = 1$$

Le résultat II.1.2.9 exprime la densité de la probabilité d'engorgement du milieu en fluide non mouillant à une distance x par rapport à l'origine. Sa signification physique sera mise en évidence en examinant la relation de dépendance entre les variables aléatoires X_i et r_i .

Comme nous l'avons déjà évoqué, les observations directes sur les milieux poreux naturels [12] montreraient plutôt une dépendance déterministe de la forme :

$$\begin{aligned} X_i &= h(r_i) \\ &= C \cdot r_i^\alpha \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.10})$$

où C et α sont deux constantes.

Connaissant la densité de probabilité $f_r(r)$ de la variable r_i , nous pouvons calculer, après changement des variables, la densité de probabilité $g(x)$ de la variable X_i .

A titre d'exemple, considérons une porométrie uniforme dans l'intervalle (r_{\min}, r_{\max}) et cherchons la densité $g(x)$ dans le cas où le coefficient α est égal à -1 . (figure 9)

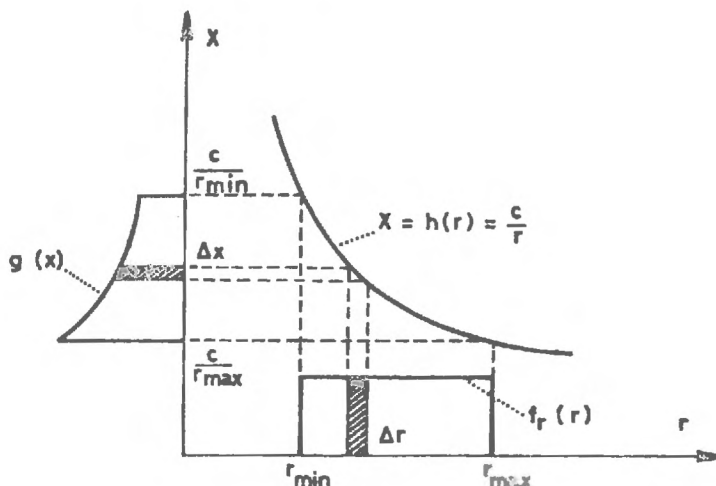


Figure 9

Nous obtenons X dans l'intervalle Δx , si r appartient dans l'intervalle Δr et la probabilité de cet évènement est la même si on l'évalue en fonction de $g(x)$ ou en termes $f_r(r)$.

Etant donné que $\Delta r > 0$ pour $\Delta x < 0$, nous avons :

$$g(x) \cdot (-\Delta x) = f_r(r) \cdot \Delta r$$

où

$$g(x) = \frac{1}{-\frac{\Delta x}{\Delta r}} \cdot f_r(r) \quad (\text{II.1.2.11})$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow dx$, $\Delta r \rightarrow dr$ et $x = h(r)$, la relation (II.1.2.11) devient :

$$g(x) = \frac{1}{-\frac{dh(r)}{dr}} \cdot f_r(r) \quad (\text{II.1.2.12})$$

Dans le cas de la figure 9, nous avons :

$$h(r) = \frac{C}{r}, \quad f_r(r) = \frac{1}{r_{\max} - r_{\min}} \quad \text{et en appliquant le résultat (II.1.2.12)}$$

nous trouvons :

$$g(x) = \frac{C}{x^2} \left(\frac{1}{r_{\max} - r_{\min}} \right)$$

Après cette préparation, calculons maintenant la densité de probabilité conditionnelle $f_{X|N}(x)$, telle qu'elle a été définie dans (II.1.2.5).

Supposons que $N = 0$; nous avons $X(0) = X_0 = 0$ ce qui constitue un évènement sûr. Si $N = 1$, d'après (II.1.2.10) nous avons $X(1) = X_1 = h(r_1)$ et la densité de $X(1)$ sera égale à $g(x)$. Nous pouvons donc écrire :

$$f_{X|N=1}(x) = g_1(x) = g(x)$$

Soit maintenant $N = 2$. On a $X(2) = X_1 + X_2$ et selon (II.1.2.10) $X(2) = h(r_1) + h(r_2)$ où r_1 et r_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et ayant la même densité $f_r(r)$. Les variables aléatoires $h(r_1)$ et $h(r_2)$ ont aussi la même densité $g(x)$ et elles sont indépendantes comme étant fonctions de deux variables aléatoires indépendantes r_1 et r_2 . La densité de leur somme $X(2)$ est alors la convolution de $g(x)$ avec elle-même [17]. Nous avons donc :

$$f_{X|N=2}(x) = g_2(x) = g(x) * g(x)$$

Dans le cas plus général, nous pouvons donc conclure que :

$$f_{X|N=n}(x) = g_n(x) = g_{n-1}(x) * g(x) = g^{(n)}(x) \quad (\text{II.1.2.13})$$

où $g^{(n)}(x)$ est la nième convolution de la fonction de densité $g(x)$ de la longueur d'un seul pore.

Si on remplace le résultat (II.1.2.13) dans l'expression (II.1.2.9), nous avons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(x) \cdot a^n \cdot (1 - a) \quad (\text{II.1.2.14})$$

où a est donné par l'expression (II.1.1)

L'expression analytique de la densité $f(x)$ est en général compliquée, surtout à cause de la fonction $g^{(n)}(x)$ qui apparaît dans la formule (II.1.2.14). Nous pouvons bien sûr, faire appel à la fonction caractéristique $\Phi_X(u)$ de la longueur du pore X , selon l'expression :

$$\Phi_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} g(x) dx \quad (\text{II.1.2.15})$$

Dans ce cas, la fonction caractéristique de la somme des longueurs de n pores est égale à $[\Phi_X(u)]^n$ et la densité de convolution $g^{(n)}(x)$ peut être obtenue en utilisant la transformée de Fourier :

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} [\phi_X(u)]^n du \quad (\text{II.1.2.16})$$

En général donc, l'expression (II.1.2.16) peut nous conduire à expliciter la densité $f(x)$ qui est donnée par (II.1.2.14). Néanmoins, dans la pratique, ce qui intéresse c'est l'expression de la distance moyenne x_m sur laquelle le fluide injecté a traversé le milieu. En utilisant l'expression (II.1.2.14) nous avons :

$$\begin{aligned} x_m &= E[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x g^{(n)}(x) dx \cdot a^n (1-a) \end{aligned}$$

On rappelle que $g^{(n)}(x)$ est la densité de probabilité de la somme de n variables aléatoires, indépendantes et distribuées selon la densité $g(x)$. Si on pose $E[X] = \int_0^{\infty} x g(x) dx$ la longueur moyenne des pores, nous avons :

$$\begin{aligned} x_m &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot E[X] \cdot a^n (1-a) \\ &= E[X] \cdot \frac{a}{1-a} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.17})$$

L'expression générale (II.1.2.14) peut nous permettre de retrouver le cas particulier du paragraphe (II.1.1) où tous les pores ont la même longueur égale à l .

En effet, dans ce cas, la densité commune $g(x)$ des variables aléatoires X_i devient la fonction de Dirac $\delta(x-l)$, dont la fonction caractéristique $\phi_X(u)$ est donnée par la relation (II.1.2.15). Nous avons donc :

$$\Phi_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \delta(x - \ell) dx = e^{iu\ell}$$

En utilisant l'expression (II.1.2.16) nous avons :

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \cdot e^{iun\ell} du = \delta(x - n\ell)$$

En remplaçant ce résultat dans la formule générale (II.1.2.14) nous trouvons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n\ell) a^n (1 - a) \quad (\text{II.1.2.18})$$

Lorsque n prend des valeurs entières, égales à x/ℓ , l'expression (II.1.2.18) est identique à la formule (II.1.1.1) que nous avons évoquée dans le paragraphe précédent.

En utilisant le résultat (II.1.2.18), nous pouvons calculer la longueur moyenne de pénétration. Nous avons :

$$\begin{aligned} x_m &= \int_0^{\infty} x f(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x \delta(x - n\ell) dx a^n (1 - a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\ell a^n (1 - a) = \ell \cdot \frac{a}{1 - a} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.19})$$

La comparaison entre les résultats (II.1.2.17) et (II.1.2.19) exprime en général l'influence de la loi de distribution ou des longueurs des pores, sur la distance moyenne de la pénétration du fluide injecté. Pour mieux comprendre le sens physique de ces résultats, nous allons étudier un exemple concret, partant d'une loi porométrique fixée d'avance.

II.1.3. Etude de deux porométries caractéristiques

Nous allons supposer que la densité de distribution des rayons des pores suit une loi Log-normale : cette loi présente l'avantage de donner des valeurs nulles pour $r < 0$. Par ailleurs, il semblerait qu'elle décrit avec une bonne approximation la porométrie des milieux poreux naturels ([10]).

Pour simplifier, nous allons supposer que la variable r est déjà sous forme adimensionnelle. Dans ce cas, si y est une variable aléatoire sans dimensions, qui suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 , nous pouvons obtenir une loi Log-normale par le changement des variables :

$$r = e^y \quad (\text{II.1.3.1})$$

Nous trouvons :

$$f_r(r) = \frac{1}{r \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\text{Log } r - \mu)^2}{2 \sigma^2}} \quad (\text{II.1.3.2})$$

$$r > 0$$

En utilisant l'expression (II.1.3.2), nous pouvons calculer facilement la valeur moyenne $\bar{r} = E[r]$ et la variance $E[r - \bar{r}^2]$ sous la forme :

$$\bar{r} = E[r] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (\text{II.1.3.3})$$

$$\text{Var}[r] = (\bar{r})^2 (e^{\sigma^2} - 1) \quad (\text{II.1.3.4})$$

Dans la figure (10.a) apparaissent deux courbes porométriques suivant une loi Log-normale ; la courbe I correspond aux paramètres $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 0,04$, ce qui conduit à $\bar{r} = 2,77$ et $\text{Var}[r] = 0,315$.

La courbe II a comme paramètres $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 0,25$, ce qui nous donne $\bar{r} = 3,08$ et $\text{Var}[r] = 2,72$. Les courbes I et II sont caractéristiques dans la mesure où elles représentent deux cas extrêmes de porométrie, l'une restreinte et l'autre très étalée.

Supposons maintenant que la longueur X d'un pore est liée au rayon r selon une relation de la forme :

$$X = c \cdot r^\alpha$$

où c et α sont deux constantes.

D'après le changement des variables (II.1.3.1) nous avons :

$$X = c \cdot e^{\alpha y} = e^{\alpha y + \text{Log } c} \quad (\text{II.1.3.5})$$

Lorsque y est une variable normale de paramètres μ et σ^2 , la variable aléatoire $\alpha y + \text{Log } c$ est une variable normale également de paramètres $\alpha \mu + \text{Log } c$ et $\alpha^2 \cdot \sigma^2$. En comparant les expressions (II.1.3.5) et (II.1.3.1) nous concluons donc que X est une variable Log-normale de moyenne :

$$E[X] = \exp\left(\alpha \mu + \text{Log } c + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right) \quad (\text{II.1.3.6})$$

et de variance :

$$\text{Var}[X] = \exp\{2(\alpha \mu + \text{Log } c) + \alpha^2 \sigma^2\} (e^{\alpha^2 \sigma^2} - 1)$$

Utilisant l'expression (II.1.2.17), nous pouvons calculer la variation de la longueur moyenne de pénétration x_m en fonction de la pression capillaire p_c . En effet, nous avons :

$$a = P[r > r_c] = 1 - P[r \leq r_c]$$

et en appliquant le changement de variables (II.1.3.1) nous trouvons :

$$a = E[X] \cdot \frac{a}{p_c}$$

(II.1.2.17)

$$\begin{aligned}
 a &= 1 - P \left[e^y \leq r_c \right] = 1 - P \left[y \leq \text{Log } r_c \right] \\
 &= 1 - P \left[\frac{y - \mu}{\sigma} \leq \frac{\text{Log } r_c - \mu}{\sigma} \right] \\
 &= \frac{1}{2} - \text{erf} \left(\frac{\text{Log } r_c - \mu}{\sigma} \right) \quad (\text{II.1.3.7})
 \end{aligned}$$

où r_c est lié à p_c selon la relation de Laplace.

Nous pouvons maintenant nous servir des résultats (II.1.3.6) et (II.1.3.7) afin de calculer selon (II.1.2.17) la corrélation entre x_m et la pression capillaire p_c .

Dans la figure 10.b, nous avons représenté l'évolution des longueurs moyennes de pénétration x_m rapportées au rayon moyen des pores, en fonction de la pression capillaire adimensionnelle p_c/p_{cm} et les valeurs du coefficient α . La pression de référence p_{cm} correspond à la valeur moyenne du rayon des pores.

La courbe de paramètre $\alpha = 0$ correspond au cas où tous les pores ont la même longueur $X = \ell = c$. Pour le calcul, nous avons supposé en première approximation que $\ell = c = \bar{r}$: ce choix a été inspiré de l'hypothèse que la longueur moyenne des pores est du même ordre de grandeur que le rayon moyen.

Les résultats de la figure 10;b sont certes qualitatifs, mais nous pouvons déjà en tirer quelques conclusions intéressantes; celles-ci expliquent en partie les résultats expérimentaux de FATT (figure 5).

Tout d'abord, nous remarquons que les courbes $\alpha = \text{cte}$ sont étalées autour du graphe $\alpha = 0$ en fonction de la porométrie. L'étalement est d'autant plus faible que la variance de la fonction de distribution des tailles des pores est faible (voir aussi figure 5). D'ailleurs, lorsque la variance de la porométrie tend vers zéro (porométrie uniforme), le coefficient α , fixant la

$$p_{cm} = p_c \text{ par } \bar{r}$$

relation entre les longueurs et les rayons des pores, n'intervient plus. Ceci correspond aussi au cas $X = l = c$.

Si nous comparons maintenant les courbes $\alpha = 0$ correspondant aux deux valeurs de la variance porométrique, nous constatons que lorsque la variance est faible (cas I), la quantité du fluide non mouillant qui entre dans les pores est plus faible que dans le cas où la variance est grande (cas II). Ceci est vrai jusqu'à une valeur de la pression adimensionnelle p_c/p_{cm} égale environ à 1. A partir de ce seuil, la profondeur du milieu envahie par le fluide injecté augmente brusquement dans le cas I et elle devient même plus importante que dans le cas II (voir aussi figure 5.b). Ceci est compatible avec la tendance asymptotique de la courbe capillaire lorsque la variance de la porométrie tend vers zéro. En effet, dans ce cas, la courbe capillaire tend vers une ligne horizontale pour $p_c = p_{cm}$.

Les résultats ci-dessus, sont bien sûr provisoires et qualitatifs, compte tenu de la schématisation caricaturale des pores selon le modèle cellulaire. Néanmoins, ils nous permettent déjà, d'avoir une idée plus claire sur l'allure des courbes capillaires. En particulier, l'engorgement qui peut intervenir surtout aux faibles pressions d'injection montre que les courbes capillaires dépendent du rapport entre la surface d'injection et le volume total de l'échantillon. Ainsi, l'hypothèse de base du modèle du faisceau des tubes capillaires, selon laquelle le remplissage en fluide non mouillant est uniforme sur tout le volume de l'échantillon, est contestée.

Nous rappelons tout de même que dans le cadre des hypothèses que nous nous sommes fixées au départ, nous nous sommes placés dans des conditions relativement simples où les effets dus à l'influence de la pesanteur étaient négligeables. Dans la pratique courante du laboratoire (essais de Purcell ou de la colonne), la gravité intervient et peut avoir une influence sur la répartition des teneurs en saturation à l'intérieur du milieu.

Avant donc d'estimer statistiquement le nombre des interconnexions des pores et leur influence sur la pénétration capillaire, examinons sur le plan théorique comment nous pouvons tenir compte des effets de la gravité.

II.2. INFLUENCE DE LA PESANTEUR

Nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses concernant le modèle cellulaire. Mais, cette fois, compte tenu des résultats précédents, nous allons faire abstraction de la répartition des longueurs des pores X_1 ; ceci correspond au cas où la constante α intervenant dans la relation $X = c r^\alpha$ est nulle : par conséquent, tous les pores ont la même longueur ℓ . Toutefois, les résultats que nous allons exposer peuvent être facilement généralisés afin de tenir compte de la variation des longueurs des pores.

La mise en oeuvre du modèle théorique est inspirée par la méthode des éléments différentiels, technique fréquemment utilisée dans la théorie des processus aléatoires [15] .

Examinons donc ce qui se passe à l'intérieur du milieu dans un intervalle infiniment petit Δx . Selon les hypothèses du modèle cellulaire, deux types d'évènements sont possibles (figure 11) : l'évènement A correspondant à la rencontre d'au moins un pore sous-critique ou son évènement complémentaire B décrivant la rencontre d'un pore sur-critique sur toute l'épaisseur Δx .

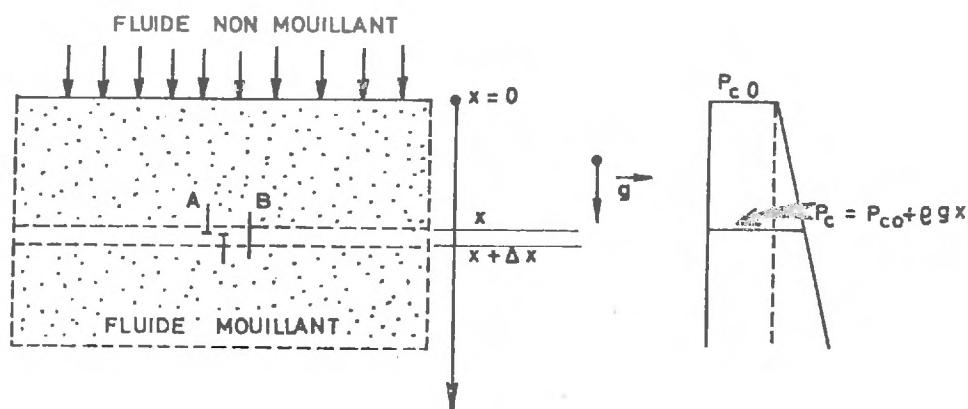


Figure 11

Soit $P[A]$ et $P[B]$ la probabilité d'apparition de deux évènements. Selon le résultat du paragraphe II.1.1., nous pouvons écrire :

$$P[A] = \beta_1(x) \Delta x \quad (\text{II.2.1})$$

$$\begin{aligned} P[B] &= 1 - P[A] \\ &= 1 - \beta_1(x) \Delta x \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

En effet, nous avons déjà montré que le produit $\beta_1(x) \Delta x$ représente la probabilité de rencontrer au moins un pore sous-critique dans l'intervalle Δx et $\beta_1(x)$ est donné par l'expression (II.1.1.4), à savoir :

$$\beta_1(x) = \frac{-\text{Log } a(x)}{\ell} \quad (\text{II.2.3})$$

Dans l'expression (II.2.3) nous avons écrit que le paramètre β_1 est une fonction de x car lorsqu'on tient compte de la gravité, la pression capillaire p_c varie en fonction de x selon la loi :

$$p_c(x) = p_{co} + \rho g x \quad (\text{II.2.4})$$

où ρ est la masse volumique du fluide injecté et p_{co} la pression appliquée sur la surface de l'échantillon (figure 11).

Compte tenu de la relation (II.1.1) nous avons donc :

$$a(x) = \int_{r_c(x)}^{\infty} f(r) dr, \quad r_c(x) = \frac{2 T_s \cos \theta}{p_c(x)}$$

et l'expression complète de (II.2.3) devient :

$$\beta_1(x) = -\frac{1}{\ell} \text{Log} \left\{ \int_{r_c(x)}^{\infty} f(r) dr \right\} \quad (\text{II.2.5})$$

avec :

$$r_c(x) = \frac{2 T_s \cos \theta}{p_{co} + \rho g x} \quad (\text{II.2.6})$$

Supposons maintenant que $W(x)$ représente la probabilité pour que le fluide injecté, n'étant pas bloqué dans l'intervalle $(0, x)$ arrive à l'abscisse x . L'évènement de l'arrivée de ce fluide à $x + \Delta x$ sera la composition de deux évènements : d'une part arrivée à x et d'autre part rencontre de pores surcritiques (évènement B). D'après l'hypothèse de l'indépendance des évènements et utilisant l'expression (II.2.2) nous aurons donc :

$$W(x + \Delta x) = W(x) \{1 - \beta_1(x)\} \Delta x \quad (\text{II.2.7})$$

La relation (II.2.7) implique que :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{W(x + \Delta x) - W(x)}{\Delta x} = -\beta_1(x) \cdot W(x) \quad (\text{II.2.8})$$

ou encore :

$$\frac{dW(x)}{dx} = -\beta_1(x) W(x) \quad (\text{II.2.9})$$

Nous supposons que pour $x = 0$, toute la surface de l'échantillon est imprégnée en fluide non mouillant et par conséquent :

$$W(0) = 1 \quad (\text{II.2.10})$$

La solution de l'équation différentielle (II.2.9) avec la condition à la limite (II.2.10) est de la forme :

$$W(x) = e^{-\int_0^x \beta_1(x) dx} \quad (\text{II.2.11})$$

La fonction $W(x)$ exprime la probabilité pour que le fluide injecté n'étant pas bloqué dans l'intervalle $(0, x)$ arrive à une distance au moins égale à x . Si on se souvient de la variable aléatoire $X(N)$ qui compte le nombre des pores surcritiques qui se suivent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} W(x) &= P [X(N) > x] \\ &= 1 - P [X(N) \leq x] \\ &= 1 - F(x) \end{aligned}$$

où $F(x)$ est la probabilité pour que le fluide non mouillant soit arrêté à une distance inférieure ou égale à x . Nous aurons donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - W(x) \\ &= 1 - e^{-\int_0^x \beta_1(x) dx} \end{aligned} \quad (\text{II.2.12})$$

et la densité de la probabilité d'engorgement sera :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \beta_1(x) \cdot e^{-\int_0^x \beta_1(x) dx} \quad (\text{II.2.13})$$

En comparant les résultats (II.2.12) et (II.1.1.3) du paragraphe précédent, on se rend compte que du point de vue mathématique, la variation du coefficient d'engorgement en fonction de x , nous conduit à un processus aléatoire non homogène.

Du point de vue physique, les résultats (II.2.11), (II.2.12) et (II.2.13) peuvent représenter la pénétration capillaire dans un milieu poreux dont les propriétés physiques varient progressivement en fonction de x . En effet, si nous examinons une coupe verticale d'un terrain naturel, très souvent, la migration des particules de faible diamètre au voisinage de la surface du sol, provoque une variation longitudinale de la granulométrie : par conséquent, la densité porométrique $f(r)$ varie en fonction de x . Comme le montre la formule (II.2.3), ce coefficient d'engorgement β_1 est une fonction égale-

ment de x , même dans le cas où l'influence de la pesanteur est négligeable. Evidemment, en pratique, le problème consisterait à déterminer une formule d'interpolation traduisant l'hétérogénéité de la porosité du milieu.

Lorsque le milieu poreux est homogène, la pesanteur provoque, pour chaque pression imposée à la surface $x = 0$, une variation longitudinale du coefficient d'engorgement par l'intermédiaire de la borne inférieure de l'intégrale qui figure dans l'expression (II.2.5) ; il en résulte l'expression (II.2.11) de la probabilité de pénétration $W(x)$.

La figure 12 montre l'allure générale de la fonction $W(x)$ et précise sa signification physique.

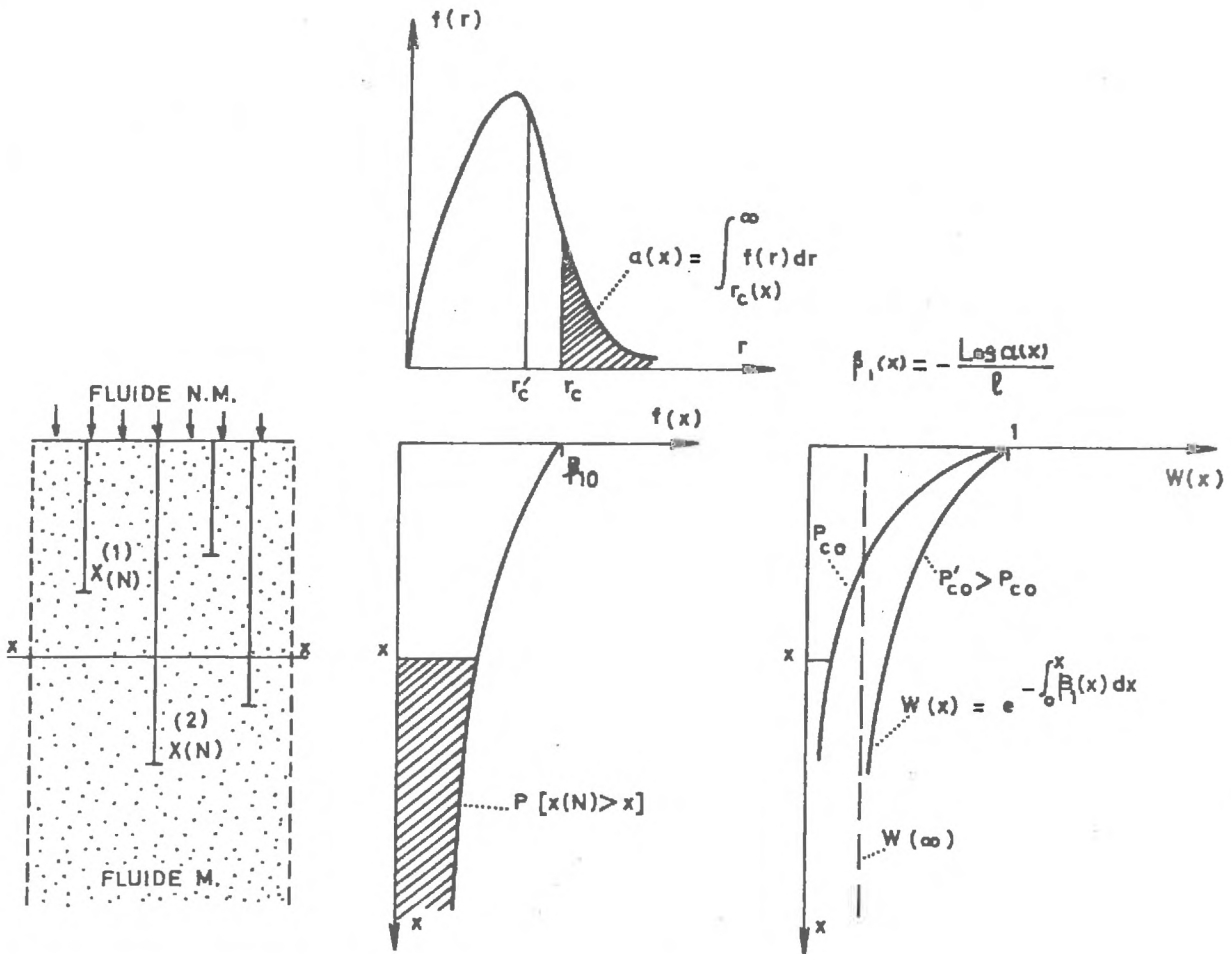


Figure 12. Signification physique de $W(x)$

Pour une loi porométrique $f(r)$ donnée et chaque valeur de la pression p_{co} à la limite $x = 0$, la fonction $\beta_1(x)$ peut être calculée à partir de la relation (II.2.5) ; la probabilité $W(x)$ d'après l'expression (II.2.11).

On remarque que lorsque la pression p_{co} augmente, la quantité a augmenté aussi ; toutefois, le coefficient β_1 diminue. Ceci a pour conséquence l'augmentation de la probabilité de pénétration en fluide non mouillant.

II.2.1. Comportement asymptotique de la probabilité du remplissage

Il serait intéressant maintenant d'étudier le comportement asymptotique de la fonction $W(x)$, lorsque x tend vers l'infini. Pour cela, prenons le logarithme des deux membres de l'expression (II.2.11). Nous aurons :

$$- \text{Log } W(x) = \int_0^x \beta_1(x) dx$$

Pour $x \rightarrow \infty$ cette relation donne :

$$- \text{Log } W(\infty) = \int_0^{\infty} \beta_1(x) dx \quad (\text{II.2.1.1})$$

Si la fonction $\beta_1(x)$ est telle que l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \beta_1(x) dx = \infty \quad (\text{II.2.1.2})$$

la relation (II.2.1.1) montre que $W(\infty) = 0$. Du point de vue physique, ceci correspond à un blocage complet du fluide injecté après une certaine distance.

Néanmoins, en supposant que la porométrie du milieu suive une loi connue d'avance, nous montrerons qu'étant donné la définition de la fonction $\beta_1(x)$ selon la relation (II.2.5), $W(\infty)$ prend une valeur finie.

Supposons par exemple, que les rayons des pores suivent une loi de distribution de Rayleigh de la forme :

$$f(r) = \frac{r}{r_0^2} e^{-r^2/2r_0^2} \quad r \geq 0 \quad (\text{II.2.1.3})$$

La distribution (II.2.1.3) tout comme la loi Log normale, présente l'avantage de donner des valeurs nulles pour $r < 0$. Comme le montre la figure 13, le paramètre r_0 correspond à la valeur maximale des fréquences observées.

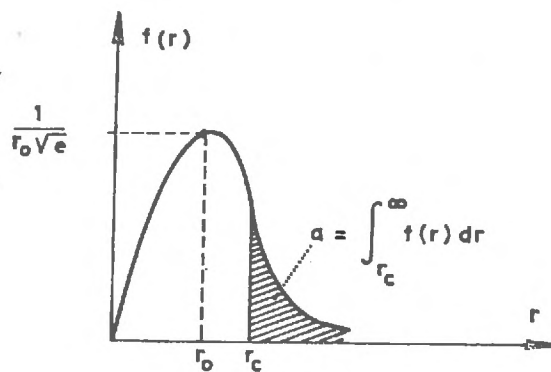


Figure 13. Distribution de Rayleigh

Pour mieux saisir l'influence spécifique de la gravité, examinons d'abord le comportement asymptotique de la probabilité $W(x)$, lorsque la pression capillaire p_c est constante pour tout x et égale à la pression p_{co} imposée à la surface. Le rayon critique des pores prend la valeur :

$$r_c = r_{co} = \frac{2 T_s \cos \theta}{p_{co}} \quad x \geq 0 \quad (\text{II.2.1.4})$$

Par conséquent, le paramètre d'engorgement β_1 est indépendant de x .

En tenant compte des expressions (II.2.5) et (II.2.11) et en posant $\beta_1(x) = \beta_{10}$ pour tout x , nous pouvons exprimer la probabilité de remplissage $W(x)$ sous la forme :

$$W(x) = e^{-\beta_{10}x} \quad (\text{II.2.1.5})$$

où :

$$\beta_{10} = -\frac{1}{\ell} \text{Log } a = -\frac{1}{\ell} \text{Log} \left\{ \int_{r_{co}}^{\infty} f(r) dr \right\}$$

En faisant intervenir la loi de Rayleigh (II.2.1.3) nous avons :

$$\beta_{10} = -\frac{1}{\ell} \text{Log} \left\{ \int_{r_{co}}^{\infty} \frac{r}{r_o^2} e^{-r^2/2r_o^2} dr \right\}$$

$$= \frac{r_{co}^2}{2\ell r_o^2} \quad (\text{II.2.1.6})$$

Nous pouvons vérifier que pour $x = 0$, $W(0) = 1$ et nous constatons que si $x \rightarrow \infty$, $W(\infty) \rightarrow 0$. Cela signifie qu'à partir d'une certaine valeur de x , la probabilité de pénétration devient excessivement faible et le milieu est engorgé (figure 14).

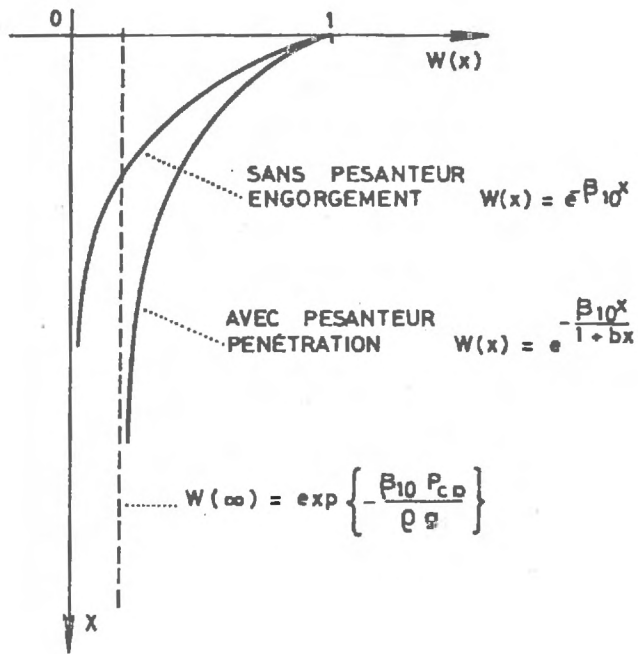


Figure 14. Distribution des probabilités du remplissage en fluide non mouillant le long du milieu poreux

Examinons maintenant l'influence de la gravité.

En combinant les expressions (II.2.1.4) et (II.2.6) nous avons :

$$r_c(x) = \frac{r_{co}}{1 + bx}, \quad b = \frac{\rho g}{P_{co}} \quad (\text{II.2.1.7})$$

Le coefficient d'engorgement peut être donc calculé à partir de l'expression (II.2.5) dans laquelle la borne inférieure d'intégration de la densité de Rayleigh est donnée par (II.2.1.7).

Après intégration, nous trouvons :

$$\beta_1(x) = \frac{r_{co}^2}{2 \ell r_o^2} \cdot \frac{1}{(1 + bx)^2} \quad (\text{II.2.1.8})$$

Si nous intégrons l'expression (II.2.1.8) de zéro à x et nous remplaçons le résultat dans la formule (II.2.11), nous avons :

$$W(x) = e^{-\beta_{10} \left(\frac{x}{1+bx} \right)} \quad (\text{II.2.1.9})$$

où :

$$\beta_{10} = \frac{r_{co}^2}{2l r_o^2}$$

L'expression (II.2.1.9) montre que lorsque $x \rightarrow \infty$, la probabilité de remplissage en fluide non mouillant tend vers une valeur finie égale à :

$$W(\infty) = e^{-\beta_{10}/b} \quad (\text{II.2.1.10})$$

où :

$$\beta_{10} = \frac{r_{co}^2}{2l r_o^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\rho g}{p_{co}} \quad (\text{II.2.1.11})$$

Nous concluons donc que lorsqu'il y a intervention de la gravité, le milieu poreux est envahi par le fluide non mouillant sur toute sa profondeur (figure 14). Du point de vue physique, cela signifie qu'il y a compensation entre la diminution de la probabilité de remplissage due au produit des probabilités composées et l'augmentation de la pression due à la pesanteur.

Les résultats ci-dessus peuvent nous donner des indications utiles sur l'évolution du phénomène dans des situations réelles : par exemple, on peut se servir de ces résultats pour étudier la pollution du sol, due à l'infiltration d'hydrocarbures, répandus accidentellement en surface. Du point de vue pratique, il est intéressant d'étudier l'influence des paramètres qui déterminent la valeur de la probabilité asymptotique de remplissage $W(\infty)$.

Si nous combinons les relations (II.2.1.10) et (II.2.1.11) nous trouvons :

$$W(\infty) = \exp \left\{ - \frac{r_{co}^2}{2\ell r_o^2} \cdot \frac{p_{co}}{\rho g} \right\}$$

En tenant compte de la relation de Laplace entre les paramètres r_{co} et p_{co} , nous avons :

$$W(\infty) = \exp \left\{ - \frac{2}{\ell} \cdot \left(\frac{T_s \cos \theta}{r_o} \right)^2 \cdot \frac{1}{\rho g p_{co}} \right\} \quad (\text{II.2.1.12})$$

La relation (II.2.1.12) met en évidence l'influence des divers paramètres tels que les propriétés du fluide (ρ , T_s , θ), les propriétés porométriques du sol (r_o , ℓ), les conditions aux limites ($p_{co} = p$ à $x = 0$) et la pesanteur, sur la probabilité asymptotique du remplissage. Il est évident que la porométrie intervient implicitement par le choix de la loi porométrique ; nous rappelons que la relation (II.2.1.12) résulte du choix d'une densité porométrique de Rayleigh.

En examinant le résultat (II.2.1.12) nous remarquons tout d'abord que la tension interfaciale T_s et la dimension caractéristique des pores r_o interviennent en sens opposé ; leur influence est significative puisque dans l'expression (II.2.1.12) figurent à la puissance 2. Par ailleurs, lorsque la masse volumique du fluide ρ ou la pression en surface p_{co} augmentent, la probabilité $W(\infty)$ augmente aussi, ce qui confirme la prévision de simple bon sens.

Nous pouvons noter ici que les résultats de ce paragraphe peuvent être facilement étendus dans le cas où la direction moyenne x du milieu poreux ne coïncide pas avec l'axe vertical de l'accélération de la gravité. En effet, si φ est l'angle entre les deux axes, il suffit de remplacer dans les expressions (II.2.1.9) et (II.2.1.10) g par $g \cos \varphi$.

Toutefois, nous devons rappeler que l'hypothèse de base du modèle probabiliste que nous avons proposé jusqu'ici, est l'absence d'interconnexions entre les pores. Dans un milieu poreux naturel, les

interstices sont en communication et on doit s'attendre à une augmentation de la probabilité de remplissage.

Avant de présenter un modèle probabiliste, qui tient compte des interconnexions entre les pores, nous allons examiner comment, à partir des quelques hypothèses, nous pouvons estimer l'importance de ces interconnexions.

II.3. ESTIMATION DES INTERCONNEXIONS DES PORES

Si nous ajoutons des liaisons entre les canaux capillaires de forme cellulaire que nous avons considérés jusqu'ici, nous nous apercevons que le fluide non mouillant peut circuler entre les pores engorgés. Une quantité plus importante de fluide envahit alors le milieu. En regardant le phénomène au microscope, nous pouvons schématiser l'ensemble des capillaires interconnectés à l'aide d'un graphe à jonctions multiples, dont les branches peuvent créer des blocages aléatoires.

C'est ainsi que BROADBENT et HAMMERSLEY (1957, [19]) ont étudié le flux d'un fluide dans un milieu qu'ils appellent "cristal abstrait" ou "masse aléatoire". Ce milieu est assimilé à un ensemble d'"atomes" ou "points" reliés par des liaisons ayant une probabilité d'être étanches ou perméables au fluide. Le problème consiste alors à déterminer la probabilité pour qu'un nombre donné d'atomes soit uni par des liaisons perméables. Ainsi, le caractère aléatoire est affecté au milieu poreux, qui règle ainsi la progression du fluide. Cette démarche est bien distincte de celle qui attribue le mécanisme aléatoire aux particules fluides, dont le mouvement désordonné fait apparaître le phénomène de la dispersion hydrodynamique en milieu poreux {SCHEIDEGGER (1954, [20]), SAFFMAN (1959, [21]), DE JOSSELIN DE JONG (1969, [22]), TODOROVIC (1970, [23])}.

Malheureusement, l'étude entreprise par BROADBENT et HAMMERSLEY reste très théorique et il n'y a pas de résultats concernant les caractéristiques de la progression du fluide.

Etant donné la complexité du problème dans sa généralité, nous pouvons le simplifier, en examinant son évolution dans une couche d'épaisseur Δx infiniment petite. C'est la méthode utilisée par MARKIN [10] et dont il sera question dans le paragraphe suivant. Mais auparavant, nous allons introduire le paramètre d'interconnexions β_2 . Ce paramètre interviendra en sens inverse par rapport au paramètre d'engorgement, puisqu'il va caractériser la facilité de circulation du fluide non mouillant entre les pores surcritiques.

Nous rappelons que le produit $\beta_1 \Delta x$ définit la probabilité d'apparition à l'abscisse x de pores surcritiques ($r > r_c$), qui deviennent sous-critiques ($r \leq r_c$) dans l'intervalle Δx . De manière analogue, le produit $\beta_2 \Delta x$ va exprimer la probabilité d'interconnexion des pores surcritiques ($r > r_c$), contenus dans Δx . Cette probabilité sera estimée à partir de la surface des pores surcritiques disposée pour les interconnexions.

D'une manière générale, les hypothèses et les raisonnements qui suivent se réfèrent à un milieu poreux homogène, isotrope et ayant les pores interconnectés. Nous supposons donc que les interconnexions entre les pores se font tout à fait au hasard (indépendance en probabilité) et nous excluons tout milieu présentant une porosité fermée (pierre ponce par exemple).

Nous utilisons l'hypothèse fondamentale selon laquelle la surface des pores disposés sur toute surface macroscopique externe ou interne du milieu poreux représente une fraction de la surface totale égale à la porosité P de volume. Cette hypothèse a été utilisée par WHEELER (1951, [24]) pour estimer le nombre total des pores n_p sur une surface de section du milieu.

Soit Σ_x la surface totale macroscopique du milieu dans le plan perpendiculaire à l'axe Ox . Suivant l'hypothèse admise, la surface Σ_{xp} des pores disposés sur Σ_x sera :

$$\Sigma_{xp} = P \cdot \Sigma_x$$

Nous pouvons calculer Σ_{xp} selon un raisonnement différent. En effet, soit $\overline{r^2}$ la valeur moyenne du rayon des pores au carré, donnée par l'expression :

$$\overline{r^2} = \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr \quad (\text{II.3.2})$$

Supposons que les pores sont localement cylindriques et dirigés suivant un angle φ quelconque par rapport à l'axe des x . Dans le plan perpendiculaire à l'axe x , la surface moyenne d'un pore sera une ellipse d'aire $\pi \cdot \overline{r^2} \cdot T$ où $T = 1/\overline{\cos \varphi}$ est le coefficient de tortuosité, avec $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$. Si n_p est le nombre total des pores contenu dans la section droite, nous aurons :

$$\Sigma_{xp} = n_p \cdot (\pi \overline{r^2} T) \quad (\text{II.3.3})$$

Calculons maintenant la surface macroscopique des pores surcritiques ($r > r_c$) contenus dans l'intervalle infiniment petit Δx . Cette surface que nous allons noter Σ_c peut être exprimée en fonction du nombre des pores surcritique n_{pc} contenus dans la section Σ_x , et du rayon moyen surcritique \overline{r}_c selon l'expression :

$$\begin{aligned} \Sigma_c &= n_{pc} \cdot (2\pi \overline{r}_c \cdot \Delta x / \overline{\cos \varphi}) \\ &= n_{pc} \cdot (2\pi \overline{r}_c \cdot T \cdot \Delta x) \end{aligned} \quad (\text{II.3.4})$$

où

$$\overline{r}_c = \frac{\int_{r_c}^{\infty} r f(r) dr}{\int_{r_c}^{\infty} f(r) dr} \quad (\text{II.3.5})$$

En réalité, la formulation (II.3.4) suppose que dans l'intervalle Δx les pores sont cylindriques à parois parfaitement lisses.

Pour tenir compte de la forme irrégulière des parois, nous pouvons faire appel à un coefficient k semi-empirique où $k > 1$ et écrire la formule (II.3.4) sous la forme :

$$\Sigma_c = \eta_{pc} \cdot k \cdot (2\pi \bar{r}_c T \Delta x) \quad (\text{II.3.6})$$

D'après WHEELER [24], pour les matériaux catalytiques de porosité de l'ordre de 0,50, k est voisin de 2.

Le nombre des pores surcritiques η_{pc} qui intervient dans la formule (II.3.6) peut être exprimé à l'aide de la quantité a, où :

$$a = \int_{r_c}^{\infty} f(r) dr \quad (\text{II.3.7})$$

En effet, souvenons-nous que a exprime la probabilité pour qu'un pore soit surcritique. Cette probabilité est, à la limite, égale au rapport η_{pc}/η_p et nous pouvons donc écrire :

$$\eta_{pc} = a \cdot \eta_p \quad (\text{II.3.8})$$

En remplaçant les expressions (II.3.8), (II.3.7) et (II.3.5) dans la formule (II.3.6), nous avons :

$$\Sigma_c = \eta_p \cdot k \cdot (2\pi \tilde{r}_c T \Delta x) \quad (\text{II.3.9})$$

où :

$$\tilde{r}_c = \int_{r_c}^{\infty} r f(r) dr \quad (\text{II.3.10})$$

La surface interne Σ_c est composée d'une partie solide Σ_{cs} appartenant aux grains et une partie Σ_{cp} disposée aux interconnexions. En faisant appel à l'hypothèse fondamentale, nous pouvons écrire une relation analogue à l'expression (II.3.1), de la forme :

$$\Sigma_{cp} = P \cdot \Sigma_c \quad (\text{II.3.11})$$

qui vérifie assez bien le cas asymptotique $P = 0$ et $P = 1$.

Nous pouvons maintenant calculer la probabilité d'interconnexion des pores surcritiques contenus dans l'intervalle Δx . En effet, cette probabilité tend à la limite vers le rapport entre la surface Σ_{cp} des pores surcritiques interconnectés à l'intérieur de Δx et la surface totale des pores.

En tenant compte d'une part des relations (II.3.11), (II.3.9) et (II.3.3), et d'autre part de la définition du coefficient β_2 , nous avons :

$$\beta_2 \Delta x = \frac{2 k \cdot P \cdot \tilde{r}_c}{\bar{r}^2} \cdot \Delta x \quad (\text{II.3.12})$$

où \tilde{r}_c et \bar{r}^2 sont données par les expressions (II.3.10) et (II.3.2).

La formule (II.3.12) permet d'estimer le paramètre β_2 en fonction de la porosité P , du graphe porométrique et de la pression p_c , qui définit la borne inférieure de l'intégrale (II.3.10). Le coefficient de rugosité k peut prendre les valeurs à l'intérieur de l'intervalle (1, 2), en fonction de la forme plus ou moins irrégulière des grains.

Pour donner un exemple, nous avons repris les porométries I et II que nous avons déjà étudiées dans le paragraphe (II.1.3.). Nous rappelons que ces porométries suivent une loi Log-normale de moyenne 2,77 et 3,08 et de variance 0,32 et 2,72 respectivement.

Dans la figure 15, nous avons représenté l'évolution des coefficients β_1 et β_2 en fonction du rayon critique. Pour le calcul, nous avons fait appel aux expressions (II.1.1.6) et (II.3.12).

En ce qui concerne le coefficient d'engorgement, nous avons choisi le coefficient de tortuosité T égal à 1,40 et la longueur moyenne des capillaires λ égale au diamètre moyen des pores $\bar{d} = 2 \bar{r}$. Le choix de ces paramètres a été motivé par des considérations physiques. En effet, tout d'abord la valeur $T = 1,40$ correspond à un angle

moyen d'orientation des capillaires par rapport à x égal à 45° . Cette valeur est souvent utilisée dans la littérature [24]. En ce qui concerne la longueur moyenne l , nous avons déjà dit que la notion d'un pore a un sens lorsque sa longueur est du même ordre de grandeur que sa dimension transversale ; il est donc raisonnable de prendre $l = \bar{d} = 2 \bar{r}$.

Pour calculer le coefficient β_2 , nous avons supposé que les courbes porométriques I et II correspondent à un milieu poreux dont la porosité est égale à 0,32. Le coefficient de rugosité a été choisi égal à 1,3.

Etant donné que les dimensions des β_1 et β_2 sont l'inverse d'une longueur, nous pouvons dire donc que β_1 et β_2 correspondent à deux densités de probabilité. Lorsque la pression capillaire augmente progressivement, la dimension critique r_c diminue ; la figure 15 montre que le coefficient β_1 diminue brusquement, ce qui correspond à une forte diminution de la probabilité d'engorgement par unité de longueur. Par conséquent, le fluide non mouillant peut pénétrer plus facilement dans les pores.

En même temps, avec l'augmentation de la pression, le coefficient β_2 augmente aussi : cela signifie que le nombre des pores sur-critiques interconnectés augmente, ce qui peut faciliter la pénétration du fluide injecté.

Nous constatons donc que pour un milieu poreux homogène, les coefficients β_1 et β_2 ne dépendent pas de x ; ils ne dépendent que de la pression appliquée et règlent en quelque sorte le mécanisme de la pénétration capillaire. Nous allons maintenant examiner en détail ce mécanisme dans une couche de longueur Δx infiniment petite.

II.4. PROCESSUS ALEATOIRE DE LA PENETRATION CAPILLAIRE

L'analyse probabiliste du mécanisme local du phénomène peut nous conduire à une équation différentielle décrivant la distribution de la probabilité de pénétration en fluide mouillant, à l'intérieur du milieu. C'est ainsi que MARKIN [10] a développé un processus aléatoire, basé sur une méthode de cycles. Ces cycles représentent en quelque sorte tous les mouvements possibles du fluide injecté avant d'atteindre son équilibre. Par exemple, si on suppose qu'au $(k - 1)^{\text{ème}}$ cycle le fluide non mouillant se déplace de droite à gauche, au cycle suivant il se déplacera dans le sens opposé. Si $Y_k(x)$ est la probabilité de remplissage d'un pore au $k^{\text{ème}}$ cycle, MARKIN pose cette probabilité égale à la somme des probabilités correspondantes aux cycles antérieurs. Il établit ainsi un système infini d'équations différentielles très compliquées permettant par récurrence le calcul des fonctions successives.

Les expériences de visualisation du phénomène que nous avons entreprises sur modèle analogique de milieu poreux, nous ont permis de constater que si la pression d'injection du fluide non mouillant augmente très lentement, les courants de retour à l'échelle du pore n'interviennent pas de manière significative. Nous avons été amenés donc à faire l'hypothèse que pour un déplacement infiniment lent, le fluide injecté se déplace uniquement selon la direction des x croissants. Du point de vue mathématique, ceci revient à dire que le premier cycle du modèle probabiliste de MARKIN [16] constitue une bonne approximation.

Considérons l'ensemble des pores surcritiques ($r > r_c$) contenus dans la section x . Dans l'intervalle $(x, x + \Delta x)$, trois évènements sont possibles : l'évènement A correspondant aux pores surcritiques ($r > r_c$) dont le rayon devient inférieur ou égal au rayon critique r_c à l'intérieur de l'intervalle $(x, x + \Delta x)$. L'évè-

nement B correspondant aux pores surcritiques interconnectés dans $(x, x + \Delta x)$ et l'évènement C contenant les pores qui ne se ferment pas et ne se ramifient pas dans cette couche (figure 16).

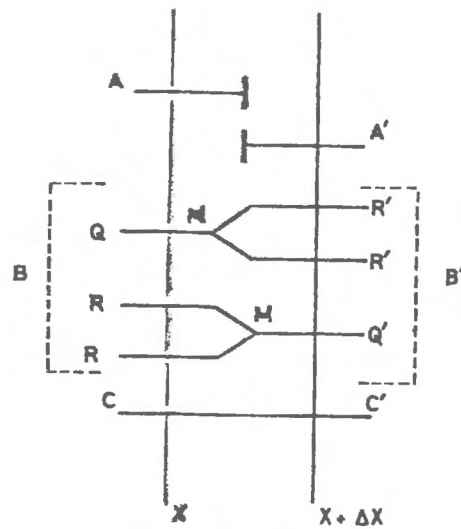


Figure 16.

Comme le montre la figure 16, nous faisons l'hypothèse supplémentaire selon laquelle les interconnexions entre les pores sont uniquement binaires. Cela revient à dire que le nombre maximal des branches qui convergent à un point quelconque ne peut pas dépasser trois.

D'après l'hypothèse retenue, l'union S des événements A, B et C, constitue un ensemble complet ; nous aurons donc :

$$S = A \cup B \cup C \quad \text{avec } P[S] = 1 \quad (\text{II.4.1})$$

Par ailleurs, la définition des paramètres β_1 et β_2 nous permet d'écrire :

$$P[A] = \beta_1 \Delta x \quad (\text{II.4.2})$$

$$P[B] = \beta_2 \Delta x \quad (\text{II.4.3})$$

et d'après(II.4.1) :

$$P [C] = 1 - (\beta_1 + \beta_2) \Delta x \quad (\text{II.4.4})$$

Précisons maintenant que la notion des pores surcritiques est locale : les événements A, B, C correspondent à l'abscisse x, tandis que A', B' et C' sont les événements correspondants situés à $x + \Delta x$. L'évènement B qui décrit les pores ramifiés peut être décomposé en deux parties, comportant les noeuds de bifurcation N et les noeuds d'union M. La figure 16 montre que les noeuds de bifurcation N sont approchés de gauche par un pore Q, qui se divise par la suite en deux pores R', tandis que les noeuds M, représentent l'union de deux pores R qui viennent de gauche jusqu'au pore Q' à droite. L'union des événements M et N constitue l'évènement B ; étant donné que pour un milieu poreux homogène, les noeuds M et N sont équivalents, nous aurons :

$$P [M] = P [N] = \frac{1}{2} P [B] = \frac{1}{2} \beta_2 \Delta x \quad (\text{II.4.5})$$

Par ailleurs, il est évident que l'union des événements R et Q nous donne l'évènement B avec la probabilité $P [B] = \beta_2 \Delta x$. En observant la figure 15, nous constatons que la probabilité d'avoir un pore R est deux fois plus grande que celle du pore Q. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$P [R] = \frac{2}{3} \beta_2 \Delta x \quad (\text{II.4.6})$$

$$P [Q] = \frac{1}{3} \beta_2 \Delta x \quad (\text{II.4.7})$$

Pour un milieu poreux homogène, nous aurons aussi :

$$P [A'] = P [A] = \beta_1 \Delta x$$

$$\begin{aligned}
 P [Q'] &= P [Q] = \frac{1}{3} \beta_2 \Delta x \\
 P [R'] &= P [R] = \frac{2}{3} \beta_2 \Delta x \\
 P [C'] &= P [C] = 1 - (\beta_1 + \beta_2) \Delta x
 \end{aligned}
 \tag{II.4.8}$$

Soit maintenant, E et E', l'évènement de l'arrivée du fluide non mouillant à l'abscisse x et $x + \Delta x$, à condition que le pore examiné soit surcritique. \bar{E} et \bar{E}' sont les évènements complémentaires. La figure 17 résume toutes les situations possibles ; les lignes en pointillés désignent les pores surcritiques qui ne sont pas reliés jusqu'à la surface d'injection par un système de canaux surcritiques unis; par conséquent, ils restent toujours remplis par le fluide en place.

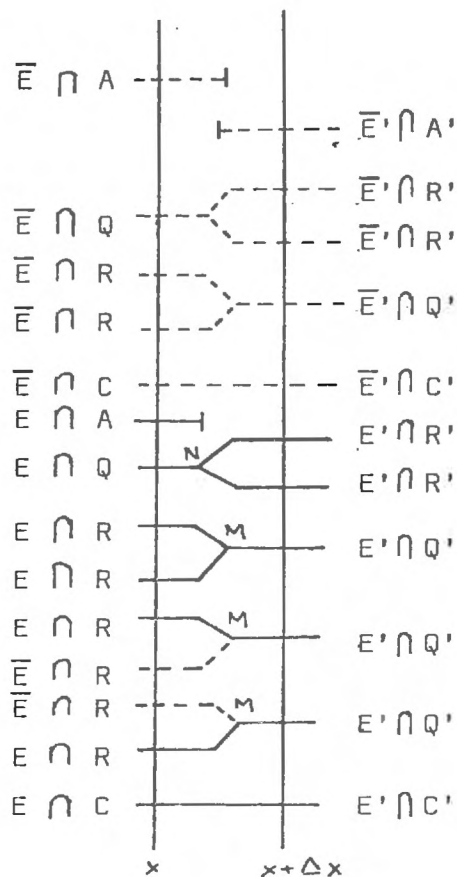


Figure 17.

Posons maintenant $W(x) = P(E)$, la probabilité du remplissage d'un pore surcritique situé à l'abscisse x . De manière analogue, nous posons $W(x + \Delta x) = P(E')$; en tenant compte de toutes les réalisations possibles des événements, nous allons exprimer $W(x + \Delta x)$ en fonction de $W(x)$ et des paramètres β_1 et β_2 . A la limite $\Delta x \rightarrow dx$, nous allons ainsi obtenir une équation différentielle représentant la répartition de la probabilité de remplissage d'un pore surcritique à l'intérieur du milieu poreux.

Etant donné que les événements A' , R' , Q' et C' constituent un ensemble complet S et selon la figure 18, nous pouvons écrire :

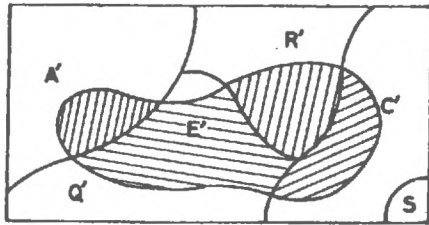


Figure 18.

$$\begin{aligned}
 P[E'] &= P[E' \cap (A' \cup R' \cup Q' \cup C')] \\
 &= P[E' \cap A'] + P[E' \cap R'] + P[E' \cap Q'] + P[E' \cap C']
 \end{aligned}
 \tag{II.4.9}$$

D'après la figure 17, il est évident que :

$$P[E' \cap A'] = 0
 \tag{II.4.10}$$

Selon la formule des probabilités composées, on a :

$$P [E' \cap R'] = P [E' | R'] \cdot P [R'] \quad (\text{II.4.11})$$

La probabilité conditionnelle $P [E' | R']$ est égale à $P [E | Q]$ et étant donné l'indépendance des événements E et Q , on peut écrire :

$$P [E | Q] = P [E] = W(x)$$

En tenant compte de la relation (II.4.8), l'expression (II.4.11) devient donc :

$$P [E' \cap R'] = W(x) \cdot \frac{2}{3} \beta_2 \Delta x \quad (\text{II.4.12})$$

Nous écrivons aussi :

$$P [E' \cap Q'] = P [E' | Q'] \cdot P [Q'] \quad (\text{II.4.13})$$

La probabilité conditionnelle $P [E' | Q']$ représente le remplissage du pore Q' . Ce remplissage est équivalente à l'arrivée du fluide non mouillant au noeud M . Nous avons donc :

$$P [E' | Q'] = P [E' | M]$$

Suivant la figure 17 l'arrivée du fluide au noeud M peut s'effectuer selon trois chemins indépendants. Nous pouvons donc écrire :

$$P [E' | M] = P \left[\{E|R \text{ et } \bar{E}|R\} \text{ ou } \{\bar{E}|R \text{ et } E|R\} \text{ ou } \{E|R \text{ et } E|R\} \right]$$

Etant donné l'indépendance des événements, on a :

$$P [E' | M] = 2(1 - P [E]) \cdot P [E] + P [E] \cdot P [E]$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(1 - W(x)) \cdot W(x) + W^2(x) \\
 &= 2W(x) - W^2(x)
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (II.4.8), nous pouvons écrire la formule (II.4.13) sous la forme :

$$P[E' \wedge Q'] = \{2W(x) - W^2(x)\} \frac{1}{3} \beta_2 \Delta x \quad (\text{II.4.14})$$

Enfin, il est évident que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 P[E' \wedge C'] &= P[E'|C'] \cdot P[C'] \\
 &= P[E|C] \cdot P[C] \\
 &= P[E] \cdot P[C] \\
 &= W(x) \cdot \{1 - (\beta_1 + \beta_2) \Delta x\} \quad (\text{II.4.15})
 \end{aligned}$$

Si on introduit les expressions (II.4.10), (II.4.12), (II.4.14) et (II.4.15) dans la formule (II.4.9), on trouve que :

$$\begin{aligned}
 W(x + \Delta x) &= \frac{2}{3} W(x) \Delta x + \{2W(x) - W^2(x)\} \frac{1}{3} \beta_2 \Delta x \\
 &\quad + W(x) \cdot \{1 - (\beta_1 + \beta_2) \Delta x\} \quad (\text{II.4.16})
 \end{aligned}$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, la relation (II.4.16) tend vers une équation différentielle du type de "Bernoulli" :

$$\frac{dW(x)}{dx} + \left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{3}\right) W(x) + \frac{\beta_2}{3} W^2(x) = 0 \quad (\text{II.4.17})$$

La condition à la limite $x = 0$ est :

$$W(0) = 1 \quad (\text{II.4.18})$$

La solution de l'équation (II.4.17) avec la condition à la limite (II.4.18) est de la forme :

$$W(x) = \frac{3\beta_1 - \beta_2}{3\beta_1 e^{cx} - \beta_2}, \quad c = \beta_1 - \beta_2/3 \quad (\text{II.4.19})$$

La solution (II.4.19) exprime la probabilité de remplissage des pores surcritiques situés à une distance x par rapport à la surface.

Nous devons distinguer deux cas :

(a)

$$c \geq 0 \quad \text{où} \quad \beta_1 \geq \beta_2/3$$

L'expression (II.4.19) nous donne :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = 0 \quad (\text{II.4.20})$$

ce qui signifie qu'à partir d'une certaine distance, la probabilité de remplissage devient très faible et le milieu est engorgé (figure 19). Comme nous pouvons le constater à partir de la figure 15, la condition $\beta_1 > \beta_2/3$ est réalisée lorsque le rayon critique est grand, autrement dit aux faibles pressions d'injection .

(b)

$$c < 0 \quad \text{où} \quad \beta_1 < \beta_2/3$$

Dans ce cas, les gradients de pression deviennent élevés et d'après l'expression (II.4.19), nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = 1 - 3\beta_1/\beta_2 \quad (\text{II.4.21})$$

La relation (II.4.21) montre qu'à partir d'une certaine distance, le remplissage du milieu devient uniforme avec une probabilité égale à $1 - 3\beta_1/\beta_2$ (figure 19).

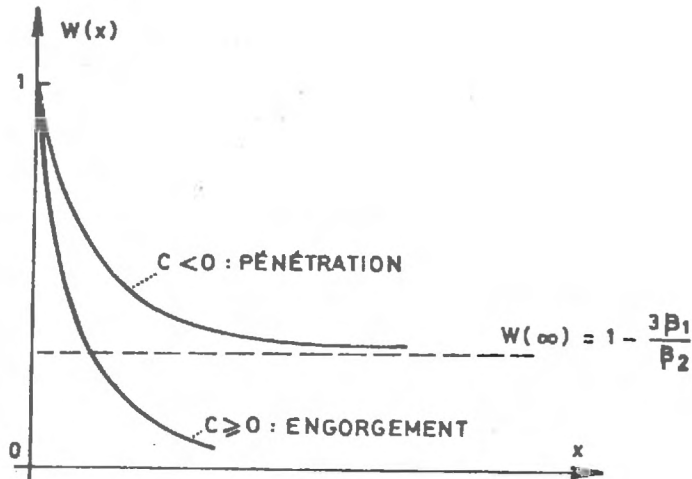


Figure 19.

Nous pouvons désormais utiliser l'expression (II.4.19) afin de calculer le volume Ω_N du fluide non mouillant qui pénètre dans le milieu. En effet, considérons une tranche de milieu poreux de section Σ_x et de faible épaisseur Δx (figure 20).

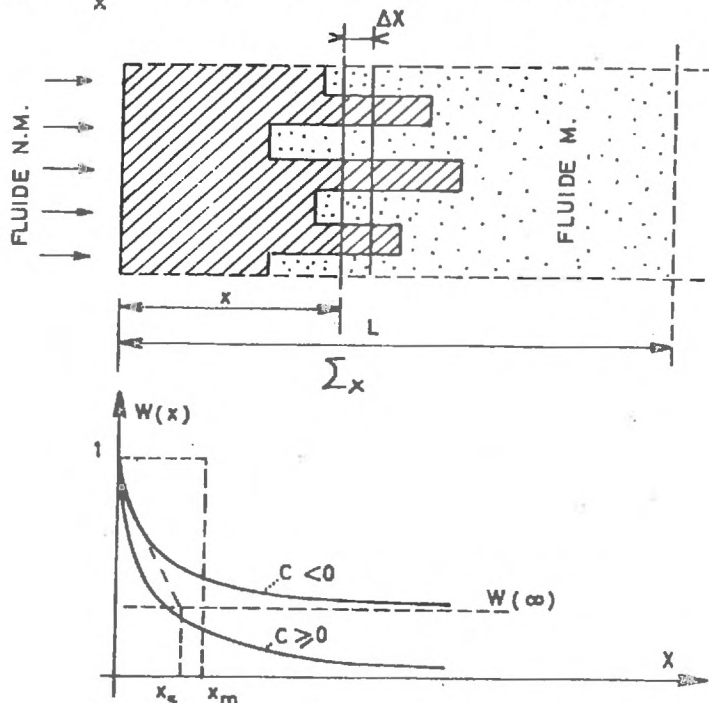


Figure 20.

Soit η_{pc} le nombre des pores surcritiques contenus dans la section Σ_x . Si $\pi r_c^{-2} \cdot T$ est la section moyenne d'un pore surcritique, le volume $\Delta \Omega_c$ de ces pores contenus dans l'intervalle Δx est :

$$\Delta \Omega_c = \eta_{pc} \cdot (\pi r_c^{-2} \cdot T) \Delta x \quad (\text{II.4.22})$$

où T est la tortuosité et :

$$r_c^{-2} = \frac{\int_{r_c}^{\infty} r^2 f(r) dr}{\int_{r_c}^{\infty} f(r) dr} \quad (\text{II.4.23})$$

Toutefois, une partie seulement des pores surcritiques sera rempli par le fluide non mouillant ; cette partie peut être exprimée à l'aide de la probabilité de remplissage $W(x)$.

En effet, le volume $\Delta \Omega_N$ du fluide non mouillant contenu dans la tranche du milieu que nous avons considéré est :

$$\Delta \Omega_N = \pi r_c^{-2} \cdot T \cdot \eta_{pc} \cdot W(x) \cdot \Delta x \quad (\text{II.4.24})$$

Le nombre des pores surcritiques peut être calculé à partir de la relation (II.3.8). Tout d'abord, les expressions (II.3.3) et (II.3.1) nous donnent :

$$\eta_p = \frac{P \Sigma_x}{\pi r_c^{-2} T}$$

et d'après (II.3.8) nous aurons :

$$\eta_{pc} = \frac{P \Sigma_x \cdot a}{\pi r_c^{-2} T}, \quad a = \int_{r_c}^{\infty} f(r) dr \quad (\text{II.4.25})$$

En remplaçant l'expression (II.4.25) dans la formule (II.4.24) et en tenant compte de (II.4.23) nous trouvons :

$$\Delta\Omega_N = P \cdot \Sigma_x \frac{\int_{r_c}^{\infty} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr} \cdot W(x) \Delta x \quad (\text{II.4.26})$$

Le volume total contenu dans l'intervalle (0,x) est donc égal :

$$\Omega_N = P \cdot \Sigma_x \cdot \frac{\int_{r_c}^{\infty} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr} \cdot \int_0^x W(x) dx \quad (\text{II.4.27})$$

Nous remarquons que dans la formule (II.4.27) l'intégrale $\int_0^x W(x) dx$ a les dimensions d'une longueur caractéristique, correspondant à une longueur moyenne de pénétration x_m . Nous reconnaissons aussi le terme :

$$S_{Nf} = \frac{\int_{r_c}^{\infty} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr} \quad (\text{II.4.28})$$

qui correspond à la saturation du fluide non mouillant calculée selon l'hypothèse du modèle du faisceau des tubes capillaires. Supposons maintenant que le milieu a un volume total Ω_t et donc il a une longueur finie L (figure 20). Il est bien entendu évident que L doit être très grand par rapport à la longueur moyenne des pores ℓ . Dans ces conditions, le volume total des pores est égal à $\Omega_p = P \cdot \Omega_t$ et compte tenu des relations (II.4.27) et (II.4.28) nous pouvons écrire :

$$S_N = \frac{\Omega_N}{\Omega_p} = \frac{\Sigma_x}{\Omega_t} \cdot S_{Nf} \cdot \int_0^L W(x) dx \quad (\text{II.4.29})$$

Nous pouvons estimer l'intégrale qui figure dans le second membre de l'équation (II.4.29) en distinguant deux cas :

(a)

$$c \geq 0 \quad \text{ou} \quad \beta_1 \geq \beta_2/3$$

Dans ce cas là, la fonction $W(x)$ donnée par (II.4.19) tend vers 0 pour x grand. Nous aurons :

$$x_m = \int_0^L W(x) dx = \frac{3}{\beta_2} \cdot \text{Log} \left(\frac{3\beta_1 - \frac{\beta_2}{cL}}{3\beta_1 - \beta_2} \right) \quad (\text{II.4.30})$$

Dans la plupart des cas, $L \gg x_m$ et nous pouvons prendre en première approximation :

$$x_m \approx \frac{3}{\beta_2} \text{Log} \left(\frac{3\beta_1}{3\beta_1 - \beta_2} \right) \quad (\text{II.4.31})$$

Par ailleurs, comme nous pouvons le constater sur la figure 15, aux faibles valeurs de la pression β_2 tend vers zéro. Ayant aussi $\beta_2 < 3\beta_1$, le développement en série de la relation (II.4.31) nous donne :

$$x_m \approx \frac{1}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{3\beta_1^2} + \frac{\beta_2^2}{3\beta_1^3} + \dots \quad (\text{II.4.32})$$

Si on calcule la longueur moyenne de pénétration x_m d'après les expressions (II.4.31) ou (II.4.32) nous pouvons ensuite évaluer le degré de saturation en fluide non mouillant comme :

$$S_N = \frac{\Sigma x}{\Omega_t} \cdot S_{Nf} \cdot x_m \quad (\text{II.4.33})$$

(b)

$$c < 0 \quad \text{ou} \quad \beta_1 < \beta_2/3$$

Comme le montre la figure 20, nous pouvons en première approximation supposer que le milieu est complètement saturé en fluide non mouillant jusqu'à une profondeur caractéristique x_s égale à la sous-tangente de la courbe $W(x)$ à l'origine $x = 0$. D'après l'é-

quation (II.4.19) on trouve :

$$x_s = \frac{3}{\beta_2} \quad (\text{II.4.34})$$

Ensuite, le milieu sera rempli sur une profondeur égale à $(L - x_s)$ avec une probabilité $W(\infty)$ donnée par l'équation (II.4.21).

Suivant ces simplifications, la formule (II.4.29) nous donne :

$$S_N = \frac{\sum_x S_{Nf}}{\Omega_t} \{x_s + (L - x_s) \cdot W(\infty)\} \quad (\text{II.4.35})$$

avec :

$$x_s = \frac{3}{\beta_2}, \quad W(\infty) = 1 - \frac{3 \beta_1}{\beta_2} \quad (\text{II.4.36})$$

Etant donné que $\sum_x \cdot L = \Omega_t$, nous pouvons écrire l'équation (II.4.35) sous la forme :

$$S_N = W(\infty) + \frac{\sum_x \cdot x_s}{\Omega_t} \{1 - W(\infty)\} \quad (\text{II.4.37})$$

En réalité, les équations (II.4.33) et (II.4.37) nous permettent de calculer S_N en fonction de la pression p_c . En effet, la transcription s'effectue par l'intermédiaire des grandeurs x_m , x_s et $W(\infty)$ qui, suivant les expressions (II.4.31) et (II.4.36) ne dépendent que des coefficients β_1 et β_2 . Ces coefficients sont fonction uniquement du rayon critique r_c qui, d'après la loi de Laplace, est lié à la pression capillaire p_c .

Pour mieux faire le joint avec les chapitres précédents, reprenons encore une fois les deux porométries caractéristiques I et II que nous avons examiné dans le paragraphe (II.3). En se rapportant à la figure 15, nous disposons des graphes donnant la variation des paramètres caractéristiques β_1 et β_2 en fonction du rayon

critique r_c . Il est donc aisé de calculer à partir des expressions (II.4.31) et (II.4.36) l'évolution de x_m et $W(\infty)$ en fonction de la pression p_c .

Dans la figure 21, nous avons tracé l'évolution de x_m et $W(\infty)$ en fonction de la pression p_c sous forme adimensionnelle. Les unités de x_m sont les mêmes que celles de r . En ce qui concerne l'influence de la variance du graphe porométrique, nous constatons que les résultats confirment les prévisions du modèle cellulaire.

Nous disposons donc maintenant de tous les éléments théoriques qui nous permettent d'interpréter l'expérience. Dans les chapitres suivants, après avoir présenté les résultats expérimentaux bruts, nous les comparons avec les prévisions théoriques.

CHAPITRE III

ETUDE EXPERIMENTALE SUR MODELE ANALOGIQUE DE MILIEU POREUX

Comparer les résultats des modèles probabilistes que nous avons présentés à la réalité expérimentale, cela nécessite une observation fine du phénomène et une technologie spécialisée, dont la complexité dépasse les possibilités courantes du laboratoire. Pour pallier cette difficulté, le moyen le plus concret, est l'analogie. Guidés par l'observation microphotographique de sections de sables consolidés, nous pouvons rassembler les paramètres du milieu naturel à une échelle agrandie, et construire ainsi des modèles représentant par analogie une distribution de pores.

Dans ce chapitre, après avoir présenté le modèle analogique que nous avons construit, nous donnons les résultats expérimentaux bruts et leur interprétation d'après les résultats théoriques que nous possédons.

III.1. LES CONDITIONS EXPERIMENTALES

III.1.1. Description du modèle analogique

Afin de mieux visualiser le phénomène des équilibres capillaires, nous avons été amené à construire un modèle plan, comportant un ensemble de pores agrandis à une échelle convenable. Pour que les résultats de l'expérience aient un sens physique, nous devons respecter les

règles de la similitude, qui permettent de faire le joint entre le milieu naturel et le modèle.

En ce qui concerne la similitude dynamique, nous pouvons dire tout de suite que l'agrandissement des dimensions des pores ne constitue pas un inconvénient majeur. En effet, comme nous l'avons déjà expliqué dans le paragraphe (I.2), nous pouvons constater à partir de l'expression (I.2.2) qu'en l'absence de la gravité, l'équilibre capillaire est conditionné par le nombre de capillarité :

$$C = \frac{p_c d_*}{T_s \cos \theta}$$

Donc, pour pallier l'augmentation de la dimension caractéristique des pores d_* sur le modèle, il suffit de choisir convenablement le couple des fluides afin d'accentuer les forces de surface qui apparaissent au dénominateur de l'expression donnant le nombre de capillarité. Autrement dit, le choix du couple des fluides peut nous conduire à un nombre de capillarité identique à celui qu'on aurait dans un milieu poreux réel.

Toutefois, comme le montre l'expression (I.2.2), pour que les deux phénomènes considérés (en milieu poreux réel et dans le modèle) conduisent, pour un nombre de capillarité global donné à des résultats identiques, nous devons respecter une similitude géométrique parfaite. Rigoureusement, compte tenu de la géométrie compliquée du milieu réel, l'entreprise paraît impossible. Cependant, il est raisonnable d'admettre l'hypothèse que deux géométries statistiquement semblables conduisent à des phénomènes mécaniques semblables également. Mais à partir de ce moment-là, nous ne parlerons plus de similitude mais d'analogie.

L'hypothèse de l'analogie basée sur la loi statistique de la répartition des rayons des pores, a été bien vérifiée par G. CHAUVETEAU (1965, [25]) dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux. En effet, G. CHAUVETEAU a construit un modèle analogique à distribution de pores identique à celle d'un milieu poreux de sable

non consolidé et il a observé que la variation du coefficient des pertes de charge λ en fonction du nombre de Reynolds était analogue à celle qu'on observe dans un milieu poreux réel.

Pour notre part, afin d'accentuer le rôle des forces interfaciales, nous avons construit un modèle analogique en réduisant par homothétie les dimensions des pores du modèle utilisé par G. CHAUVETEAU. Nous avons ainsi reconstitué un ensemble de canaux d'écoulement, dont les dimensions suivent une loi statistique très proche d'une loi porométrique d'un milieu poreux homogène.

La figure 22 donne une vue de dessus du modèle analogique. Le modèle est plan et rectangulaire de dimensions 47 x 10 cm ; il est constitué par des particules en plexiglas de 1 mm d'épaisseur, maintenues entre deux plaques rectangulaires transparentes en plexiglas également.

$$\Sigma a = 4 \text{ cm}^3$$

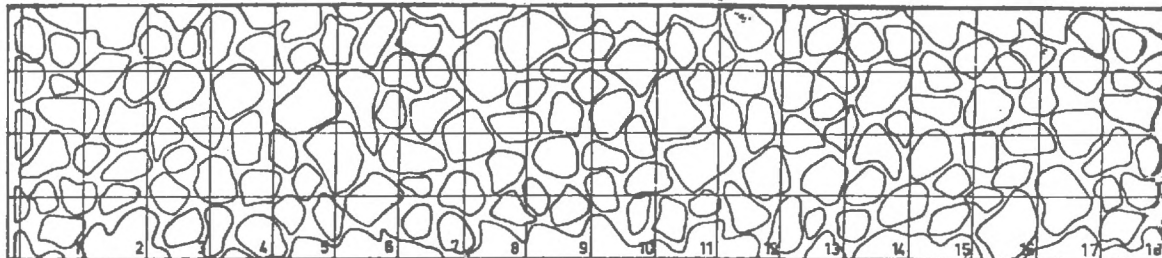


Figure 22. Morphologie du modèle analogique

On forme ainsi un ensemble de passages capillaires à section rectangulaire d'épaisseur constante de 1 mm et de largeur δ dans le plan du modèle, variable entre 0,25 - 8,0 mm. Après avoir choisi l'emplacement définitif des grains, nous avons mesuré directement la fréquence d'apparition d'un nombre de canaux de largeur δ donnée. Pour cela, nous avons approché la forme compliquée des grains par des configurations polygonales et nous avons pu approcher

ainsi la géométrie des pores par un ensemble de canaux à largeur δ constante (figure 23).

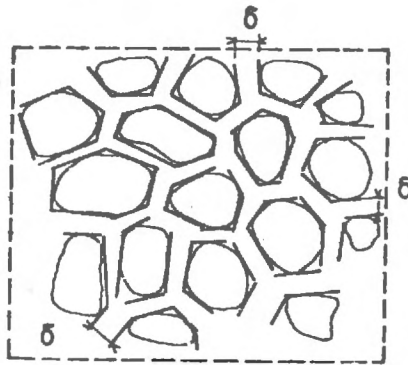


Figure 23.

Soit $\eta(\delta)$ le nombre des canaux dont la largeur δ est comprise entre δ et $\delta + \Delta\delta$ et η_T le nombre total des canaux. Nous pouvons définir la fonction de la densité d'apparition des largeurs δ , $f(\delta)$ selon l'expression :

$$f(\delta) \Delta\delta = \frac{\eta(\delta)}{\eta_T}$$

où

$$f(\delta) = \frac{\eta(\delta)}{\eta_T \Delta\delta} \quad [L^{-1}] \quad (\text{III.1.1.1})$$

Nous avons choisi $\Delta\delta = 0,5 \text{ mm}$ et nous avons rassemblé les résultats des mesures dans le tableau suivant :

Dimension transversale (mm)	δ (mm)	$n(\delta)$	$f(\delta)$ (mm ⁻¹)
0 - 0,50	0,25	3	0,013
	0,75		
0,5 - 1,0	1,25	6	0,026
1,0 - 1,5	1,75	55	0,241
1,5 - 2,0	2,25	86	0,376
2,0 - 2,5	2,75	87	0,381
2,5 - 3,0	3,25	75	0,328
3,0 - 3,5	3,75	55	0,240
3,5 - 4,0	4,25	34	0,149
4,0 - 4,5	4,75	19	0,083
4,5 - 5,0	5,25	13	0,057
5,0 - 5,5	5,75	7	0,031
5,5 - 6,0	6,25	7	0,031
6,0 - 6,5	6,75	5	0,022
6,5 - 7,0	7,25	2	0,009
7,0 - 7,5	7,75	1	0,004
7,5 - 8,0	8,25	1	0,004
8,0 - 8,5		1	0,004

$$n_T = 457$$

Tableau I

$$f(\delta) = \frac{n(\delta)}{\Delta \delta \cdot n_T}$$

H dans la limite

δ de la limite
de la dose

V
 013
 0113
 1719
 3763
 4894
 5156
 4463
 3188
 2019
 1544
 0213
 1006
 0781
 0338
 0171
 0134
 0206
 30506

Après quelques essais préliminaires, il nous a semblé significatif de lisser l'histogramme observé selon une densité de Rayleigh [17], que nous avons modifiée sous la forme :

$$f(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta < \delta_1 \\ \frac{\delta - \delta_1}{(\delta_2 - \delta_1)^2} \exp \left\{ -\frac{(\delta - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2} \right\} & \text{pour } \delta \geq \delta_1 \end{cases} \quad (\text{III.1.1.2})$$

Les paramètres δ_1 et δ_2 ont été choisis, afin que la courbe théorique se rapproche le plus possible de l'histogramme observé. Pour cela, nous avons utilisé la propriété de la loi de Rayleigh selon laquelle $f(\delta)$ devient maximale pour $\delta = \delta_2$. En effet, d'après l'expression (III.1.1.2) nous avons :

$$\frac{df(\delta)}{d\delta} = 0 \quad \text{pour } \delta = \delta_2$$

et la valeur maximale de $f(\delta)$ est donnée par la relation :

$$f_{\max} = \frac{1}{(\delta_2 - \delta_1) \sqrt{e}} \quad (\text{III.1.1.3})$$

Après avoir tracé l'histogramme expérimental (figure 24), nous avons choisi la position de la valeur théorique maximale à $\delta_2 = 2,10$ mm, ce qui correspond à $f_{\max} = 0,379 \text{ mm}^{-1}$. D'après la relation (III.1.1.3) nous trouvons $\delta_1 = 0,50$ mm, ce qui nous amène à la densité théorique de la forme :

$$f(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \delta < 0,5 \\ \frac{\delta - 0,5}{2,56} \exp \left\{ -\frac{(\delta - 0,5)^2}{5,12} \right\} \text{mm}^{-1} & \text{pour } \delta \geq 0,5 \end{cases} \quad (\text{III.1.1.4})$$

Dans la figure 24, nous avons représenté la courbe de lissage $f(\delta)$, calculée selon l'expression (III.1.1.4); l'approximation des densités observées nous a paru assez significative pour ne pas recourir à un test statistique de justification. En effet, la valeur moyenne et la variance des δ calculées d'après les valeurs observées (tableau I), sont très proches de la valeur moyenne et la variance de la distribution donnée par l'expression (III.1.1.4). A partir de (III.1.1.2) et (III.1.1.4) nous avons :

$$\bar{\delta} = E[\delta] = \int_{\delta_1}^{\infty} \delta f(\delta) d\delta = (\delta_2 - \delta_1) \sqrt{\pi/2} + \delta_1 = 2,50 \text{ mm}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}[\delta] = \int_{\delta_1}^{\infty} (\delta - \bar{\delta})^2 f(\delta) d\delta = (\delta_2 - \delta_1)^2 (2 - \pi/2) = 1,10 \text{ mm}^2$$

Il est évident que la loi de distribution des dimensions transversales des pores ne peut pas nous donner des indications sur la validité de l'analogie entre le modèle et un milieu poreux. En effet, la forme rectangulaire des pores ne présente pas le même comportement capillaire que les pores cylindriques à section circulaire.

Dans le chapitre suivant, après avoir présenté les résultats bruts de l'expérience et modifié la forme de la loi de Laplace pour les capillaires à section rectangulaire, nous discuterons de la validité de l'analogie en ce qui concerne le phénomène des équilibres capillaires.

III.1.2. Montage expérimental et résultats de visualisation

Comme le montre la figure 25, le montage expérimental est relativement simple.

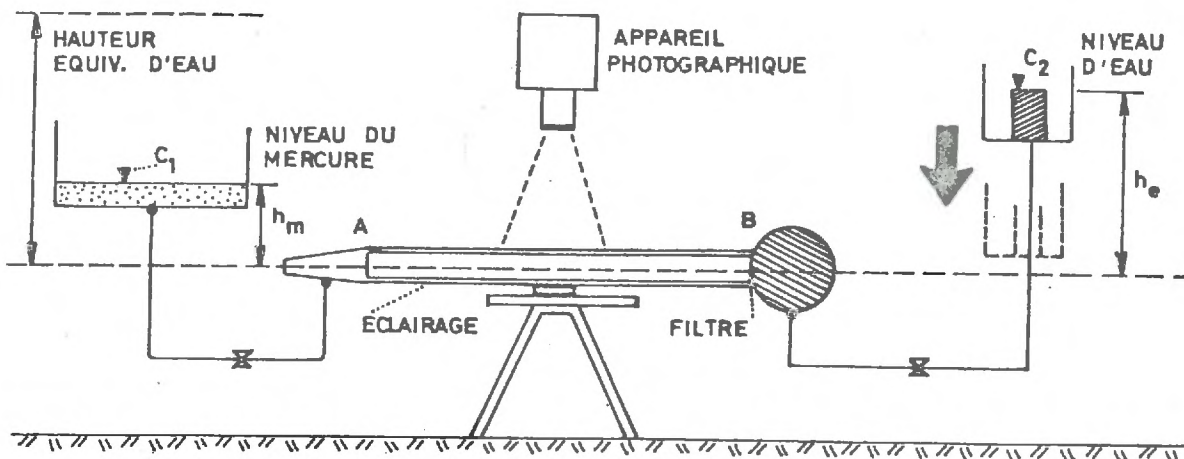


Figure 25. Schéma du montage expérimental

Afin d'éliminer les effets de la gravité, le modèle est placé dans le plan horizontal et il est complètement saturé en eau, qui est le fluide mouillant. A l'aide de la cuve 2, nous maintenons l'eau à la pression p_0 , qui correspond à la hauteur h_e . Nous injectons par la suite le fluide non mouillant : le mercure, suivant la largeur du modèle. Lorsque la pression d'injection p est légèrement supérieure à la pression de l'eau p_0 , une certaine quantité de mercure pénètre dans les pores et on atteint l'équilibre lorsque les forces capillaires annulent le gradient des pressions imposé. En abaissant la cuve 2, nous augmentons progressivement le gradient des pressions et nous obtenons ainsi une succession d'états d'équilibre.

Etant donné la transparence du modèle, les expériences ont été enregistrées directement à l'aide d'un appareil photographique de haute qualité (NIKON-Photomatic). Le phénomène est ensuite reconstitué par projection de films enregistrés sur des feuilles de papier quadrillé. Le quadrillage est identique à celui qui a été gravé sur la plaque supérieure du modèle. En faisant coïncider les deux maillages, nous pouvons tracer directement le contour des interfaces microscopiques et mesurer la quantité du mercure qui pénètre dans le modèle, par planimétrie des aires correspondantes.

Les niveaux piézométriques à l'entrée et à la sortie ont été mesurés à l'aide d'un cathédomètre avec une précision de l'ordre de 1/100 mm.

La porosité du modèle analogique a été mesurée directement au cours de sa construction et elle est égale à 0,32. Etant donné que le volume total Ω_t est égal à 45 cm³ (45 x 10 x 0,1 cm), le volume des pores est $\Omega_p = 0,32 \times 45 = 14,40$ cm³.

Dans le tableau II qui suit, nous résumons les résultats expérimentaux bruts.

Tableau II. Résultats expérimentaux bruts

N°	h	P _c	Ω_N	S _N	S _M
	[cm H ₂ O]	(P _a)	(cm ³)	(%)	(%)
1	4,126	405,00	0	0	100
2	4,628	454,01	0,196	1,4	98,6
3	4,904	481,08	0,388	2,7	97,3
4	5,276	517,58	0,680	4,7	95,3
5	6,170	605,28	1,280	8,9	91,1
6	6,352	623,13	2,932	10,4	79,6
7	6,657	653,05	4,510	31,3	68,7
8	6,757	662,86	7,520	52,2	47,8
9	7,169	703,28	9,624	66,8	33,2

porosité : P = 0,32 - Volume des pores $\Omega_p = 14,40$ cm³

Les figures 26 a et 26 b donnent les résultats de visualisation des étapes caractéristiques de la pénétration du mercure dans les pores du milieu. Connaissant les caractéristiques interfaciales des fluides, nous avons calculé pour chaque état d'équilibre et selon la loi de Laplace, la dimension critique de la largeur des pores δ_c (figures 26 a et 26 b).

Compte tenu du fait que le modèle est plan, les canaux capillaires ont une section rectangulaire de dimensions $\delta \times e$, où e est l'épaisseur constante du modèle égale à 1 mm.

Dans ces conditions, la loi de Laplace doit être modifiée afin de tenir compte de la section rectangulaire des pores. En effet, utilisant la condition d'équilibre entre les forces de surface et les forces de pression, nous pouvons écrire :

$$\text{(forces de pression)} \times \text{(section)} = - \text{(forces superficielles)} \times \text{(périmètre mouillé)}$$

ou

$$p_c \times (\delta_c \cdot e) = - (T_s \overline{\cos\theta}) \times \{2(\delta_c + e)\}$$

Dans cette expression, nous avons introduit la valeur moyenne de l'angle de contact θ le long des parois solides. Il s'ensuit que :

$$p_c = - 2 T_s \overline{\cos\theta} \left(\frac{1}{\delta_c} + \frac{1}{e} \right) \quad \text{(III.1.2.1)}$$

Pour le couple mercure-eau, les tables [26] donnent comme valeur du coefficient de la tension interfaciale $T_s = 0,392 \text{ N/m}$.

Etant donné la pondération que nous avons adoptée dans la formule (III.1.2.1), l'évaluation de l'angle moyen θ pose un problème délicat. Une mesure directe à partir des clichés photographiques nous a indiqué que pour les conditions expérimentales réalisées, l'angle moyen θ dans le plan du modèle était sensible-

ment égal à 117° . Si la précision de cette mesure est incertaine, celle-ci est pourtant bien située par rapport aux résultats de la littérature. En effet, WASHBURN [3] a mesuré dans le cas triphasique mercure-air-verre, un angle θ égal à 112° . Etant donné que l'eau est un fluide plus mouillant que l'air, nous avons, pour nos essais, un angle $\theta > 112^\circ$ et en tout cas plus petit que 180° . Nous pouvons aussi remarquer que dans la formule (III.1.2.1), $\overline{\cos\theta}$ intervient comme un coefficient d'échelle entraînant un décalage homothétique de la loi de variation de δ_c en fonction de p_c : étant donné que les résultats de visualisation nous permettent de mesurer directement la dimension critique des capillaires engorgés avec une bonne précision, la valeur de $\overline{\cos\theta}$ que nous avons adoptée, nous a permis de confirmer la loi (III.1.2.1) de manière satisfaisante.

Dans le tableau III, nous avons porté les valeurs de δ_c , calculées d'après la relation (III.1.2.1) pour les pressions expérimentales p_c .

N°	p_c (p_a)	δ_c (cm)
1	405,00	0,800
2	454,01	0,384
3	481,08	0,298
4	517,58	0,229
5	605,28	0,147
6	623,13	0,137
7	653,05	0,123
8	662,86	0,119
9	703,28	0,105

$$T_s = 0,392 \text{ N/m} \quad - \quad \overline{\cos\theta} = -0,46 \quad \left. \vphantom{\overline{\cos\theta}} \right\} \theta = 117,19$$

Tableau III

Examinons maintenant la sensibilité de la valeur δ_c devant une variation accidentelle de l'angle θ (par exemple à cause de la présence de bulles d'air). En prenant la dérivée logarithmique de la relation (III.1.2.1), nous avons :

$$\frac{dp_c}{p_c} = - \overline{\text{tg}\theta} d\theta + \frac{dT_s}{T_s} - \frac{e}{\delta_c + e} \cdot \frac{d\delta_c}{\delta_c}$$

d'où l'erreur relative :

$$\frac{\Delta\delta_c}{\delta_c} = \left| \frac{\delta_c + e}{e} \right| \left\{ \left| \overline{\text{tg}\theta} \Delta\theta \right| + \left| \frac{\Delta T_s}{T_s} \right| + \left| \frac{\Delta p_c}{p_c} \right| \right\} \quad (\text{III.1.2.2})$$

Etant donné que nous opérons dans une enceinte thermostatée, supposons que la valeur de la tension interfaciale T_s donnée par les tables, ne varie pratiquement pas au cours de l'essai. Intéressons-nous donc surtout à l'influence de la variation de l'angle θ sur la valeur de δ_c , et prenons le cas N° 7 du tableau. Nous avons les valeurs : $\delta_c = 1,23$ mm, $e = 1$ mm, $p_c = 653 P_a$. Soit $\theta = 117^\circ$, $\Delta\theta = 1^\circ$, $\Delta p_c = 0,1 P_a$ (puisque le cathédomètre donne une précision de l'ordre de 0,01 mm). La formule (III.1.2.2) nous donne :

$$\frac{\Delta\delta_c}{\delta_c} = \frac{2,23}{1,0} \cdot \left\{ 1,97 \frac{\pi}{180} + \frac{0,1}{653} \right\} = 8,0 \%$$

L'incertitude sur la pression pèse peu devant la conséquence d'une erreur sur θ .

Le résultat ci-dessus montre que la dimension critique δ_c varie sensiblement lorsque, pour une raison accidentelle, l'angle θ s'écarte de sa valeur moyenne.

Nous reviendrons sur ce résultat dans le paragraphe III.2.2. où nous comparerons les résultats théoriques aux résultats expérimentaux.

Examinons d'abord les résultats de visualisation (figures 26 a et 26 b). Nous constatons qu'en l'absence de la pesanteur, lorsque la pression capillaire est faible, les pores sont engorgés à une certaine distance par rapport à la surface d'injection. Lorsque la pression capillaire devient importante, le fluide non mouillant pénètre complètement dans le milieu.

Toutefois, pour prétendre que les résultats obtenus représentent par analogie les phénomènes capillaires réels, un certain nombre de remarques est nécessaire.

En effet, étant donné qu'un milieu naturel est constitué par un réseau de pores irréguliers et interconnectés dans l'espace des trois dimensions, le modèle analogique peut être critiqué sur un certain nombre de points et en particulier :

- 1/ La géométrie plane,
- 2/ Le nombre total des pores et leur arrangement aléatoire dans l'espace,
- 3/ Les conditions aux limites d'injection du fluide non mouillant.

1/ Tout d'abord, au sujet de la géométrie plane du modèle, nous pouvons admettre pour le problème de pénétration capillaire qui nous préoccupe ici, qu'une couche poreuse de très faible épaisseur, maintenue entre deux parois imperméables, peut avoir les mêmes propriétés qu'un échantillon cubique du même milieu. Cette hypothèse est raisonnable du moment où la loi statistique de la distribution des dimensions des pores est la même pour les deux géométries : dans ces conditions, nous sommes amenés à admettre que lorsqu'on passe des trois dimensions à la géométrie plane, l'élimination des pores interconnectés selon la troisième dimension, peut être compensée en introduisant des canaux d'écoulement supplémentaires dans le plan du modèle, ou en modifiant l'expression du paramètre β_2 .

2/ Le nombre total des pores contenus dans le modèle analogique est un paramètre caractéristique. En effet, ce n'est que lorsque ce nombre est suffisamment élevé que l'on peut parler d'un échantillon statistique représentatif de la population dont il est extrait.

Il y a en statistique, des tests qui permettent en général de juger si un échantillon est représentatif. Toutefois, ces tests sont plutôt empiriques et dépendent surtout des propriétés statistiques du phénomène particulier.

En ce qui concerne la capillarité, FATT [12], rapporte qu'un modèle comprenant au moins 300 pores peut représenter, par extrapolation, les mêmes propriétés capillaires qu'un échantillon cubique de sable, de dimensions de l'ordre du centimètre.

Nous pouvons donc penser que les 457 pores contenus dans notre modèle analogique, ont les mêmes propriétés statistiques que les 40.000 pores contenus en moyenne dans un échantillon cubique de sable de dimensions de l'ordre du centimètre.

Les hypothèses statistiques ci-dessus, sont valables du moment où les rayons des pores sont répartis de manière aléatoire dans l'espace. Etant donné que la construction du modèle a été inspirée par l'observation de sections de sable non consolidé, nous pouvons admettre que la répartition des dimensions des pores dans l'espace est effectivement aléatoire.

3/ Il reste à examiner la question des conditions aux limites : dans la pratique du laboratoire, le fluide non mouillant est injecté sur toute la surface de l'échantillon, tandis qu'au cours de nos essais, la surface d'injection est très faible par rapport au volume total de l'échantillon. Ceci pose le problème général de l'influence des conditions aux limites sur l'allure des courbes capillaires : dans le chapitre V, nous allons examiner cette question en détail, lorsqu'on présentera les résultats expérimentaux

sur des milieux consolidés, composés de billes de verre. En ce qui concerne l'analogie, c'est surtout la faible largeur du modèle qui peut avoir une certaine influence sur la courbe capillaire et nous allons voir dans le paragraphe suivant, comment l'interprétation théorique de nos résultats peut élucider cette question.

Mais avant tout, la confirmation qualitative de l'analogie est fournie dans la figure 27. En effet, dans cette figure, nous avons tracé, à partir des résultats bruts, qui figurent dans le tableau II, la corrélation donnant la pression capillaire p_c en fonction de la saturation en mercure S_N .

Sur la même figure, nous présentons les résultats obtenus par DULLIEN et col. (1972, [27]) sur des échantillons cylindriques de sable et avec les mêmes conditions aux limites. Nous pouvons constater que l'allure des deux graphes est qualitativement la même ; la forte pente de la courbe capillaire est due surtout aux conditions aux limites, comme nous le verrons d'ailleurs dans le chapitre V.

Mais au préalable, partant des conclusions théoriques du modèle probabiliste, nous allons interpréter les résultats expérimentaux sur le modèle analogique.

III.2. INTERPRETATION THEORIQUE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Dans ce paragraphe, après avoir calculé les paramètres d'engorgement et d'interconnexions β_1 et β_2 qui correspondent à la géométrie plane du modèle analogique, nous allons confronter les résultats théoriques du chapitre II.4, aux conclusions expérimentales.

III.2.1. Calcul des paramètres caractéristiques

Pour calculer le paramètre d'engorgement β_1 en fonction de la dimension critique δ_c , nous allons utiliser la formule (II.1.1.6) sous la forme :

$$\beta_1(\delta_c) = - \frac{T}{\ell} \text{Log } a(\delta_c) \quad (\text{III.2.1.1})$$

où

$$a(\delta_c) = \int_{\delta_c}^{\infty} f(\delta) d\delta$$

La densité $f(\delta)$ suit la loi de Rayleigh, exprimée par la formule (III.1.1.2). Nous avons donc :

$$a(\delta_c) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{\delta - \delta_1}{(\delta_2 - \delta_1)^2} e^{-\frac{(\delta - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2}} d\delta = e^{-\frac{(\delta_c - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2}}$$

En utilisant ce résultat, l'expression (III.2.1.1) nous donne :

$$\beta_1(\delta_c) = \frac{T}{\ell} \cdot \frac{(\delta_c - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2} \quad (\text{III.2.1.2})$$

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le paragraphe II.3, nous pouvons choisir d'une manière générale, la longueur moyenne des pores ℓ égale au diamètre moyen des capillaires $\bar{\delta}$, et pour le coefficient de tortuosité T la valeur 1,40. Ayant donc $\ell = \bar{\delta} = 2,50$ mm, $T = 1,40$, $\delta_1 = 0,50$ mm, $\delta_2 = 2,10$ mm, nous avons calculé selon (III.2.1.2) les valeurs du coefficient d'engorgement β_1 en fonction de δ_c (tableau IV).

Tableau IV.

$\frac{c}{m}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
$\frac{1}{1-1}$	0,027	0,109	0,246	0,437	0,684	0,985	1,340	1,750	2,215	2,734	3,308	3,937	4,654

Pour calculer le coefficient d'interconnexions, β_2 , nous allons tenir compte de la géométrie plane du modèle.

Ainsi, l'expression (II.3.3) donnant la surface totale des pores Σ_{xp} dans la section Σ_x sera modifiée sous la forme :

$$\Sigma_{xp} = \eta_p \cdot (\bar{\delta} \cdot e \cdot T) \quad (\text{III.2.1.3})$$

où η_p est le nombre de pores, $\bar{\delta} = \int_1^{\infty} \delta f(\delta) d\delta$ et e l'épaisseur constante du modèle.

Compte tenu des deux parois imperméables du modèle, la surface interne des pores surcritiques dans l'intervalle Δx sera donnée par une formule analogue à (II.3.6), mais de la forme :

$$\Sigma_c = \eta_{pc} \cdot k (2 e T \Delta x) \quad (\text{III.2.1.4})$$

En tenant compte de l'expression (II.3.8), d'après la définition probabiliste du coefficient β_2 et suivant le même raisonnement qui nous a conduit à la formule (II.3.12), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{P \cdot \Sigma_c}{\Sigma_{xp}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{2k P \cdot a}{\bar{\delta}} \\ &= \frac{2k P}{\bar{\delta}} \int_{\delta_c}^{\infty} f(\delta) d\delta \end{aligned} \quad (\text{III.2.1.5})$$

Compte tenu de la loi de Rayleigh (III.1.1.2), l'expression (III.2.1.5) devient :

$$\beta_2(\delta_c) = \frac{2k P}{\bar{\delta}} \cdot e^{-\frac{(\delta_c - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2}} \quad (\text{III.2.1.6})$$

Par ailleurs, étant donné que les particules utilisées pour le modèle sont arrondies, leur rugosité est plutôt faible. Pour cette raison, nous avons choisi $k = 1,40$. Ayant ensuite les valeurs $P = 0,32$, $\bar{\delta} = 2,5$ mm, $\delta_1 = 0,50$ mm et $\delta_2 = 2,10$ mm, nous avons calculé à partir de la formule (III.2.1.6) les valeurs β_2 en fonction de δ_c (tableau V).

δ_c (mm)	$e^{-\frac{(\delta_c - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2}}$	$\beta_2(\delta_c)$ (mm ⁻¹)
1,0	0,952	0,341
1,5	0,823	0,295
2,0	0,645	0,231
2,5	0,459	0,164
3,0	0,294	0,105
3,5	0,172	0,062
4,0	0,091	0,033
4,5	0,044	0,016
5,0	0,019	0,007
5,5	0,008	0,003
6,0	0,002	0,001

Tableau V

Dans la figure 28, nous avons représenté la variation des paramètres β_1 et β_2 , en fonction de la dimension critique δ_c . Ce graphe, valable pour une géométrie de pores à deux dimensions, est à rapprocher de la corrélation de la figure 15, donnant les paramètres β_1 et β_2 pour les pores de forme cylindrique.

Connaissant les fonctions $\beta_1(\delta_c)$ et $\beta_2(\delta_c)$ nous pouvons maintenant tirer des conclusions utiles concernant le phénomène de l'engorgement ou de la pénétration complète du milieu en fluide non mouillant. En effet, tant que la condition $\beta_1 \geq \beta_2/3$ est satisfaite, le fluide non mouillant remplit les pores surcritiques sur une distance moyenne x_m , donnée par l'expression (II.4.31). Par contre, si $\beta < \beta_2/3$ la probabilité de $W(\infty)$ de remplissage des pores surcritiques devient uniforme et elle est donnée par l'expression (II.4.36).

Nous devons insister sur la transcription des probabilités de remplissage en fonction de la pression p_c . En effet, pour chaque valeur de la pression capillaire, correspond un couple de valeurs des coefficients β_1 et β_2 qui caractérisent le milieu sur toute sa longueur. Les expressions (II.4.31) et (II.4.36) nous permettent ensuite de calculer x_m et $W(\infty)$ et les formules (II.4.33) et (II.4.37) le degré de remplissage en fluide non mouillant.

Dans la figure 29, nous avons représenté la variation des variables x_m et $W(\infty)$ en fonction de la pression capillaire p_c . Nous disposons ainsi de toutes les informations qui vont nous permettre de confronter les résultats expérimentaux aux conclusions théoriques.

III.2.2. Confrontation entre les résultats de l'expérience et la théorie

Partant de l'expression (II.4.19), nous pouvons désormais calculer la fonction $W(x)$ exprimant pour les conditions expérimentales, la distribution spatiale de la probabilité de remplissage des pores surcritiques. A titre d'exemple, examinons en détail

la forme de la fonction $W(x)$ qui correspond à quelques étapes caractéristiques de l'expérience (états N° 5, 7, 9 du tableau II).

ETAT N° 5

$$p_c = 605 \text{ Pa (tabl. III) , } \delta_c = 1,47 \text{ mm (tabl. III)}$$

$$\beta_1 = 0,1025 \text{ mm}^{-1} \text{ (form. III.2.1.1)}$$

$$C = \beta_1 - \frac{\beta_2}{3} = 0,0035 > 0$$

$$\beta_2 = 0,2970 \text{ mm}^{-1} \text{ (form. III.2.1.6)}$$

donc : engorgement

Loi de distribution : (form. II.4.19)

$$W(x) = \frac{0,0105}{0,3075 e^{0,0035x} - 0,297}$$

Distance moyenne de pénétration : (form. II.4.31)

$$x_m = 33,8 \text{ mm}$$

ETAT N° 7

$$p_c = 653 \text{ Pa , } \delta_c = 1,23 \text{ mm}$$

$$\beta_1 = 0,0582 \text{ mm}^{-1}$$

$$\beta_2 = 0,322 \text{ mm}^{-1}$$

$$C = \beta_1 - \frac{\beta_2}{3} = - 0,0491 \text{ donc } c < 0$$

donc: pénétration.

Loi de distribution :

$$W(x) = \frac{0,1474}{0,322 - 0,1746 \exp \{ - 0,049 x \}}$$

avec :
$$W(\infty) = 1 - \frac{3 \beta_1}{\beta_2} = 0,458$$

Longueur caractéristique de saturation (form. II.4.34)

$$x_s = \frac{3}{\beta_2} = 9,32 \text{ mm}$$

ETAT N° 9

$$p_c = 703 \text{ pa}$$

$$\delta_c = 1,05 \text{ mm}$$

$$\beta_1 = 0,033 \text{ mm}^{-1}$$

$$\beta_2 = 0,337 \text{ mm}^{-1}$$

$$C = - 0,0793 \text{ donc } C < 0$$

donc: pénétration

Loi de distribution :

$$W(x) = \frac{0,238}{0,337 - 0,099 \exp \{- 0,0793 x\}}$$

avec : $W(\infty) = 0,706$

Longueur caractéristique de saturation :

$$x_s = 8,9 \text{ mm}$$

Examinons maintenant l'erreur relative sur le calcul de la probabilité asymptotique $W(\infty)$. Nous avons :

$$W(\infty) = 1 - \frac{3 \beta_1}{\beta_2}$$

d'où :

$$-\frac{dW(\infty)}{W(\infty)} = \frac{1 - W(\infty)}{W(\infty)} \left\{ \frac{d\beta_1}{\beta_1} - \frac{d\beta_2}{\beta_2} \right\} \quad (\text{III.2.2.1})$$

Les formules (III.2.1.2) et (III.2.1.6) nous permettent de calculer les variations relatives des coefficients β_1 et β_2 en fonction de la dimension critique δ_c . Nous trouvons :

$$\frac{d\beta_1}{\beta_1} = \frac{2d\delta_c}{\delta_c - \delta_1} \quad , \quad \frac{d\beta_2}{\beta_2} = - \frac{\delta_c - \delta_1}{(\delta_2 - \delta_1)^2} d\delta_c$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation précédente, on trouve la borne supérieure de l'erreur relative :

$$\frac{\Delta W(\infty)}{W(\infty)} = - \frac{1 - W(\infty)}{W(\infty)} \left\{ \frac{2\delta_c}{\delta_c - \delta_1} + \frac{\delta_c(\delta_c - \delta_1)}{(\delta_2 - \delta_1)^2} \right\} \frac{\Delta\delta_c}{\delta_c}$$

Examinons le cas de l'état N° 7. Nous avons $W(\infty) = 0,458$
 $\delta_c = 1,23$ mm, $\delta_1 = 0,5$ mm, $\delta_2 = 2,10$ mm et l'erreur relative devient :

$$\begin{aligned} - \frac{\Delta W(\infty)}{W(\infty)} &= 1,18 \left\{ 3,37 + 0,35 \right\} \frac{\Delta\delta_c}{\delta_c} \\ &= 4,39 \cdot \frac{\Delta\delta_c}{\delta_c} \end{aligned} \quad (\text{III.2.2.2})$$

Comme nous l'avons examiné dans le paragraphe (III.1.2) la dimension critique est largement influencée par les variations éventuelles de l'angle de mouillage θ . Toutefois, l'avantage du modèle analogique est qu'on peut vérifier par mesure directe, à tout moment, la dimension des pores engorgés. En effet, cette valeur correspond à la dimension maximale des capillaires, qui retiennent le fluide non mouillant piégé, pour la pression capillaire imposée.

Nous avons ainsi vérifié par mesure directe, que la loi de Laplace modifiée pour les capillaires prismatiques et appliquée avec l'angle de mouillage θ moyen que nous avons adopté, nous conduit à des dimensions de pores critiques égales à 3 % près à celles que nous avons mesurées directement. D'après le résultat (III.2.2.2.) ceci nous conduit pour l'état n° 7 à une erreur de calcul de $W(\infty)$ de 13,2 %.

Comparons maintenant les résultats des expériences de visualisation aux résultats théoriques. Dans la figure 30, nous avons représenté l'allure des fonctions $W(x)$ pour les états caractéristiques 5, 7 et 9. Nous avons reporté sur la même figure les résultats de visualisation correspondants.

Nous remarquons que si du point de vue qualitatif la concordance est bonne aux faibles et aux forts gradients de pression, l'engorgement observé expérimentalement aux pressions intermédiaires, est plus important que prévu théoriquement.

Compte-tenu que le quadrillage sur les images de visualisation correspond à des carrés de 25 mm de côté, nous remarquons que pour l'état n° 5, la distance moyenne de pénétration prévue par la théorie est correcte.

Pour les fortes pressions (état n° 9) le milieu est complètement pénétré par le fluide injecté. Par contre, aux pressions intermédiaires (état n° 7), nous observons un engorgement beaucoup plus important que celui prévu par la théorie. Cet écart apparemment très important ne peut pas être expliqué par l'imprécision du calcul de la probabilité $W(\infty)$: nous venons de calculer une erreur de l'ordre de 13 % pour l'état n° 7. Il est plutôt dû à la largeur faible du modèle expérimental. En effet, tandis que la théorie est valable en toute rigueur pour un milieu semi-infini, le nombre des pores offerts à la pénétration

du fluide injecté est faible dans le modèle, à cause de sa largeur limitée.

Toutefois, nous allons tout de suite nous rendre compte que cette anomalie ne représente pas un inconvénient majeur lorsqu'on passe au bilan des volumes du fluide injecté et lorsqu'on calcule le degré de saturation du fluide injecté.

En effet, partant de la formule (II.4.29) nous pouvons calculer le degré de saturation en fluide non mouillant tout en tenant compte des conditions aux limites (rapport $S_x/\Omega t$) et de la probabilité du remplissage des pores surcritiques (fonction $W(x)$). Calculons tout d'abord la relation $S_{Nf}(p_c)$ d'après l'hypothèse du faisceau de tubes capillaires. Dans le cas des capillaires prismatiques de longueur l constante, nous avons :

$$S_{Nf} = \frac{\int_{\delta_c}^{\infty} (\delta e) l f(\delta) d\delta}{\int_{\delta_1}^{\infty} (\delta e) l f(\delta) d\delta} = \frac{\int_{\delta_c}^{\infty} \delta f(\delta) d\delta}{\bar{\delta}} \quad (\text{III.2.2.3})$$

Etant donné que $f(\delta)$ suit une loi de Rayleigh l'expression (III.2.2.3) devient :

$$S_{Nf} = \frac{\delta_c}{\bar{\delta}} \exp \left\{ -\frac{(\delta_c - \delta_1)^2}{2(\delta_2 - \delta_1)^2} \right\} + \frac{\sqrt{2\pi}(\delta_2 - \delta_1)}{\bar{\delta}} \left\{ \frac{1}{2} - \operatorname{erf} \left(\frac{\delta_c - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \right) \right\} \quad (\text{III.2.2.4})$$

Dans la figure 31 nous avons représenté d'une part la courbe capillaire expérimentale et d'autre part la corrélation donnant la saturation en fluide non mouillant en fonction de la pression capillaire d'après la formule (III.2.2.4). Nous remarquons que l'application du modèle du faisceau des tubes capillaires conduit à une courbe qui se situe très loin de la courbe observée. Dans la même figure 31, nous pouvons constater tout le profit que l'on peut tirer en utilisant les résultats du modèle probabiliste.

A titre d'exemple calculons la quantité S_N selon les formules (II.4.33) et (II.4.37) pour les états 5, 7 et 9.

ETAT 5

$C > 0$: donc engorgement avec $x_m = 33,8$ cm

$S_x = 1,0 \text{ cm}^2$, $\Omega_t = 45 \text{ cm}^3$, $S_{Nf} = 0,935$ et donc :

$$S_N = \frac{3,38 \times 0,935}{45} = 7,02 \%$$

calculé 93,5% par S_{Nf}

ETAT 7

$C < 0$: donc pénétration complète avec :

$$x_s = 9,32 \text{ mm}, \quad W(\infty) = 0,458$$

$$S_{Nf} = 0,96 \quad \text{et d'après (II.4.37) :$$

$$S_N = \frac{0,96}{45} \times \{0,93 + (45 - 0,93) \times 0,458\} = 45 \%$$

45%

ETAT 9

$C < 0$: donc pénétration complète avec :

$$x_s = 8,9 \text{ mm}, \quad W(\infty) = 0,706$$

$$S_{Nf} = 0,98 \text{ et donc :}$$

$$S_N = \frac{0,98}{45} \{0,89 + (45 - 0,89) \times 0,706\} = 70 \%$$

70%

Nous concluons (figure 31) que la théorie prévoit correctement la courbe capillaire.

Mais l'utilité pratique des résultats du modèle probabiliste n'est pas dans la prévision de la courbe capillaire. Elle réside plutôt dans le fait que le modèle théorique nous révèle le mécanisme profond qui lie la courbe capillaire et la structure des pores du milieu. Ce mécanisme peut être utilisé pour poser le **problème inverse** et découvrir la structure des pores à partir du

graphe expérimental des pressions capillaires.

Pour mieux saisir cette possibilité, examinons d'abord comment l'étude classique de la porométrie, basée sur le modèle du faisceau des tubes capillaires peut conduire à des graphes porométriques décalés.

III.2.3. Obtention du graphe porométrique à partir de la courbe capillaire

Ceci est obtenu à partir de la courbe des pressions du faisceau de capillaires.

Posons-nous maintenant le problème inverse et essayons de déduire à partir de la courbe capillaire observée, le graphe porométrique du milieu.

Dans un premier temps, nous allons déduire la densité volumique $D(\delta)$. En effet, selon la définition (I.2.3), nous avons :

$$D(\delta) = \frac{1}{\Omega_p} \cdot \frac{d\Omega(\delta)}{d\delta} \quad (\text{III.2.3.1})$$

où $d\Omega(\delta)$ est le volume des pores ayant comme dimension $\delta \in [\delta, \delta + d\delta]$. Si nous admettons la validité du modèle du faisceau des tubes capillaires, le volume $d\Omega(\delta)$ est égal au volume $d\Omega_N$ du fluide non mouillant. Etant donné qu'à l'augmentation $d\Omega_N > 0$ du volume correspond une augmentation $dp_c > 0$ de la pression et donc une diminution $d\delta < 0$ de la dimension des pores, la formule (III.2.3.1) devient :

$$D(\delta) = \frac{1}{\Omega_p} \cdot \frac{d\Omega_N}{d\delta} = \frac{-dS_N}{d\delta} \quad (\text{III.2.3.2})$$

En même temps, la variation $d\delta < 0$ de la dimension des pores peut être exprimée d'après la relation de Laplace, sous la forme :

$$d\delta = - \frac{\delta^2}{2 T_s \cos\theta} dp_c \quad (\text{III.2.3.3})$$

En remplaçant l'expression (III.2.3.3) dans la formule (III.2.3.2), nous avons :

$$D(\delta) = \frac{2 T_s \cos\theta}{\delta^2} \cdot \frac{d S_N}{d p_c} \quad (\text{III.2.3.4})$$

Disposant de la corrélation expérimentale $S_N = \mathcal{F}(p_c)$, plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour calculer la fonction $D(\delta)$. Nous pouvons par exemple envisager un lissage du graphe expérimental ou l'utilisation directe des différences finies. Dans ce cas, la fonction S_N est discrétisée et soit $S_N(1)$, $S_N(2)$... $S_N(i-1)$, $S_N(i)$,... $S_N(n)$, $S_N(n+1)$ les valeurs discrètes correspondantes aux pressions $p_c(1)$, $p_c(2)$, $p_c(i-1)$, $p_c(i)$,... $p_c(n)$, $p_c(n+1)$. Les valeurs discrètes $p_c(i)$ peuvent être équidistantes selon un pas Δp suffisamment petit. Dans ces conditions, la formule (III.2.3.4) devient :

$$D(\delta_i) = \frac{2 T_s \cos\theta}{\delta_i^2} \left\{ \frac{S_N(i+1) - S_N(i-1)}{2 \Delta p} \right\} \quad (\text{III.2.3.5})$$

Après avoir choisi $\Delta p = 20 \text{ Pa}$ et ayant $2T_s \cos\theta = 0,3672 \text{ N/m}$ nous avons calculé les valeurs $D(\delta_i)$ d'après l'expression (III.2.3.5).

Dans la figure 32, nous avons représenté la densité volumique $D(\delta)$ obtenue selon le modèle du faisceau des tubes capillaires. Dans la même figure, nous avons tracé la distribution réelle $D(\delta)$ déduite de la fonction $f(\delta)$ selon l'expression :

$$D(\delta_i) = \frac{\delta_i f(\delta_i)}{\int_{\delta_1}^{\infty} \delta f(\delta) d\delta} \quad (\text{III.2.3.6})$$

L'expression (III.2.3.6) constitue en fait une version de la formule (I.2.5), valable pour une géométrie plane. Pour effectuer le calcul, nous rappelons que $f(\delta)$ suit la loi de Rayleigh et que $\int_{\delta_1}^{\infty} \delta f(\delta) d\delta = 2,5 \text{ mm}$.

En examinant la figure (32 a), nous constatons que la loi de distribution $D(\delta)$ calculée d'après les hypothèses du faisceau des tubes capillaires se situe très loin de la courbe réelle: en particulier, elle présente une valeur moyenne plus faible et une variance également beaucoup plus faible que les caractéristiques porométriques réelles.

Afin de soutenir encore une fois la validité de l'analogie expérimentale, nous présentons dans la figure 32 b, les résultats obtenus récemment par DULLIEN et coll. (1972, [27]). Dans ce travail, DULLIEN et coll. ont entrepris une étude systématique de la porométrie des sables, en utilisant d'une part la méthode classique de l'injection du mercure, et d'autre part des méthodes directes microphotographiques faisant appel à un analyseur automatique des structures. Dans la figure (32 b), nous constatons que le graphe $D(r)$ déduit d'après l'injection du mercure et selon les mêmes conditions aux limites, identiques à celles que nous avons employées pour le modèle analogique, conduit à des écarts par rapport au graphe réel. Ceux-ci ont qualitativement la même allure que ceux de la figure 32 a.

Plusieurs auteurs ont proposé depuis longtemps des méthodes de correction des graphes porométriques obtenus selon le modèle du faisceau des tubes capillaires. Ainsi, MEYER (1953, [28]) a fait appel à un modèle probabiliste simplifié; FATT (1956, [12]) a proposé l'utilisation des abaques d'après les résultats expérimentaux sur les modèles analogiques des réseaux. Dans le chapitre suivant, en utilisant les résultats du modèle probabiliste, nous proposons une méthode, qui permet d'obtenir par itérations les graphes porométriques corrigés.

CHAPITRE IV

DETERMINATION DE LA POROMETRIE A PARTIR
DE LA COURBE CAPILLAIRE EXPERIMENTALE

Dans ce chapitre, après avoir indiqué comment on peut obtenir la courbe porométrique du milieu selon le modèle du faisceau des tubes capillaires, nous proposons une méthode itérative pour corriger les graphes ainsi obtenus. La méthode utilise les résultats des modèles probabilistes présentés dans le chapitre II.

IV.1. CALCULS FONDES SUR LE MODELE DU FAISCEAU DES TUBES CAPILLAIRES

L'hypothèse de base du modèle du faisceau des tubes capillaires est l'absence d'interactions entre les différents pores dont les dimensions suivent une loi de distribution donnée. D'après cette hypothèse, on est tout naturellement amené à admettre que pendant l'injection du volume Ω_N en fluide non mouillant, à la pression p_c , tous les pores ayant comme rayon $r > r_c$ seront remplis par le fluide injecté. Soit $\tilde{D}(r)$ la densité de distribution du volume injecté.

Nous aurons :

$$S_N = \frac{\Omega_N}{\Omega_p} = \int_{r_c}^{\infty} \tilde{D}(r) dr = 1 - \int_0^{r_c} \tilde{D}(r) dr \quad (\text{IV.1.1.})$$

Selon l'hypothèse du modèle on identifie donc la densité du volume injecté $\tilde{D}(r)$ à la densité du volume des pores $D(r)$ donnée par l'expression (I.2.3.) En réalité, ceci n'est pas valable : les petits pores peuvent empêcher le remplissage des gros pores qui les suivent et par conséquent une partie seulement du volume des pores surcritiques ($r > r_c$) sera remplie par le fluide injecté. Cette partie peut être calculée à l'aide de la probabilité

du remplissage en fluide mouillant. Dans le paragraphe suivant nous allons examiner comment l'utilisation des résultats théoriques du modèle probabiliste peuvent nous conduire à établir une relation entre les fonctions $\tilde{D}(r)$ et $D(r)$. Mais auparavant, calculons la densité $\tilde{D}(r)$ à partir de la courbe capillaire. Le calcul de la fonction $\tilde{D}(r)$ a été fait pour la première fois par RITTER et DRAKE [4]. Dans ce qui suit, après avoir modifié ce calcul afin de pouvoir utiliser directement le graphe expérimental $P_c(S_N)$, nous montrons comment on peut obtenir la fonction de densité en nombre $\tilde{f}(r)$.

L'expression (IV.1.1.) peut être inversée sous la forme :

$$D(r) = - \frac{dS_N}{dr} \quad \text{pour } r = r_c \quad (\text{IV.1.2.})$$

Nous notons que cette formule est analogue au résultat (III.2.3.2.) qui correspond à la géométrie plane.

Etant donné que les rayons des pores r sont liés à la pression capillaire p_c d'après la loi de Laplace, à l'augmentation de la pression $dp_c > 0$ correspond la diminution du rayon $dr < 0$ de la forme :

$$dr = - \frac{r}{p_c} dp_c = - \frac{2 T_s \cos \theta}{p_c^2} dp_c \quad (\text{IV.1.3.})$$

Combinant les expressions (IV.1.2.) et (IV.1.3.) nous obtenons :

$$\tilde{D}(r) = \frac{p_c^2}{2 T_s \cos \theta} \cdot \frac{d S_N}{d p_c} \quad (\text{IV.1.4.})$$

Quant à la densité en nombre $\tilde{f}(r)$ elle peut être exprimée en fonction de $\tilde{D}(r)$ selon la relation (I.2.6.), valable pour les pores cylindriques de longueur constante. Nous avons donc :

$$\tilde{f}(r) = \frac{\tilde{D}(r)}{r^2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{D}(r)}{r^2}} \quad (\text{IV.1.5.})$$

Connaissant la corrélation expérimentale $S_N = \phi(p_c)$, plusieurs méthodes peuvent être envisagées afin d'obtenir les fonctions $\tilde{D}(r)$ et $\tilde{f}(r)$.

Nous pourrions par exemple effectuer un lissage analytique du graphe expérimental $S_N(p_c)$ auquel cas la dérivation et l'intégration qui interviennent dans les relations (IV.1.4.) et (IV.1.5.) peuvent être effectuées sans difficulté. Mais pour le calcul numérique, la discrétisation des relations (IV.1.4.) et (IV.1.5.) selon les différences finies peut apparaître beaucoup plus simple. Supposons que la fonction p_c prend les valeurs discrètes :

$$p_c(n) > p_c(n-1) > \dots > p_c(1) > p_c(0)$$

où $p_c(0)$ est la pression d'entrée et $p_c(n)$ la pression maximale.

Aux pressions $p_c(i)$ correspondent les valeurs discrètes de la fonction r :

$$r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < r_0$$

déterminées d'après la relation de Laplace ; r_0 représente le rayon maximal des spores, tandis que r_n a habituellement une valeur très proche de zéro.

Supposons encore qu'aux pressions $p_c(i)$ correspondent les valeurs $S_N(i)$ ($i = 0, n$).

Dans ces conditions, la relation (IV.1.4.) peut être approchée sous la forme :

$$\tilde{D}(r_i) \approx \frac{p_c^2(i)}{2T_s \cos \theta} \left\{ \frac{S_N(i+1) - S_N(i-1)}{p_c(i+1) - p_c(i-1)} \right\}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

(IV.1.6.)

Toutefois, l'application de la formule (IV.1.6.) dans les zones à forte courbure peut donner lieu à des erreurs importantes. La solution la plus pratique consiste donc à chercher l'anamorphose du

graphe $p_c(S_N)$, qui permet de calculer la dérivée discrète avec une bonne approximation.

Dans la plupart des cas, les fortes courbures apparaissent au voisinage des valeurs limites $S_N = 0$ et $S_N = S_{Nm}$ (figure 33)

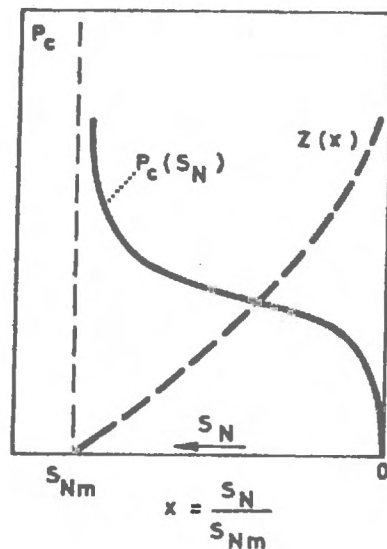


Figure 33 : Anamorphose du graphe $p_c(S_N)$

Posons $x = S_N / S_{Nm}$ et cherchons une anamorphose des coordonnées permettant un bon lissage. Guidés par les comportements asymptotiques du graphe initial, on peut écrire :

$$x \rightarrow 0 \quad p_c \rightarrow 0 \quad \text{donc} \quad p_c \sim x^n$$

$$x \rightarrow 1 \quad p_c \rightarrow \infty \quad \text{donc} \quad p_c \sim \frac{1}{(1-x)^m}$$

Nous pouvons choisir l'anamorphose qui satisfait les comportements asymptotiques en mettant :

$$p_c(x) = \frac{x^n}{(1-x)^m} \cdot Z(x) \quad (\text{IV.1.7.})$$

où $Z(x)$ est une fonction qui dépend du choix des exposants n et m . Après quelques essais préliminaires on peut choisir les exposants n et m qui donneraient une fonction $Z(x)$ à très faible

courbure et à dérivée monotone. Dans la pratique les valeurs $n = 1$, $m = 1/3$ ou $1/5$ nous ont donné de bons résultats. Ayant tracé la fonction $Z(x)$ (figure 33) on peut calculer la dérivée $d p_c/dx$ à partir de la formule (IV.1.7.) et en appliquant une dérivation numérique sur la fonction $Z(x)$.

Posons maintenant :

$$\tilde{\phi}_i = \int_{r_i}^{r_{i-1}} \frac{\tilde{D}(r)}{r^2} dr \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.1.8.})$$

La densité discrète $\tilde{f}(r_i)$ peut donc être calculée selon l'expression (IV.1.5.) mise sous la forme :

$$\tilde{f}(r_i) = \frac{\tilde{D}(r_i)}{r_i^2 \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.1.9.})$$

Les quantités $\tilde{\phi}_i$ peuvent être obtenues en appliquant sur l'expression (IV.1.8.) une méthode d'intégration numérique. La méthode des trapèzes nous donne

$$\tilde{\phi}_i \approx \frac{\Delta r_i}{2} \left\{ \frac{\tilde{D}(r_i)}{r_i^2} + \frac{\tilde{D}(r_{i-1})}{r_{i-1}^2} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.1.10})$$

où $\Delta r_i = r_{i-1} - r_i$

Nous pouvons obtenir une meilleure approximation si on suppose que dans l'intervalle infiniment petit Δr la fonction $\tilde{D}(r)$ varie linéairement. La formule IV.1.8. nous donne :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= \int_{r_i}^{r_{i-1}} \frac{\tilde{D}_0 + br}{r^2} dr \\ &= \tilde{D}_0 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i-1}} \right) + b \log \frac{r_{i-1}}{r_i} \end{aligned}$$

$$\text{où } b = \frac{\tilde{D}_{i-1} - \tilde{D}_i}{r_{i-1} - r_i}$$

$$\text{et } \tilde{D}_0 = \tilde{D}_i - \frac{\tilde{D}_{i-1} - \tilde{D}_i}{r_{i-1} - r_i} r_i = \frac{\tilde{D}_i r_{i-1} - \tilde{D}_{i-1} r_i}{r_{i-1} - r_i}$$

Il est évident que si nous choisissons un pas de variation de la pression $\Delta p = p_c(i+1) - p_c(i)$ constant, ceci nous conduit à des variations $\Delta r_i = r_i - r_{i+1}$ non équidistantes. En effet, la relation (IV.1.3), après discrétisation nous donne

$$\Delta r_i = \frac{2 T_s \cos \theta}{p_c^2 \text{ moy } (i, i+1)} \left\{ p_c(i+1) - p_c(i) \right\} \quad (\text{IV.1.11})$$

Si $\Delta p = p_c(i+1) - p_c(i)$ est constant, le résultat (IV.1.11) montre que Δr_i varie en fonction de la pression moyenne dans l'intervalle $(i, i+1)$

Dans le chapitre V, nous traitons un exemple de calcul des fonctions $\tilde{D}(r)$ et $\tilde{f}(r)$, à partir des courbes capillaires que nous avons obtenues en injectant du mercure dans des milieux poreux composés de billes de verre.

Examinons maintenant comment les résultats du modèle probabiliste peuvent nous conduire à une relation entre les fonctions $D(r)$ et $\tilde{D}(r)$.

IV.2. CORRECTION DES GRAPHES POROMETRIQUES, SELON LES RESULTATS DU MODELE PROBABILISTE.

Nous avons déjà vu dans le paragraphe (II.4) que si on connaît la densité porométrique réelle $f(r)$, on peut calculer la

teneur en saturation du fluide non mouillant selon l'expression (II.4.29) mise sous la forme :

$$S_N = \frac{\int_{r_c}^{\infty} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr} \Psi \left\{ \Omega_t, \Sigma_x, W(x) \right\} \quad (\text{IV.2.1.})$$

La fonction $\Psi\{.\}$ fait intervenir le volume total de l'échantillon Ω_t , la surface d'injection Σ_x et la probabilité de remplissage des pores surcritiques $W(x)$. Il est important de rappeler ici que la fonction $W(x)$ est directement liée au rayon critique r_c et donc à la pression capillaire p_c . La transcription de $W(x)$ en termes de la pression p_c s'effectue à l'aide des coefficients d'engorgement et de ramification $\beta_1(r_c)$ et $\beta_2(r_c)$.

Nous avons distingué deux cas :

a) $\beta_1 \geq \beta_2 / 3$: engorgement c77

$$\Psi = \frac{\Sigma_x \cdot x_m}{\Omega_t}, \quad x_m \approx \frac{3}{\beta_2} \cdot \text{Log} \left(\frac{3\beta_1}{3\beta_1 - \beta_2} \right) \quad (\text{IV.2.2.})$$

b) $\beta_1 < \beta_2 / 3$: pénétration c80

$$\Psi = W(\infty) + \frac{\Sigma_x \cdot x_S}{\Omega_t} \left\{ 1 - W(\infty) \right\} \quad (\text{IV.2.3.})$$

$$\text{où } W(\infty) = 1 - \frac{3\beta_1}{\beta_2} \quad (\text{IV.2.4.})$$

est la probabilité asymptotique du remplissage.

Etant donné que les paramètres β_1 et β_2 peuvent être exprimés à l'aide de la densité porométrique $f(r)$ (voir formules (II.1.1.6) (II.3.12.)), nous pouvons dire qu'en définitive Ψ est une fonction de la forme $\Psi \left\{ \Omega_t, \Sigma_x, f(r) \right\}$

En supposant que les pores sont localement cylindriques de longueur constante, d'après l'expression (I.2.5) nous pouvons écrire :

$$\int_{r_c}^{\infty} D(r) dr = \frac{\int_{r_c}^{\infty} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr} \quad (\text{IV.2.5.})$$

où $D(r)$ est la densité réelle de distribution des volumes des pores.
Nous écrivons donc la formule (IV.2.1.) sous la forme :

$$S_N = \int_{r_c}^{\infty} D(r) dr \cdot \Psi \left\{ \Omega_t, \Sigma_x, f(r) \right\} \quad (\text{IV.2.6.})$$

Mais nous pouvons aussi exprimer la saturation en fluide non mouillant d'après la formule (IV.1.1.) sous la forme

$$S_N = \int_{r_c}^{\infty} \tilde{D}(r) dr \quad (\text{IV.2.7.})$$

où $\tilde{D}(r)$ est la densité de distribution volumique selon l'hypothèse du faisceau des tubes capillaires. En comparant les relations (IV.2.6.) et (IV.2.7.) nous aurons :

$$\int_{r_c}^{\infty} \tilde{D}(r) dr = \int_{r_c}^{\infty} D(r) dr \cdot \Psi \left\{ \Omega_t, \Sigma_x, f(r) \right\} \quad (\text{IV.2.8.})$$

Il est intéressant d'examiner l'interprétation physique de la relation (IV.2.8.). En effet nous pouvons dire que le volume du fluide non mouillant qui pénètre à l'intérieur des pores à la pression p_c est égal au volume des pores ayant un rayon r supérieur à r_c , multiplié par la probabilité du remplissage de ce volume. En d'autres termes, nous pouvons interpréter la relation (IV.2.8.) en écrivant :

$$\int_{r_c}^{\infty} \tilde{D}(r) dr = \int_{r_c}^{\infty} D(r) dr \times \Psi\{\Omega_t, \Sigma_x, f(r)\} \quad (\text{IV.2.9.})$$

$$\left[\begin{array}{l} (\%) \text{ volume} \\ \text{pénétré} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} (\%) \text{ volume des} \\ \text{pores à } r > r_c \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} (\%) \text{ probabilité de} \\ \text{remplissage} \end{array} \right]$$

La figure 34 illustre le sens physique de la relation (IV.2.9.)

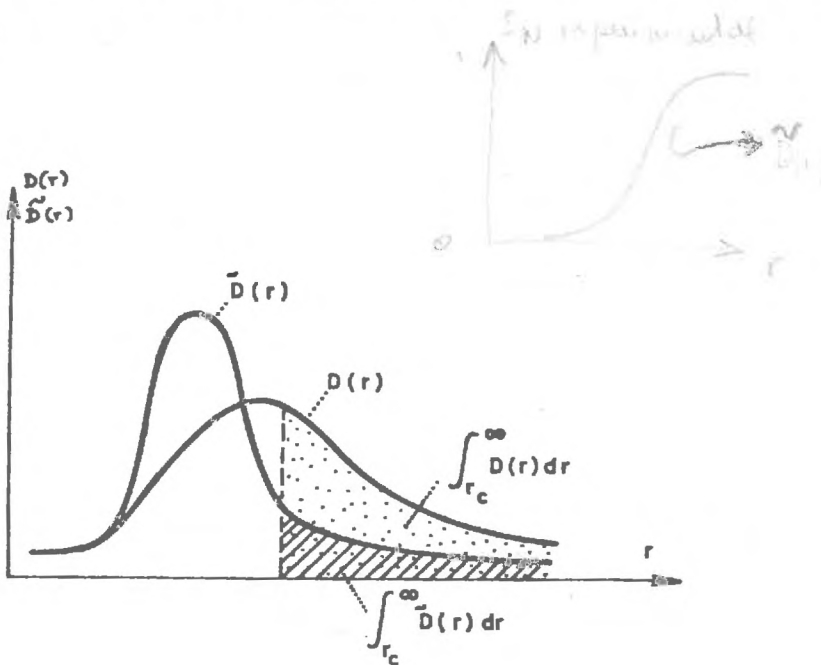


Figure 34

Posons maintenant :

$$\tilde{\theta}(r) = \int_r^{\infty} \tilde{D}(r) dr \quad (\text{IV.2.10})$$

et

$$\theta(r) = \int_r^{\infty} D(r) dr \quad (\text{IV.2.11})$$

L'équation (IV.2.9.) nous permet d'exprimer $\theta(r_c)$ en fonction de $\tilde{\theta}(r_c)$ sous la forme

$$\theta(r) = \frac{\tilde{\theta}(r)}{\Psi\{\Omega_t, \Sigma_x, f(r)\}} \quad r = r_c \quad (\text{IV.2.12.})$$

On peut obtenir par la suite la densité volumique $D(r)$ en inversant la relation intégrale IV.2.11. Nous avons :

$$D(r) = \frac{d \theta(r)}{d r} \quad (\text{IV.2.13})$$

Quant à la densité en nombre $f(r)$, la formule (I.2.6.) nous rappelle que :

$$f(r) = \frac{D(r)}{r^2 \int_0^{\infty} \frac{D(r)}{r^2} dr} \quad (\text{IV.2.14.})$$

Toutefois, l'obtention de la fonction $\theta(r)$ à partir de la formule (IV.2.12.) présente un certain nombre de difficultés considérables. En effet, si on examine de plus près cette relation, nous remarquons qu'il s'agit d'une équation implicite par rapport à $f(r)$: la fonction $\theta(r)$ est liée à $f(r)$ par l'intermédiaire des relations (IV.2.11), (IV.2.14), tandis que la probabilité Ψ est liée à $f(r)$ par l'intermédiaire des coefficients d'engorgement et de ramification (formules IV.2.2.) et (IV.2.3.). Etant donné la complexité de ces relations nous avons envisagé le calcul itératif suivant :

Soit la suite des approximations successives de la fonction $\theta(r)$ de la forme :

$$\theta^{(1)}(r), \quad \theta^{(2)}(r), \quad \dots, \quad \theta^{(m)}(r), \quad \dots$$

Ces approximations obéissent à la version itérative de l'équation (IV.2.12) du type :

$$\theta^{(m+1)}(r) = \frac{\tilde{\theta}(r)}{\Psi\{\Omega_t, \Sigma_x, f^{(m)}(r)\}} \quad (\text{IV.2.15.})$$

Dans cette expression la fonction $f^{(m)}(r)$ peut être obtenue à partir de $\theta^{(m)}(r)$ suivant les relations (IV.2.13.) et (IV.2.14.).

Si l'itération (IV.2.15.) est convergente, pour q entier et positif et ϵ infiniment petit, nous aurons :

$$\left| \theta^{(q+1)}(r) - \theta^{(q)}(r) \right| \leq \epsilon$$

Dans ce cas, nous pouvons prendre :

$$\theta(r) = \theta^{(q+1)}(r) + O(\epsilon)$$

Pour le calcul, les équations ont été discrétisées selon la méthode des différences finies. Supposons donc que la variable r prend les valeurs discrètes $r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < r_0$ qui correspondent aux pressions $p_c(n) > p_c(n-1) \dots > p_c(1) > p_c(0)$ selon la relation de Laplace.

Examinons maintenant comment, connaissant $\theta^{(m)}(r)$ nous pouvons obtenir $f^{(m)}(r)$ et par la suite la probabilité $\Psi^{(m)}(\Omega_t, \Sigma_x, f(r))$

La relation (IV.2.13.) peut être discrétisée sous la forme :

$$D^{(m)}(r_i) = \frac{\theta^{(m)}(r_{i+1}) - \theta^{(m)}(r_{i-1})}{r_{i+1} - r_{i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.16.})$$

En posant par la suite, comme dans l'expression (IV.1.8.)

$$\phi_i^{(m)} = \int_{r_i}^{r_{i-1}} \frac{D^{(m)}(r)}{r^2} dr \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.17.})$$

nous pouvons calculer les valeurs $f^{(m)}(r_i)$ selon la relation :

$$f(r_i)^{(m)} = \frac{D(r_i)^{(m)}}{r_i^2 \sum_{i=1}^n \phi_i^{(m)}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.18.})$$

Pour calculer la probabilité de remplissage $\Psi \{ \Omega_t, \Sigma_x, \varphi(r) \}^{(m)}$ nous allons tout d'abord calculer les coefficients $\beta_1(r)$ et $\beta_2(r)$ selon les expressions (II.1.1.6) et (II.3.12). Pour ce calcul nous allons poser :

$$M_{0,i}^{(m)} = \int_{r_i}^{r_{i-1}} f(r)^{(m)} dr \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.19.})$$

$$M_{1,i}^{(m)} = \int_{r_i}^{r_{i-1}} r f(r)^{(m)} dr \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.20.})$$

$$M_{2,i}^{(m)} = \int_{r_i}^{r_{i-1}} r^2 f(r)^{(m)} dr \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.21.})$$

Nous pouvons maintenant exprimer les coefficients d'engorgement β_1 et de ramification β_2 sous forme discrète. En utilisant les expressions (II.1.1.6), (II.3.12) et en posant $\ell = 2\bar{r}$, nous avons

$$\beta_1(r_i)^{(m)} = -T \text{Log} \frac{\sum_{j=1}^i M_{0,j}^{(m)}}{2 \sum_{i=1}^n M_{1,i}^{(m)}} \quad (\text{IV.2.22.})$$

$$\beta_2(r_i)^{(m)} = 2k P \frac{\sum_{j=1}^i M_{1,j}^{(m)}}{\sum_{i=1}^n M_{2,i}^{(m)}} \quad (\text{IV.2.23.})$$

Connaissant la valeur des coefficients $\beta_1^{(m)}(r_i)$ et $\beta_2^{(m)}(r_i)$ nous pouvons calculer pour tout r_i la probabilité $\Psi \{.\}$ selon les formules (IV.2.2.), (IV.2.3.) et (IV.2.4.)

Pour commencer les itérations d'après (IV.2.15.) nous devons calculer tout d'abord la fonction $\tilde{\theta}(r)$ qui correspond au modèle du faisceau des tubes capillaires. Ceci n'est pas difficile, étant donné que nous disposons d'après (IV.1.6.) du tableau des valeurs $\tilde{D}(r_i)$.

En effet, en posant :

$$\tilde{\partial}_i = \int_{r_i}^{r_{i-1}} \tilde{D}(r) dr \quad i = 1, 2, \dots, n$$

nous aurons :

$$\tilde{\theta}(r_i) = \sum_{j=1}^i \tilde{\partial}_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.2.24.})$$

Lors de l'application de la méthode itérative ci-dessus suivant un programme de calcul automatique que nous avons rédigé, nous avons trouvé beaucoup de difficultés pour obtenir une itération convergente. Ceci tient probablement au schéma explicite de l'itération IV.2.15., qui dépend fortement de la première approximation de la fonction $\theta(r)$.

Dans l'exemple que nous allons présenter au chapitre suivant nous avons choisi :

$$\theta^{(1)}(r_i) = \tilde{\theta}(r_i) \quad \text{et donc} \quad f^{(1)}(r_i) = \tilde{f}(r_i)$$

Cette approximation ne nous a pas donné satisfaction.

Nous avons donc tourné la difficulté en prenant comme première approximation une loi porométrique fixée d'avance et dont les paramètres ont été ajustés afin de satisfaire la relation (IV.2.12.) Ceci peut s'effectuer de manière automatique. Nous donnerons les détails du calcul dans le paragraphe V.3. après avoir exposé les conditions expérimentales, qui nous ont permis d'étudier le problème dans ce cas réel.

CHAPITRE V

ETUDE EXPERIMENTALE SUR DES MILIEUX COMPOSES

DE BILLES DE VERRE

Nous venons de voir dans le chapitre précédent que la probabilité du remplissage des pores, exprimée à l'aide de la fonction $\Psi \{.\}$, fait intervenir d'une part, les conditions aux limites et d'autre part l'interaction spatiale des dimensions des pores, en termes de probabilités. Dans ce chapitre, nous étudions du point de vue expérimental l'influence des conditions limites d'injection du fluide non mouillant sur l'allure des courbes capillaires. Utilisant pour la suite un programme automatique de calcul, nous avons obtenu le graphe donnant la porométrie corrigée du milieu.

V.1. PREPARATION DES ECHANTILLONS ET CONDITIONS EXPERIMENTALES

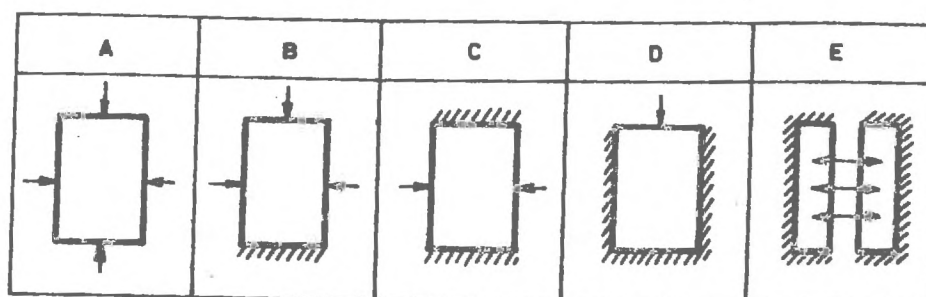
Les échantillons de milieu poreux que nous avons constitués sont composés de billes de verre de diamètre variant entre 125 et 200 μ . Ces billes sont consolidées artificiellement suivant le procédé proposé par G. MASSARANI [29]. Selon cette méthode, une faible quantité d'araldite a été ajoutée, ne dépassant pas 3 % de la masse totale de l'échantillon.

Une masse importante a été ainsi soigneusement préparée et mise en place avec un compactage uniforme dans des moules cylindriques.

Après séchage, nous avons retiré les échantillons et nous avons vérifié les bonnes conditions d'homogénéité du moins en ce

qui concerne l'état de leur surface extérieure. Après avoir éliminé quelques échantillons défectueux, nous avons vérifié l'homogénéité de l'ensemble en mesurant, comme nous allons le voir un peu plus loin, leurs coefficients de porosité et de perméabilité.

Après cette préparation, nous avons ajusté les conditions aux limites. Le tableau ci-dessous résume les cinq types de conditions aux limites :



Les conditions aux limites du type A sont les conditions habituellement utilisées au laboratoire, au cours des expériences d'injection de mercure. Pour réaliser les limites imperméables des types B, C et D nous avons tout simplement ajouté les parois solides correspondantes. Il est évident que pour obtenir les conditions du type E (injection radiale interne) nous avons utilisé dès le départ des moules spéciaux.

Les expériences que nous avons réalisées portent surtout sur la détermination des courbes capillaires selon la méthode de l'injection de mercure, dite de Purcell. Par ailleurs des mesures annexes nous permettent de mesurer la porosité et la perméabilité de chaque échantillon.

En ce qui concerne les courbes capillaires nous avons utilisé un appareil du type classique (Purcell). Les premiers essais nous ont montré que les variations du volume injecté sont très sensibles aux variations de la pression dans la gamme 0 - 1 bar. Pour cela et afin de pouvoir suivre les faibles variations de la

pression, nous avons utilisé un tube manométrique en U, rempli de mercure.

Pour mesurer la porosité des échantillons, nous avons déterminé le volume des pores par injection du mercure à 120 bar. En fait, ce n'est pas une mesure supplémentaire, mais simplement la dernière opération effectuée au cours de la détermination des courbes d'injection du mercure.

La mesure de la perméabilité est tout à fait classique : après la fin des opérations de l'injection du mercure, les échantillons complètement saturés sont placés dans une cellule, reliée avec deux réservoirs à niveau constant, qui assurent la mise en circulation du mercure. Le réservoir amont est alimenté avec une pompe péristaltique, qui évite tout contact entre le mercure et les parties mobiles. La perte de charge due à la circulation du mercure à l'intérieur de l'échantillon est mesurée à l'aide de deux tubes manométriques branchés à l'entrée et à la sortie de la cellule, tandis que le débit du mercure est mesuré directement à la sortie par pesée.

Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques géométriques des échantillons utilisés.

N°	D (mm)	H (mm)	P (%)
A 6	20,88	36,48	32,8
A 13	20,68	36,40	32,6
A 4	20,62	36,40	34,6
A 5	20,82	36,36	33,7
A 19	20,88	27,00	31,5
B 2	20,68	36,14	32,8
B 17	20,70	27,14	30,8
C 9	20,90	36,58	32,4
C 23	20,78	17,54	36,0
D 14	20,74	36,28	32,9
D 22	20,86	26,92	31,6
E _b	20,84	35,48	28,0
E _d	20,70	35,22	30,4

Les lettres A, B, C, D et E désignent le type des conditions aux limites. Nous avons par la suite mesuré une perméabilité géométrique de 34,6 Darcy pour l'échantillon A 6, de 53 Darcy pour le A 4 et de 42 pour le A 5.

V .2. PRESENTATION DES RESULTATS ET INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Pour montrer les bonnes conditions expérimentales, nous avons porté dans la figure 35 les courbes capillaires obtenues pour les échantillons A 6 et A 13, A 19. L'examen de ce résultat montre que les conditions d'homogénéité sont bien vérifiées dans ce cas et que les échantillons sont comparables.

Les expériences d'injection du mercure constituent un moyen pour détecter le bon état des échantillons. Dans la figure 36 nous présentons les courbes capillaires afférentes aux échantillons C 9 et C 23. Nous constatons que la courbe qui correspond à l'échantillon C 23 présente une brusque discontinuité à la pression $p_c = 0.30$ bar. Cette discontinuité apparaît après une augmentation progressive de la pente de la courbe capillaire et nous pouvons l'interpréter comme un signe d'une certaine irrégularité de la répartition des pores.

Nous avons ainsi éliminé les échantillons qui présentaient de telles anomalies et nous avons par la suite étudié l'influence des conditions aux limites.

La figure 37 montre les courbes capillaires obtenues pour les échantillons A13, C9, E_b, D14. La pression p_c est la pression capillaire évaluée au centre de gravité de chaque échantillon après une correction qui tient compte de la pression hydrostatique. Evidemment, si cette notion de pression moyenne est justifiée pour les cas C 9 et E_b elle n'est qu'une manière de présentation dans le cas de l'échantillon D 14 surtout aux faibles pressions d'injection.

D'une manière générale, nous pouvons remarquer que les courbes capillaires présentent un pallier de plus en plus plat lorsque la surface d'injection diminue.

En essayant de déduire la porométrie du milieu selon le modèle du faisceau des tubes capillaires cylindriques, nous allons aboutir à des courbes porométriques d'autant plus resserrées que la surface offerte à l'injection du mercure est faible.

Ceci est manifestement faux puisqu'il s'agit toujours du même milieu poreux. On peut se poser donc la question d'essayer d'obtenir la porométrie du milieu en tenant compte de l'influence conjuguée des conditions aux limites et des probabilités du remplissage des pores.

Tout de suite, nous allons examiner comment le procédé du calcul que nous avons présenté dans le paragraphe IV.2. peut nous conduire aux courbes porométriques corrigées.

V.3. OBTENTION DES COURBES POROMETRIQUES

Revenons maintenant au cas des courbes capillaires de la figure 35 et déduisons tout d'abord les densités porométriques $\tilde{D}(r)$ et $\tilde{f}(r)$ selon le modèle du faisceau des tubes capillaires.

En appliquant la méthodologie que nous avons présentée dans le paragraphe IV.1. nous déduisons une densité porométrique $\tilde{f}(r)$, qui présente les caractéristiques suivantes :

$$E(r) = \bar{r} = 36,0 \mu, \text{ Var } (r) = 0,68 \mu^2$$

Nous avons porté dans la figure 38 les graphes $\tilde{f}(r)$ et $\tilde{D}(r)$. Nous constatons que dans la gamme de variation de rayons des pores (entre 0 et 140 μ) ces courbes se trouvent reportées du côté des faibles valeurs de r . La valeur moyenne déduite n'est pas la valeur moyenne réelle des rayons des pores mais un rayon qui caractérise la dimension des cols, qui cachent derrière eux les gros pores.

Appliquons maintenant les résultats du modèle probabiliste afin de déduire la vraie porométrie du milieu.

Pour effectuer le calcul itératif que nous avons exposé dans le paragraphe IV.2., nous avons imposé à priori la forme de la loi porométrique. Nous avons commencé alors les itérations avec une loi de Rayleigh de paramètres r_1 et r_2 . Nous rappelons que cette loi est de la forme :

$$f(r) = \frac{r - r_1}{(r_2 - r_1)^2} \exp \left\{ \frac{(r - r_1)^2}{2(r_2 - r_1)^2} \right\}$$

Nous avons choisi $r_1 = 20 \mu$ et nous avons fait varier r_2 afin de satisfaire la relation (IV.2.12). Nous devons remarquer que dans cette relation nous pouvons utiliser directement la corrélation expérimentale $S_N(p_c)$ puisqu'on a :

$$\tilde{\theta}(r_c) = \int_{r_c}^{\infty} \tilde{D}(r) dr = S_N(r_c)$$

Pour la valeur $r_2 = 54 \mu$ on obtient la courbe capillaire théorique qui s'ajuste très bien à la courbe expérimentale (figure 39). Sur la même figure, nous avons tracé en pointillé la courbe capillaire qui correspond à la même porométrie mais selon le modèle du faisceau des tubes capillaires.

Ce qui est intéressant de constater, c'est que la condition critique $\beta_1 = \beta_2/3$ correspond à peu près au changement de courbure de la courbe capillaire qui traduit ainsi une plus grande facilité de pénétration.

Sur le plan expérimental ceci correspond à une difficulté de stabilisation du volume de mercure injecté.

La porométrie corrigée présente les caractéristiques suivantes :

$$E[r] = 62,5 \mu, \quad \text{Var}[r] = 6,58 \mu^2$$

En comparant ces paramètres aux paramètres de la courbe porométrique $\tilde{f}(r)$, déduite d'après l'hypothèse du faisceau de tubes capillaires, on trouve un rapport de 1,74 sur la valeur moyenne et de 9,70 sur la variance.

Ce résultat est à rapprocher des résultats obtenus par DULLIEN et Coll [27]. En examinant la figure 29.b on se rend compte que la porométrie réelle, obtenue par mesure directe (microphotographie) est très étalée. Comparant ensuite les figures 38 et 29.b, nous constatons que le décalage est similaire entre les graphes porométriques réels et les graphes obtenus suivant l'hypothèse du faisceau de

capillaires cylindriques.

Arrivés à cette étape de notre travail, souvenons-nous un instant de notre démarche générale. En effet, le problème que nous nous sommes posés au départ était le déplacement d'un fluide par un autre à l'intérieur des interstices d'un milieu poreux. Pour mieux comprendre le mécanisme de base du problème, nous nous sommes placés dans un cas asymptotique où les vitesses tendent vers zéro. Alors, c'est la tension interfaciale qui joue un rôle prépondérant et le déplacement s'effectue selon une succession d'équilibres. Tout au long de ces chapitres nous venons de voir comment l'analyse probabiliste du phénomène suivant une modélisation simple de la forme des pores, peut nous permettre d'expliquer le rôle de la porométrie et des interconnexions des pores sur le phénomène d'engorgement ou la pénétration du fluide non mouillant. En conclusion, la relation probabiliste entre la porométrie du milieu et les courbes capillaires expérimentales, nous a conduit à des informations utiles dans la pratique, sur la répartition des tailles des pores.

Mais nous allons maintenant nous intéresser au mécanisme du déplacement non permanent du fluide en place, au cours duquel les vitesses et la friction interne, due à la viscosité, jouent le premier rôle. Ce sera l'objet de la deuxième partie de ce travail, au cours de laquelle nous étudions en détail les mécanismes fondamentaux des états transitoires.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DU DEPLACEMENT DE DEUX FLUIDES
VISQUEUX EN CONTACT DANS UNE SUCCESSION PERIODIQUE DE PORES

CHAPITRE VI

PRESENTATION DU PROBLEME PHYSIQUE ET SYNTHESE

DES TRAVAUX ANTERIEURS

VI.1. INTERET DU PROBLEME PHYSIQUE

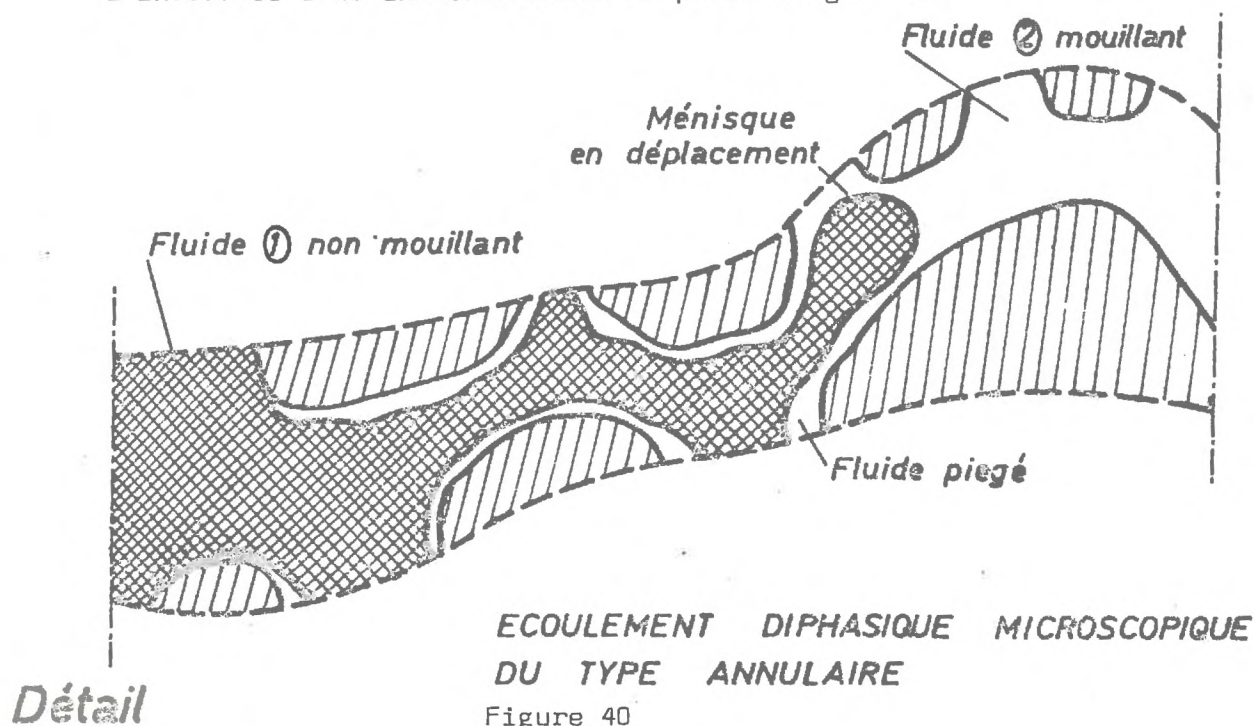
Le déplacement quasistatique d'un fluide par un autre, que nous venons d'étudier dans la première partie de ce travail, est basé sur l'existence d'une succession d'états d'équilibre. Toutefois, nous ne devons pas perdre de vue que tout état d'équilibre suppose un état antérieur et par conséquent un passage de l'un à l'autre et des forces motrices animant un mouvement transitoire. Ce mouvement, bien que de courte durée, peut être influencé par les forces d'inertie dues aux accélérations et aux décélérations des molécules fluides à l'intérieur des pores irréguliers ; il est généralement contrarié par le frottement interne dû à la viscosité des fluides. L'examen complet des états transitoires fait apparaître un mécanisme extrêmement compliqué, surtout à cause de la forme irrégulière des pores interconnectés. La progression du fluide injecté se fait de manière anarchique et une partie du fluide déplacé reste définitivement bloqué dans les pores. Pour mieux saisir le mécanisme du piégeage du fluide mouillant, nous allons distinguer l'échelle du massif de l'échelle microscopique au niveau des pores.

A l'échelle du massif, c'est la capillarité et la diversité des vitesses du déplacement des interfaces microscopiques, qui font apparaître des véritables culs de sac en fluide mouillant, constitués par plusieurs pores. L'influence de la capillarité est analogue à l'effet de la pression capillaire quasistatique que nous

venons d'étudier ; quant à la cinématique des interfaces microscopiques, nous pouvons raisonner sur un schéma simplifié : en effet, si on considère deux capillaires interconnectés de rayons différents, l'interface avance plus vite dans le capillaire le plus large. En arrivant à l'extrémité aval, elle bloque ainsi dans le capillaire le plus mince une certaine quantité du fluide déplacé.

A l'échelle du pore le piégeage est lié au mode de progression du front microscopique. En effet, dans chaque passage capillaire, l'interface ne se déplace pas comme un piston rigide, mais elle subit des déformations qui dépendent surtout de la manière dont les parois solides convergent ou divergent. Par conséquent, il existe toujours un film du fluidemouillant en place, qui tapisse les parois solides de façon plus ou moins continue. L'épaisseur de ce film dépend de la vitesse de progression de l'interface microscopique, aussi bien que des propriétés physiques des deux fluides (viscosité, tension interfaciale) et de la géométrie du domaine d'écoulement.

Suivant un raisonnement déductif, examinons donc le phénomène du tapissage non stationnaire à l'échelle du pore. Munissons-nous d'un microscope et regardons en détail le déplacement de l'interface dans une succession de pores (figure 40)



Le mouvement non stationnaire de l'interface crée un écoulement de type annulaire au cours duquel l'épaisseur du fluide mouillant qui adhère sur les parois solides diminue petit à petit. Les résultats de visualisation sur modèle analogique du milieu poreux, obtenus par MATTAX et KYTE (1961, [30]) confirment ce point de vue.

Si en première approximation on néglige les interconnexions entre les passages capillaires, nous pourrions examiner le même phénomène dans une succession de pores isolés (figure 41.a). En optant pour une variation linéaire des rayons des pores de manière périodique, nous pouvons styliser davantage la forme du tube capillaire selon une succession de convergents et de divergents (figure 41.b).

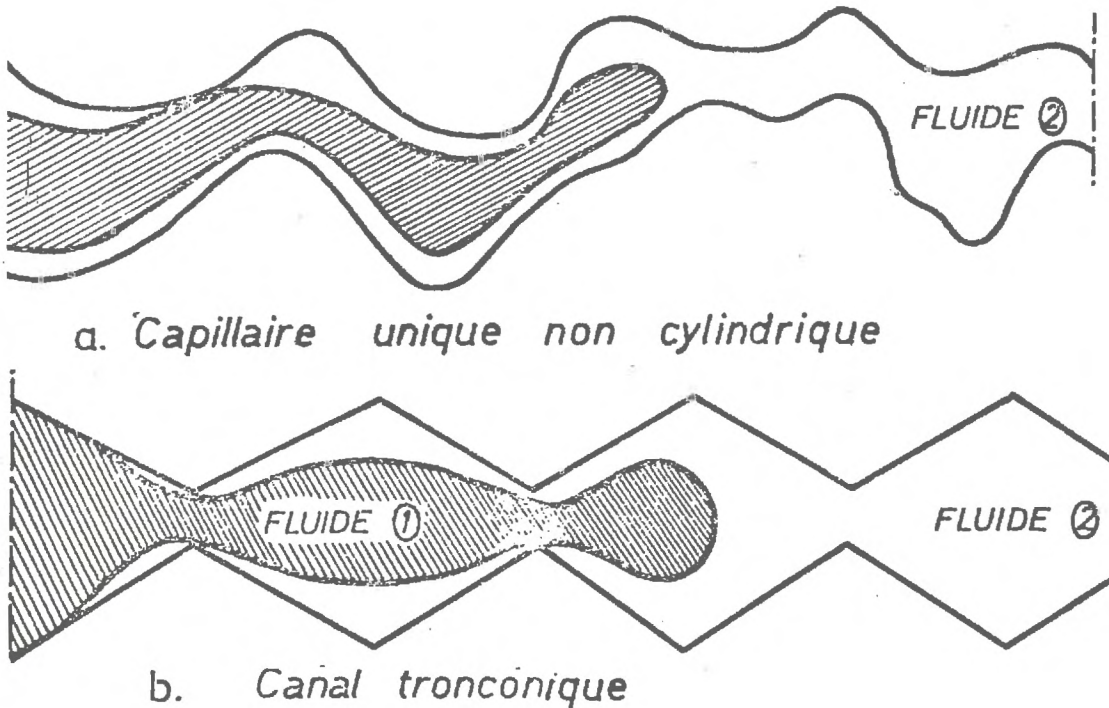


Figure 41

La figure 42 donne l'image physique du phénomène transitoire : le fluide (2) remplit au repos une cavité limitée par des parois imperméables, ayant une entrée et une sortie. Au temps $t = 0$,

nous injectons à l'entrée le fluide (1), non miscible avec le premier et nous déplaçons ainsi progressivement le fluide en place. Toutefois, l'interface n'agit pas comme un piston rigide : il y a toujours une couche fluide qui adhère près des parois, derrière le front et la récupération du fluide en place n'est pas complète.

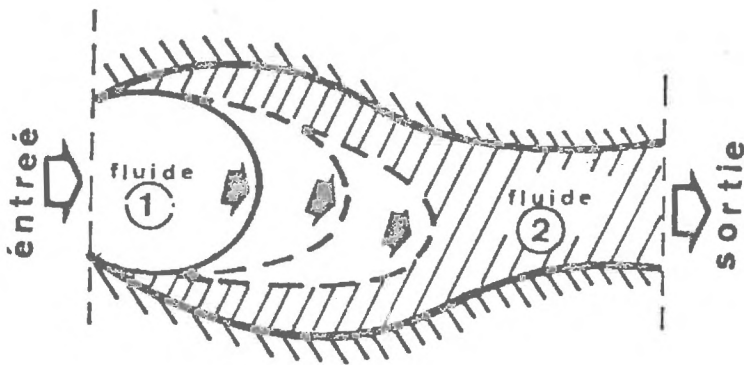


Figure 42

L'étude en détail du problème ainsi posé et en particulier la distribution des vitesses et des pressions au voisinage de l'interface en accélération ou décélération présente un caractère fondamental pour la compréhension des phénomènes interfaciaux qui interviennent en hydrodynamique, en génie chimique ou en génie pétrolier. Il serait donc utile de situer notre problème dans la classe la plus générale des écoulements de deux fluides en contact : on aura ainsi une vue synoptique des solutions particulières rencontrées dans la littérature et on dégagera leurs points communs.

En se limitant aux écoulements laminaires, l'expérience montre que dans certaines circonstances, on peut avoir un écoulement d'un fluide dans un autre par gouttes ou par bouchons (figure 43).

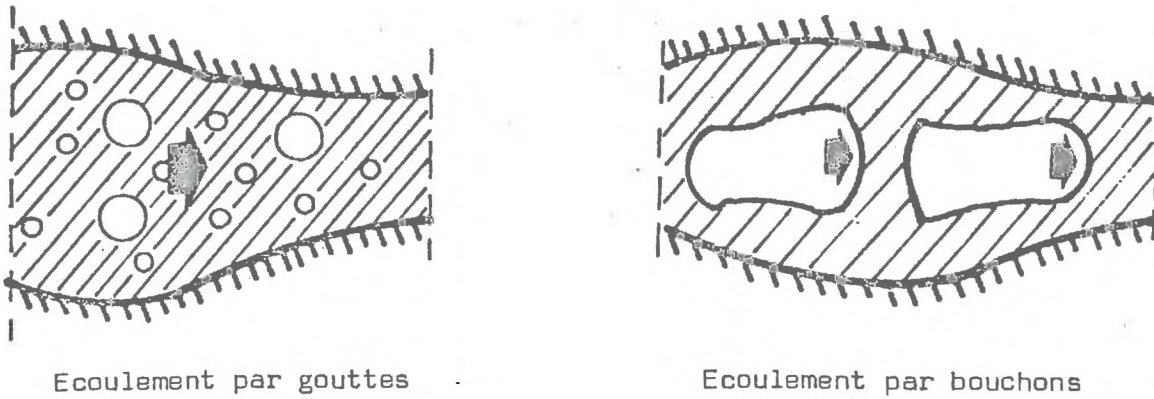
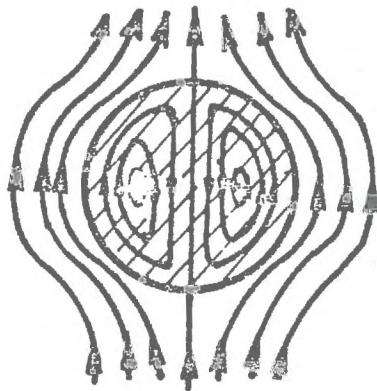


Figure 43

Du point de vue de la mécanique des fluides, le problème qui se pose est celui de la circulation à l'intérieur des gouttes et des bulles et le comportement des interfaces diphasiques en mouvement. (figure 44)



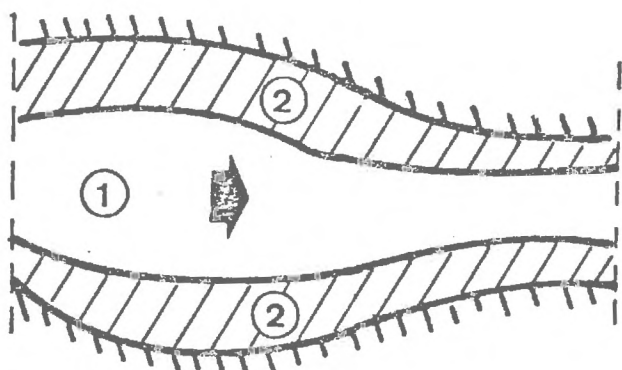
Circulation à l'intérieur d'une goutte en mouvement

Figure 44

Mais les phénomènes globaux se prêtent à une étude macroscopique ou statistique : on peut étudier en particulier le comportement rhéologique des émulsions et écrire les équations générales de conservation de masse ou des quantités de mouvement en

termes de moyennes statistiques (DELHAYE, 1969, [31]). De tels problèmes, en relation avec les transferts thermiques se posent dans les colonnes de distillation du pétrole ou dans les tours d'absorption des gaz en génie chimique.

Il existe des circonstances physiques au cours desquelles chaque fluide occupe un domaine simplement connexe et l'écoulement est de type annulaire (figure 45).



Écoulement annulaire

Figure 45

C'est le cas fréquent lorsque le fluide 1 est l'air ou un gaz circulant à une vitesse relativement élevée dans un tube rempli par un fluide visqueux.

Les écoulements de type annulaire se rapprochent du problème du déplacement d'un fluide par un autre dans un milieu poreux, au niveau microscopique. En effet, dans ce cas, le domaine d'écoulement est constitué par les vides ou les pores d'un squelette solide ; nous retrouvons le problème qui préoccupe les ingénieurs du Génie Pétrolier, au cours de la récupération des hydrocarbures fluides, par injection artificielle de produits peu visqueux.

Lorsque l'un des deux fluides est l'air, nous pouvons parler des écoulements à surface libre à travers un barrage perméable ou des fluctuations d'une nappe phréatique, qui suit avec un retard les variations du niveau d'eau dans une rivière.

Dans le tableau VI, nous avons groupé la classification des problèmes concernant l'écoulement de deux fluides visqueux en contact. Les critères du classement peuvent être physiques ou mathématiques et dans la dernière colonne, nous avons noté quelques applications.

Motivés donc par la difficulté d'interprétation des résultats d'expériences sur modèle physique, nous étudions par la suite l'avancement instationnaire d'un ménisque diphasique soumis, au niveau du pore à des accélérations et des décélérations.

Après avoir donné une brève synthèse des travaux antérieurs, nous étudions dans le chapitre VII le problème mathématique complet. En particulier, nous analysons de manière approfondie les conditions sur l'interface et nous mettons en évidence les monômes adimensionnels, qui caractérisent le problème.

Le caractère non linéaire des équations générales de la mécanique des fluides et la complexité des conditions aux limites sur l'interface nous ont conduit très vite à étudier le problème du point de vue numérique. Dans le chapitre VIII, après avoir rappelé les travaux numériques antérieurs, nous présentons en détail la méthode numérique que nous avons mise au point et que nous appelons méthode DIPHA - I.V.P. (méthode itérative des variables premières en écoulement diphasique).

L'efficacité et la précision de l'algorithme DIPHA - I.V.P. nous a par la suite permis d'étudier en détail les effets non linéaires dus à la géométrie, au nombre de Reynolds et au contraste de viscosité.

Après avoir vérifié la justesse de l'algorithme numérique (chapitre IX), nous étudions le problème de l'écoulement transitoire d'un fluide visqueux dans une succession périodique de convergents et de divergents. Les résultats du calcul font apparaître des

CRITERES PHYSIQUES	CRITERES MATHEMATIQUES	APPLICATIONS
<p style="text-align: center;">Ecoulement de deux fluides en contact</p> <pre> graph TD A[Ecoulement de deux fluides en contact] --> B[laminaires] A --> C[turbulents] B --> D[domaines simplement connexes] B --> E[domaines multiplement connexes] C --> D C --> E D --> F[instables] D --> G[stables] E --> F E --> G F --> H[conditions d'instabilité] H --> I[évolution des instabilités] G --> J[Deux fluides visqueux en contact] J --> K[Ecoulement à surface libre] </pre>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">modèles mathématiques de la turbulence</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">comportement rhéologique des émulsions. Analyse macroscopique ou statistique.</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">écoulements à la limite flottante. Raccordement de deux solutions sur l'interface. Equations : Navier-Stokes : $Re > 0$ Stokes : $Re = 0$ Laplace : irrotationnel</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Écoulements à limite libre. Annulation des contraintes sur l'interface - Equations : Navier-Stokes : $Re > 0$ Stokes : $Re = 0$ Laplace : irrotationnel</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">Génie Chimique (distillation - absorption) chaudière</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">Génie pétrolier (récupération secondaire) milieu poreux échelle du pore échelle du massif</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">Hydrologie souterraine . Milieux poreux non saturés</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Théorie des jets et décollements.</div>

TABLEAU VI

écoulements séparés à la suite d'un décollement des lignes de courant, lorsque les effets non linéaires deviennent prépondérants. Dans le même chapitre, nous étudions l'évolution de la dissipation d'énergie en fonction du nombre de Reynolds, ce qui met en évidence l'importance des travaux des forces intérieures.

Après cette préparation, nous étudions dans le chapitre XI le cas général où le contraste de viscosité intervient de manière significative en augmentant la quantité du fluide piégé.

Dans le chapitre XII enfin, nous abordons le problème par voie expérimentale et nous comparons les résultats expérimentaux aux résultats du calcul numérique.

VI.2. SYNTHÈSE DES TRAVAUX ANTERIEURS

L'étude du problème que nous avons défini dans la figure 42 présente des difficultés considérables. Sur le plan expérimental, l'effet physicochimique intervenant surtout au voisinage du raccordement de l'interface sur les parois solides rend les expériences très délicates. D'autre part, du point de vue analytique le problème fait partie de la classe des problèmes à limite flottante : la non-linéarité des équations générales du mouvement et surtout la forme compliquée des conditions à satisfaire sur l'interface à priori inconnue, rend le problème inextricable.

La plupart des travaux antérieurs traitent le problème du déplacement lent d'une interface séparant deux fluides immiscibles dans un domaine cylindrique ou prismatique. Pour les solutions analytiques approchées l'hypothèse de base est que les forces d'inertie sont très faibles, ce qui réduit les équations générales de Navier-Stokes aux équations simplifiées de Stokes. Si on utilise la fonction de courant, le problème consiste donc à raccorder deux solutions de l'équation biharmonique sur une interface de discontinuité. Même ainsi

posé, le problème est extrêmement compliqué et souvent on fait des hypothèses supplémentaires : d'habitude on néglige la viscosité du fluide poussant ou on impose à priori la forme de l'interface. CARABEDIAN (1966, [32]) et plus récemment RICHARDSON (1968, [33]) utilisent la théorie des fonctions analytiques afin de résoudre le problème biharmonique. En écrivant la fonction de courant selon la formule de Goursat :

$$\psi = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z}f(z) + X(z) \right\}$$

où $f(z)$ et $X(z)$ sont deux fonctions holomorphes, CARABEDIAN a construit un certain nombre de solutions du problème inverse dans un domaine ouvert à l'infini où la forme de l'interface est choisie auparavant. Toutefois, les problèmes analysés ne correspondent pas à des situations réelles.

RICHARDSON [33] de son côté, a résolu en tenant compte de la tension interfaciale, le problème d'une bulle située dans un milieu infini en mouvement ralenti.

Lorsque le domaine d'écoulement est borné, le problème devient plus difficile. Dans ce qui suit, nous allons distinguer deux cas : les géométries cylindriques et les géométries non cylindriques.

VI.2.1. Géométries cylindriques

Plusieurs auteurs ont étudié le déplacement d'un fluide visqueux remplissant totalement un tube cylindrique par une bulle d'air.

En général, lorsque la gravité n'intervient pas, la forme géométrique de l'interface reste invariable, toutes ses particules avançant à vitesse constante. Pour les faibles nombres de Reynolds, le problème consiste à mesurer la variation de l'angle de raccordement du ménisque sur les parois solides (ROSE, 1962 [34]) où l'épaisseur e du film liquide qui adhère sur les parois en fonction du nombre adimensionnel $\mu U/T_S$; μ est la viscosité dynamique

du fluide, T_S la tension interfaciale et U la vitesse d'avancement du ménisque.

BRETHERTON (1961, [35]) a donné des solutions approchées de la corrélation $e/R = f(\mu U/T_S)$ pour les valeurs $\mu U/T_S < 5 \cdot 10^{-3}$; R est le rayon du tube. Dans son approche analytique, il assimile le sommet de la bulle à une sphère sur laquelle il raccorde le reste de l'interface. Dans le film d'épaisseur e qui adhère sur les parois, il utilise les approximations de la théorie de lubrification pour écrire les équations de Navier-Stokes sous forme extrêmement simple. La relation $e/R = f(\mu U/T_S)$ qui résulte, diverge systématiquement par rapport aux résultats de lui-même et de FAIRBROTHER et STUBBS (1935, [36]).

TAYLOR (1961, [37]) a réalisé des expériences pour des valeurs du paramètre $\mu U/T_S$ élevées. La figure 46 donne ses résultats.

COX (1962, [38]) a repris le même problème en essayant d'interpréter les résultats de TAYLOR par voie analytique.

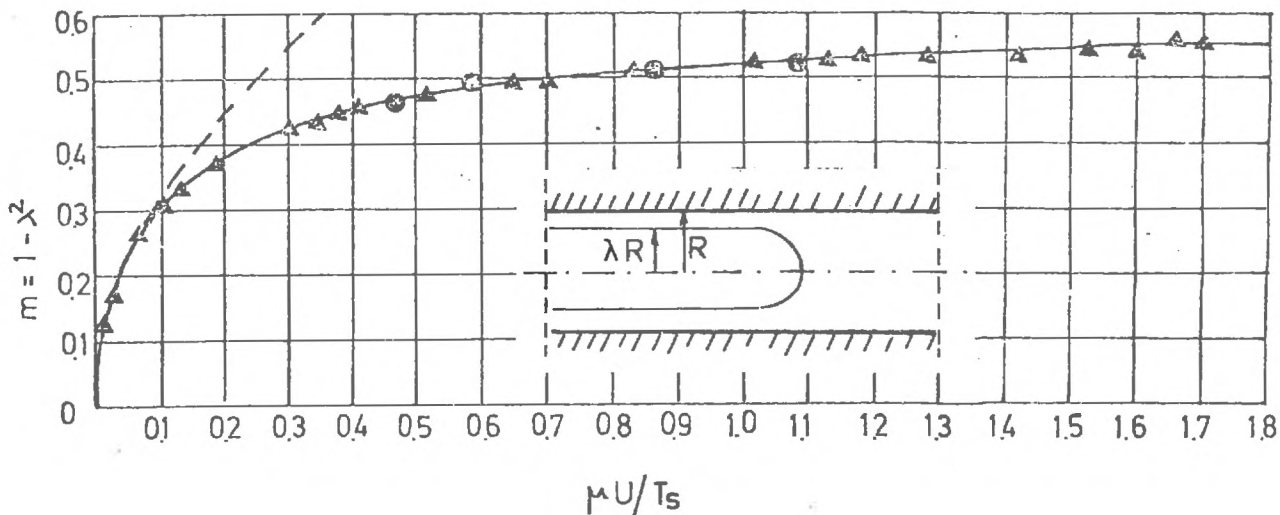


Figure 46

Résultats de Taylor

Partant des équations de Stokes en coordonnées cylindriques (r, z) , il obtient pour la fonction de courant $\Psi(r, z)$, une solution générale après séparation des variables sous la forme :

$$\Psi(r, z) = f(r) \cdot \exp(kz)$$

Pour satisfaire la forme compliquée des conditions aux limites sur la surface de la bulle, il fait un certain nombre d'hypothèses. Guidé par des observations expérimentales, il admet que le profil de la bulle suit une loi exponentielle. Si on pose

$$\epsilon = \lambda R - r \quad (\text{figure 47})$$

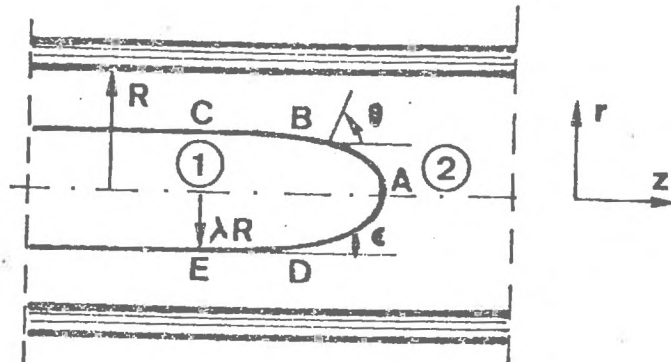


Figure 47

il admet que $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \exp(kz)$ où ϵ_0 quelconque et $\epsilon \ll \lambda R$ derrière le ménisque. Il obtient finalement une relation implicite entre la valeur asymptotique de l'épaisseur de la bulle R et le nombre $\mu U/T_S$, qui représente une solution valable à une distance d'un demi de diamètre du tube environ par rapport au sommet de la bulle. Le développement de COX permet de constater les difficultés sérieuses d'une solution analytique approchée du problème complet.

Un certain nombre de travaux [39], [40], [41], [42] traitent le problème simplifié du déplacement d'un ménisque diphasique plan dans des géométries cylindriques (plaques planes rapprochées ou tubes cylindriques de faible diamètre).

BHATTACHARJI et SAVIC (1965, [39]) et BATAILLE (1966, [40]) ont résolu indépendamment le problème du ménisque plan, poussé par un fluide non visqueux. En utilisant la transformée de Fourier, ils résolvent ainsi le problème de la transition d'un profil de vitesses uniforme, imposée sur l'interface plan, à un profil de Poiseuille à 3 % près, à une distance par rapport au ménisque, égale à la demi-épaisseur des plaques. Cela signifie que la perturbation de type « couche limite » provoquée par l'interface est localisée au voisinage du front, à une distance réduite.

N. VAN QUY (1971, [41]) a abordé le même problème par voie analytique, en tenant compte de la courbure et des conditions réelles de raccordement de l'interface sur les parois solides.

ARIBERT et Coll (1970, [42]) ont étudié expérimentalement l'influence du contraste des viscosités entre les deux fluides sur l'avancement de l'interface.

En tenant compte du contraste des viscosités et en utilisant des développements en séries de Fourier ARIBERT J.M. (1967, [43]) a montré qu'en mouvement relatif, une zone tourbillonnaire se développe au voisinage du front, dans le fluide le moins visqueux.

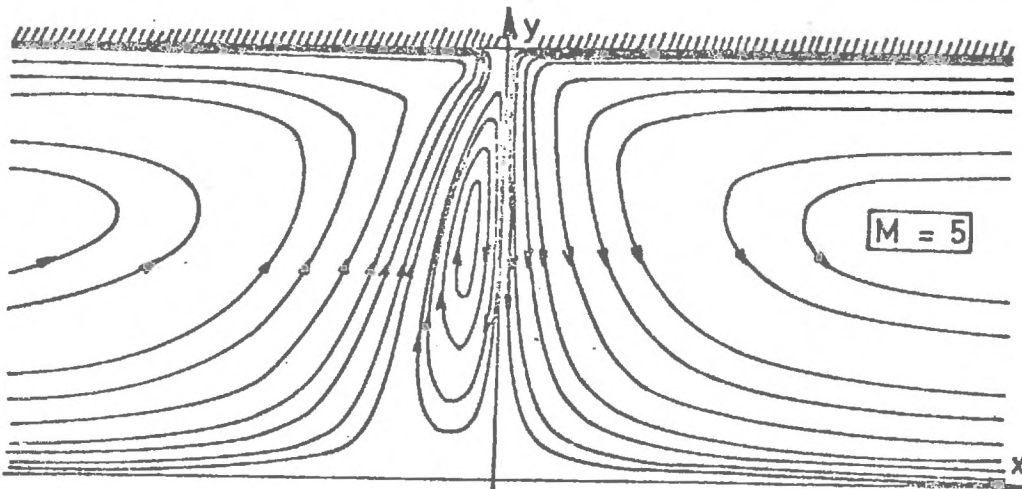


Figure 48 . D'après Aribert

L'interprétation physique de la figure 48 est très intéressante : pour satisfaire la condition d'égalité des contraintes tangentielles provoquées par le fluide le plus visqueux sur l'interface, il se forme dans le fluide le moins visqueux un tourbillon provoquant ainsi des gradients de vitesse élevée, avec la moindre dissipation d'énergie.

Bien qu'on s'intéresse aux solutions qui font intervenir les équations des fluides visqueux, nous ne pouvons pas ne pas mentionner les travaux concernant la solution du problème en écoulement irrotationnel, d'après les équations de Laplace. C'est ainsi que SAFFMAN et TAYLOR (1958, [44]), TAYLOR et SAFFMAN (1959, [45]) et JACQUART et SEGUIER (1963, [46]) donnent des solutions de problèmes analogues, concernant l'écoulement de deux fluides en contact dans un modèle Hele-Shaw, vu sous l'aspect d'une digitation isolée et stabilisée.

VI.2.2. Géométries non cylindriques

A notre connaissance, il n'existe pas d'études concernant le déplacement d'un fluide visqueux par un autre dans un domaine non cylindrique. Toutefois, si on fait l'hypothèse que les deux fluides ont la même viscosité, on réduit le problème à l'écoulement d'un fluide visqueux unique : dans ce cas, le front n'est plus une surface de discontinuité, mais il représente le lieu géométrique des particules, qui se déplacent dans le même intervalle de temps (lignes de temps égal). Nous pouvons donc évaluer facilement les interfaces après avoir calculé au préalable les champs des vitesses et des pressions.

Plusieurs auteurs ont résolu numériquement les équations de Navier-Stokes dans le cas de la circulation d'un fluide visqueux remplissant entièrement une cavité rectangulaire, sous l'action d'une vitesse uniforme à la surface libre (KAWAGUTI (1961, [47])), La figure 49 montre les résultats numériques obtenus par KAWAGUTI dans le cas où $Re = 0$ et $Re = 64$.

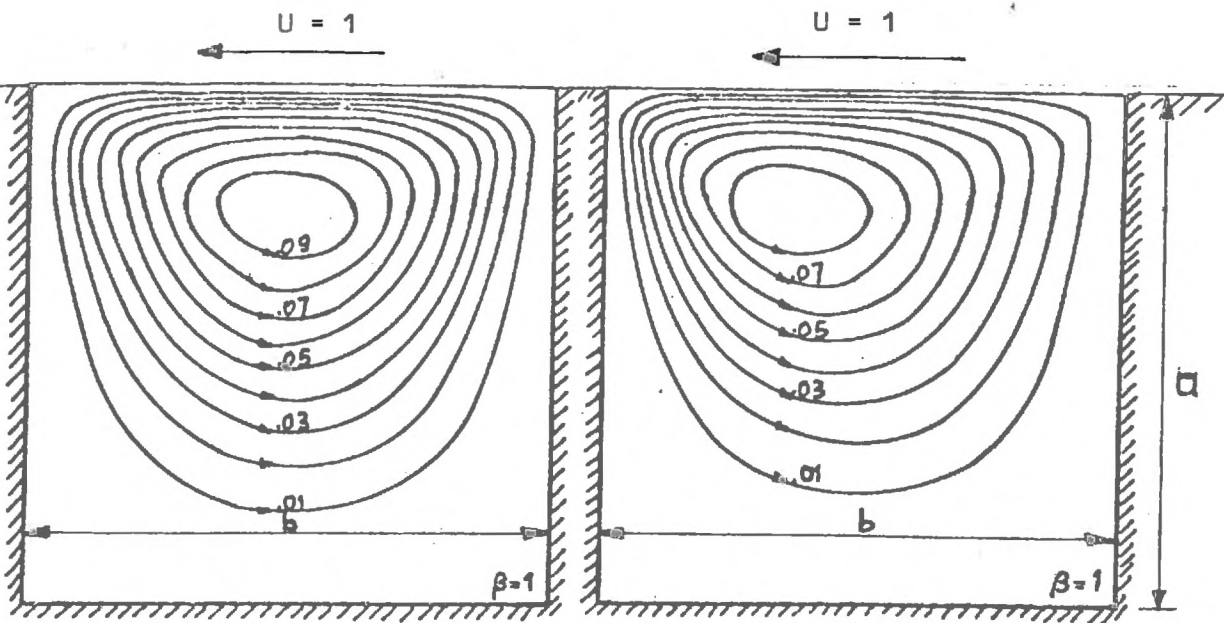


Figure 49

Lignes de courant pour $Re = 0$, $Re = 64$

Nous pouvons interpréter l'écoulement à lignes de courant fermées de la figure 49 comme étant produit par le passage stationnaire d'un autre fluide au-dessus de la cavité.

Etant donné qu'au cours de cette étude il sera souvent question des géométries présentant une suite de convergents-divergents il serait utile de revoir succinctement le problème de l'écoulement d'un seul fluide dans un convergent ou un divergent seul. La résolution des équations de Navier-Stokes dans un convergent ou divergent est connu dans la littérature comme problème de HAMEL, qui fut le premier à donner sa solution. BERKER. R. [48] expose la démarche qui conduit à la résolution des équations complètes de Navier-Stokes en écoulement plan, à partir d'une source placée au point de rencontre de deux droites non parallèles. Le résultat analytique s'exprime implicitement à l'aide des fonctions elliptiques de Weierstrass. Qualitativement nous pouvons résumer les conclusions suivantes :

1. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, la distribution des vitesses dans un convergent ou un divergent a la même forme (figure 50)

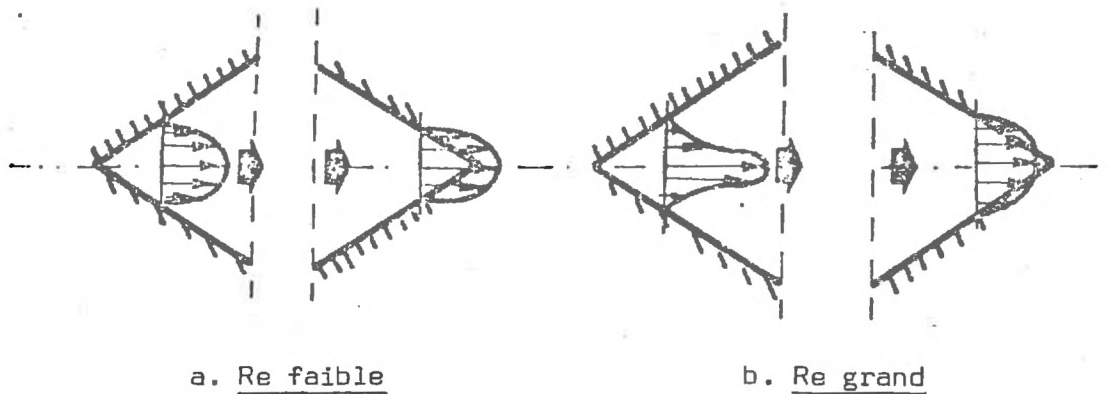


Figure 50 . Profils des vitesses dans un convergent ou divergent

2. Quand le nombre de Reynolds est grand, l'effet de la géométrie apparaît de manière significative.
 - 2.a. Dans un divergent, lorsque le nombre Re croît, la quasi-totalité du débit se concentre auprès de l'axe où les vitesses deviennent très importantes (figure 50 b.). Il existe un nombre critique Re_c tel que si $Re > Re_c$, il se forme un ou plusieurs courants de retour.
 - 2.b. Dans un convergent, lorsque Re augmente, le profil des vitesses devient plat autour de l'axe (figure 50 b.)

Le problème de l'écoulement dans une suite de convergents et de divergents a été étudié dans le cas où on peut simuler le phénomène à l'aide de l'opérateur harmonique. Dans ces conditions, on suppose que l'écoulement est à potentiel, obéissant aux équations de Laplace.

Bien sûr, les solutions de l'opérateur harmonique sont loin d'être une approximation satisfaisante des équations de NAVIER-STOKES, surtout au voisinage des limites solides où, dans le problème général, on impose une condition d'adhérence (vitesses nulles).

Mais on peut trouver quelques indications utiles lorsqu'on s'éloigne des frontières en considérant la solution de l'équation de Laplace comme solution asymptotique qu'il faudrait raccorder à la paroi à l'aide d'un procédé du type de couche limite.

On peut retrouver les lignes de courant dans une suite de convergents et divergents en plaçant une série de sources ou de puits selon la figure 51.

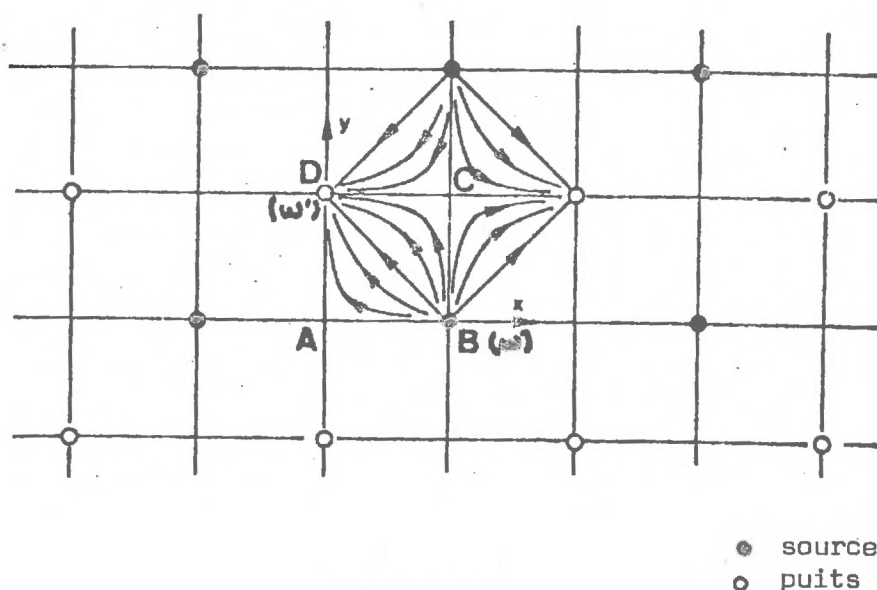


Figure 51

Dans le cas des écoulements en milieu poreux, la figure 51 représente le système de mailles à cinq puits utilisé pour la récupération secondaire du pétrole. Les sources correspondent aux puits d'injection de l'eau ou d'un autre fluide qui pousse l'huile vers les puits de production. On trouve ainsi une application réelle des écoulements diphasiques en milieu poreux et le problème a été étudié par plusieurs auteurs. ([49], [50]).

Dans le cas où les deux fluides ont la même viscosité, JACQUART (1963 [49]) a résolu le problème en appliquant une transformation conforme ; il obtient ainsi l'évaluation du front qui se confond avec les lignes de temps égal (figure 52).

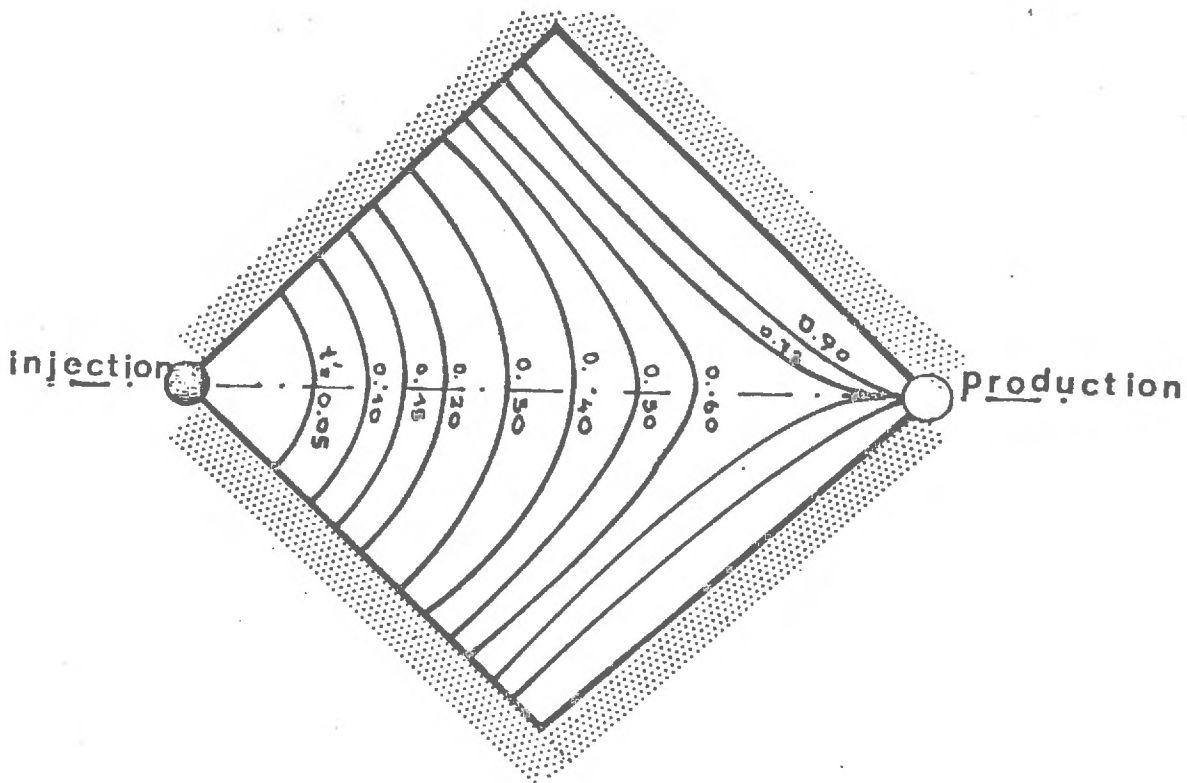


Figure 52 . D'après JACQUART [49]

Le cas général d'un contraste de viscosité quelconque a été abordé par ARONOFSKY (1956 [50]) par voie analogique et numérique.

La figure 53 donne l'image de l'avancement de l'interface, lorsque le contraste des viscosités tend vers l'infini, le fluide le plus visqueux restant en place. La visualisation a été obtenue sur modèle électrolytique.

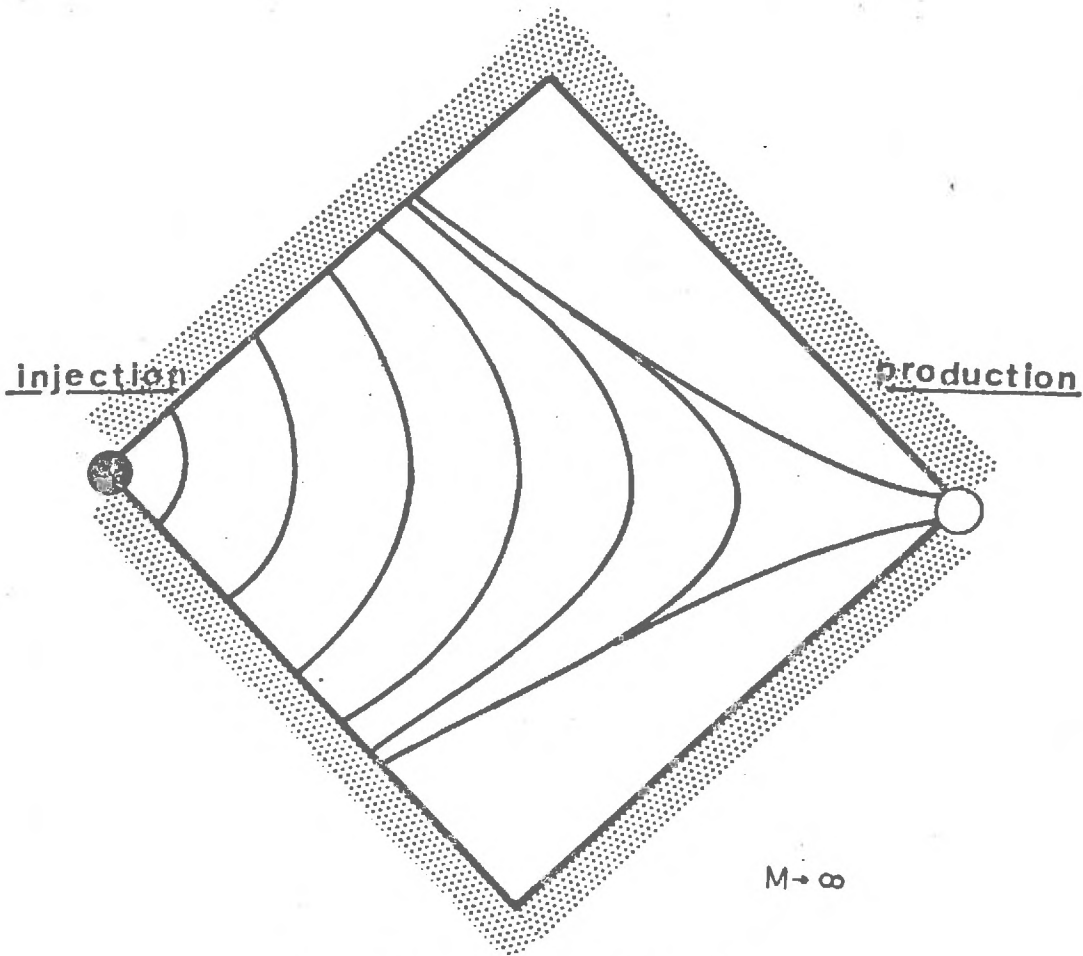


Figure 53 . D'après ARONOFSKY

En comparant les figures 52 et 53, nous constatons que lorsque le rapport des viscosités augmente, l'écoulement du fluide injecté, qui constitue la phase la moins visqueuse, se concentre autour de l'axe et l'efficacité du balayage diminue. Toutefois d'après ces résultats, la réduction relative de la quantité du fluide récupéré n'est pas spectaculaire puisqu'elle est inférieure à 15 %. On doit rappeler que l'écoulement à potentiel de deux fluides en contact peut présenter des écarts considérables par rapport à l'écoulement diphasique de deux fluides visqueux. Cet écart est plus important au voisinage de l'interface où on fait intervenir le raccordement des contraintes visqueuses.

Dans ce qui suit, après avoir formulé le modèle mathématique complet du problème et en particulier les conditions de raccordement sur l'interface, nous présentons une méthode numérique, qui permet l'intégration du système des équations générales, soumises aux conditions limites appropriées.

CHAPITRE VII

ETUDE DU PROBLEME MATHEMATIQUE

VII.1. FORMULATION DU MODELE MATHEMATIQUE

On considère l'écoulement de deux fluides visqueux en contact dans un ouvert D borné de R^2 . Soit t un paramètre représentant le temps réel, tel que $0 \leq t \leq T$. A l'instant t , les deux fluides occupent les ouverts $D_1(t)$ et $D_2(t)$, bornés par l'interface commune $S(t) = D_1(t) \cap D_2(t)$ et les frontières régulières $S_1(t)$ et $S_2(t)$; nous avons $D = D_1(t) \cup D_2(t)$. Comme le montre la figure 54, les frontières $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont composées d'une partie solides $S_{1S}(t)$ et $S_{2S}(t)$ et d'une partie libre et fixe $S_{1\ell}$ et $S_{2\ell}$ respectivement ; nous avons $S_1(t) = S_{1S}(t) \cup S_{1\ell}$ et $S_2(t) = S_{2S}(t) \cup S_{2\ell}$ (figure 54).

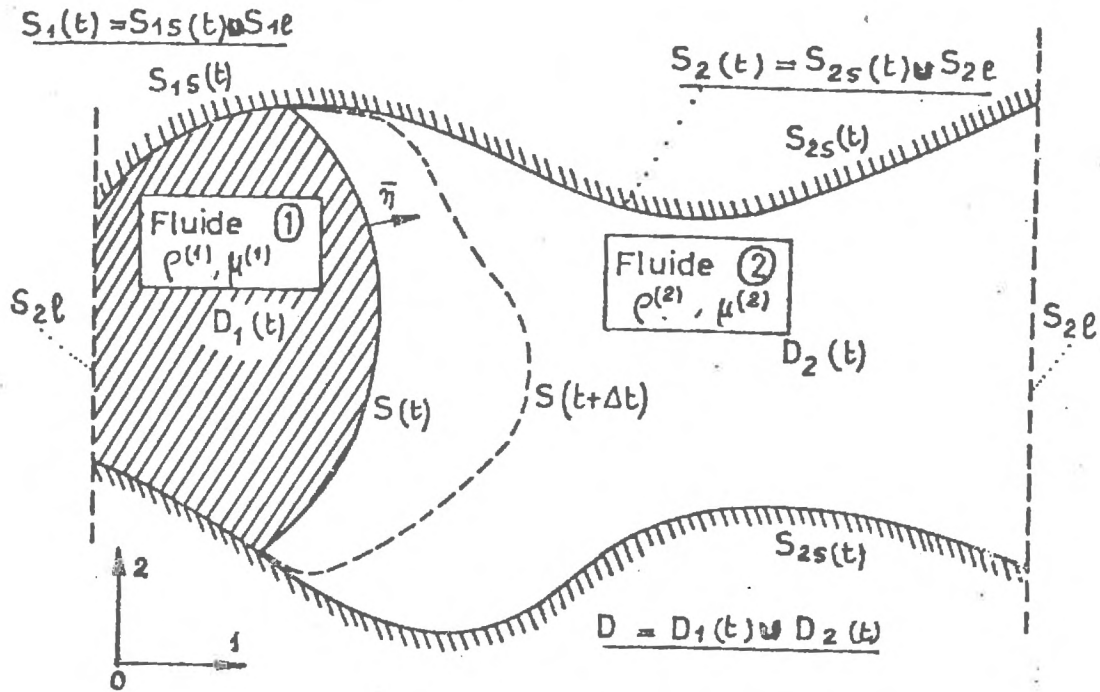


Figure 54. Ecoulement de deux fluides en contact dans un domaine plan

Posons $Q_{kT} = D_k(t) \times [0 \leq t \leq T]$, $k = 1, 2$. A l'instant $t + \Delta t$ l'interface $S(t)$ prend la forme de la surface $S(t + \Delta t)$ (en pointillés sur la figure 54), dont l'équation est à déterminer. Dans ces conditions, le problème consiste alors à situer l'interface $S(t)$ pour $\forall t > 0$ et à déterminer les champs des vitesses $u_i^{(k)}$ et des pressions $p^{(k)}$ du fluide k ($k = 1, 2$), dans le cylindre Q_{kT} .

Nous allons examiner par la suite, les équations générales et les conditions aux limites auxquelles doivent obéir les variables hydrodynamiques $u_i^{(k)}$ et $p^{(k)}$. Au cours de cette étude, nous ferons appel aux hypothèses de base suivantes :

a) les fluides sont homogènes, incompressibles et newtoniens, caractérisés par deux constantes physiques, la viscosité dynamique $\mu^{(k)}$ et la masse volumique $\rho^{(k)}$.

b) l'interface $S(t)$ est caractérisé par un seul paramètre, la tension interfaciale T_S .

- c) le régime d'écoulement est laminaire,
- d) le déplacement de l'interface est stable.

Nous reviendrons à la fin de ce chapitre sur la discussion de la validité de ces hypothèses, imposées a priori.

VII.1.1. Equations générales de la mécanique des fluides

Les équations générales de la mécanique des fluides expriment sous forme différentielle les lois fondamentales de conservation des quantités telles que la masse, les quantités du mouvement et l'énergie. Dans ce chapitre, nous insistons lourdement peut être, sur la formulation intégrale des lois de conservation; nous avons voulu ainsi rendre plus compréhensible le principe de la méthode numérique que nous présentons dans le chapitre suivant. En effet, l'algorithme numérique est directement fondé sur la formulation intégrale des premiers principes, aussi bien à l'intérieur du domaine d'écoulement qu'au voisinage de l'interface.

Nous allons donc revoir les équations de base du problème, guidés par l'exposé à la fois élégant et très général que donne P. GERMAIN dans son dernier livre [51].

Soit $\Omega(t)$ un domaine connexe, borné par la frontière $\Gamma(t)$ et formé d'un ensemble de particules du fluide k (figure 55).

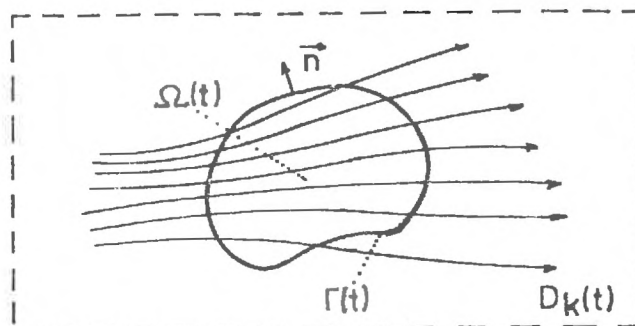


Figure 55 .

Dans le domaine $D_k(t)$ soit $A^{(k)}(x_i, t)$ une quantité généralisée du fluide k en variables Eulériennes et $\mathcal{A}^{(k)}(x_i, t)$ la même quantité par unité de volume Ω . Nous avons :

$$A^{(k)}(x_i, t) = \int_{\Omega} \mathcal{A}^{(k)}(x_i, t) d\Omega \quad (\text{VII.1.1.1})$$

Nous allons examiner la variation de la quantité $A^{(k)}$ dans le temps t , lorsqu'on suit le volume Ω dans son mouvement. Pour tenir compte des échanges avec le milieu extérieur, nous allons poser $\mathcal{A}_e^{(k)}(x_i, t)$ le taux de densité volumique et $\alpha_e^{(k)}(x_i, t, \vec{n})$ le taux de densité surfacique fourni par l'extérieur.

Ceci étant l'équation générale de la conservation de la quantité $A^{(k)}(x_i, t)$, peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{A}^{(k)}(x_i, t) d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_e^{(k)} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathcal{A}_e^{(k)} d\Omega \quad (\text{VII.1.1.2})$$

En développant la dérivée particulaire de l'intégrale de volume, l'expression (VII.1.1.2) devient :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{A}^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{A}^{(k)} \cdot u_j^{(k)}) \right\} d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_e^{(k)} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathcal{A}_e^{(k)} d\Omega \quad (\text{VII.1.1.3})$$

Dans la formule (VII.1.1.3) nous avons utilisé la convention sur la somme des indices muets ; ainsi nous écrivons :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{A}^{(k)} \cdot u_j^{(k)}) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{A}^{(k)} \cdot u_j^{(k)}) = \text{div} (\mathcal{A}^{(k)} \cdot \vec{u}^{(k)})$$