

| Dérive | k | modèles de covariance polynômiale |
|-------------|-----|---|
| Constante | 0 | $K(h) = C\delta + A_1 h $ |
| Linéaire | 1 | $K(h) = C\delta + A_1 h + A_3 h ^3$ |
| Quadratique | 2 | $K(h) = C\delta + A_1 h + A_3 h ^3 + A_5 h ^5$ |

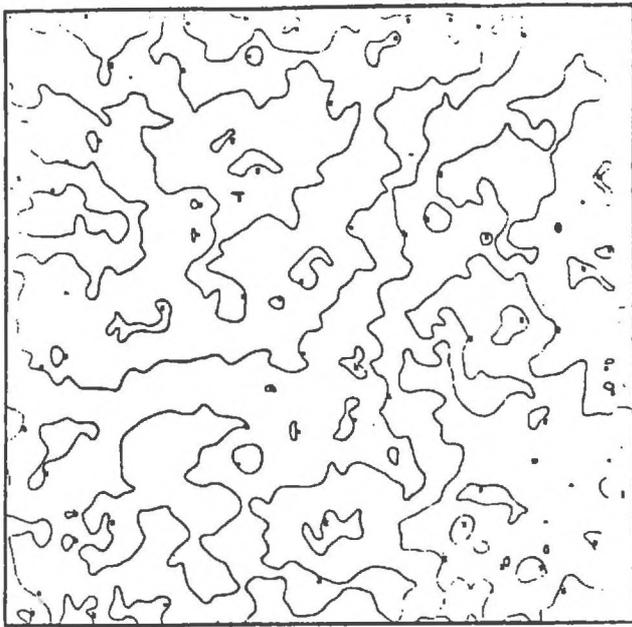
(avec $C \geq 0$, $A_1 \leq 0$, $A_5 \leq 0$, $A_3 \geq -\frac{10}{3} \sqrt{A_1 A_5}$), le Dirac δ correspondant à l'effet de pépité.

Ces modèles sont suffisamment riches pour être adaptés à la grande majorité des applications. On pourra juger de leur aptitude à rendre compte de phénomènes très divers en se reportant à la figure 26 où sont représentées trois réalisations de F.A.I. généralisées respectivement d'ordre 0, 1 et 2.

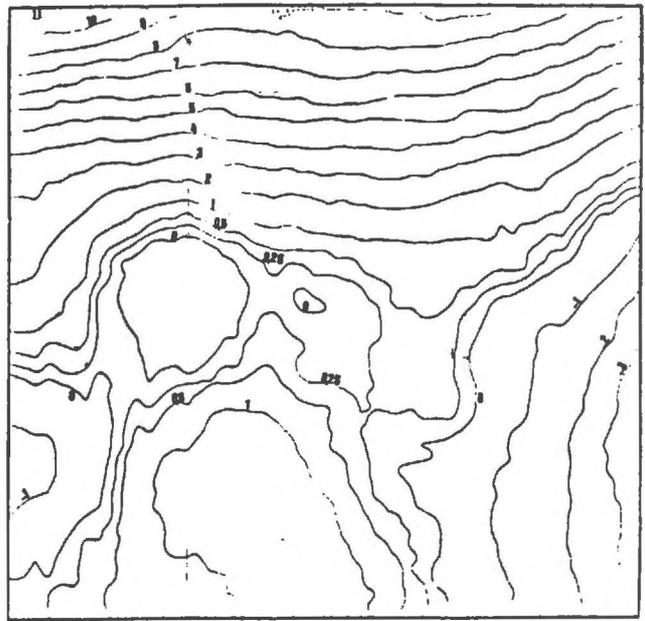
D'un point de vue pratique, du fait qu'ils dépendent linéairement de leurs paramètres, ces modèles rendent possible l'inférence statistique à l'aide d'une procédure automatique [2]. Les paramètres C , A_1 , A_3 , A_5 peuvent ainsi être obtenus par régression de variances expérimentales d'accroissements d'ordre k sur les valeurs théoriques correspondantes où ces paramètres interviennent de façon linéaire.

Après avoir brièvement rappelé la théorie des variables régionalisées, il convient maintenant, dans le dernier chapitre, d'en montrer quelques applications en hydrogéologie et hydrométéorologie.

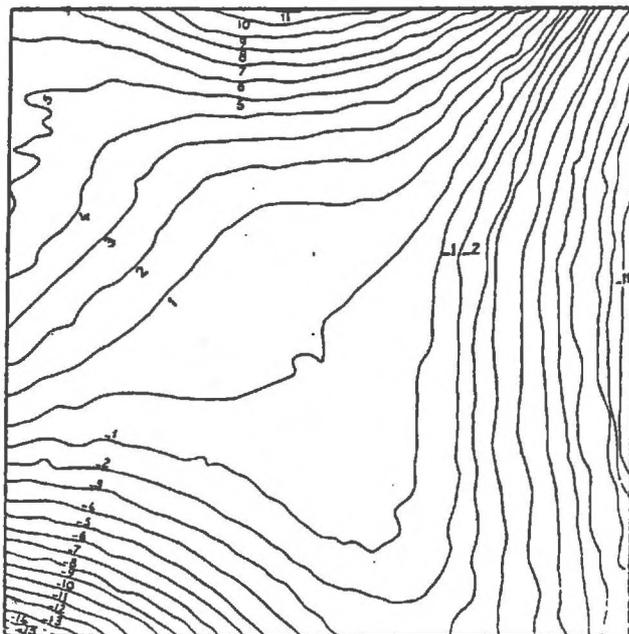
Les exemples de variogrammes expérimentaux et d'ajustement de ceux-ci à un modèle qui ont servi à illustrer la démarche théorique ne seront toutefois pas repris dans les pages qui suivent.



F.A.I. - 0
 $K(h) = -|h|$



F.A.I. - 1
 $K(h) = |h|^3$



F.A.I. - 2
 $K(h) = -|h|^5$

FIG. 26 - REALISATIONS DE F.A.I. GENERALISEES D'ORDRE 0,1 ET 2
(d'après [11])

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAPITRE II

- [1] CHILES, J.P., MATHERON, G. (1975):
Interpolation optimale et cartographie.
Annales des Mines, Novembre 1975, pp. 1-8.
- [2] DELFINER, P. (1975):
Linear estimation of non-stationary phenomena.
Proceedings of NATO Adv. Study Inst., Rome, 1975
- [3] HUIJBREGTS, C. (1970):
Le variogramme des résidus.
Ecole des Mines, C.M.M., N-200.
- [4] MATHERON, G. (1963):
Traité de Géostatistique appliquée.
Mémoires du B.R.G.M. n°14, Ed. Technip.
- [5] MATHERON, G. (1965):
Les variables régionalisées et leur estimation.
Masson & Cie.
- [6] MATHERON, G. (1969):
Le krigeage universel.
Les Cahiers du C.M.M., fasc.1
- [7] MATHERON, G. (1970):
La théorie des variables régionalisées et ses applications.
Les Cahiers du C.M.M., fasc.5
- [8] MATHERON, G. (1970):
Structures aléatoires et géologie mathématique.
Revue de l'Institut International de Statistique, vol. 38,
n°1, pp. 1-10.
- [9] MATHERON, G. (1971):
La théorie des F.A.I.G.
Note Géostatistique n° 117, Ecole des Mines, C.M.M., N-252
- [10] MATHERON, G. (1973):
The intrinsic random functions, and their applications.
Adv. in Appl. Prob., 5, pp. 439-468.
- [11] ORFEUIL, J.P. (1972):
Simulation du Wiener-Lévy et de ses intégrales.
Ecole des Mines, C.M.M., N-290.

CHAPITRE III
APPLICATION
A L'ETUDE DES VARIATIONS SPATIALES
DES GRANDEURS HYDROLOGIQUES

1 - ESTIMATIONS PONCTUELLES ET ZONALES

Les premières applications qui ont été réalisées dans le domaine ont permis de résoudre les problèmes les plus immédiats posés par les estimations ponctuelles et zonales. Mais l'exposé commencera par ce qui, dans le déroulement actuel d'une étude, suit immédiatement la phase d'identification structurale: la vérification du modèle de structure qui a été adopté.

a) Vérification de la validité du modèle structural adopté

Après que, à partir des données expérimentales disponibles, un modèle de variogramme ait été ajusté (ou bien que le degré de dérive et les coefficients de la covariance généralisée polynômiale aient été déterminés), il y a lieu de s'assurer de la validité des paramètres structuraux retenus.

La méthode utilisée consiste à supprimer fictivement les points expérimentaux l'un après l'autre, à les kriger à partir de leurs voisins, et à comparer les erreurs d'estimation ainsi constatées aux écarts-types théoriques. On peut alors visualiser la répartition spatiale de ces erreurs et des erreurs rapportées aux écarts-types d'estimation, et en faire une analyse statistique.

Un essai de krigeage a été ainsi réalisé sur des données de transmissivité (ou plutôt leurs logarithmes) provenant de la nappe du Bathonien en Normandie [9]. Ces logarithmes de transmissivités ne présentent pas de dérive, et on a pu ajuster un modèle de variogramme linéaire avec discontinuité à l'origine:

 ESTIMATION DES POINTS EXPERIMENTAUX

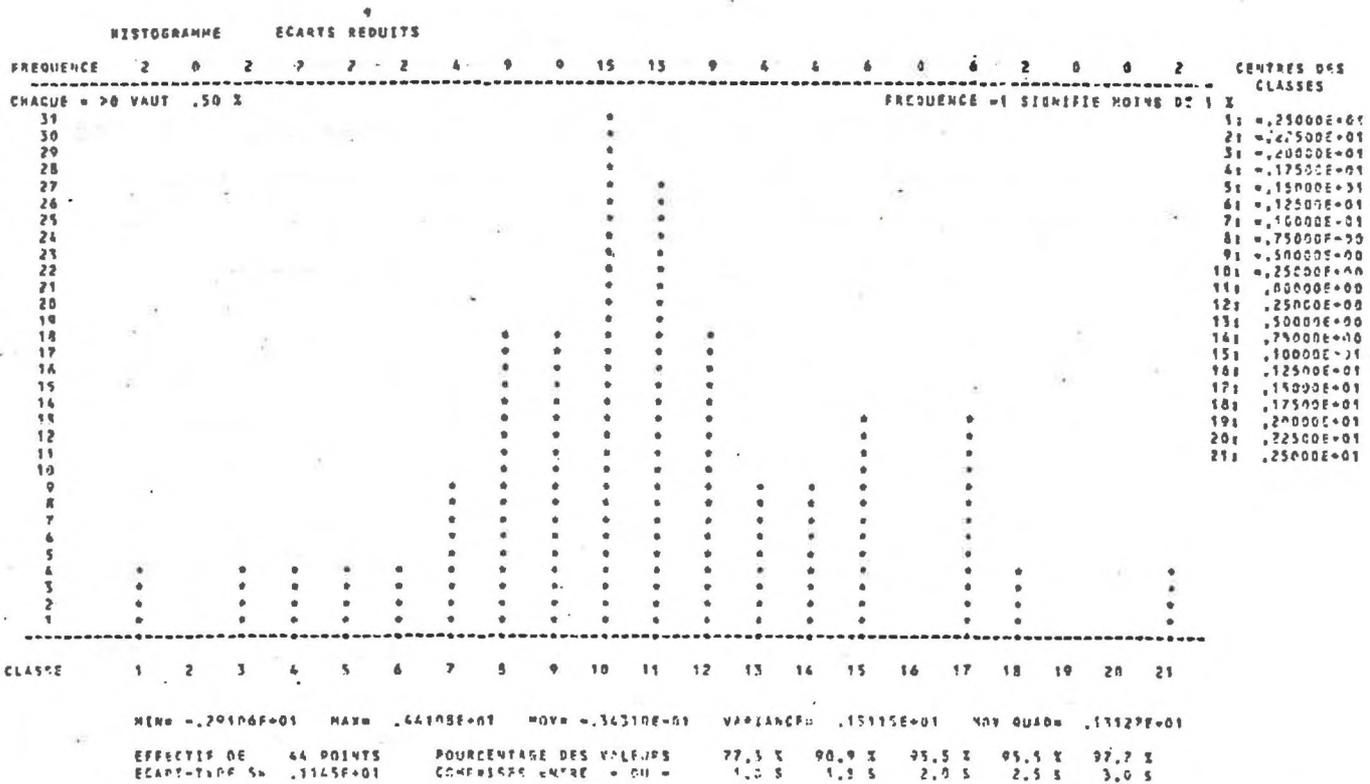
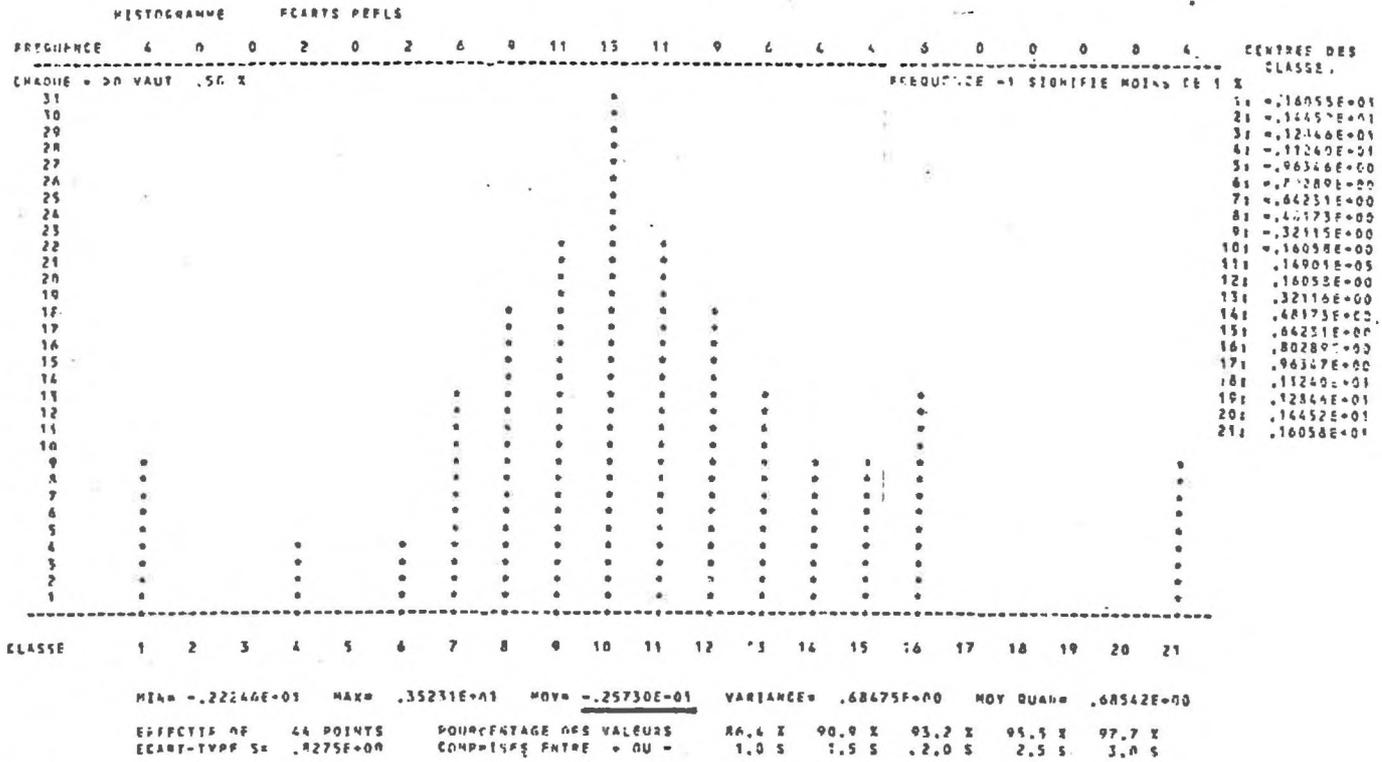


FIG. 27 - BASSE-NORMANDIE (LOGARITHME DE TRANSMISSIVITE)
 ESSAI DE MISEAGE

ESTIMATION ROBUSTE
 DE L'ECART QUADRATIQUE REDUIT

$$\gamma(h) = 0.09 \delta + 0.125 h$$

les transmissivités étant exprimées en m^2/s , les coordonnées en km et les logarithmes considérés étant décimaux.

Sur la figure 27, on trouvera les statistiques élémentaires et les histogrammes correspondant aux écarts réels $z-z^*$ et aux écarts réduits $\frac{z-z^*}{\sigma_k}$ obtenus aux 44 points expérimentaux.

On peut vérifier qu'en moyenne il n'y a bien ni sur-estimation ni sous-estimation systématique:

$$\text{erreur moyenne} = \frac{1}{n} \sum (z-z^*) = -0.026 \approx 0$$

et que les écarts-types d'estimation annoncés sont bien cohérents avec les erreurs constatées:

$$\text{erreur quadratique réduite} = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{z-z^*}{\sigma_k} \right)^2 = 0.96 \approx 1$$

A noter enfin que 95% environ des écarts réduits sont compris entre +2 et -2, ce qui signifie encore que 95% des erreurs constatées sont inférieures en valeur absolue à deux fois l'écart-type théorique annoncé.

Ayant ainsi vérifié la validité des paramètres structuraux retenus, on pourra ensuite passer à la résolution de différents problèmes d'estimation posés: cartographie ou estimation de valeurs moyennes.

b) Emploi du krigeage en cartographie

Pour illustrer cette première utilisation du krigeage, on considérera l'exemple du bassin versant de l'Ouadi Kadjemeur (Tchad) [2], [6], qui montre toute l'importance de la prise en compte de la variabilité des phénomènes dans les problèmes de cartographie. La figure 28 présente, sur un fond comportant le contour du bassin et les hauteurs d'eau mesurées aux 33 pluviomètres durant un orage donné (6/8/66), un tracé manuel des isohyètes correspondantes.

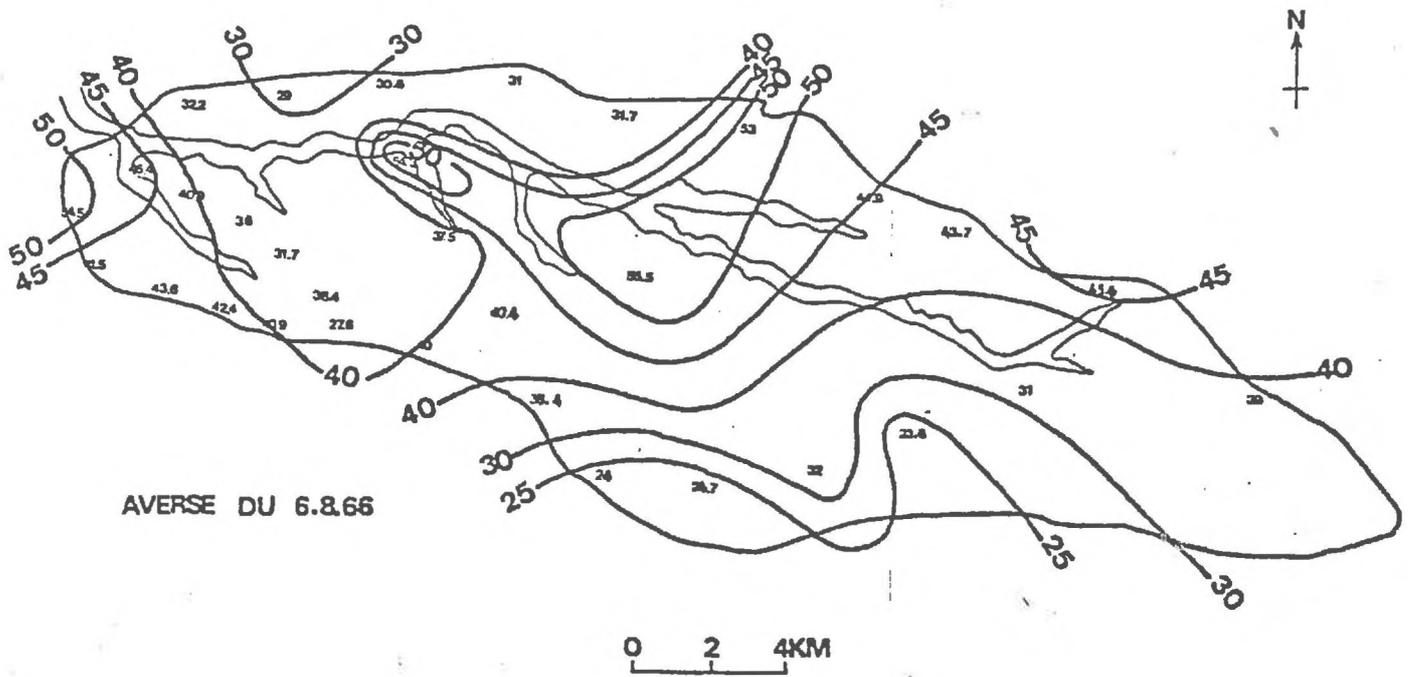


FIG. 28 - BASSIN VERSANT DE KADJEMEUR: TRACE MANUEL DES ISOHYETES (en mm.)

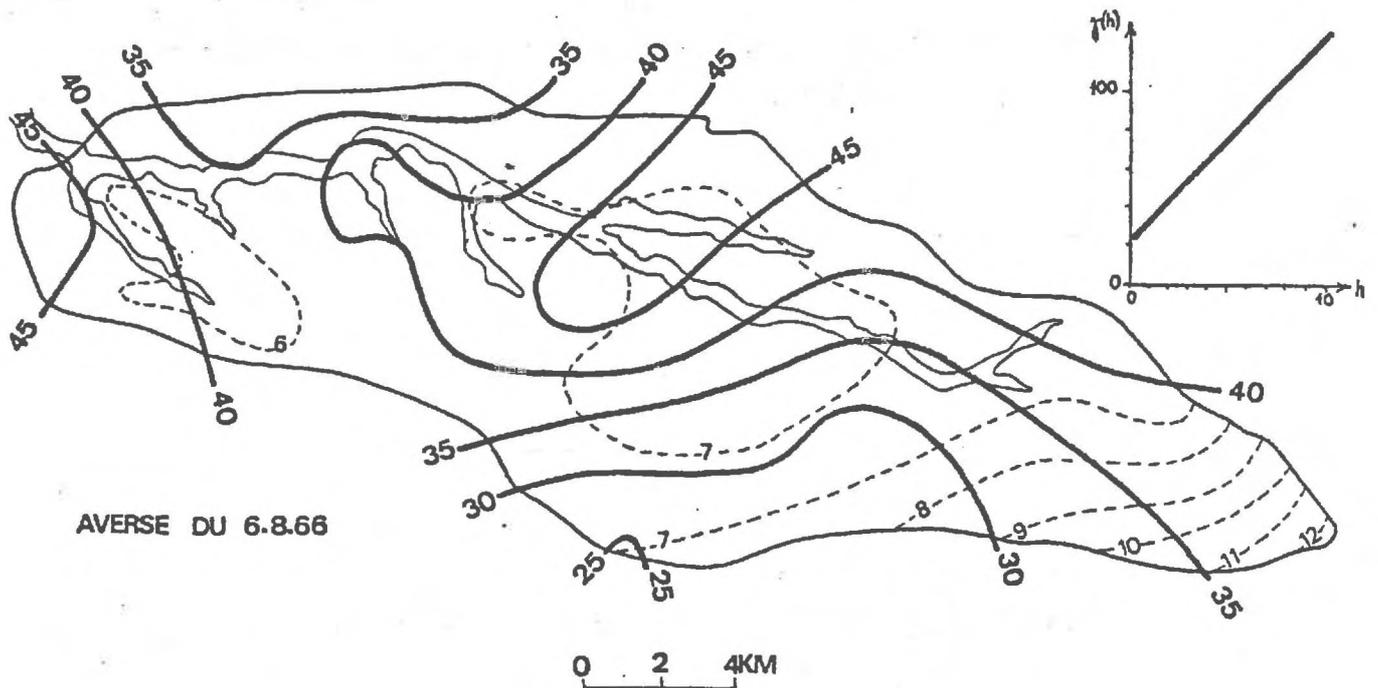


FIG. 29 - BASSIN VERSANT DE KADJEMEUR: CARTE KRIGEE
(ECARTS-TYPES D'ESTIMATION EN TIRETE)

A partir des mêmes données, ayant estimé la pluviométrie par krigeage des valeurs ponctuelles aux noeuds d'une grille régulière de 1 km de côté, on a tracé la carte de la figure 29, que l'on désignera sous le nom de "carte krigée".

Pour ce krigeage, le bassin ne présentant pas un relief marqué et la pluviométrie n'y possédant pas de dérive systématique, on a pris comme seule fonction de base $f^0 \equiv 1$. Le modèle ajusté sur le variogramme expérimental (Fig. 17, p.49) était

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{pour } h = 0 \\ 20.4 + 11.23 h & \text{pour } h \neq 0 \text{ (en km)} \end{cases}$$

(en mm²)

La discontinuité à l'origine traduit, comme on l'a vu plus haut, une irrégularité à petite échelle. Ce phénomène a été observé depuis longtemps par les hydrométéorologues qui l'expliquent par les perturbations locales, l'instabilité de l'air au voisinage du sol et l'arrivée de la pluie sur le pluviomètre par rafales irrégulières.

Ce qui frappe en comparant les figures 28 et 29, c'est que la carte manuelle semble plus fouillée que la carte krigée. Par exemple, sur le tracé manuel, la valeur 54.3 mm, située dans le Nord-Ouest du bassin, a été considérée comme un maximum local; une isohyète cotée 50 mm l'entoure et l'isohyète 45 mm fait un important détour.

Au contraire, la carte krigée ne tient pas grand compte de cette valeur 54.3 mm; et l'isohyète la plus proche est cotée 40 mm. La même chose se produit pour les données 53.0 mm et 55.5 mm, au centre-nord du bassin. On peut noter encore que l'isohyète 25 mm ne fait plus qu'une discrète apparition à l'intérieur du bassin.

La carte manuelle semble plus fidèle aux valeurs expérimentales. Mais prise entre cette fidélité aux données et la nécessité de dégager les grands traits représentatifs du phénomène, la cartographie manuelle exige en permanence des choix plus ou moins arbitraires. Ainsi, il n'a pas été tenu compte de la valeur 27.6 mm mesurée dans le sud-ouest du bassin, alors qu'elle aurait sans doute modifié le tracé de l'isohyète 40 mm. L'intérêt n'est pas ici de faire une critique du travail du dessinateur, mais d'attirer l'attention sur la difficulté de juger de la précision d'une carte manuelle.

Le krigeage, lui, outre le fait que, par construction, il donne une estimation optimale, permet de quantifier la précision de cette estimation, à l'aide de la variance σ_k^2 de l'erreur de krigeage. Conventionnellement, on adoptera comme intervalle de confiance pour la valeur réelle $z(x_0)$:

$$[z^*(x_0) - 2\sigma_k, z^*(x_0) + 2\sigma_k]$$

qui correspond à un niveau de certitude de 95% dans l'hypothèse d'une erreur gaussienne.

La pratique courante veut que l'on associe à toute carte krigée la carte d'écart-type d'estimation σ_k correspondante. Ici, sur la figure 29, σ_k a été cartographié en lignes pointillées superposées à la carte krigée. On peut voir ainsi quelle est la précision de cette dernière en tout point du bassin, la zone la plus mal connue étant la partie sud-est ($\sigma_k \approx 11$ mm). Si on prend, par exemple, un point de grille situé au centre du bassin près de la cote 55.5 mm (plus forte valeur mesurée) et que l'on considère à la fois la valeur estimée 48.7 mm et l'écart-type d'estimation 6.25 mm, on voit que la valeur estimée est parfaitement compatible avec la donnée voisine.

L'aspect lisse de la carte krigée, qui avait surpris au départ, n'est pas dû à un lissage arbitraire, mais en fait, comme on va le voir, à la présence d'un effet de pépite.

La composante chaotique du phénomène (erreurs de mesure ou microrégionalisation) qui est modélisée par l'effet de pépite, est totalement imprévisible, car non corrélée spatialement. Aux points expérimentaux eux-mêmes, le krigeage étant un interpolateur exact restituerait la valeur mesurée. En dehors de ces points, le système de krigeage conduit à une estimation du phénomène filtré de cette composante chaotique, encore une fois imprévisible.

Si, avec les mêmes données, on avait pris un variogramme continu à l'origine (par exemple $\gamma(h) = 15|h|$), le krigeage donnerait une carte (Fig.30) qui passerait scrupuleusement par les valeurs expérimentales, et même mieux que ne le faisait la carte manuelle.

Mais si ce type de cartographie convient à un phénomène très régulier, il est irréaliste pour un phénomène comme la pluviométrie: cela

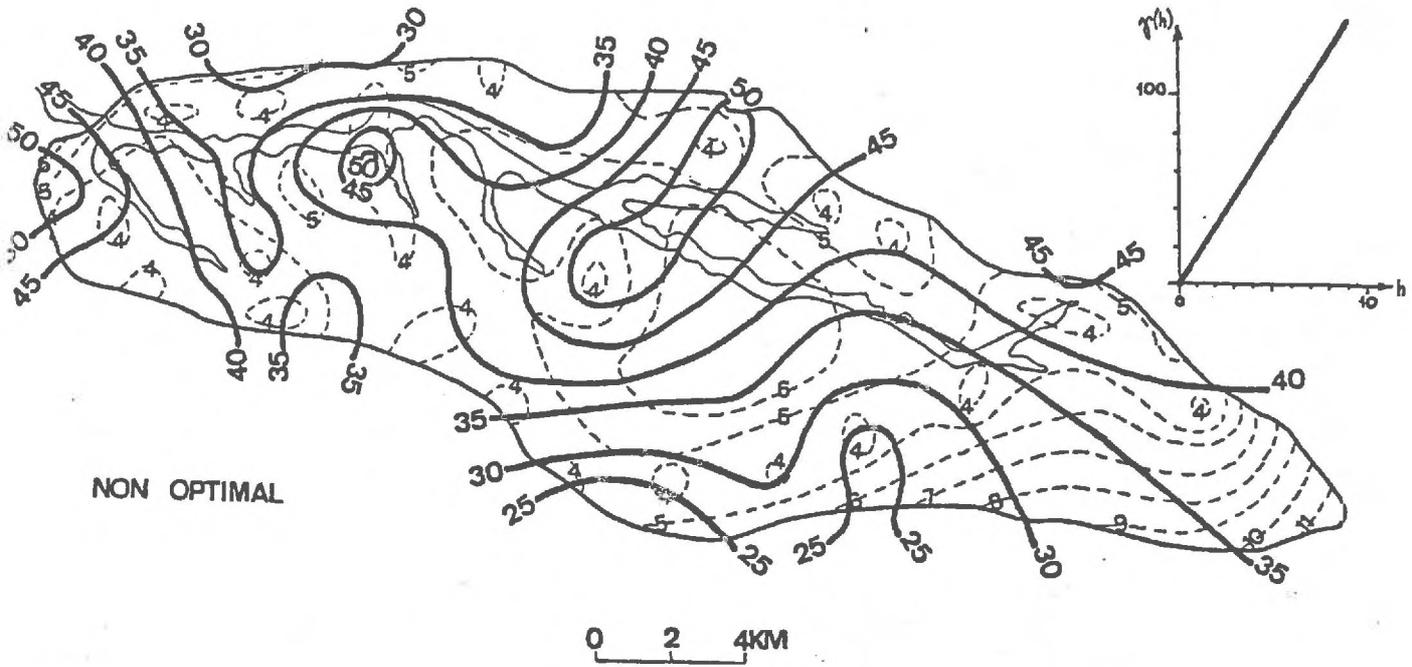
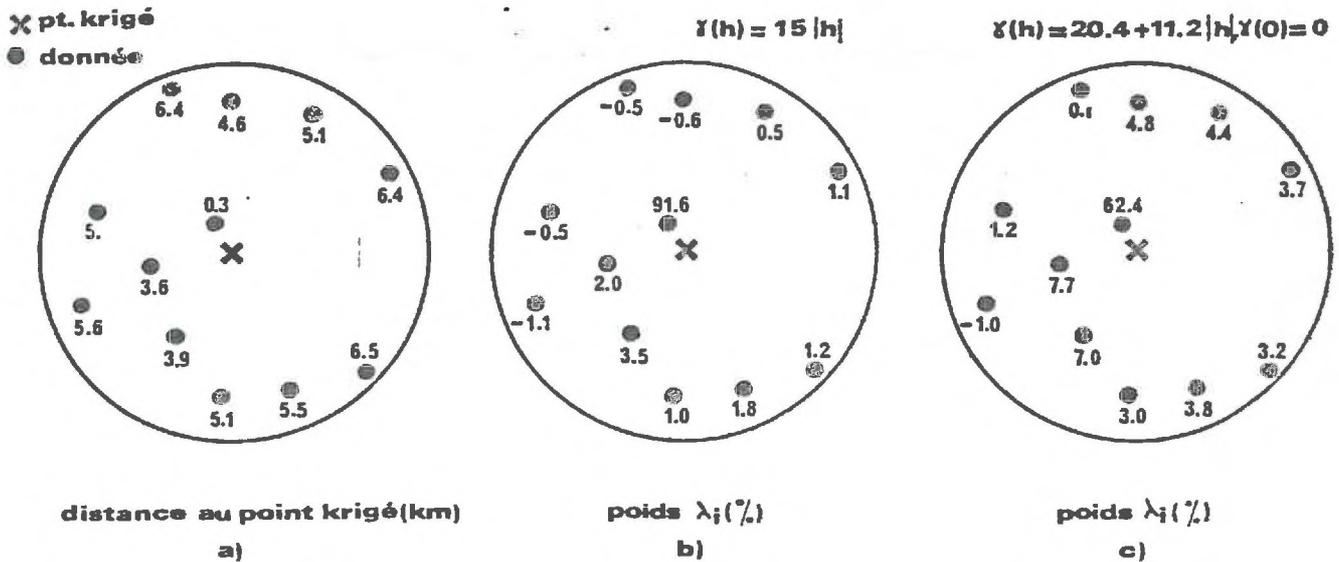


FIG. 30 - BASSIN VERSANT DE KADJEMEUR: CARTE OBTENUE PAR KRIGEAGE
EN NEGLIGEANT L'EFFET DE PEPITE



b) Variable continue: grande influence du point le plus proche 91.6%

c) Variable discontinue: influence atténuée 62.4%

FIG. 31 - INFLUENCE DE LA STRUCTURE SUR LES POIDS DE KRIGEAGE

reviendrait à admettre que les épicentres d'un orage se trouvent nécessairement à la verticale d'un pluviomètre !

Pour comprendre comment la présence d'un effet de pépite a pu influencer l'aspect de la carte, notamment au centre du bassin, on peut considérer à nouveau le point de grille situé le plus près de la donnée 55.5 mm. Ce point a été estimé à partir de douze points du voisinage. La figure 31 permet de comparer les pondérations. Le poids optimum pour la donnée 55.5 mm, située à 300 m du point de grille, est seulement de 62.4%, alors qu'il aurait été de 91.6% en l'absence d'effet de pépite.

On peut constater que le krigeage réalise en quelque sorte une pondération "sur mesure" tenant compte de la variabilité du phénomène. Quand celui-ci est continu, le krigeage accorde un poids important aux valeurs expérimentales proches, parce que, précisément, la continuité signifie que deux points voisins auront des valeurs voisines. Quand le phénomène est irrégulier, ceci n'est plus vrai, et le poids accordé aux points expérimentaux proches perd de l'importance.

c) Estimation optimale de valeurs moyennes

Envisageant maintenant l'application du krigeage aux estimations de valeurs moyennes, on montrera deux exemples, l'un concernant des moyennes par mailles, l'autre concernant une valeur moyenne sur un domaine de forme quelconque.

α) Cas d'un maillage

L'utilisation des modèles mathématiques s'étant répandue en hydrogéologie, on a de plus en plus besoin d'estimer des valeurs moyennes par maille. Il peut s'agir d'introduire dans le modèle les grandeurs régissant l'écoulement (transmissivités, cote des murs et toits des nappes, épaisseurs de semi-perméables,...) ou la piézométrie destinée à servir d'état de référence lors du calage.

VALEURS REELLES = VALEURS IMPRIMEES MULTIPLIERS PAR 100000 00

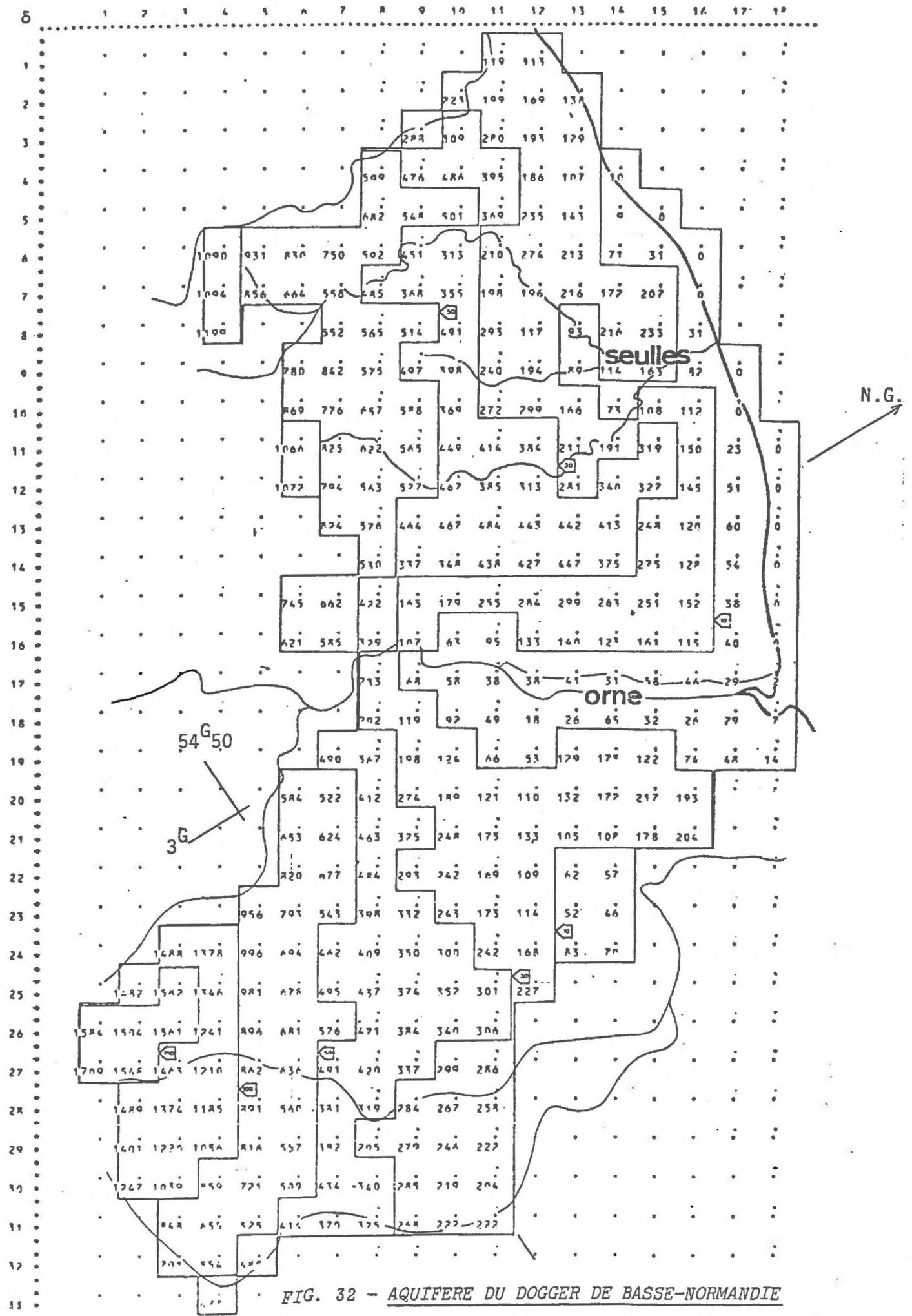


FIG. 32 - AQUIFERE DU DOGGER DE BASSE-NORMANDIE
PIEZOMETRIE MOYENNE PAR MAILLE

VALEURS REELLES = VALEURS IMPRIMÉES MULTIPLIÉES PAR 100000 ON

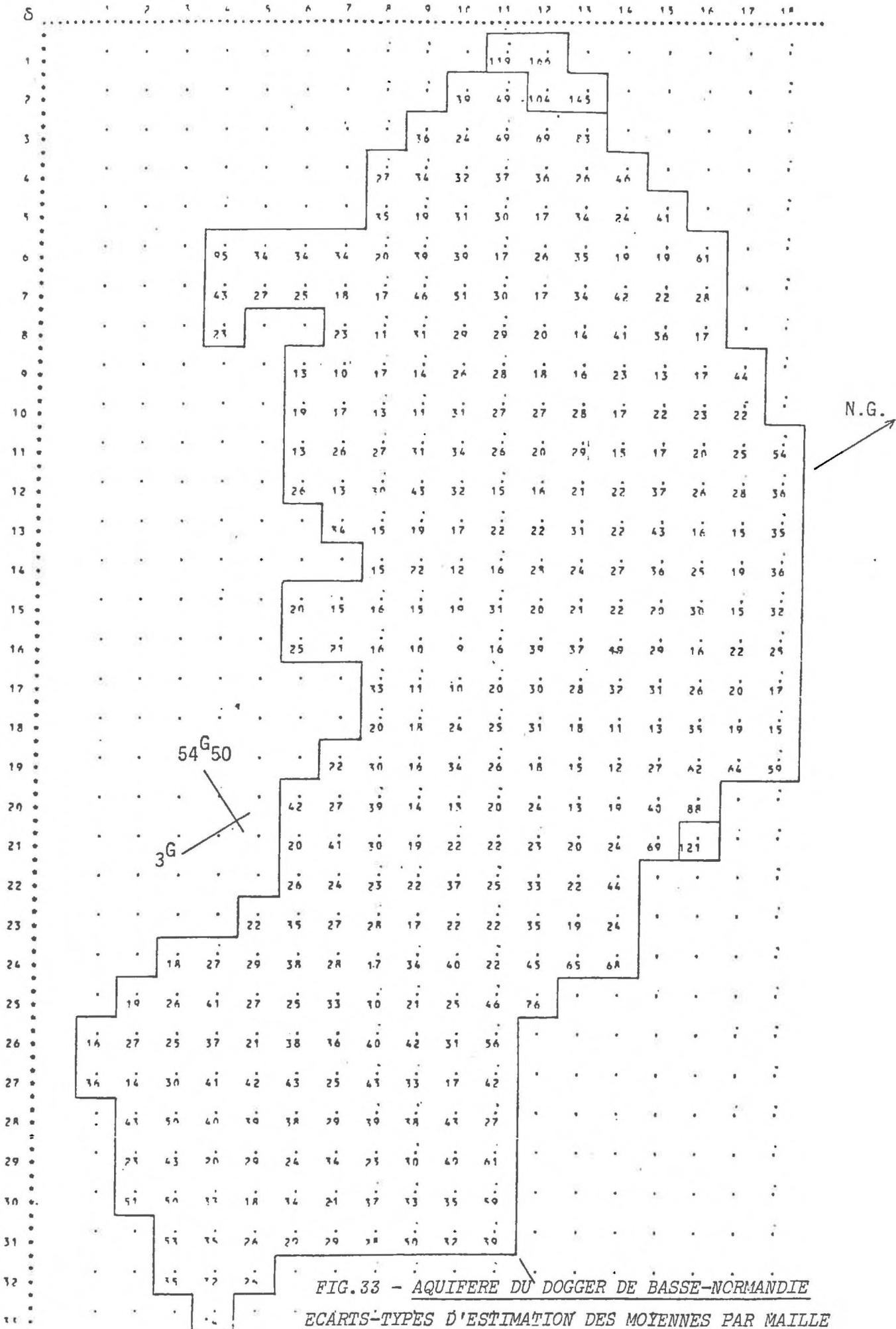


FIG. 33 - AQUIFERE DU DOGGER DE BASSE-NORMANDIE
ECARTS-TYPES D'ESTIMATION DES MOYENNES PAR MAILLE

L'exemple présenté est celui de l'aquifère du Dogger en Basse-Normandie [9]. Un état piézométrique de juin 1974 a été krigé sur des mailles de 2 km de côté à partir des 208 relevés piézométriques disponibles auxquels on a ajouté quelques points correspondant à des endroits où les cours d'eau et la mer imposent le potentiel de la nappe.

Utilisant cette fois le procédé d'identification structurale automatique mis au point à partir de la théorie des F.A.I.- k , on a retenu les caractéristiques structurales suivantes:

- dérive linéaire,
- covariance généralisée $K(h) = -10|h| + 0.75|h|^3$
(piézométrie en m, distances en km).

L'absence ici d'effet de pépite est le signe de la régularité spatiale de la piézométrie.

A noter que ces caractéristiques sont valables localement puisqu'on a travaillé par voisinages glissants.

On peut constater, sur la figure 32, que le modelé piézométrique est bien rendu, avec les entailles des vallées de l'Orne et de la Seulles. Les écarts-types de krigeage (Fig.33) sont de l'ordre de 3 mètres en général, ce qui peut sembler élevé; mais il faut se souvenir que la nappe est une nappe libre dans un réservoir calcaire entaillé par de nombreuses vallées, et que le modelé piézométrique y est assez tourmenté, avec des gradients importants.

β) Cas d'un domaine quelconque

Pour illustrer le calcul de quantités moyennes sur un domaine, on va reprendre l'exemple de l'Ouadi Kadjemur [6]. Les estimations par krigeage de lames d'eau moyennes ont été effectuées pour les treize épisodes pluvieux de 1966. Vu le faible nombre de points de mesure, il était difficile de procéder à l'inférence statistique du variogramme averse par averse, d'autant plus que parfois certaines données étaient manquantes. Prendre brutalement le variogramme moyen sur l'ensemble des averses eut été une

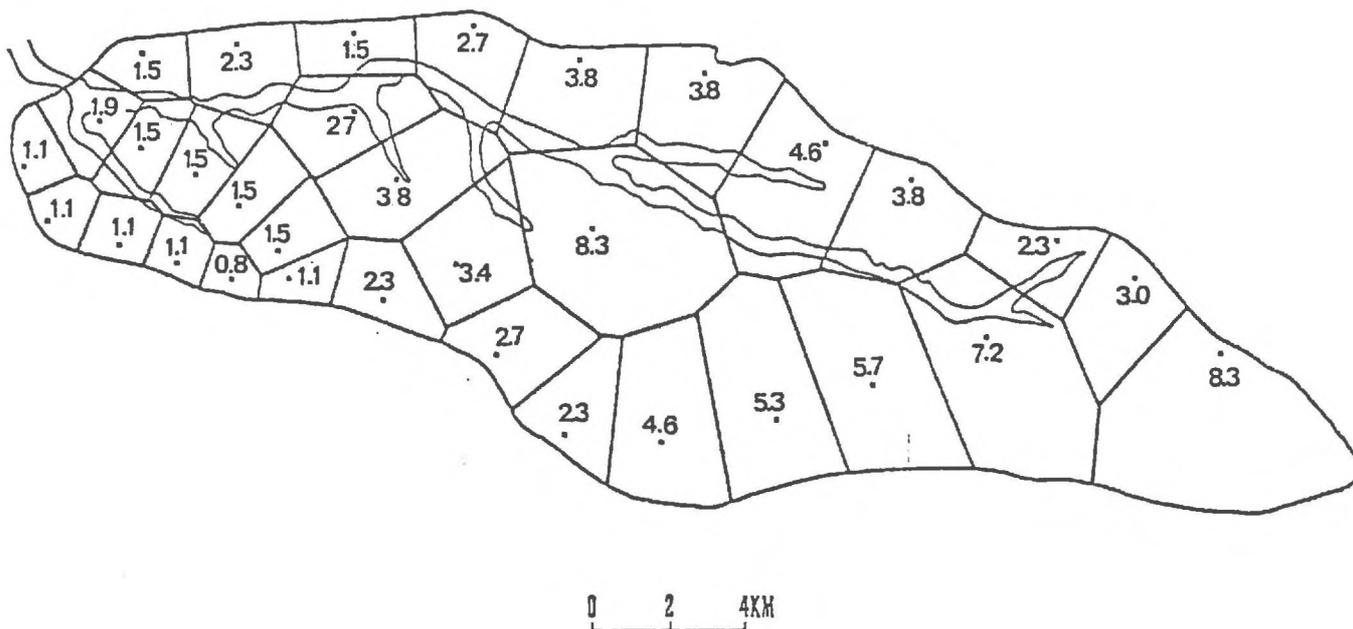


FIG. 34 - BASSIN VERSANT DE KADJEMEUR: POLYGONES DE THIESSEN
ET PONDERATION CORRESPONDANTE

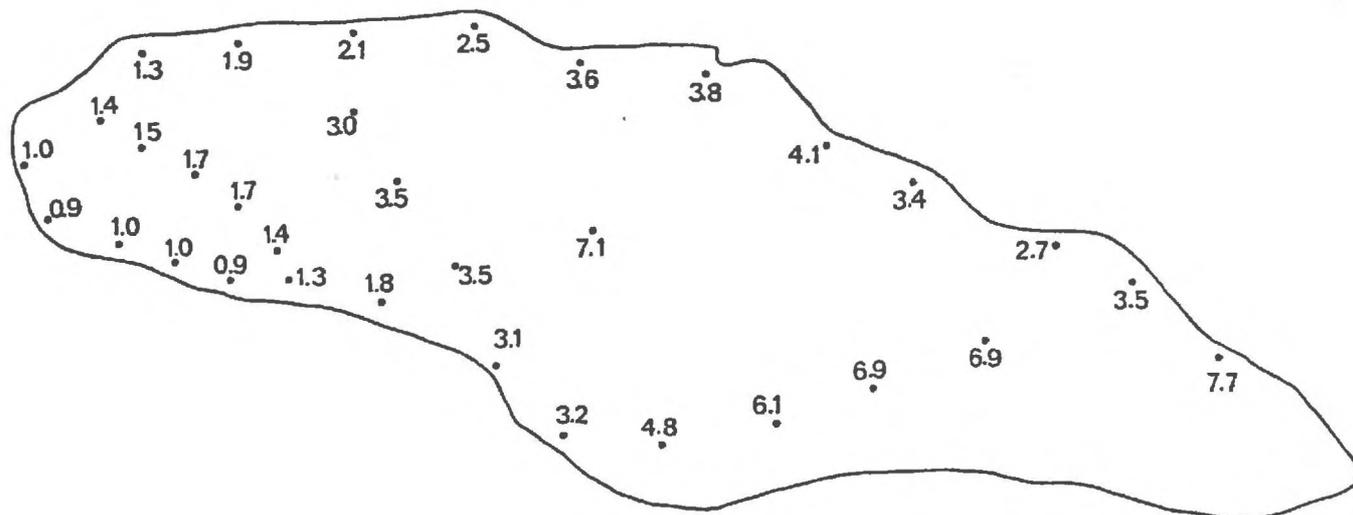


FIG. 35 - PONDERATION OPTIMALE OBTENUE PAR KRIGEAGE

hypothèse simpliste, car ces averse diffèrent par leur intensité et leur dispersion. Une hypothèse plus raisonnable a été d'admettre que les variogrammes des épisodes pluvieux sont proportionnels:

$$\gamma_k(h) = \omega_k \bar{\gamma}(h)$$

où $\gamma_k(h)$ est le variogramme de la $k^{\text{ième}}$ averse, $\bar{\gamma}(h)$ le variogramme moyen et ω_k le coefficient de proportionnalité.

Cette relation équivaut à admettre qu'il y a conservation des corrélations spatiales sur le bassin. En notant s_k^2 la variance expérimentale des hauteurs d'eau de la $k^{\text{ième}}$ averse, et \bar{s}^2 la moyenne des s_k^2 , il en résulte que:

$$\omega_k = s_k^2 / \bar{s}^2$$

Le variogramme moyen est: $\bar{\gamma}(h) = \begin{cases} 0 & \text{pour } h = 0 \\ 16.2 + 8.91 h & \text{pour } h \neq 0 \end{cases}$
(en mm²) (en km)

Il ne reste plus ensuite qu'à poser, pour chaque averse, le système de krigeage, et à le résoudre pour obtenir les poids optimaux λ_i à affecter aux pluviomètres et les μ_1 nécessaires au calcul de la variance. Mais l'observation des systèmes de krigeage révèle que si l'on multiplie le variogramme par une constante ω_k , les poids λ_i restent inchangés tandis que les μ_1 , ainsi que la variance d'estimation, sont multipliés par ω_k . Avec des variogrammes proportionnels, il suffit de faire le calcul une seule fois à condition, bien sûr, que les pluviomètres relevés restent les mêmes.

La figure 35 présente les valeurs des poids de krigeage correspondant à la configuration expérimentale complète. Il a semblé intéressant de les rapprocher des poids fournis par la méthode de THIESEN (Fig.34).

On constate une similitude entre les deux pondérations, similitude sur laquelle on reviendra en fin de paragraphe.

De façon à permettre une comparaison plus complète avec la méthode de THIESEN, mais aussi les autres méthodes couramment employées,

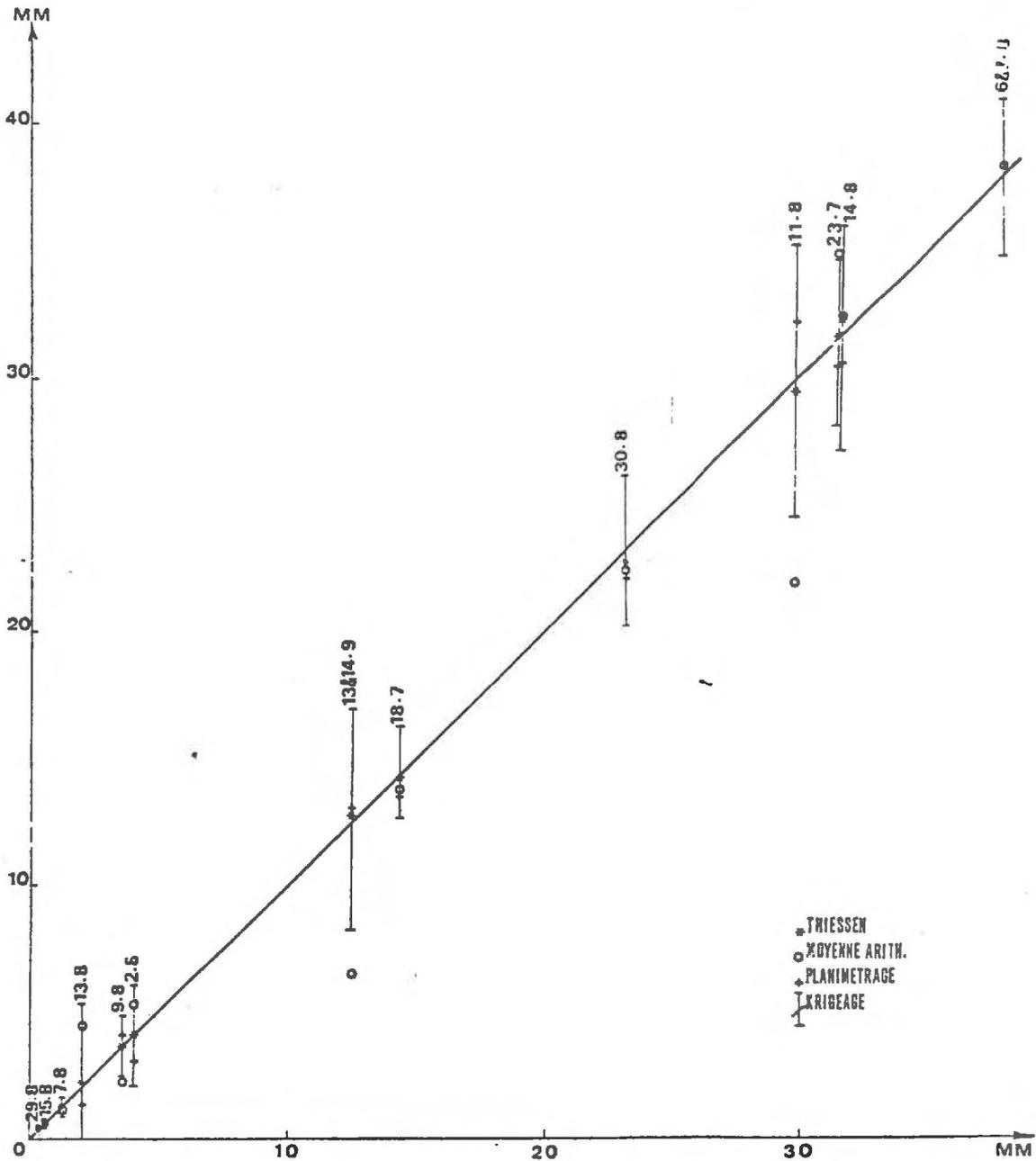


FIG. 36 - BASSIN VERSANT DE KADJEMEUR
COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES D'ESTIMATION GLOBALE
(SUR 13 EPISODES PLUVIEUX)

on a reporté (Fig.36) les évaluations des lames d'eau pour les treize averses par moyenne arithmétique, planimétrage, méthode de THIESSEN et krigeage. De part et d'autre de la bissectrice des axes, sur laquelle figure la valeur krigée, on a indiqué la fourchette à ± 2 écarts-types de krigeage.

Il ressort que trois méthodes donnent des résultats à peu près équivalents. Seule la moyenne arithmétique se singularise, en particulier sur les averses du 9 août, du 13 au 14 septembre, du 11 août et du 23 juillet, où les valeurs estimées se situent en dehors de la fourchette pourtant très large de quatre écarts-types. Avec la moyenne arithmétique, tous les pluviomètres ont même importance; le réseau étant plus fourni à l'ouest, il y a systématiquement sous-estimation ou sur-estimation de la lame d'eau selon que l'épicentre des averses se situe à l'est ou à l'ouest.

Une fois écartée la moyenne arithmétique, il semblerait donc que, du moins sur l'exemple traité, l'avantage du krigeage soit assez minime.

C'est pourtant la seule méthode autour de laquelle a pu s'articuler la comparaison, grâce à la présence d'un écart-type d'estimation indiquant avec quelle précision est donné le chiffre avancé.

Mais surtout, alors que la pondération de THIESSEN ne peut tenir compte de la présence de dérive systématique (due par exemple à l'orographie) sans recourir à des transformations sur les données, le formalisme du krigeage le permet. On a ainsi reporté sur les figures 37 et 38 les pondérations optimales qui correspondraient, avec le même variogramme, à la présence d'une dérive linéaire et d'une dérive quadratique. On peut constater que la dernière pondération diffère, elle, notablement des poids de THIESSEN.

Les applications qui viennent d'être présentées n'ont nécessité aucune adaptation du formalisme et de la méthodologie définis au Chapitre II. A côté de ces applications directes, la méthode du krigeage est suffisamment souple pour pouvoir prendre en compte des besoins particuliers comme:

- la prise en compte d'une éventuelle hétérogénéité de la structure,
- le recours à une transformation sur la variable étudiée,
- la nécessité d'utiliser des données de qualité différente,
- l'obligation de tenir compte de la présence de failles dans le domaine à cartographier.

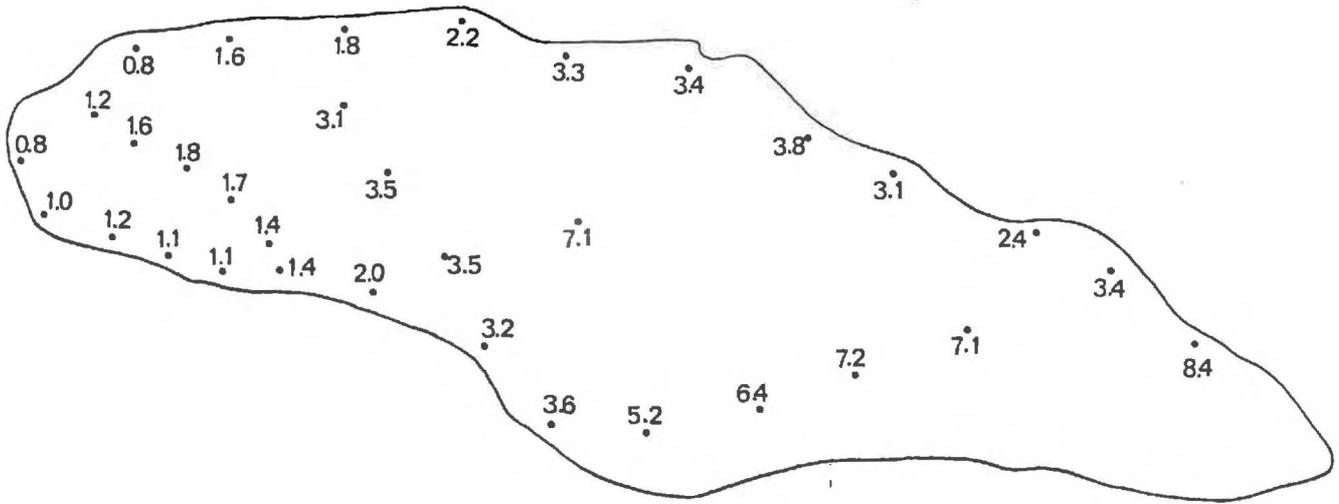


FIG. 37 - PONDERATION DE KRIGEAGE DANS LE CAS D'UNE DERIVE LINEAIRE

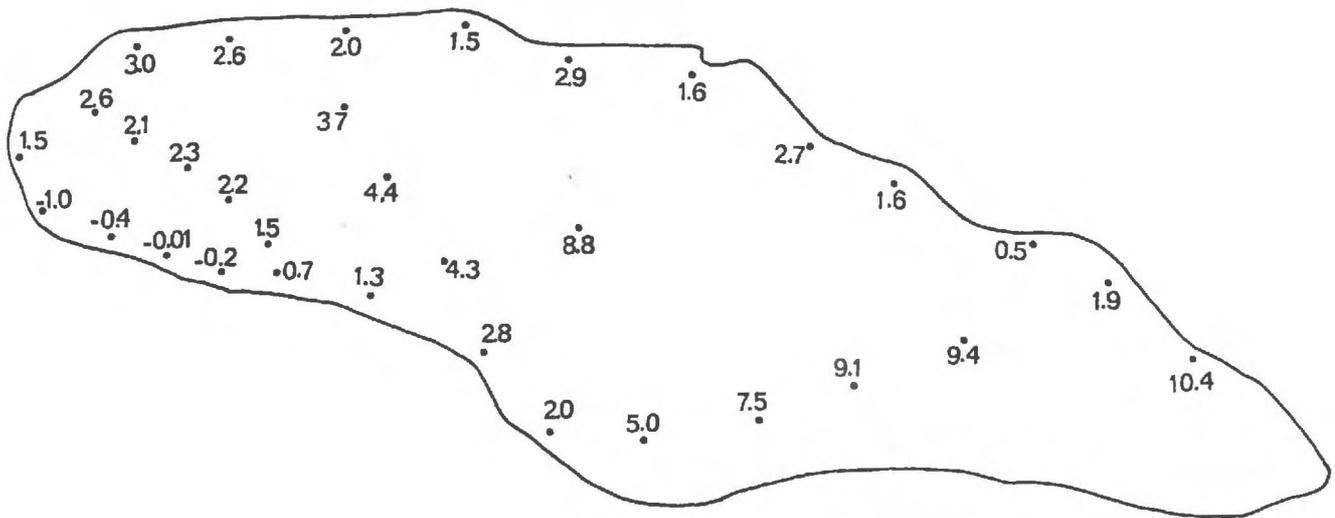


FIG. 38 - PONDERATION DE KRIGEAGE DANS LE CAS D'UNE DERIVE QUADRATIQUE

d) Adaptations de la méthode à des problèmes particuliers

α) Hétérogénéité de la structure

Dans les sciences de l'eau, il existe peu de cas permettant d'étudier la variabilité spatiale de la structure elle-même: un variogramme unique est ainsi adopté pour tout le champ. Le modelé de la carte d'écart-types d'estimation reflète alors principalement la configuration géométrique des données, ainsi qu'éventuellement leurs qualités respectives, comme on le verra au paragraphe γ).

Quand on dispose d'une information plus dense, on peut diviser le champ étudié en carreaux, et pour chacun ajuster un variogramme différent [1]. Tenant alors compte dans l'estimation de l'hétérogénéité éventuelle du champ, on obtient des cartes d'écart-types reflétant à la fois la configuration expérimentale et la variabilité locale. Ainsi, à densité égale de points de mesure, la précision de l'estimation sera moins bonne dans une zone très tourmentée que dans une zone calme. Si l'on prend, par exemple, le cas simple où le variogramme est partout localement de la forme $\gamma(h) = \bar{\omega} \cdot \gamma_0(h)$ (la valeur du facteur $\bar{\omega}$ allant en croissant avec la variabilité locale), l'examen du système de krigeage montre que, à configuration géométrique identique, la variance de krigeage est proportionnelle à $\bar{\omega}$.

β) Transformation logarithmique

L'expérience montre que l'on a parfois intérêt à travailler sur une transformée (par exemple logarithmique) de la V.R. étudiée.

A partir des 86 données de transmissivité disponibles sur la nappe des sables éocènes de la région Nord-Aquitaine [7], on a construit, en l'absence de dérive apparente, le variogramme représenté sur la figure 39.

Son allure plate témoignait du caractère assez mal structuré de la transmissivité. L'histogramme des données (Fig.40), et la pratique courante consistant à raisonner sur les transmissivités en puissances de 10, ont suggéré de passer au logarithme.

Le variogramme construit à partir des logarithmes des 86 données, représenté sur la figure 41, peut être assimilé à un modèle linéaire avec une faible discontinuité à l'origine.

Le logarithme de la transmissivité, se révélant être mieux structuré que la transmissivité elle-même, lui sera donc préféré pour le krigeage.

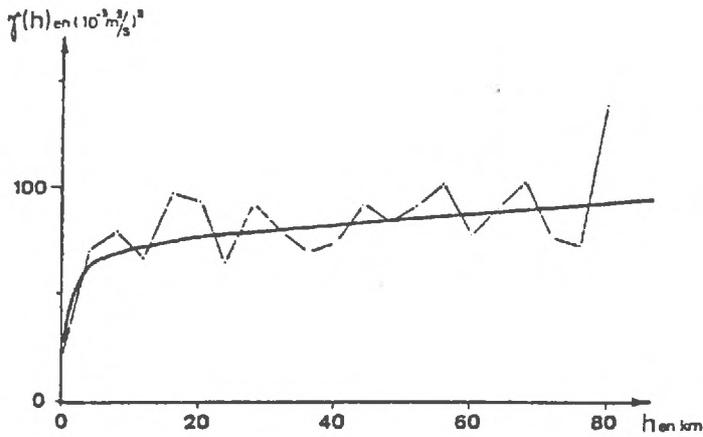


FIG. 39 - VARIOGRAMME CONSTRUIT
A PARTIR DES DONNEES

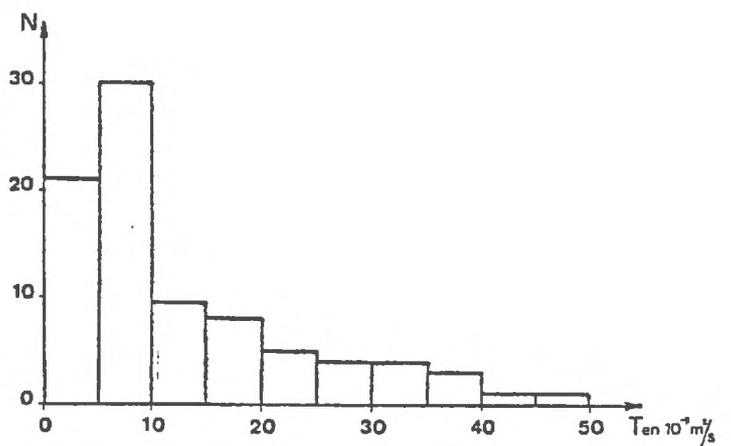


FIG. 40 - HISTOGRAMME DES DONNEES

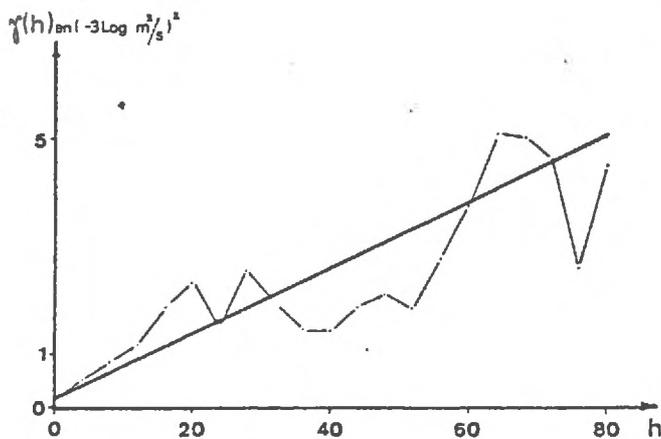


FIG. 41 - VARIOGRAMME CONSTRUIT A PARTIR
DES LOGARITHMES DES DONNEES

TRANSMISSIVITE
DES SABLES EOCENES
NORD-AQUITAINS

Quand, ainsi, les données du krigeage sont constituées par des logarithmes (par exemple décimaux) de transmissivité, les calculs du krigeage donnent une estimation z_0^* , un écart-type σ_K , et donc un intervalle de confiance $z_0^* \pm 2\sigma_K$ relatifs à cette variable.

Le retour à des valeurs de transmissivité en vue de l'édition des résultats conduit à une estimation médiane de T égale à $10^{z_0^*}$ et l'assortit d'une spécification de l'intervalle de confiance sous la forme d'un coefficient multiplicateur égal à $10^{2\sigma_K}$:

$$10^{z_0^*} / 10^{2\sigma_k} < T < 10^{z_0^*} \cdot 10^{2\sigma_k}$$

Il faudra donc raisonner en termes multiplicatifs, et non plus additifs, quand on examine de tels documents.

Ce passage au logarithme a fait l'objet d'études depuis les débuts de la géostatistique. On a ainsi pu montrer [10] que si $Y(x) = \log Z(x)$ est une F.A.I. gaussienne ayant un variogramme $\gamma(h)$ sans portée (par exemple $\gamma(h) = \bar{\omega}|h|$), le variogramme expérimental de $Z(x)$ est, en espérance, de la forme $a(1 - e^{-\gamma(h)})$ et présente, par conséquent, une portée apparente. C'est sans doute un effet de cet ordre qui entraîne le caractère plat de la plupart des variogrammes expérimentaux bâtis à partir de données de transmissivité.

γ) Données incertaines

On peut être amené à traiter des données de différentes qualités, provenant par exemple de sources plus ou moins sûres. Certaines valeurs doivent être utilisées avec précaution sans que, pour autant, on puisse les rejeter sous peine de se priver d'une information non négligeable [8]. Une formulation adaptée du krigeage permet de prendre en compte l'ensemble des données [7].

Les incertitudes entachant certaines données peuvent provenir de ce qu'elles ont été obtenues à l'aide d'une technique de mesure rudimentaire, ou encore à l'aide d'une régression (ou de formules empiriques) permettant de les déduire d'autres variables mesurées par ailleurs. On supposera que l'incertitude sur une donnée $z(x_i)$ peut être résumée par une variance σ_i^2 , soit provenant d'un calcul statistique, soit même estimée grossièrement en assimilant la fourchette d'incertitude à $\pm 2\sigma_i$.

On supposera en outre que les erreurs $\epsilon(x_i)$ sur les données sont:

- a) non systématiques: $E[\epsilon(x_i)] = 0$, $\forall i$
- b) non corrélées entre elles: $\text{cov} [\epsilon(x_i), \epsilon(x_j)] = 0$, $\forall i \neq j$
- c) non corrélées avec la variable étudiée: $\text{cov} [\epsilon(x_i), Z(x)] = 0$, $\forall i, \forall x$

L'incertitude sur les données n'introduit alors qu'une légère modification dans le système de krigeage. On ne dispose plus, comme données, des vraies valeurs $z(x_i)$, mais seulement des sommes "vraie valeur + erreur", c'est à dire des $z(x_i) + \epsilon(x_i)$. L'estimateur formé pour le krigeage prend donc la forme:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i (Z(x_i) + \epsilon(x_i))$$

Comme $E[\epsilon(x_i)] = 0$, les conditions de non-biais ne sont pas modifiées. La variance de l'erreur d'estimation devient:

$$\begin{aligned} \text{var} [Z_0^* - Z_0] &= \text{var} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i (Z(x_i) + \epsilon(x_i)) - Z_0 \right] \\ &= \text{var} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z_0 \right] + \text{var} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon(x_i) \right] \\ &= \text{var} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z_0 \right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$

En minimisant cette expression, on retombe sur le système classique de krigeage, excepté pour les termes diagonaux où l'on a $-\sigma_i^2$ au lieu de $\gamma_{ii} = 0$.

En considérant, par exemple, le cas ponctuel sans dérive, le système modifié s'écrit:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} - \lambda_i \sigma_i^2 + \mu = \gamma_{i0} & i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases}$$

la variance de krigeage valant toujours:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} + \mu$$

Il peut être intéressant de visualiser les effets concrets de la présence sur une donnée $z(x_i)$ d'une incertitude, caractérisée par σ_i^2 . Pour ce faire, on considère l'exemple simple suivant: la variable étudiée est sans dérive et de variogramme $\gamma(h) = |h|$, les données sont situées aux six sommets d'un hexagone régulier de côté unité (Fig.42). Cinq de ces

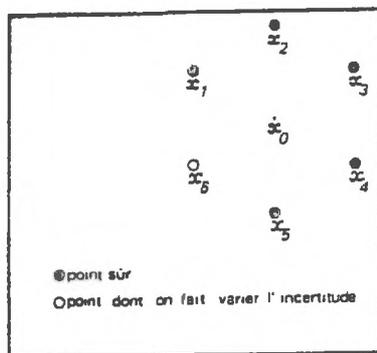


FIG. 42 - DONNEES SURES
& DONNEE INCERTAINE

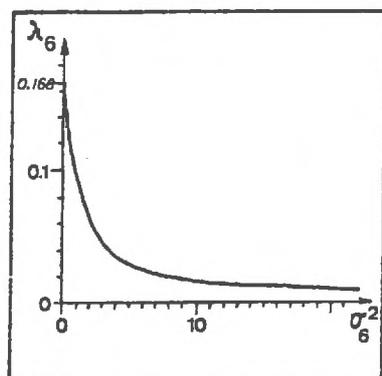


FIG. 43 - INFLUENCE DE
L'INCERTITUDE SUR LE POIDS

données sont supposées sans erreur ($\sigma_i^2 = 0$ pour $i=1,2,\dots,5$) et l'on cherche à appréhender l'influence de σ_6^2 .

Une façon d'y parvenir consiste à regarder le poids λ_6 attribué à $z(x_6)$ dans l'estimation par krigeage de la valeur au centre de l'hexagone (Fig.43) Au départ, $\sigma_6^2 = 0$ et la sixième donnée jouant le même rôle que les cinq autres se voit attribuer un poids $\lambda_6 = 1/6 (= 0.166)$. A mesure que σ_6^2 croît, le poids λ_6 décroît et à la limite tend vers zéro quand σ_6^2 tend vers l'infini. Une donnée totalement incertaine équivaldrait à une absence de donnée.

Cette adaptation du krigage au cas de données de différentes qualités a été appliquée à l'étude des transmissivités de la nappe du Bathonien en Basse-Normandie [9]. Les 45

données provenant d'essais de pompage ont été complétées par 55 données de moindre qualité, obtenues à partir d'une régression linéaire entre les logarithmes des transmissivités et ceux des débits spécifiques. Les variances σ_i^2 affectées à ces 55 dernières valeurs ont été calculées à partir de la formule classique en statistique.

L'estimation de la transmissivité a été ensuite faite par krigeage sur des mailles de 2 km de côté, une première fois en ne retenant que les 45 données sûres, puis en prenant l'ensemble des données et en tenant compte des incertitudes entachant les 55 valeurs provenant de débits spécifiques. Du fait de la prise en compte d'une information supplémentaire, même imprécise, les coefficients de l'intervalle de confiance (on a travaillé sur les logarithmes) sont inférieurs à ceux trouvés la première fois. Afin de visualiser ce resserrement des intervalles de confiance, on a fait le rapport des premiers coefficients sur les seconds et représenté, sur la figure 44, ce facteur d'amélioration de la connaissance correspondant au passage des 45 aux 100 (45+55) données. S'il reste sensiblement égal à 1 dans les régions bien reconnues par essais de pompage, il passe à des valeurs supérieures à 10 dans certaines

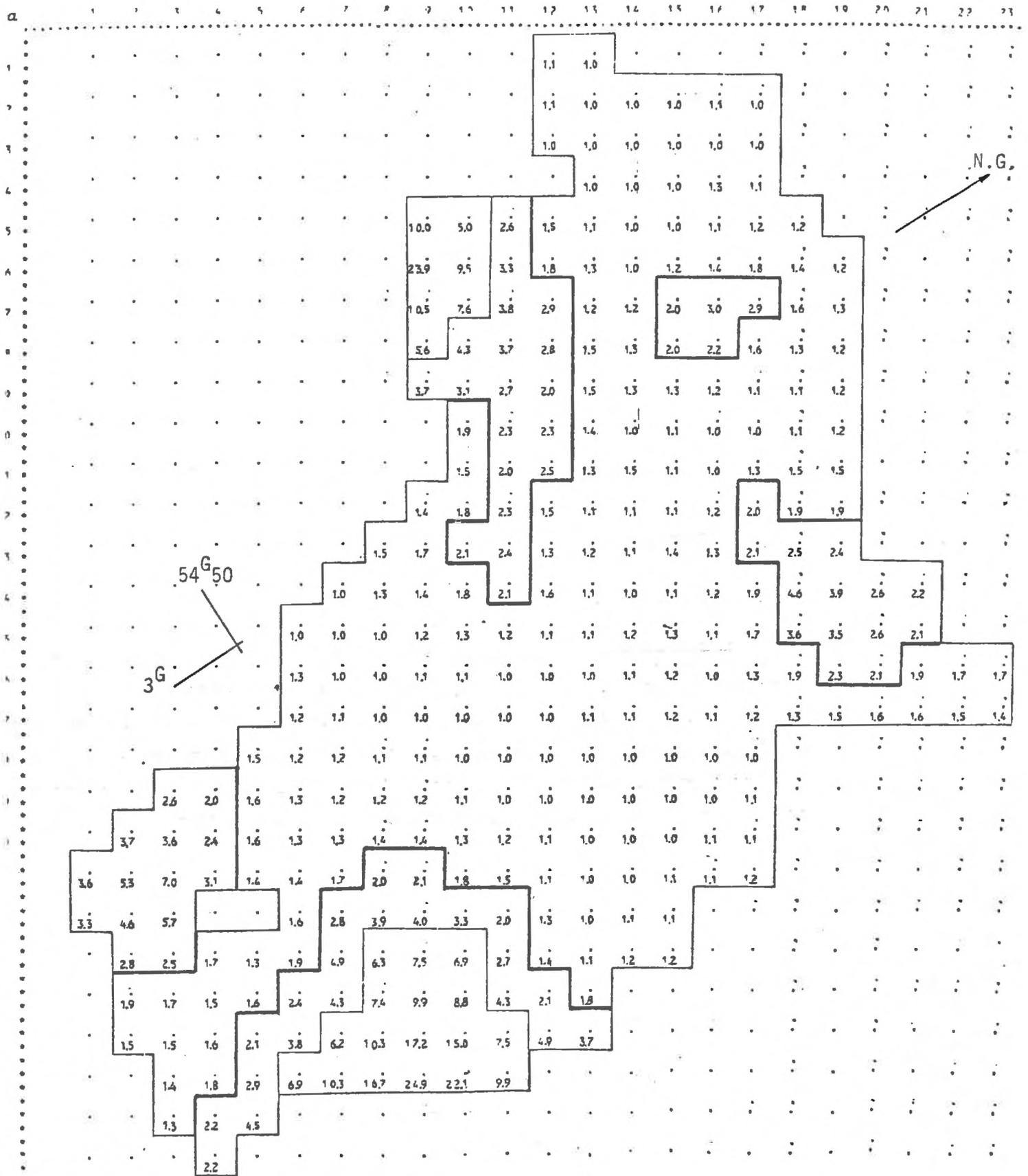


FIG. 44 - NAPPE BATHONIENNE DE BASSE-NORMANDIE

PRISE EN COMPTE DES DEBITS SPECIFIQUES

FACTEUR D'AMELIORATION DE LA CONNAISSANCE DE LA TRANSMISSIVITE

zones où l'appoint des débits spécifiques a été décisif.

δ) Présence de failles

Les phénomènes étudiés jusqu'ici se développaient dans l'espace sans cassures. En géologie, la présence d'une faille fait que les données situées au-delà par rapport au point x_0 à estimer n'apportent pas d'information sur $z(x_0)$. Tous les procédés de cartographie automatique se sont heurtés à cette difficulté [11].

On est ainsi amené à introduire des lignes brisées destinées à faire écran entre les points expérimentaux devant ou non être pris en compte par le krigeage. Il peut s'agir soit d'une discontinuité réelle (par exemple, faille géologique), soit d'un effet d'écran dû aux sinuosités du contour (exemple: répartition de polluant le long d'une côte, de part et d'autre d'un cap) (Fig.45).

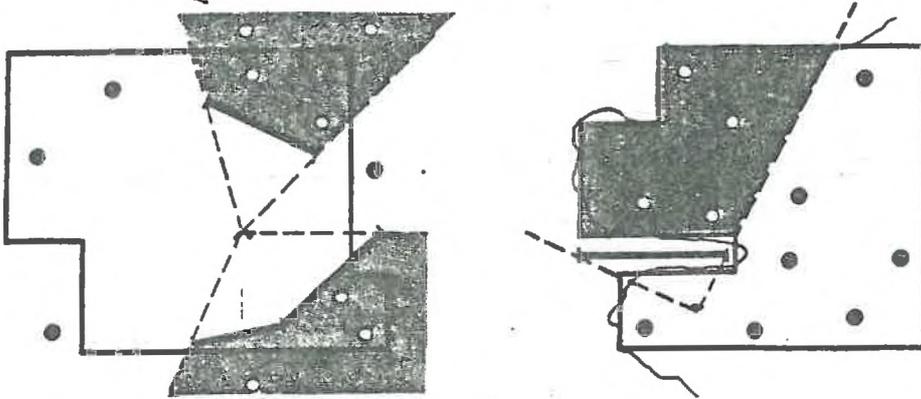


FIG. 45 - FAILLES GEOLOGIQUES ET EFFET D'ECRAN FORME PAR UN CAP

On trouvera, figure 46, un exemple d'application de cette technique à l'estimation de la cote du mur de la nappe bathonienne de Basse-Normandie.

COTE DU MUR DE LA MAPPE BATHONIENNE

MOYENNE PAR MAILLE

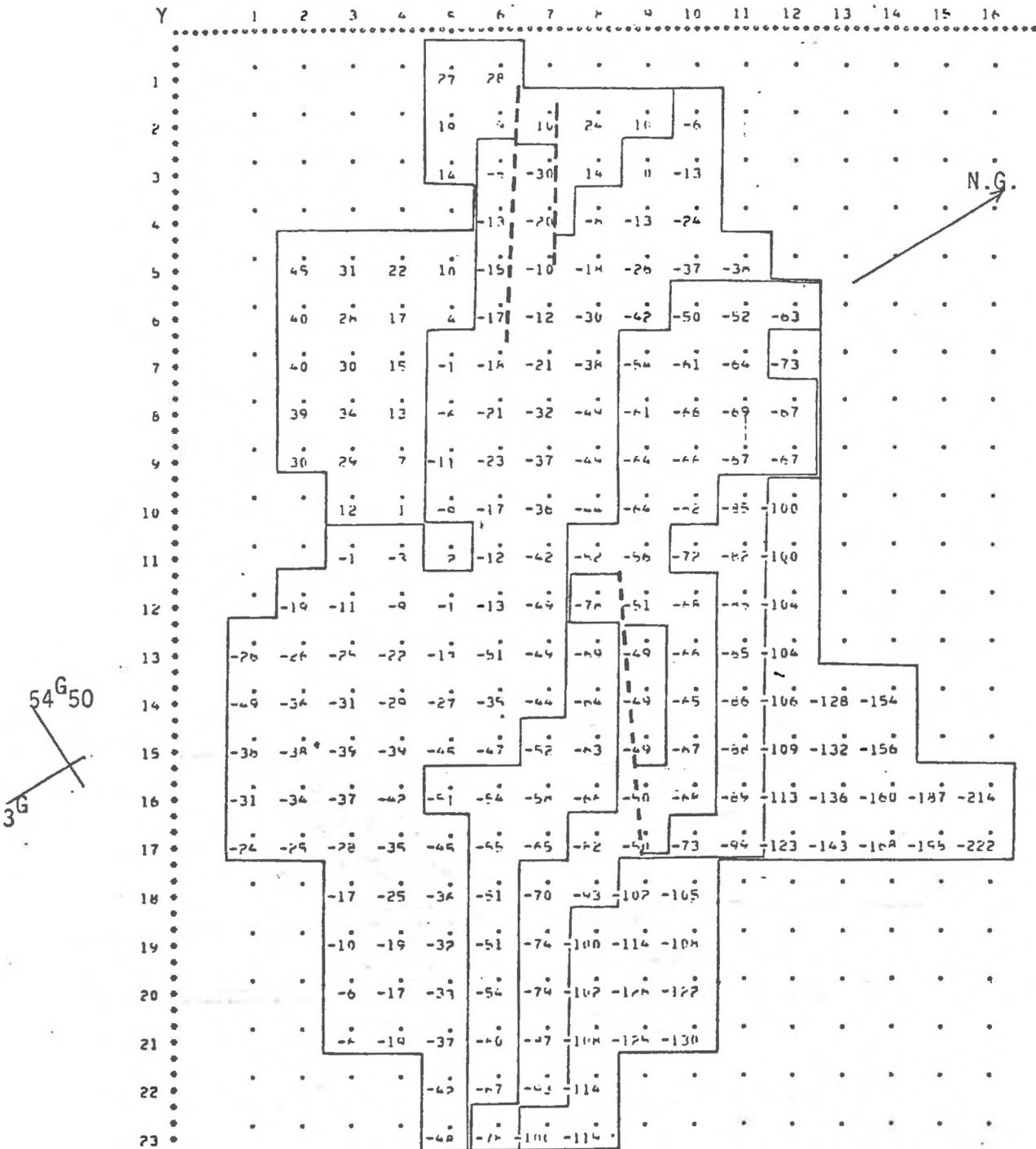


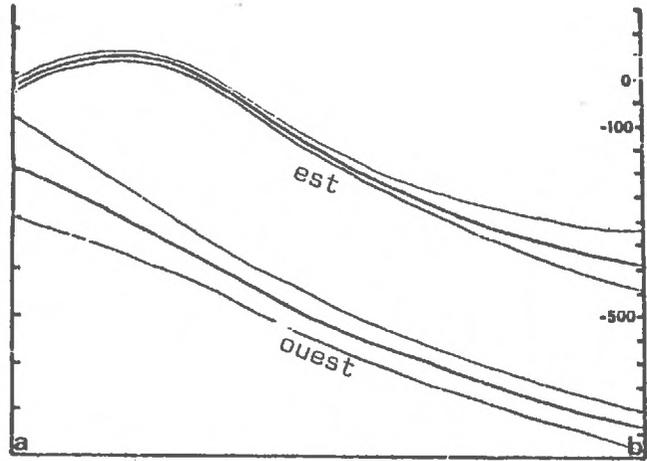
FIG. 46 - NAPPE BATHONIENNE DE BASSE-NORMANDIE
PRISE EN COMPTE DES FAILLES DE RANVILLE ET AMBLIE
DANS L'ESTIMATION DE LA COTE DU MUR

Le krigeage permet de tenir compte ainsi des failles connues. Il peut également aider le géologue à juger de l'existence d'une faille affectant une formation profonde, à partir des données de forage.

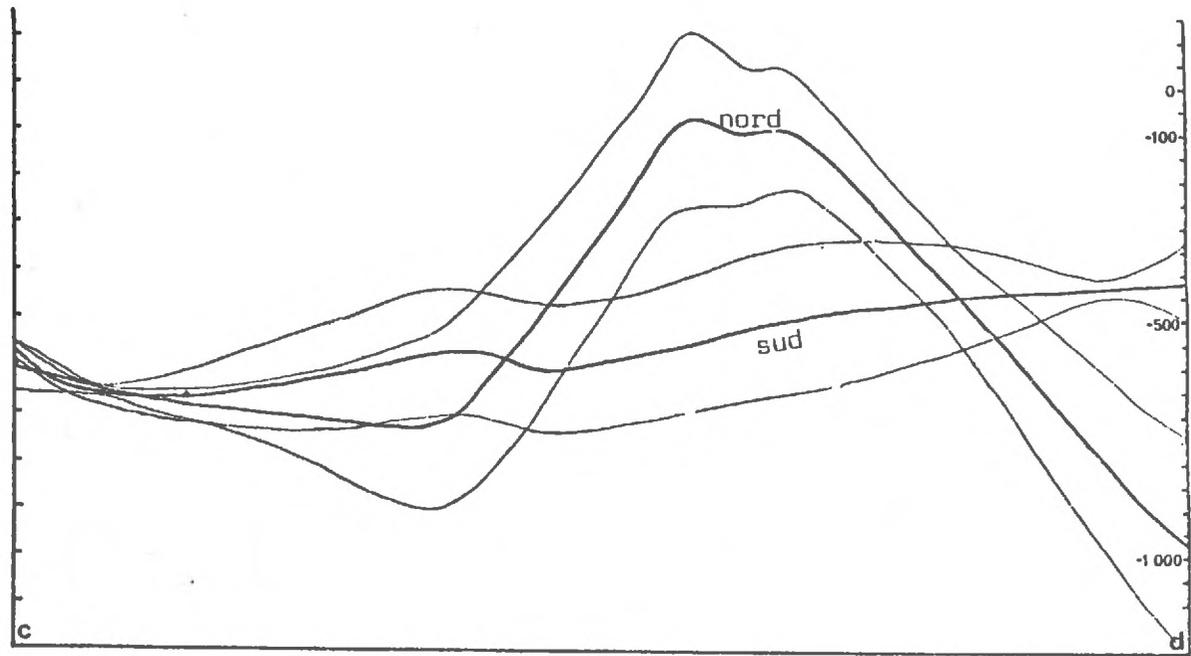
Cherchant à tester la pertinence de deux failles "possibles" dans une telle formation (réservoir calcaire d'Al Aziziyah, Libye), on a procédé, le long des lignes AB et CD (Fig. 47), à une double estimation par krigeage de la cote du toit de la formation en prenant en compte à chaque fois uniquement les forages situés d'un seul côté. On a reporté, dans les deux cas, sur un même graphique, les deux coupes obtenues ainsi de part et d'autre, assorties de leur fourchette d'incertitude à $\pm 2\sigma$. L'examen de la figure 47 montre que, si pour la coupe AB l'existence d'une faille est très nette, pour CD le rejet n'est pas significatif sur les 2/3 du profil, laissant ainsi planer un doute.

On peut examiner, pour terminer, les cartes krigées de la zone entourant la faille AB, obtenues respectivement en négligeant l'existence de celle-ci, puis en en tenant compte. On constate, sur la première carte, la présence d'ondulations parasites dues à l'impossibilité pour un modèle continu de franchir un ressaut aussi important (Fig. 48).

Ces différentes adaptations du krigeage ont pu montrer son aptitude à traiter toute l'étendue des problèmes d'estimation qui se posent dans les sciences de l'eau. Mais les ressources de la théorie des variables régionalisées permettent d'aborder d'autres problèmes comme l'optimisation des réseaux de mesure.

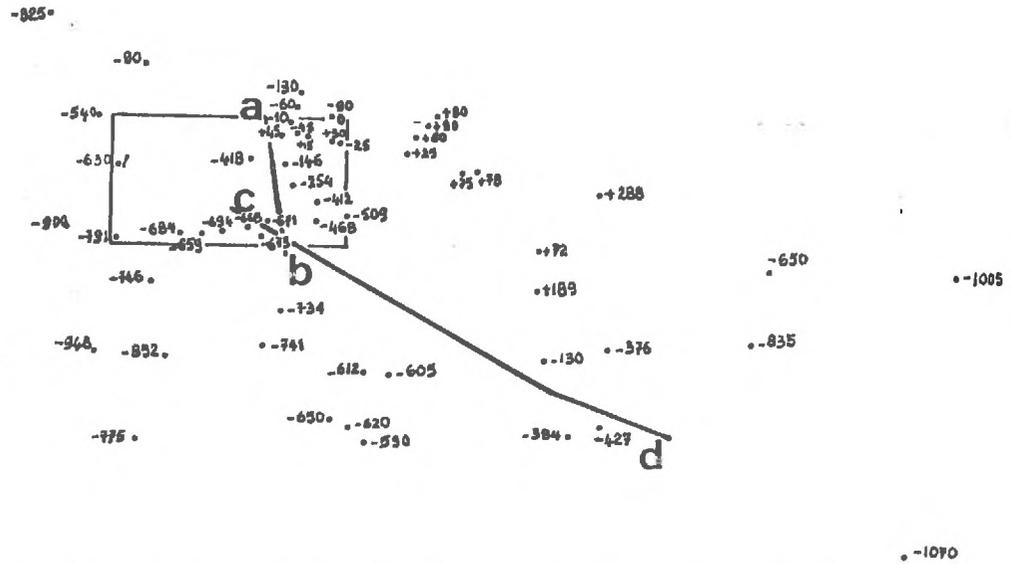


Profils AB (avec intervalles de confiance)



Profils CD (avec intervalles de confiance)

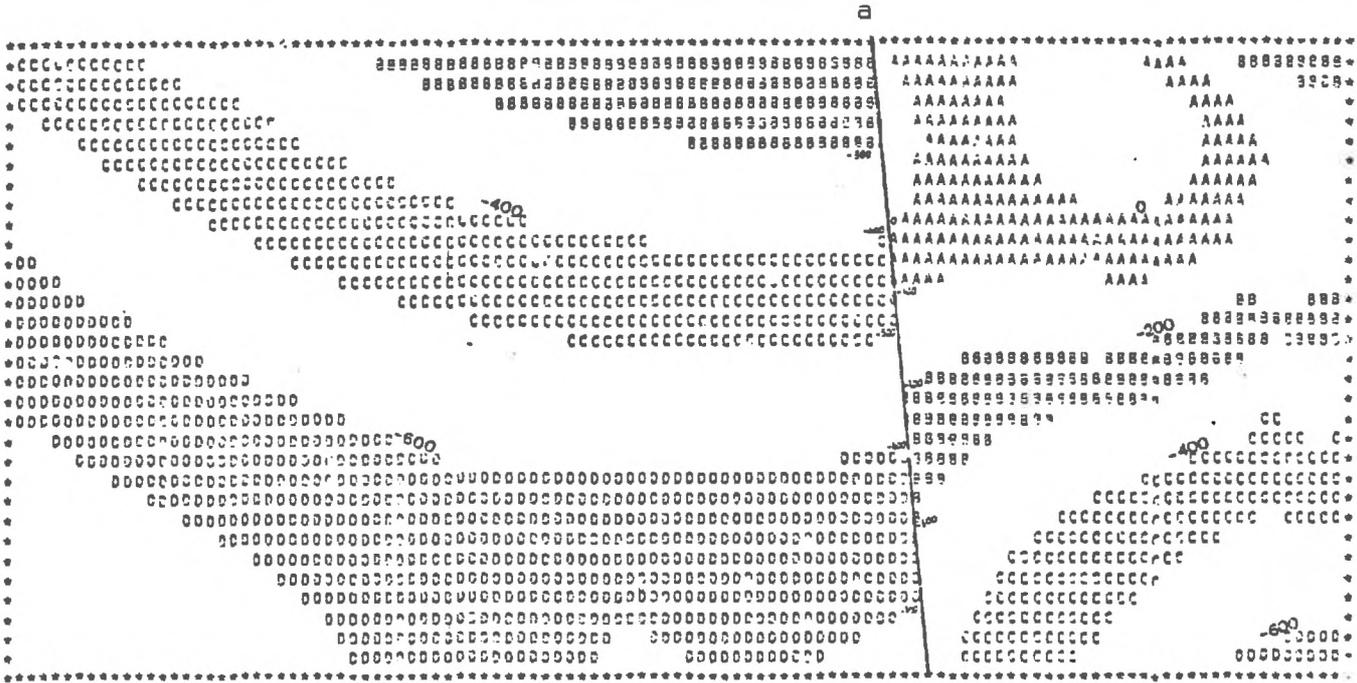
FIG. 47 - FORMATION GEOLOGIQUE D'EL AZIZIYAH
TEST DE LA PERTINENCE
DE DEUX FAILLES "POSSIBLES"



Cotes du toit de la formation et emplacement des failles



Carte du toit de la formation tracée en négligeant l'existence de la faille



Carte du toit de la formation tracée en tenant compte de la faille

FIG. 48 - FORMATION GEOLOGIQUE D'AL AZIZIYAH
 PROBLEME DE LA CARTOGRAPHIE AUTOMATIQUE
 AU VOISINAGE D'UNE FAILLE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP. III, § 1

- [1] CHILES, J.P., CHAUVET, P. (1975):
Le krigeage: méthode de cartographie des fonds marins.
Revue Hydrographique Internationale, vol. 52, n°1, pp. 29-45
- [2] DELFINER, P., DELHOMME, J.P. (1973):
Optimum interpolation by kriging.
Display and analysis of spatial data, pp. 96-114.
(Proc. of NATO Adv. Study Inst., Nottingham, 1973)
John Wiley & Sons.
- [3] DELFINER, P., DELHOMME, J.P., CHILES, J.P. (1976):
BLUEPACK: notice d'utilisation.
Ecole des Mines, C.M.M.-C.I.G.
- [4] DELHOMME, J.P. (1970):
Présentation d'une méthode objective d'interpolation pour
la construction de cartes isopiézométriques.
Groupe d'Etude des Bassins Versants Souterrains, Douai, 1970.
- [5] DELHOMME, J.P. (1971):
Traitement géostatistique des données piézométriques: le
krigeage en hydrogéologie.
Ecole des Mines, L.H.M., R71/14.
- [6] DELHOMME, J.P., DELFINER, P. (1973):
Application du krigeage à l'optimisation d'une campagne
pluviométrique en zone aride.
Colloque UNESCO-OMM-AIHS sur l'élaboration des projets
d'utilisation des ressources en eau sans données suffisantes,
Madrid, 1973.
Actes du Colloque, tome I, pp. 191-210.
- [7] DELHOMME, J.P. (1974):
La cartographie d'une grandeur physique à partir de données
de différentes qualités.
Congrès d'Hydrogéologie, Montpellier, 1974.
Mémoires de l'Assoc. Int. des Hydrogéologues, tome X, 1,
pp. 185-194.
- [8] GILLILAND, J.A. (1972):
Principles of groundwater data acquisition.
Water Resour. Res., vol.8, n°1, pp. 182-187.
- [9] LEVASSOR, A., DELHOMME, J.P., TALBOT, A. (1976):
Etude du bassin de l'Orne.
Ecole des Mines, L.H.M.
- [10] MATHERON, G. (1974):
Effet proportionnel et lognormalité ou le retour du serpent
de mer.
Note géostatistique n° 124.
Ecole des Mines, C.M.M., N-374.
- [11] WALTERS, R.F. (1969):
Contouring by machine: a user's guide.
Amer. Ass. Petrol. Geol. Bull., vol.53, n°11, pp. 2324-2340.

2 - OPTIMISATION DU RENFORCEMENT D'UN RESEAU DE MESURES

De même que les divers problèmes d'estimation n'ont pu être résolus qu'après avoir été convenablement formulés, la question de l'optimisation d'un réseau de mesure n'a de sens que si le but poursuivi a été clairement défini.

Dans le cas d'une reconnaissance hydroclimatique en vue d'un aménagement hydraulique, l'hydrologue, ayant pour objectif l'étude de la relation pluie-débit, s'intéresse en premier lieu aux hauteurs d'eau moyennes tombées, journallement par exemple, sur le bassin. La variance d'estimation par krigeage a permis de donner la fourchette d'incertitude avec laquelle cette quantité peut être calculée.

Dans le cas d'une étude de la répartition spatiale des transmissivités ou d'une reconnaissance du modelé piézométrique, l'hydrogéologue s'intéresse aux moyennes par mailles (ou aux valeurs ponctuelles) de la grandeur étudiée. Ici encore, pour chaque maille, ou en chaque point, les variances de krigeage ont permis de définir la confiance devant être accordée à l'estimation.

a) Méthode du point fictif

La variance de krigeage constitue donc tout naturellement l'indicateur de précision nécessaire pour :

- décider de l'opportunité de renforcer le réseau,
- déterminer l'emplacement optimal d'un éventuel point de mesure supplémentaire.

On mettra à profit le fait que la variance de krigeage ne fait intervenir que la structure du phénomène et la configuration géométrique des données $\{x_i, i=1, \dots, n\}$ et du domaine à estimer (x_0, s_0 ou S), sans faire intervenir les valeurs $z(x_i)$ elles-mêmes. Si on considère un point supplémentaire x_{n+1} , il est ainsi possible de bâtir le système de krigeage correspondant aux $n+1$ points x_1, \dots, x_n, x_{n+1} , et d'en déduire la variance d'estimation relative à cette nouvelle configuration expérimentale, sans avoir à faire d'hypothèse

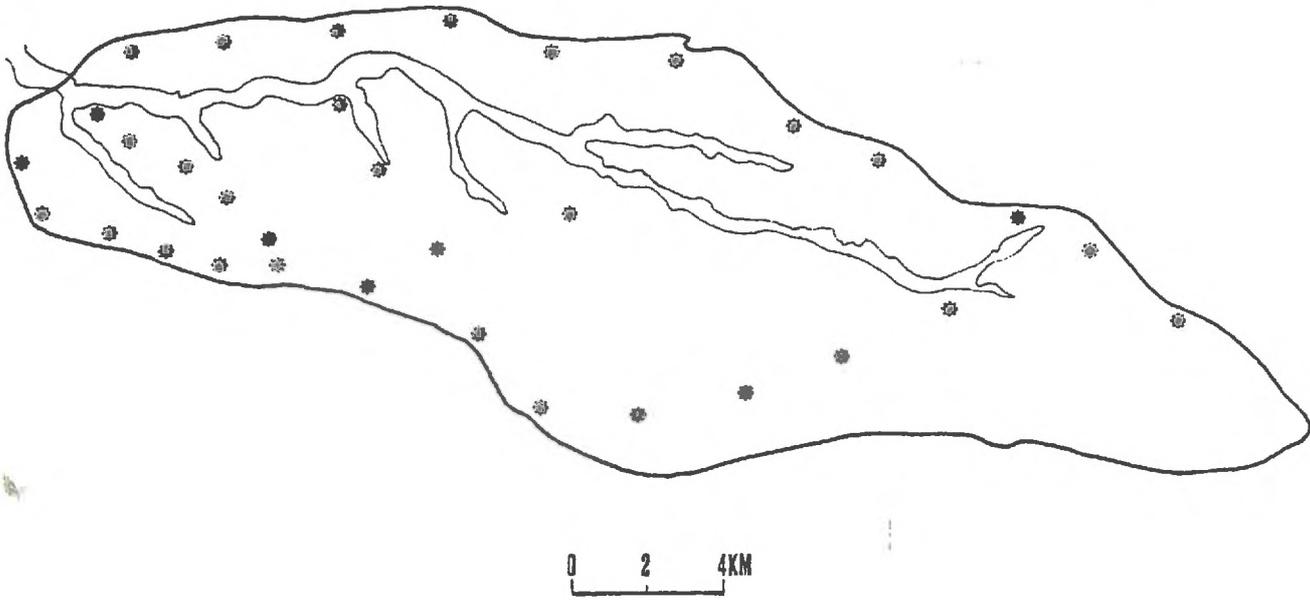


FIG. 49 - BASSIN VERSANT DE KADJEMEUR
IMPLANTATION DU RESEAU PLUVIOMETRIQUE

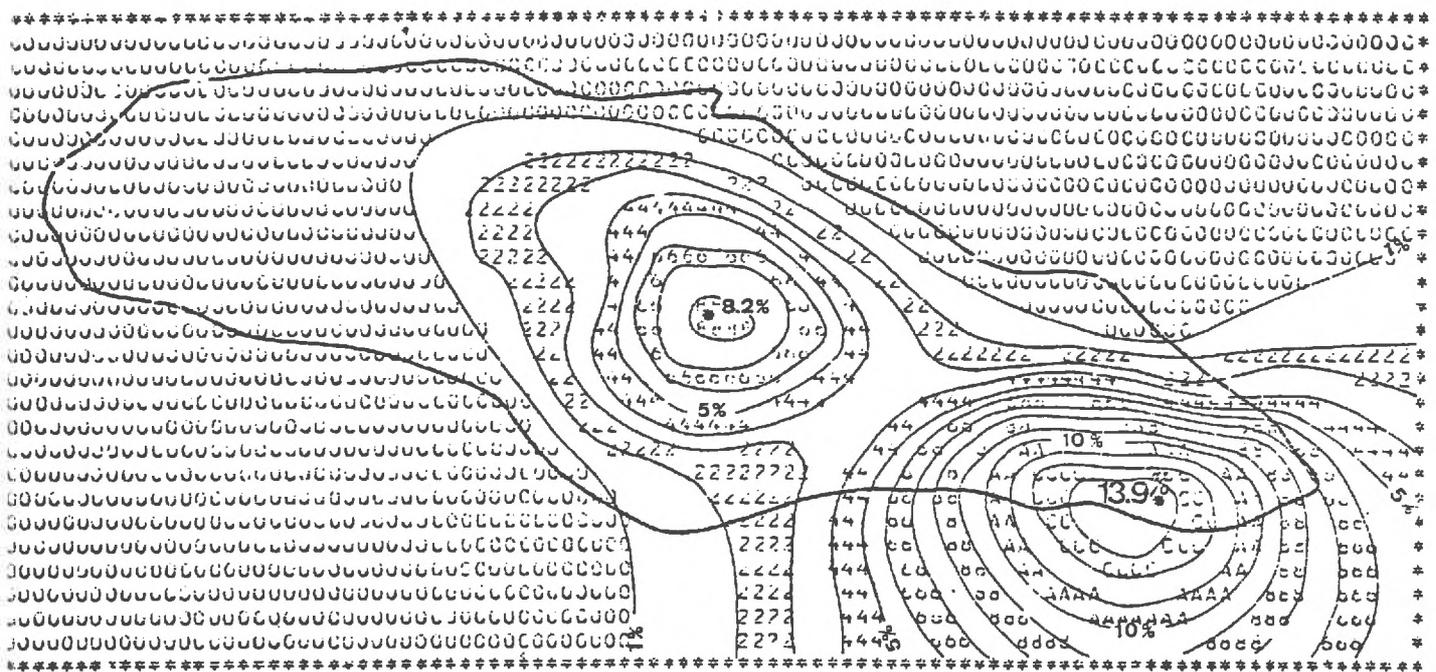


FIG. 50 - METHODE DU POINT FICTIF: COURBES D'EGAL GAIN EN PRECISION

a priori sur $z(x_{n+1})$. On donne à cette méthode le nom de "méthode du point fictif" [1]. On examinera successivement comment elle peut être utilisée dans les deux cas mentionnés plus haut.

b) Objectif global

Dans le cas où l'objectif est constitué par l'estimation d'une quantité moyenne sur un domaine S, on cherchera à déterminer quel est le point x où l'implantation d'un $n+1^{\text{ème}}$ point de mesure aux côtés des n déjà existants conduit à la variance d'estimation la plus faible. Si $\sigma_{k_0}^2$ désigne la variance d'estimation de départ avec les n points expérimentaux, et $\sigma_k^2(x)$ (toujours $< \sigma_{k_0}^2$) celle qui correspond à la configuration $\{x_1, \dots, x_n, x\}$, le gain en précision peut être défini comme:

$$G(x) = \frac{\sigma_{k_0}^2 - \sigma_k^2(x)}{\sigma_{k_0}^2}$$

Si le choix ne se pose que parmi un certain nombre de points présélectionnés selon un autre critère (accès facile, relevé aisé, etc...), on plantera fictivement un point de mesure en chacun d'eux, et on déterminera les gains en précision correspondants. On procédera de même le long d'un cheminement si l'on a décidé a priori de retenir une ligne caractéristique du terrain (voie d'accès, accident de terrain, etc...).

Quand, au contraire, l'on ne possède aucun a priori, on fera parcourir au point fictif x une portion de plan englobant le domaine S et ses abords immédiats, et on tracera une carte d'isogains en précision sur l'estimation de la valeur moyenne sur le domaine S. C'est la solution qui a été adoptée pour l'exemple de l'Ouadi Kadjemeur (Fig.50) [1].

Si l'on n'avait tenu aucun compte de l'existence de corrélations spatiales, le gain correspondant à un 34^e pluviomètre aurait été de $1/34 \approx 3\%$ et identique pour tout emplacement à l'intérieur du bassin.

L'examen comparé des figures 49 et 50 montre que la méthode utilisée est riche d'enseignements. Si le gain reste inférieur à 1% pour la partie ouest du bassin, qui comporte déjà de nombreux pluviomètres, le gain maximum dépasse 13% au lieu des 3% par une analyse sommaire. Et, contrairement

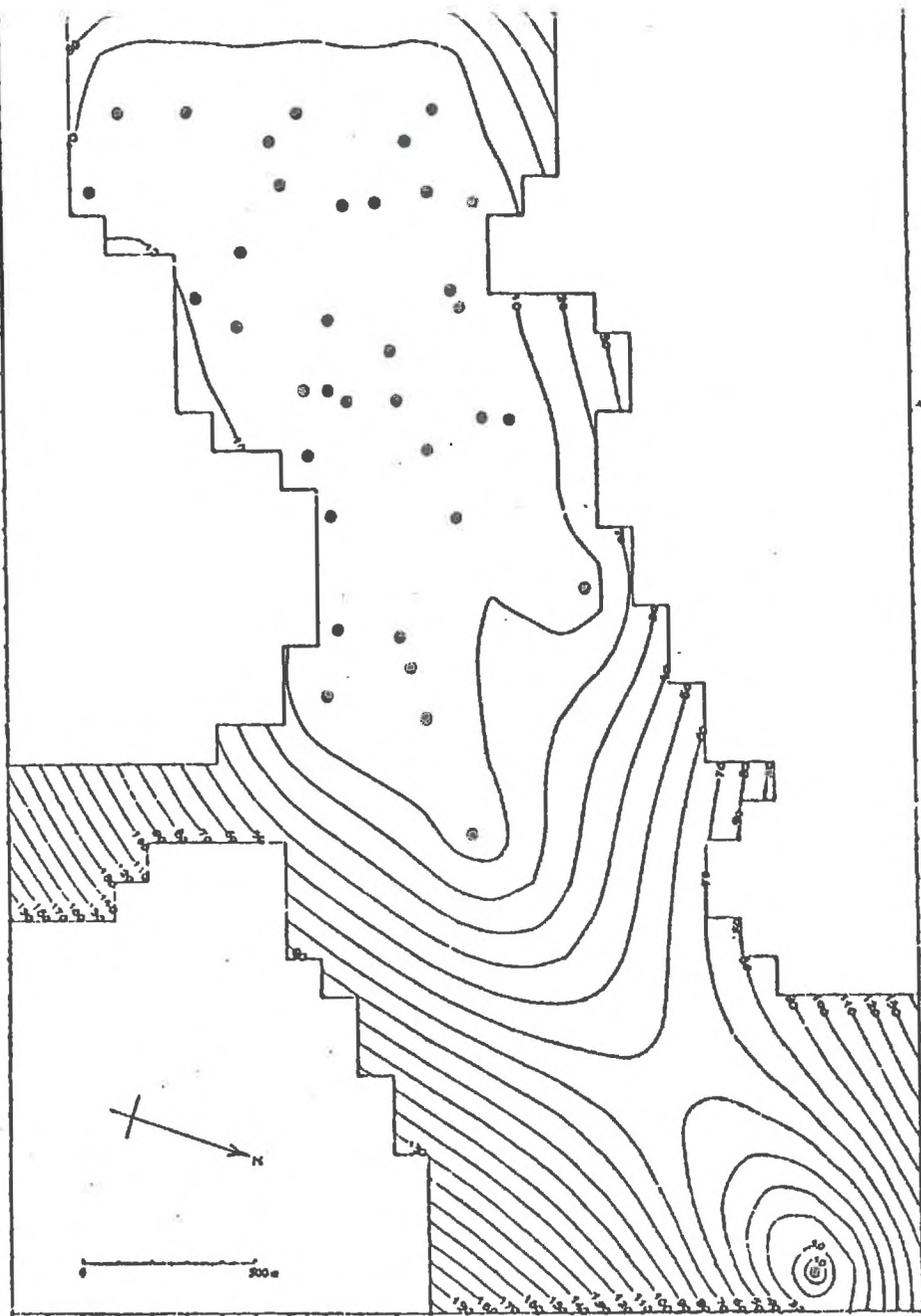


FIG. 51 - RESEAU PIEZOMETRIQUE DE L'HUVEAUNE:
ECARTS-TYPES DE KRIGEAGE (en cm)

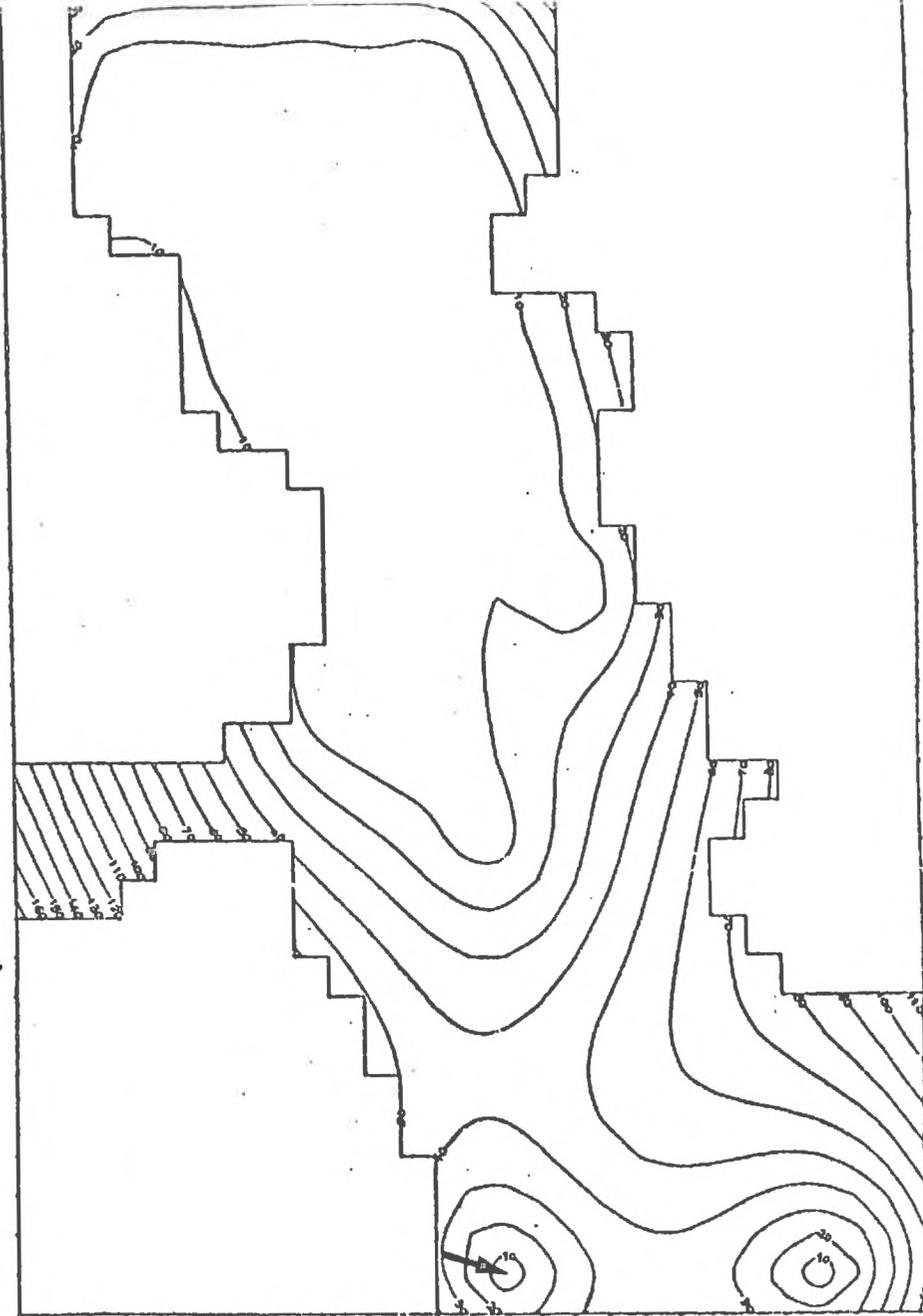


FIG. 52 - ECARTS-TYPES DE KRIGEAGE APRES ADDITION
D'UN PIEZOMETRE SUPPLEMENTAIRE

à ce que l'on aurait pu penser, le meilleur endroit pour implanter un pluviomètre supplémentaire n'est pas la partie centrale du bassin, mais sa partie sud-est. A la limite, un point de mesure extérieur au bassin, mais dans la région sud-est, est plus informatif qu'un point central. La raison en est que la frange sud-est n'est pas reconnue du tout, alors que la région centrale est, elle, bien cernée.

Si l'on revient aux poids de krigeage ou à ceux de THIESSEN (Fig. 34 et 35, p.88), on constate que ces résultats vont dans le sens d'un "soulagement" des pluviomètres de poids les plus élevés. On tend vers une égalisation, en quelque sorte, de la contribution des différentes stations, ce qui satisfait le sens physique de l'hydrologue.

c) Objectif local

Dans le cas où l'objectif est constitué par une connaissance locale (ponctuelle, comme en cartographie, ou encore par maille), le problème se pose d'une manière légèrement différente, en ce sens qu'il y a maintenant autant de pondérations et de variances de krigeage qu'il y a de noeuds ou de mailles sur la grille utilisée. L'implantation d'un point de mesure supplémentaire aura une influence sur les variances de krigeage de tous les points (ou mailles) qui feront intervenir ce point dans leur pondération du krigeage. Cette influence, allant en s'affaiblissant avec la distance, ne se fera pourtant sentir en pratique que dans un certain voisinage.

On prendra l'exemple du réseau piézométrique de la nappe alluviale de l'Huveaune, à Marseille. On a superposé sur la Fig.51 les emplacements des différents points de mesure existants à la carte d'écart-types d'estimation par krigeage. On suppose l'existence d'un piézomètre supplémentaire dans la partie nord de la nappe, où il n'y avait qu'un seul piézomètre isolé. En comparant la carte d'écart-type de krigeage alors obtenue (Fig.52) à celle qui correspondait à la configuration expérimentale réelle, on peut juger de l'influence de ce piézomètre fictif: dans toute la zone l'entourant immédiatement, les écart-types, primitivement de presque 2 m, diminuent considérablement; l'influence reste malgré tout assez localisée, avec, en particulier, une baisse très faible dans la corne sud-est de l'aquifère.

La démarche à suivre pour renforcer un réseau est donc ici d'implanter des points de mesure supplémentaires dans toutes les zones où existent, sur la carte d'écart-type de krigeage, des maxima locaux très marqués, de façon à les faire disparaître.

Ce problème s'étend aux cas de données de différentes qualités, soit parce que l'on peut envisager deux types d'appareil de mesure, soit parce qu'on peut employer, par exemple, deux techniques, l'une directe, l'autre indirecte, d'acquisition de la donnée pour le point expérimental supplémentaire.

d) Influence de la qualité de la station supplémentaire

Pour illustrer cette question, on a repris ici l'exemple des données situées aux sommets d'un hexagone [3]. Cinq points de mesure (supposés sans erreur) étant en place, on a étudié l'information apportée par le sixième point, affecté d'une incertitude de variance σ_6^2 , en regardant la réduction relative de la variance de krigeage due à sa présence. Cette fois-ci on se propose d'estimer $z(x)$ en tout point x (et non plus seulement au centre de l'hexagone). En utilisant seulement les cinq premières données, on aurait une variance de krigeage $\sigma_{k_5}^2$; en utilisant aussi la sixième, on aura $\sigma_{k_6}^2$ ($< \sigma_{k_5}^2$). Sur la figure 53, on a cartographié la réduction relative de variance (ou gain en précision):

$$g = \frac{\sigma_{k_5}^2 - \sigma_{k_6}^2}{\sigma_{k_5}^2}$$

pour différentes valeurs de σ_6^2 .

Quand $\sigma_6^2 = 0$ (cas d'une donnée normale), le gain maximum est de 100% en x_6 (puisque alors $\sigma_{k_6}^2 = 0$, d'après une propriété du krigeage signalée au Chap. II, § 3d), ce gain allant en décroissant quand le point krigé s'éloigne de x_6 .

Pour des valeurs de plus en plus élevées de σ_6^2 , la zone d'influence de la sixième donnée va en se rétrécissant, tendant à la limite à disparaître quand σ_6^2 devient infinie. Une donnée totalement incertaine n'apporterait aucune information.

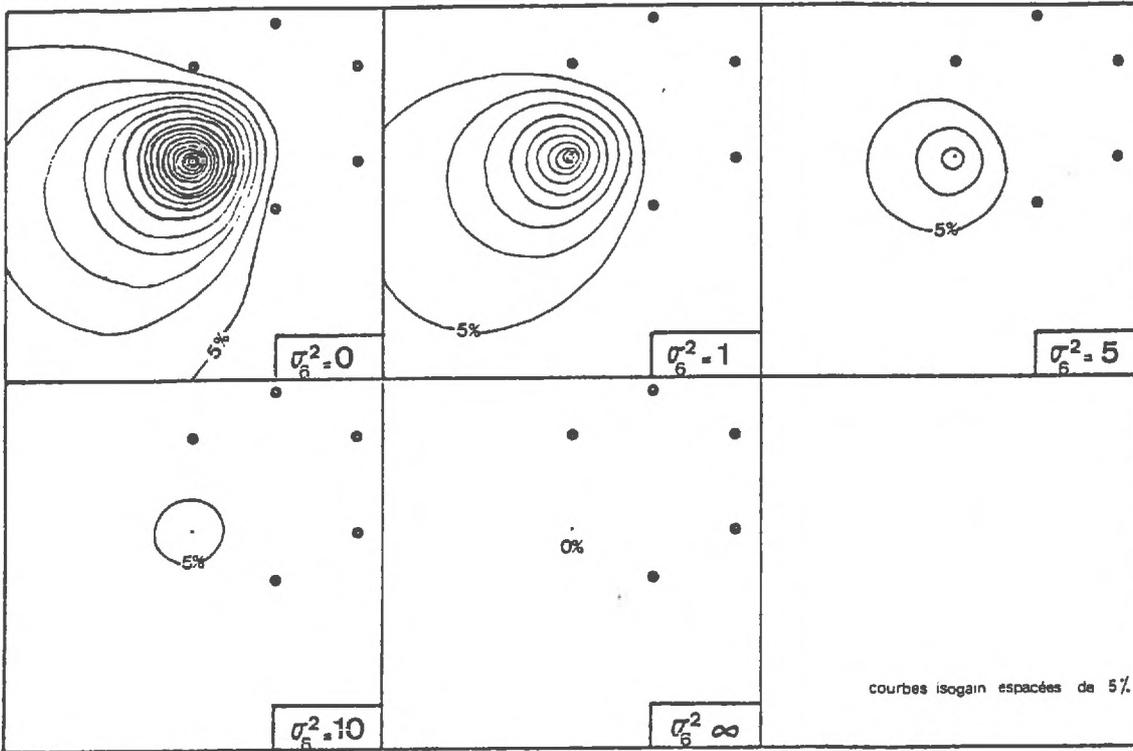


FIG. 53 - INFLUENCE DE L'INCERTITUDE AFFECTANT LA DONNÉE SUPPLÉMENTAIRE
SUR LE GAIN EN PRÉCISION

e) Recherche d'un optimum économique

Le krigeage permet donc de quantifier le gain d'information qu'apporterait un éventuel point de mesure supplémentaire, et ce, en prenant en compte la qualité de la mesure en question, qualité d'ailleurs souvent liée au coût. Or, comme l'ont souligné GANDIN et KAGAN [4], qui avaient déjà adopté la variance de l'erreur d'interpolation comme critère de calcul, le problème de l'optimisation d'un réseau ne saurait être séparé de son aspect économique.

Si on associe au coût d'implantation d'une station nouvelle le gain en précision correspondant qui est déterminé par le krigeage, on peut faire un calcul d'optimum économique et orienter la poursuite d'une campagne de mesures. Par exemple, en ce qui concerne la transmissivité, on pourra décider de faire soit un essai de pompage pour avoir une bonne mesure, soit plusieurs simples déterminations du débit spécifique beaucoup moins coûteuses, mais aussi moins précises, et pour chaque éventualité on pourra déterminer les emplacements optimaux [9].

On a vu jusqu'à présent que le krigeage a des applications multiples en hydrogéologie. Ces possibilités ont été encore enrichies par un développement ultérieur de la théorie des variables régionalisées: la méthode des simulations conditionnelles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP. III, § 2

- [1] DELHOMME, J.P., DELFINER, P. (1973):
Application du krigeage à l'optimisation d'une campagne pluviométrique en zone aride.
Colloque UNESCO-OMM-AIHS sur l'élaboration des projets d'utilisation des ressources en eau sans données suffisantes, Madrid, 1973.
Actes du Colloque, tome I, pp. 191-210
- [2] DELHOMME, J.P., LEVASSOR, A. (à paraître):
Reconnaissance optimale du champ des transmissivités.
- [3] DELHOMME, J.P. (1974):
La cartographie d'une grandeur physique à partir de données de différentes qualités.
Congrès d'Hydrogéologie, Montpellier, 1974.
Mémoires de l'Assoc. Int. des Hydrogéologues, tome X, 1 pp. 185-194.
- [4] GANDIN, L.S., KAGAN, R.L. (1967):
The economic approach to the planning of a network of meteorological stations.
Soviet Hydrology: selected papers n°6
Traduit de: Trudy GGD, n° 208, pp. 120-131

3 - SIMULATIONS CONDITIONNELLES

On a vu que, appliqué à la cartographie, le krigeage donne en chaque point de la carte la meilleure estimation linéaire possible et l'écart-type de l'erreur associée, à partir desquels on peut bâtir un intervalle de confiance pour la valeur réelle (qui demeure inconnue). Il peut être intéressant, en premier lieu, de visualiser la latitude qui est ainsi laissée à la surface, et de voir les différentes allures que pourraient avoir en réalité les courbes isovales.

Mais surtout, la carte krigée est plus lisse que la "carte réelle" parce qu'un estimateur, même optimal, ne peut restituer des détails qui n'ont pas été observés. L'intérêt peut ainsi résider également dans la visualisation de la variabilité du phénomène.

Cette idée de chercher à produire des valeurs ayant la même variabilité que le phénomène réel sous-tend l'analyse classique de sensibilité, ou "error analysis", utilisée dans les modèles numériques. A partir des histogrammes expérimentaux, par exemple de transmissivité, on affecte, de façon aléatoire, des valeurs équiprobables à tous les noeuds du maillage, et ce, autant de fois qu'on veut constituer de jeux de transmissivité. Mais cette méthode ignore ainsi complètement la structure spatiale de la variable. Le modèle des fonctions aléatoires, que nous avons jusqu'ici utilisé, semble pouvoir conduire à de meilleurs résultats.

a) Principe

On a, en effet, considéré le phénomène étudié comme une réalisation particulière d'une F.A. Ceci constituait alors un moyen de poser le problème dans un cadre probabiliste et de pouvoir ainsi utiliser des outils comme l'espérance mathématique, la variance, le variogramme ou les covariances généralisées.

L'idée avec les "simulations conditionnelles" (le terme "simulation" doit être pris ici dans son acception statistique, et n'a aucun lien avec les techniques de simulation utilisées pour prévoir le comportement des aquifères) est d'exhiber d'autres réalisations de cette même F.A.

Par construction, ces autres réalisations auront même variabilité spatiale que le phénomène réel (même variogramme ou même covariance généralisée). Mais, en outre, on leur imposera de conserver aux points expérimentaux les valeurs mesurées, de façon à assurer une bonne coïncidence avec ce qui est connu du phénomène.

Une simulation conditionnelle est donc définie comme une surface qui:

- a la même variabilité que le phénomène étudié,
- passe par les points expérimentaux.

On peut, en outre, dans le cas sans dérive, imposer que l'histogramme des valeurs simulées reflète la même loi de dispersion que l'histogramme des données (lognormal par exemple si l'on travaille sur des transmissivités)[5].

Une telle simulation n'est évidemment pas la réalité, mais seulement une version de celle-ci. Les diverses simulations conditionnelles présentent des variantes possibles de la carte réelle (inconnue).

Si l'on construit un grand nombre de ces variantes, la moyenne de leurs valeurs en un point redonnera la valeur estimée par krigeage, et leur variance la variance d'estimation correspondante.

La méthode est basée sur le principe suivant. Partant de la décomposition triviale:

$$\begin{aligned} \text{valeur réelle} &= \text{valeur krigée} + \text{erreur de krigeage} \\ z(x) &= z^*(x) + (z(x) - z^*(x)) \end{aligned}$$

où l'erreur reste inconnue puisque la valeur réelle $z(x)$ n'est pas disponible en dehors d'un point expérimental, on simulera ces erreurs $(z(x) - z^*(x))$ en les empruntant à une autre réalisation, que l'on connaîtra, elle, de façon exhaustive, pour l'avoir engendrée.

On est en effet capable d'obtenir une réalisation $s(x)$ d'une F.A. $S(x)$ ayant même variogramme ou même covariance généralisée que $Z(x)$, en utilisant la technique des bandes tournantes [4], [6], [8]. Cette technique est celle qui a été d'ailleurs employée pour engendrer les réalisations de F.A.I. d'ordre 0, 1 et 2, montrées à la figure 26 (p.74).

b) Méthode des bandes tournantes

Elle consiste à sommer un grand nombre de réalisations indépendantes définies sur des droites balayant le plan, se ramenant ainsi à des simulations à une dimension, beaucoup plus simples à obtenir.

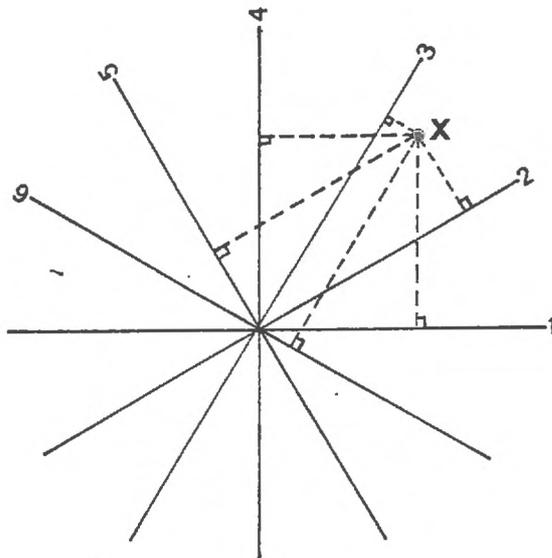


FIG. 54 - METHODE DES BANDES TOURNANTES
(schéma de principe)

Pour simuler la valeur en tout point x du plan, on ajoute les valeurs prises, aux projections de x sur les différentes droites, par les simulations à une dimension correspondantes. On montre par exemple que, en simulant sur les droites des réalisations d'une F.A. à une dimension ayant un variogramme en h^λ , on obtient également un schéma en h^λ dans le plan [4]. Cette méthode peut de même être utilisée pour une F.A. ayant une covariance généralisée polynômiale dans le plan [6], en simulant sur les droites des réalisations d'une F.A. à une dimension admettant elle-même une covariance généralisée polynômiale.

c) Aperçu de la théorie

Sur une telle simulation $s(x)$, il est possible, avec la même configuration de points expérimentaux x_i que dans la réalité, et les valeurs $s(x_i)$ simulées en ces points, de calculer au point x , avec les mêmes poids λ_i que pour $z^*(x)$, la valeur krigée $s^*(x)$. Dans l'égalité:

$$s(x) = s^*(x) + (s(x) - s^*(x))$$

l'erreur $(s(x) - s^*(x))$ est, cette fois, connue exactement.

Considérant la somme: $z_s(x) = z^*(x) + (s(x) - s^*(x))$

on peut montrer que $z_s(x)$ constitue bien une simulation conditionnelle au sens défini au § a).

Le fait qu'elle coïncide avec $z(x)$ en tout point expérimental x_i provient directement de ce que le krigeage est un interpolateur exact.

On a:

$$z^*(x_i) = z(x_i)$$

$$s^*(x_i) = s(x_i)$$

et finalement:

$$z_s(x_i) = z(x_i)$$

Le fait qu'elle ait également même covariance généralisée a été démontré par ailleurs [2] en faisant appel à d'autres propriétés de l'estimateur de krigeage, et sera admis ici.

Le rapport des simulations conditionnelles au krigeage, signalé au § a), se démontre comme suit.

En un point x quelconque, $z^*(x)$ étant fixé, on considère:

$$Z_s(x) = z^*(x) + [S(x) - S^*(x)]$$

on a

$$E [Z_s(x)] = z^*(x) + E[S(x) - S^*(x)]$$

le krigeage étant sans biais:

$$E [S(x) - S^*(x)] = 0$$

et l'on a: $E [Z_S(x)] = z^*(x)$

de même: $\text{var} [Z_S(x)] = E [(Z_S(x) - z^*(x))^2] = E [(S(x) - S^*(x))^2]$
 $= \sigma_k^2$

d) Exemples

On examinera maintenant deux applications de cette méthode dans le domaine des sciences de l'eau. Le premier exemple est constitué par trois simulations conditionnelles d'un orage sur le bassin de l'Ouadi Kadjemeur déjà cité. Sur les cartes de la figure 55, l'isohyète 40 mm a été figuré d'un trait plus épais pour faciliter la lecture.

Alors que la carte krigée était, on l'a vu, entièrement lisse, ces cartes présentent un aspect plutôt bosselé, qui s'accorde bien avec ce à quoi on pouvait s'attendre au sujet de la variabilité spatiale d'un orage. La structure cellulaire des précipitations est traduite d'une manière assez comparable à celle qui a pu être observée ailleurs dans la réalité grâce aux échos radar (Fig.13, p.29).

On peut noter également que les trois variantes diffèrent notablement (de 10 à 60 mm) dans la partie est du bassin qui a été peu reconnue et où les écarts-types de krigeage étaient importants.

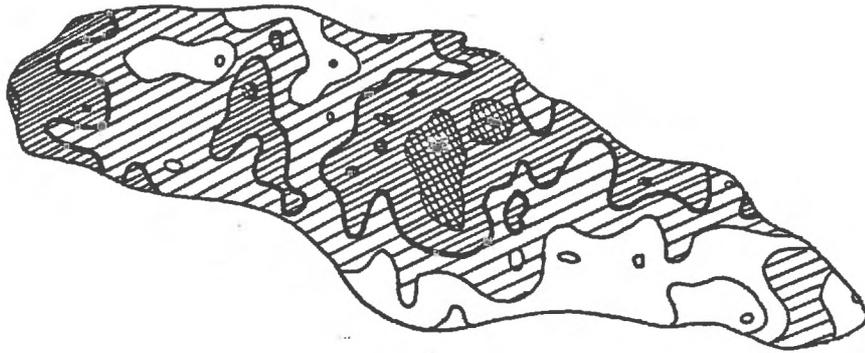
Le deuxième exemple, obtenu à partir de données piézométriques, montre encore mieux le rapport des simulations conditionnelles au krigeage. On reprendra le cas de la nappe alluviale de l'Huveaune, qui, bien que réel, se présente avec la clarté d'un cas d'école.

On a repris, à côté de la carte krigée (Fig.56), la carte d'écart-type correspondante (Fig.57). L'aquifère est, on l'a vu, connu par de nombreux piézomètres à l'aval (d'où une zone où les écarts-types sont inférieurs à 10 cm), mais par un seul piézomètre à l'amont. On peut constater que la précision, excellente à l'aval, décroît rapidement à mesure que croît la distance aux points expérimentaux. Les figures 58 et 59

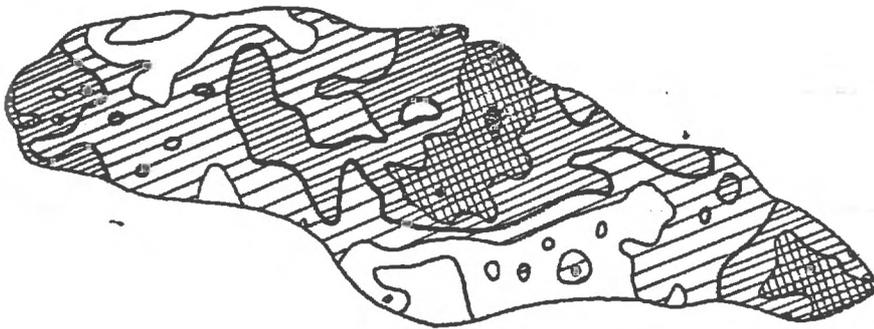
comparent l'estimation par krigeage à deux simulations conditionnelles. Celles-ci tombent toujours à l'intérieur de la fourchette à $\pm 2\sigma$ autour du krigeage. Quand l'écart-type d'estimation σ est faible, toutes les simulations conditionnelles sont approximativement confondues avec le résultat du krigeage (cf. moitié aval). Elles passent toutes par les points expérimentaux (cf. le piézomètre isolé de l'amont). Mais, quand σ est grand, les simulations peuvent différer de façon importante, en demeurant cependant compatibles avec les données disponibles (cf. moitié amont).

Ce type d'outil permet ainsi de rechercher parmi les modèles possibles celui qui semble le mieux explicable à partir du contexte hydrogéologique. Il permet également de mieux visualiser toute la latitude qui est laissée lors du calage d'un modèle.

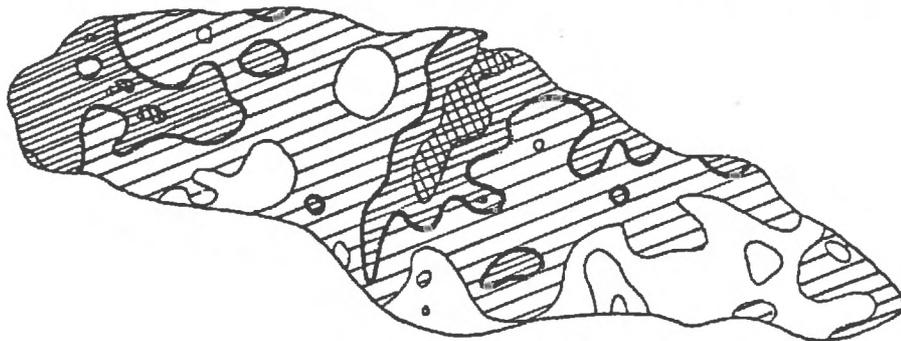
Ce dernier problème est au centre de la pratique actuelle en hydrogéologie mathématique, et il convient, avant de conclure, d'examiner comment les résultats précédents permettent de l'éclairer d'un jour nouveau.



variante n°1



variante n°2



variante n°3

FIG. 55 - BASSIN-VERSANT DE KADJEMEUR
TROIS SIMULATIONS CONDITIONNELLES
DE L'AVERSE DU 6/8/66

PIEZO-HUVEAUNE KRIGEAGE
UNITE DES COTES 0.01

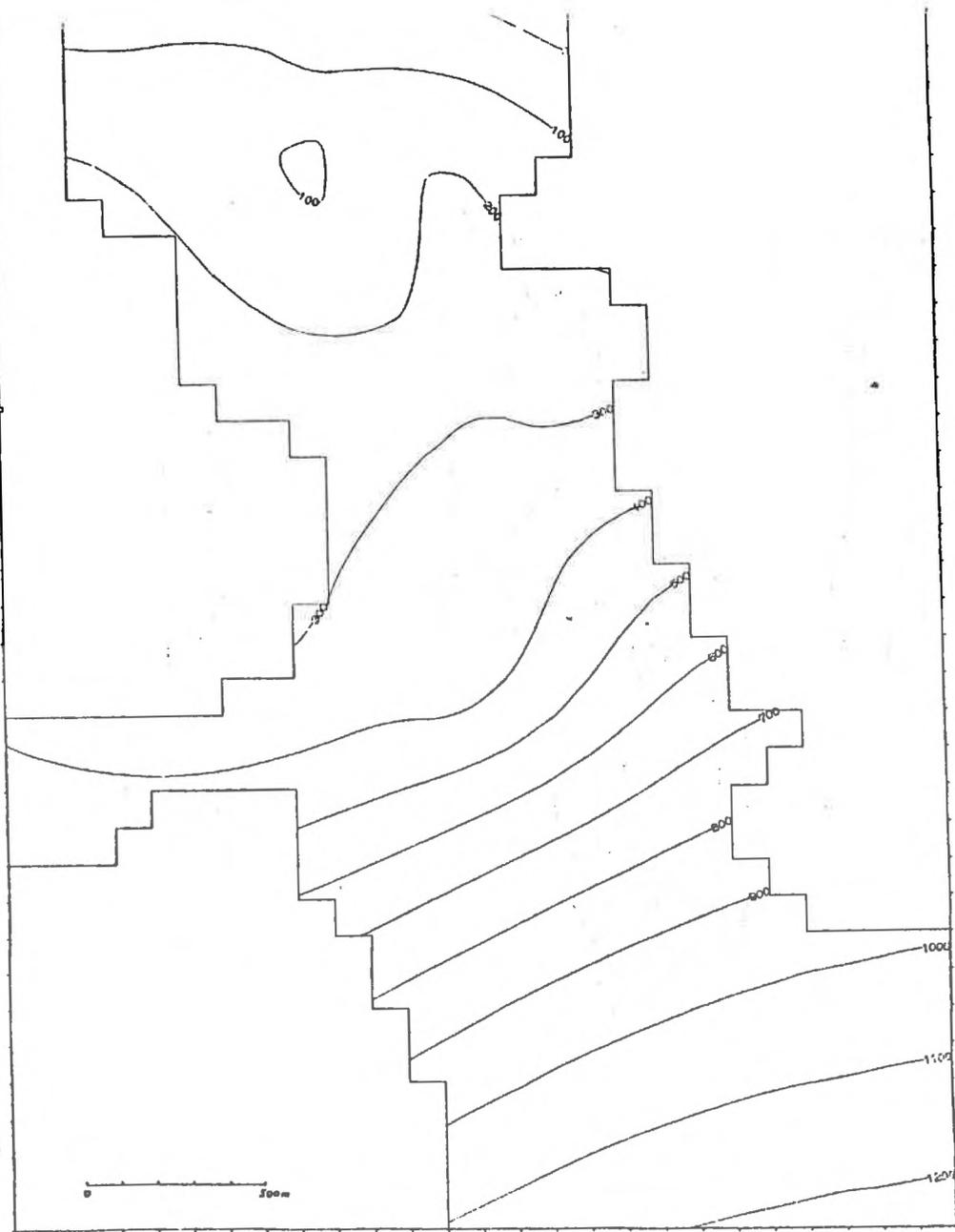
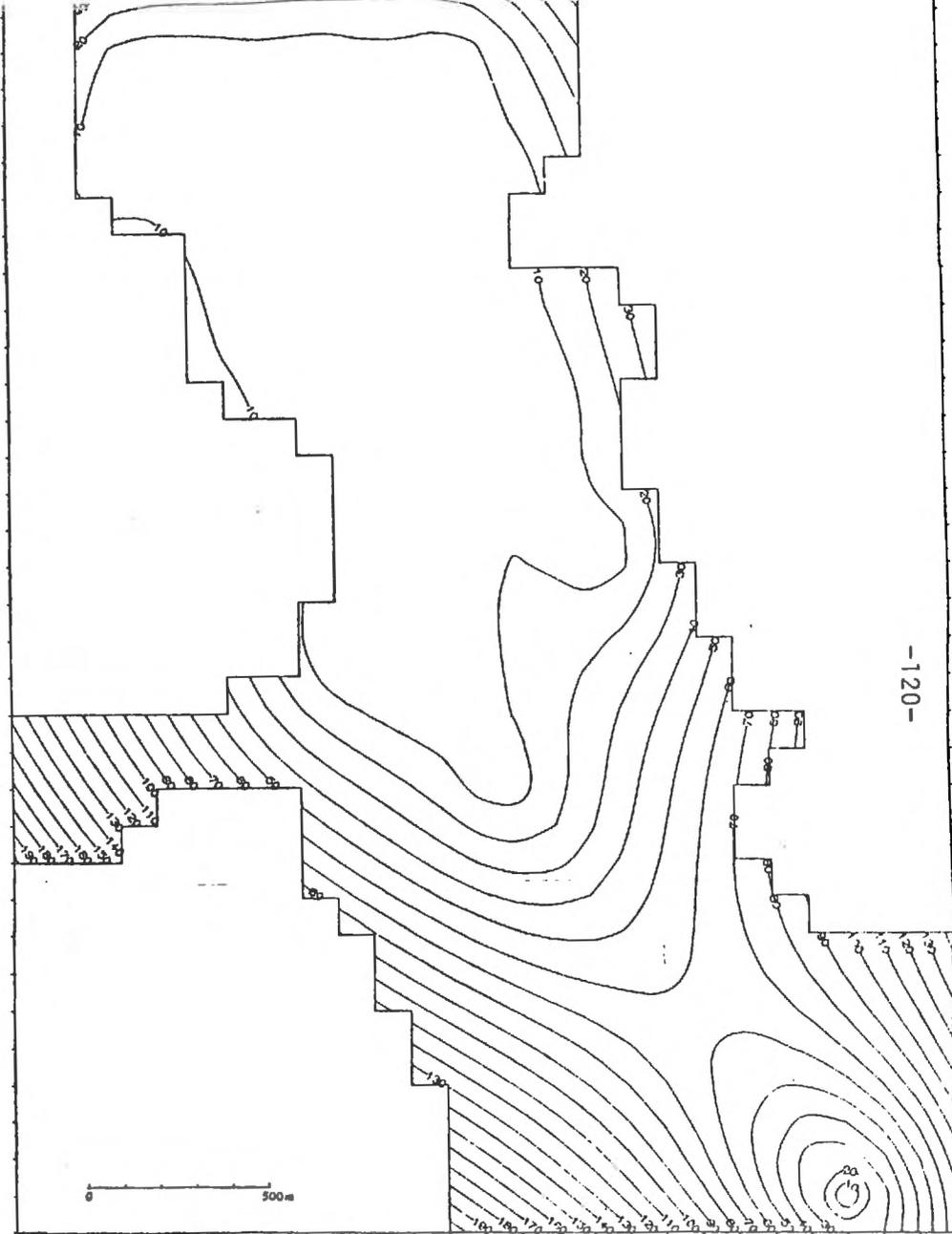


FIG. 56 & 57 - NAPPE DE L'HUVEAUNE: CARTE KRIGEE

PIEZO-HUVEAUNE ECART-TYPE
UNITE DES COTES 0.01



ET

ECARTS-TYPES D'ESTIMATION (en cm)

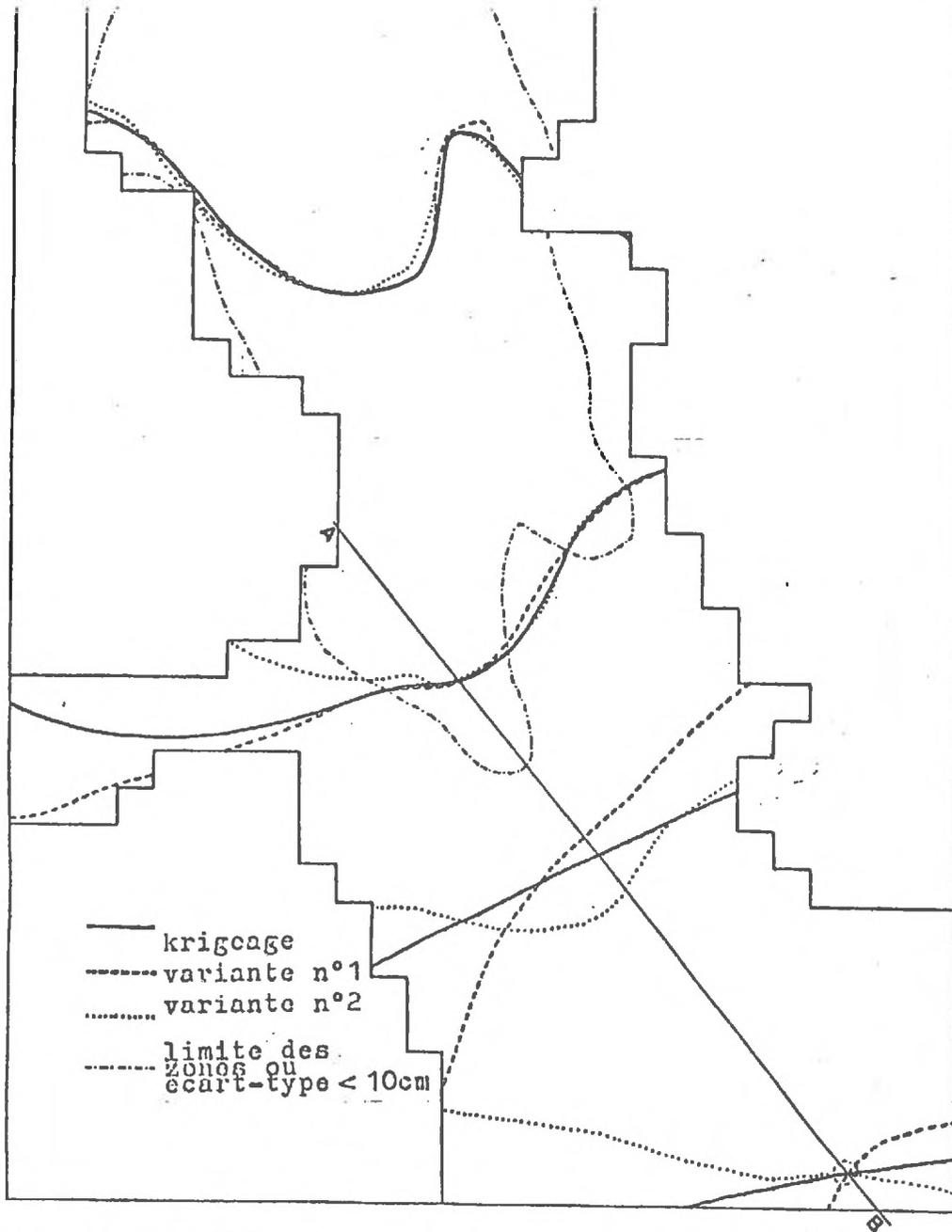


FIG. 58 - COMPARAISON ENTRE LA CARTE KRIGEE ET DEUX SIMULATIONS CONDITIONNELLES

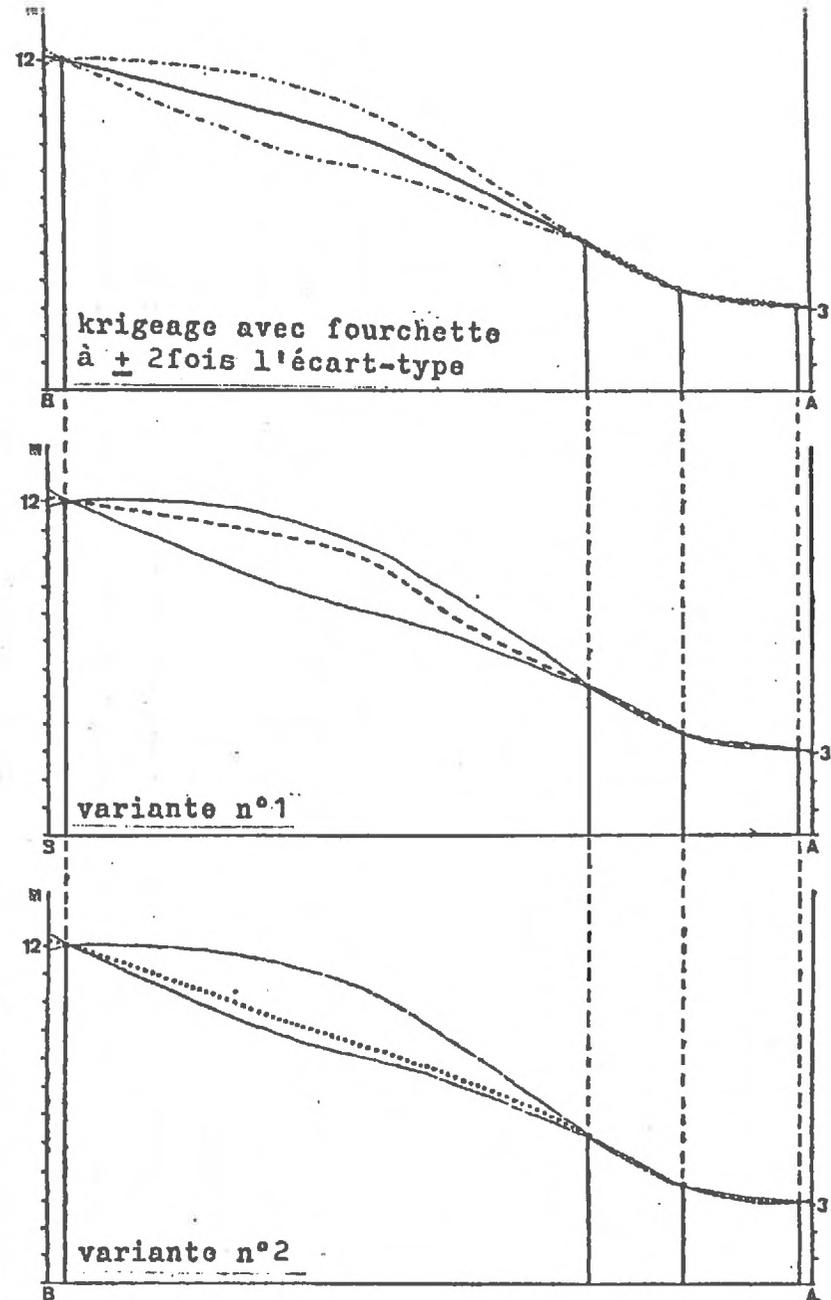


FIG. 59 - COMPARAISON SUR LE PROFIL AB DU KRIGEAGE ET DE DEUX SIMULATIONS CONDITIONNELLES

4 - IDENTIFICATION DES SYSTEMES HYDROGEOLOGIQUES

Le calage d'un modèle mathématique de nappe souterraine consiste à essayer de reproduire des états piézométriques observés, en ajustant différents paramètres (transmissivités, débit d'infiltration, etc...). Cet ajustement se fait généralement par essais et erreurs, en comparant les cartes piézométriques tracées à partir des résultats des calculs et la carte de référence.

Le krigeage permet d'établir, à partir des données de terrain, un document qui pourra être comparé directement aux résultats du modèle; il permet en outre de définir un critère d'adéquation entre le modèle et la réalité.

Le procédé classique de superposition des deux jeux d'isopièzes est trop subjectif pour conduire à un critère formulable de façon mathématique. De plus, il est à noter que dans les modèles, la cote piézométrique attribuée à une maille est représentative plus d'une valeur moyenne sur la maille que d'une valeur ponctuelle au centre de celle-ci. On a alors intérêt à estimer directement par krigeage les valeurs moyennes par maille, cette estimation étant toujours assortie de la fourniture d'un écart-type d'estimation. Disposant ainsi d'un indicateur de la précision de la connaissance piézométrique sur les différentes mailles, on peut utiliser cette information pour bâtir un critère objectif d'adéquation du calage [1].

L'écart de calage, qui peut être défini comme la différence entre la piézométrie calculée sur le modèle et celle obtenue par krigeage, doit être compatible avec la valeur de la fourchette d'incertitude correspondante. Si l'on adopte la fourchette conventionnelle à $\pm 2\sigma$, on jugera le calage correct dans les zones où l'écart de calage réduit, c'est-à-dire rapporté à l'écart-type d'estimation, est en valeur absolue inférieur à 2. On rejoint là une intuition qui veut que l'on affine le calage dans les zones bien reconnues, et que l'on puisse se contenter d'un calage approximatif dans les zones mal reconnues.

On peut encore exprimer le critère adopté sous la forme:

$$\max_i \frac{|z_i^* - z_i^c|}{\sigma_{k_i}} \leq 2$$

l'indice i décrivant l'ensemble des différentes mailles, et z_i^c représentant la valeur obtenue sur le modèle à la maille i .

On trouvera, figures 60 et 61 la répartition des écarts de calage et des écarts réduits pour un même état du calage de la nappe de Kairouan. On remarquera que le passage à l'écart réduit a permis de mieux focaliser les zones où il subsiste un problème. Le calage peut ainsi être considéré comme satisfaisant sur les limites ouest et dans la partie sud de la nappe, où pourtant on trouve des écarts de calage supérieurs parfois à 5 mètres: la piézométrie y est en fait assez mal connue. Mais, par contre, on constate que, dans l'état du calage considéré, la bordure est de la nappe pose encore un problème (conditions aux limites ou relation avec d'autres nappes).

L'effort doit être poursuivi dans cette voie de l'identification des systèmes hydrogéologiques, où le recours aux méthodes probabilistes devrait permettre de sortir d'une relative stagnation, en donnant une impulsion nouvelle.

ETUDE HYDROGEOLOGIQUE
DE LA PLAINE DE KAIROUAN
SUR MODELES MATHENATIQUES

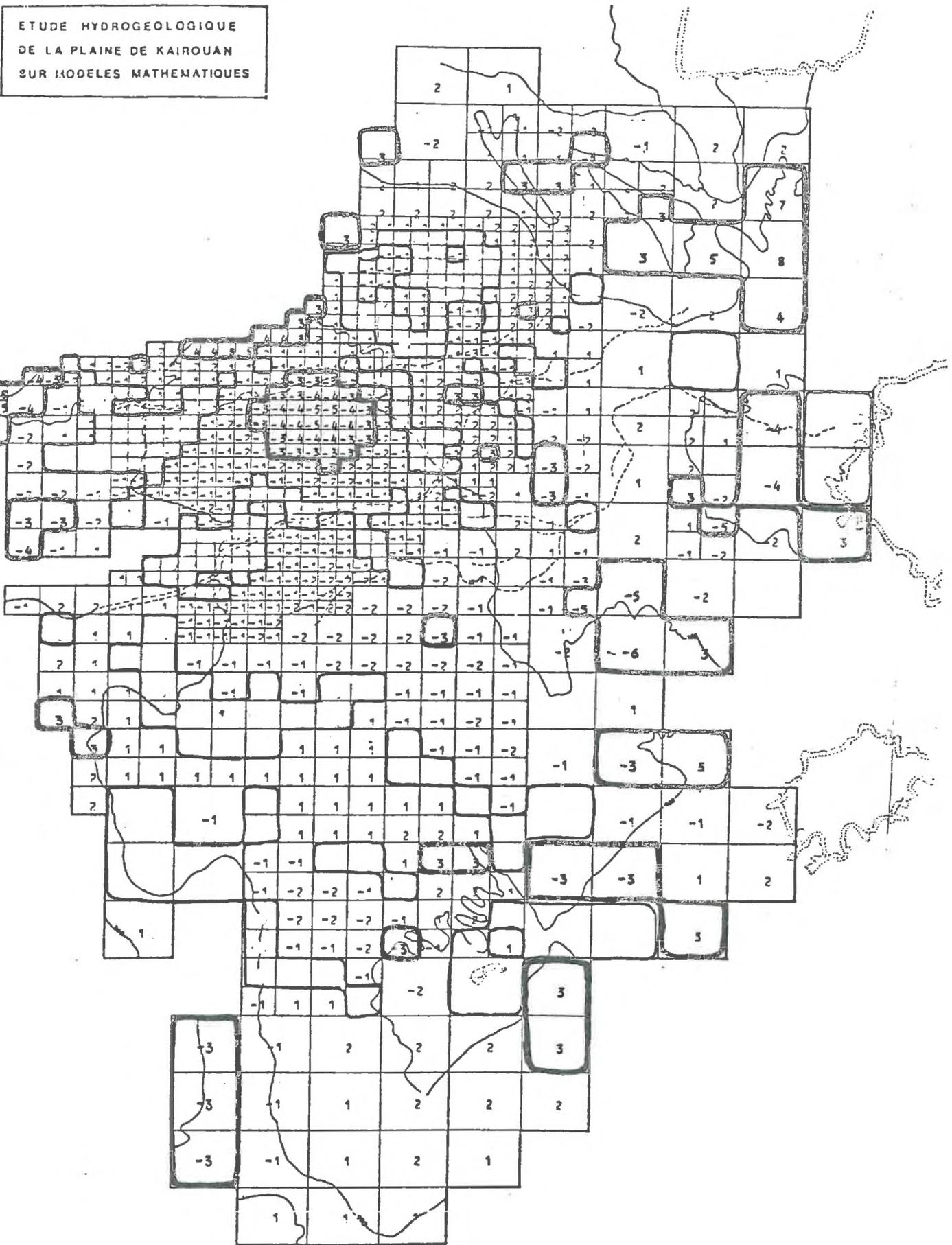


FIG. 60 - NAPPE DE KAIROUAN: ECARTS DE CALAGE (en m)

ETUDE HYDROGEOLOGIQUE
DE LA PLAINE DE KAIROUAN
SUR MODELES MATHÉMATIQUES

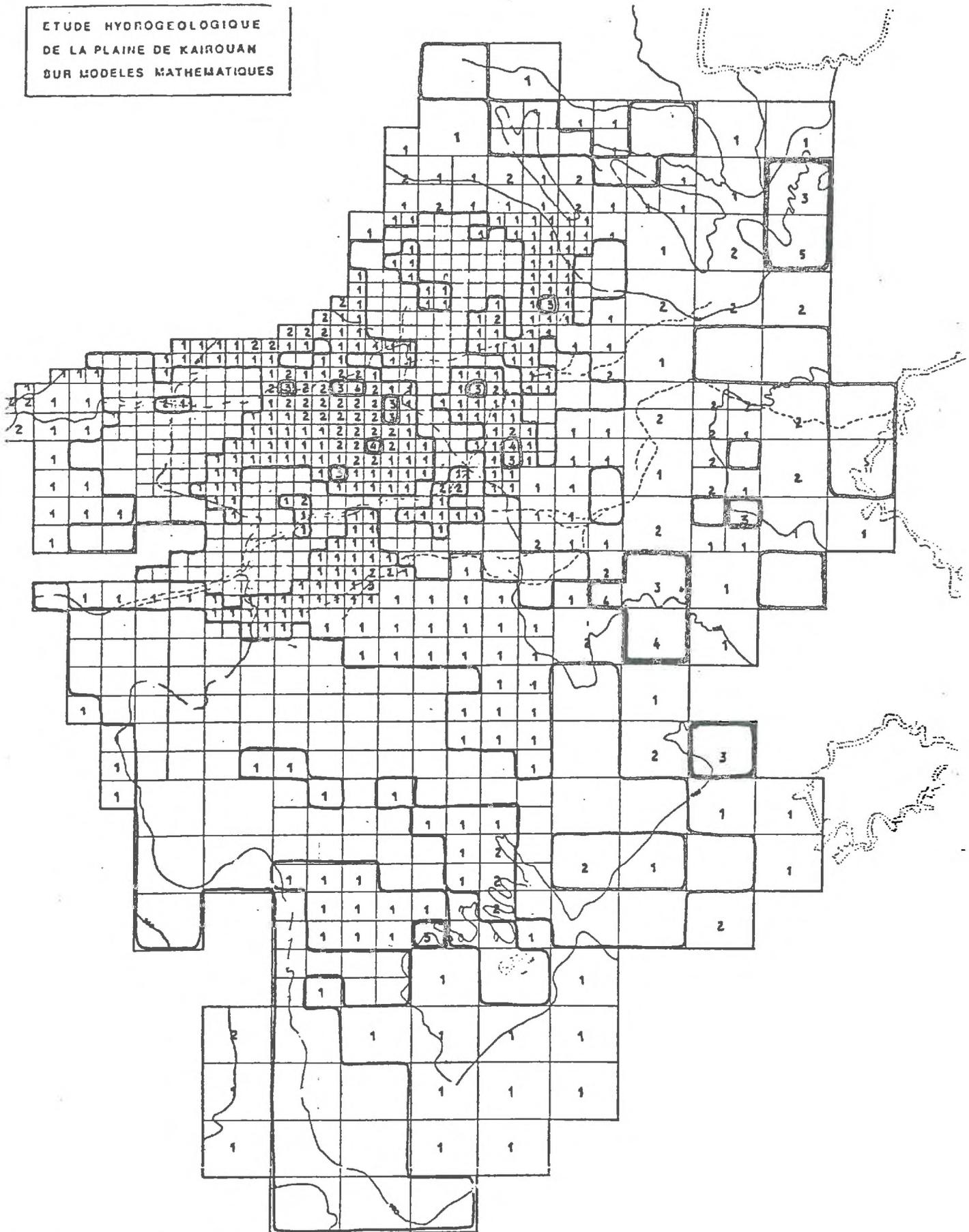


FIG. 61 - NAPPE DE KAIROUAN: ECARTS REDUITS

$$= \frac{\text{ECARTS DE CALAGE}}{\text{ECARTS-TYPES DE KRIGAGE}}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP. III, § 3 et 4

- [1] BESBES, M., DELHOMME, J.P., de MARSILY, G. (1975):
Précision de la connaissance de la piézométrie d'un
aquifère: conséquence sur le calage d'un modèle.
Congrès International d'Hydrogéologie, Porto-Alegre, 1975
Ecole des Mines, L.H.M., RD/75/23 bis
- [2] DELFINER, P. (1975):
Linear estimation of non-stationary phenomena.
Proc. of NATO Adv. Study Inst., Rome, 1975
- [3] DELFINER, P., DELHOMME, J.P. (1973):
Optimum interpolation by kriging.
Display and analysis of spatial data, pp. 96-114.
(Proc. of NATO Adv. Study Inst., Northham, 1973).
John Wiley & Sons.
- [4] GUIBAL, D. (1972):
Simulation de schémas intrinsèques.
Ecole des Mines, C.M.M., N-291
- [5] JOURNEL, A.G. (1974):
Geostatistics for conditional simulation of orebodies.
Economic Geology, vol. 69, n°5, pp. 673-687
- [6] MATHERON, G. (1972):
The turning bands: a method for simulating random functions
in R^n .
Ecole des Mines, C.M.M., N-303.
- [7] MATHERON, G. (1973):
The intrinsic random functions and their applications.
Adv. in Appl. Prob., 5, pp. 439-468.
- [8] ORFEUIL, J.P. (1972):
Simulation du Wiener-Lévy et de ses intégrales.
Ecole des Mines, C.M.M., N-290.

CONCLUSION

L'acquisition de données ponctuelles ne constituait pas un but en soi, mais était destinée à permettre d'étendre cette connaissance fragmentaire à l'ensemble du domaine. A nouveau, la résolution du problème d'estimation qui était ainsi posé ne saurait être le terme du travail, mais ne constitue qu'une étape vers la compréhension du système hydrologique ou hydrogéologique étudié.

On a vu qu'en ce qui concerne les écoulements souterrains, on débouchait par le biais du calage des modèles numériques sur un problème d'identification, et non plus seulement d'estimation. A partir de la connaissance que l'on a de la forme des équations régissant les écoulements et des quelques fenêtres ponctuelles ouvertes sur le système physique, il s'agit de parvenir à simuler correctement le comportement de ce système pour offrir au gestionnaire des eaux un modèle sur lequel il pourra raisonner. Mais les précipitations et la piézométrie ne sont pas connues de façon exhaustive; un procédé quelconque d'identification du champ des transmissivités à partir de ces données (calage manuel d'un modèle ou procédure automatisée) ne peut conduire à un résultat sans incertitude. La quantification de la confiance qu'on peut lui accorder pourrait demeurer une question académique si toute incertitude sur la transmissivité ne se traduisait immédiatement par une incertitude sur les débits qui pourront être tirés de l'aquifère, et ne se répercutait ainsi sur les prévisions du gestionnaire.

Alors qu'après les premiers succès des modèles mathématiques, l'hydrogéologie semblait le règne du déterminisme, la nécessité se fait jour, actuellement, du recours à une approche probabiliste pour sortir de

l'impasse. Si les travaux consacrés à l'étude probabiliste des écoulements en milieu poreux étaient restés, par le passé, isolés (SCHWYDLER, 1962 [4], MATHERON, 1967 [3]), on assiste aujourd'hui à la parution d'articles [1], [2] où le mot "stochastique" qui n'était accolé jusque là qu'au mot "hydrologie", pris au sens strict de l'hydrologie de surface, voisine maintenant avec "eaux souterraines".

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA CONCLUSION

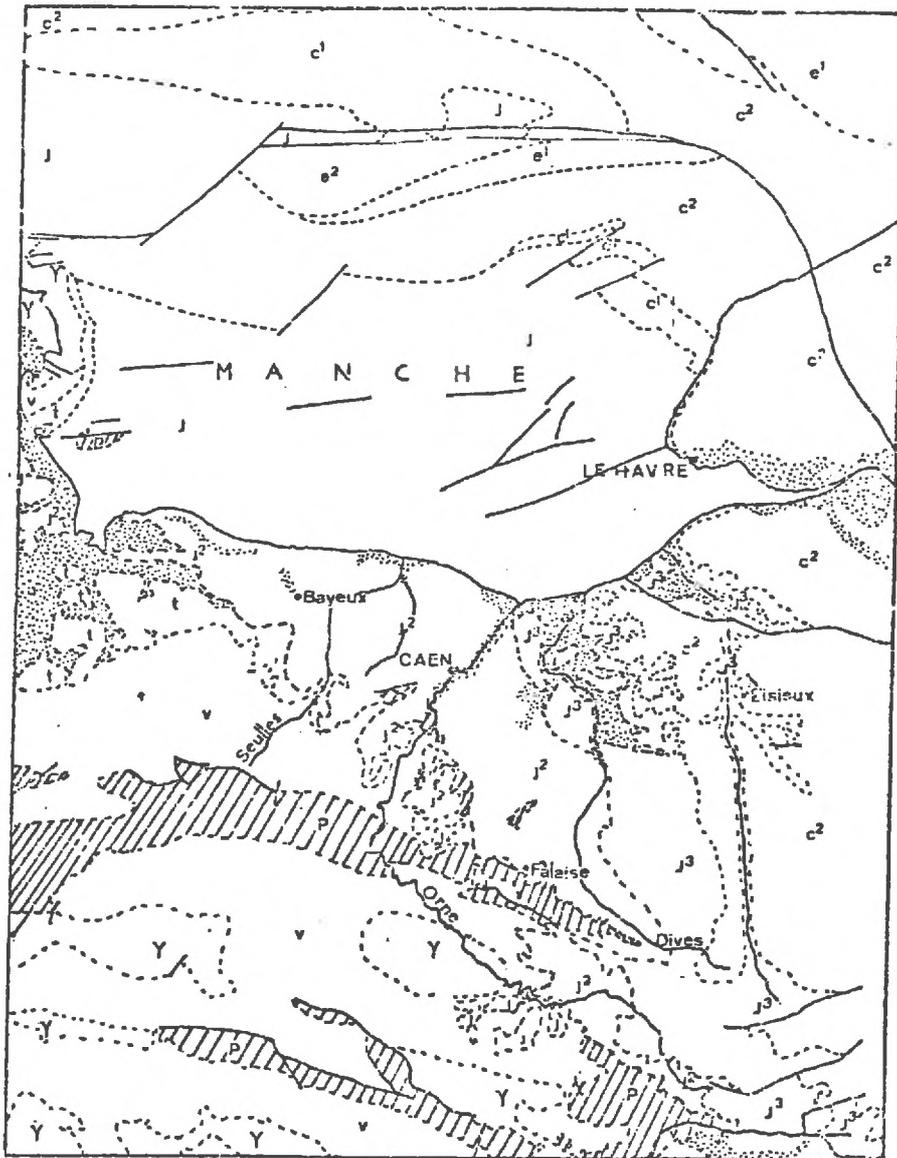
- [1] FREEZE, R.A. (1975):
A stochastic conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in non-uniform homogeneous media.
Water Resour. Res., vol.11, n°5, pp. 725-741.
- [2] GELHAR, L.W. (1976):
Effects of hydraulic conductivity variations on groundwater flows.
Second International Symposium on Stochastic Hydraulics,
Lund, 1976.
- [3] MATHERON, G. (1967):
Eléments pour une théorie des milieux poreux.
Masson & Cie.
- [4] SCHWYDLER, M.I. (1962) cité par [3]
Les courants d'écoulement dans les milieux hétérogènes.
Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. i mas, n°3, pp. 185-190

A N N E X E

FIG. A-1

CADRE DE L'ETUDE

échelle: 1/1000000



Légende

- a₂ alluvions
- e₂ éocène moyen et supérieur
- e₁ éocène inférieur
- c₂ crétacé supérieur
- c₁ crétacé inférieur
- J³ jurassique supérieur
- J² jurassique inférieur et moyen
- J jurassique indifférencié

- t permo-trias, trias
- P primaire
- v précambrien
- Y granite

d'après carte géologique de
la France - BRG

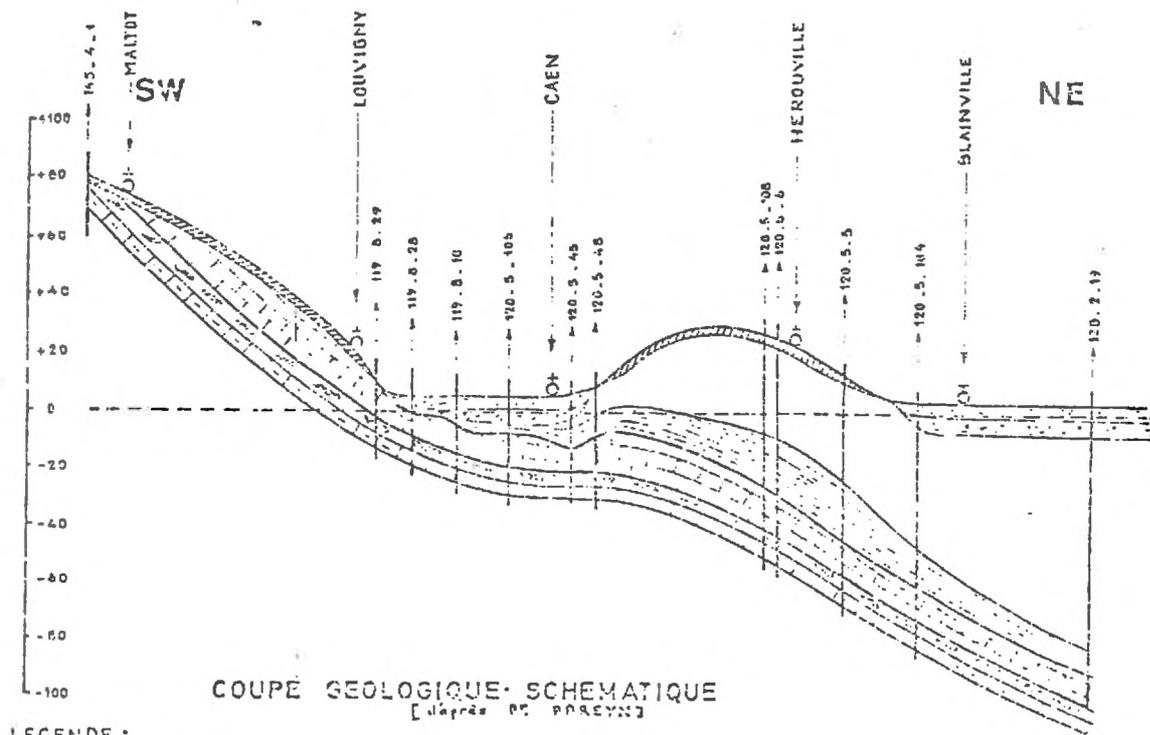
UN EXEMPLE COMPLET D'APPLICATION HYDROGEOLOGIQUE

L'ETUDE DES RESERVOIRS AQUIFERES DU DOGGER EN BASSE-NORMANDIE

CADRE DE L'ETUDE

Les problèmes d'alimentation en eau du bassin de l'Orne, et plus particulièrement ceux de la ville de Caen, ont rendu nécessaire la construction d'un modèle mathématique des aquifères de la région. Les terrains jurassiques des plaines de Caen, Falaise et Argentan constituent, en effet, d'importantes réserves d'eau souterraine qui apportent l'appoint indispensable aux ressources de surface.

Une coupe SO-NE passant par Caen permet de voir les relations pouvant exister entre les différentes unités structurales.



COUPE GEOLOGIQUE SCHEMATIQUE
[d'après P. FOREST]

LEGENDE :

- | | |
|--|---|
|  Limons |  Alluvions |
|  Bathonien calcaire |  Mâture |
|  Bathonien marneux (marnes de Port) |  Iles |
|  Eocene | |

ECHELLE : Longueurs 1:10000

Fig 7

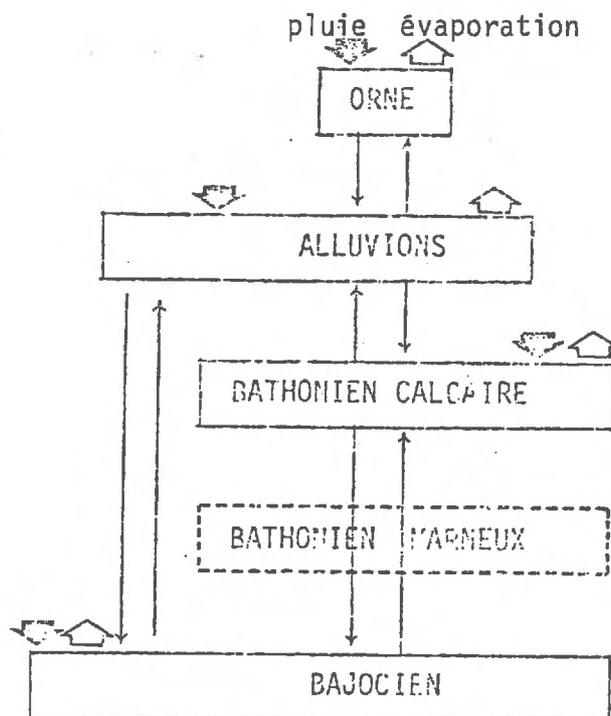
La succession la plus typique:

- alluvions des vallées,
- calcaire bathonien,
- argiles et marnes de Port-en Bessin,
- calcaire bajocien,
- substratum: argiles à poisson du Toarcien

est localement altérée:

- soit par disparition d'un ou plusieurs des termes de la série: ainsi l'aquifère bajocien existe seul dans la partie occidentale au-delà de la limite d'affleurement des argiles de Port-en-Bessin; de même, la partie sud de l'aquifère bathonien est entaillée par les bancs de grès armoricain affleurant dans le synclinal de la Brèche au Diable;
- soit au contraire par convergence des faciès stratigraphiques de termes contigus: toute la haute vallée de la Dives et du Laison, au sud-est de Caen, est constituée d'un empilement, sous un faciès essentiellement calcaire, de Bathonien sur le Bajocien; la structure y est, d'un point de vue hydraulique, de type monocouche.

Les transferts d'eau ont été schématisés de la façon suivante:



Le niveau de Bathonien marneux disparaissant dans la partie sud de la zone étudiée.

Les caractéristiques du modèle qui a été construit peuvent se résumer ainsi:

| Couche \ Taille de maille | Nombre de mailles par couche | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | Micro 0.25 km ² | Petite 1 km ² | Moyenne 4 km ² | Grande 16 km ² |
| 0 Rivières | 65 | 65 | 18 | 0 |
| 1 Alluvions | 92 | 40 | 15 | 2 |
| 2 Bathonien (+ Bajocien.) | 256 | 252 | 195 | 10 |
| 3 Bajocien seul | 27 | 282 | 165 | 14 |

La surface cumulée des différentes couches représentant le milieu poreux atteint 4.880 km². Le modèle comporte au total 1351 mailles.

Afin de synthétiser l'ensemble de l'information hydrogéologique rassemblée en vue de sa construction, on a décidé d'appliquer la technique du krigeage à l'étude des variations spatiales des grandeurs suivantes:

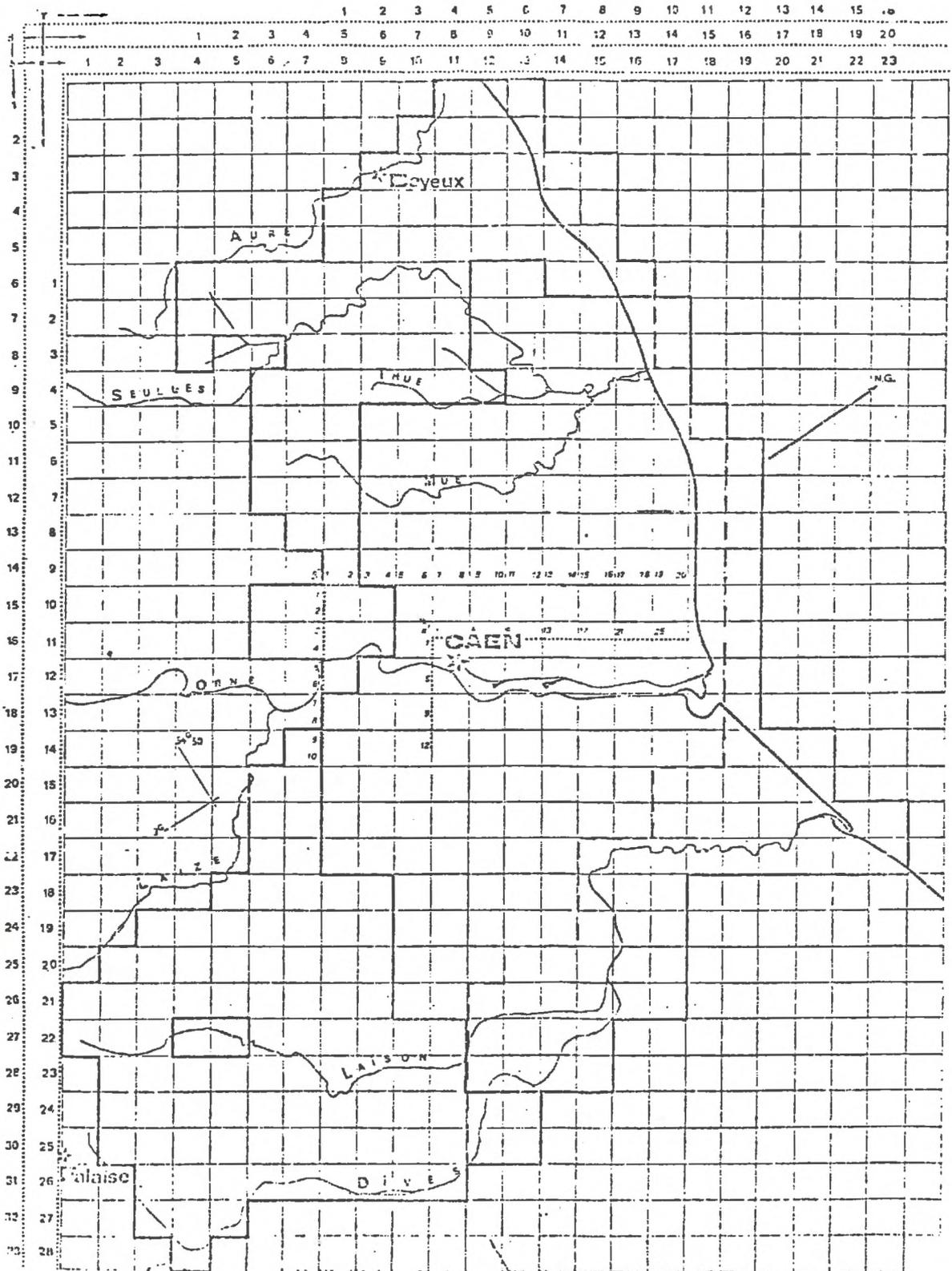
- transmissivités des deux aquifères bathonien et bajocien,
- piézométrie de l'ensemble du Dogger,
- cotes des murs des deux aquifères, et épaisseur des marnes de Port-en-Bessin.

La figure A-3 regroupe les différents maillages utilisés.

ETUDE DES TRANSMISSIVITES

Pour chacun des deux aquifères on a estimé par krigeage les valeurs moyennes de la transmissivité sur des mailles de 2 x 2 km (correspondant à la taille des mailles moyennes du modèle).

FIG. A-3 - DIFFERENTES GRILLES UTILISEES
POUR LE KRIGEAGE



a) Données disponibles:

Une analyse rapide de l'ensemble des données de transmissivité et de débit spécifique existant sur les aquifères du Dogger a montré:

- le caractère sensiblement lognormal des variables T et Q/S, suggérant de recourir à une transformation logarithmique sur ces variables;
- l'existence d'un coefficient de corrélation de 0,90 entre leurs logarithmes (calculé à partir des 59 couples disponibles).

Il a donc été décidé, pour chacun des deux aquifères étudiés - Bathonien et Bajocien - d'utiliser les données de débit spécifique pour étendre le jeu de transmissivités disponible à partir des seuls essais de pompage, en procédant à une régression linéaire de $\log T$ en $\log Q/S$.

• Les figures A-4 et A-6 montrent la position des différents puits et forages pour chacune des deux nappes, les valeurs de transmissivités n'étant indiquées qu'en cas d'existence d'un essai de pompage.

• Sur les figures A-5 et A-7, où sont reportés graphiquement les couples $(\log_{10} T, \log_{10} (Q/S))$, apparaît nettement l'existence d'une liaison linéaire entre ces deux variables, en ce qui concerne le Bathonien que le Bajocien.

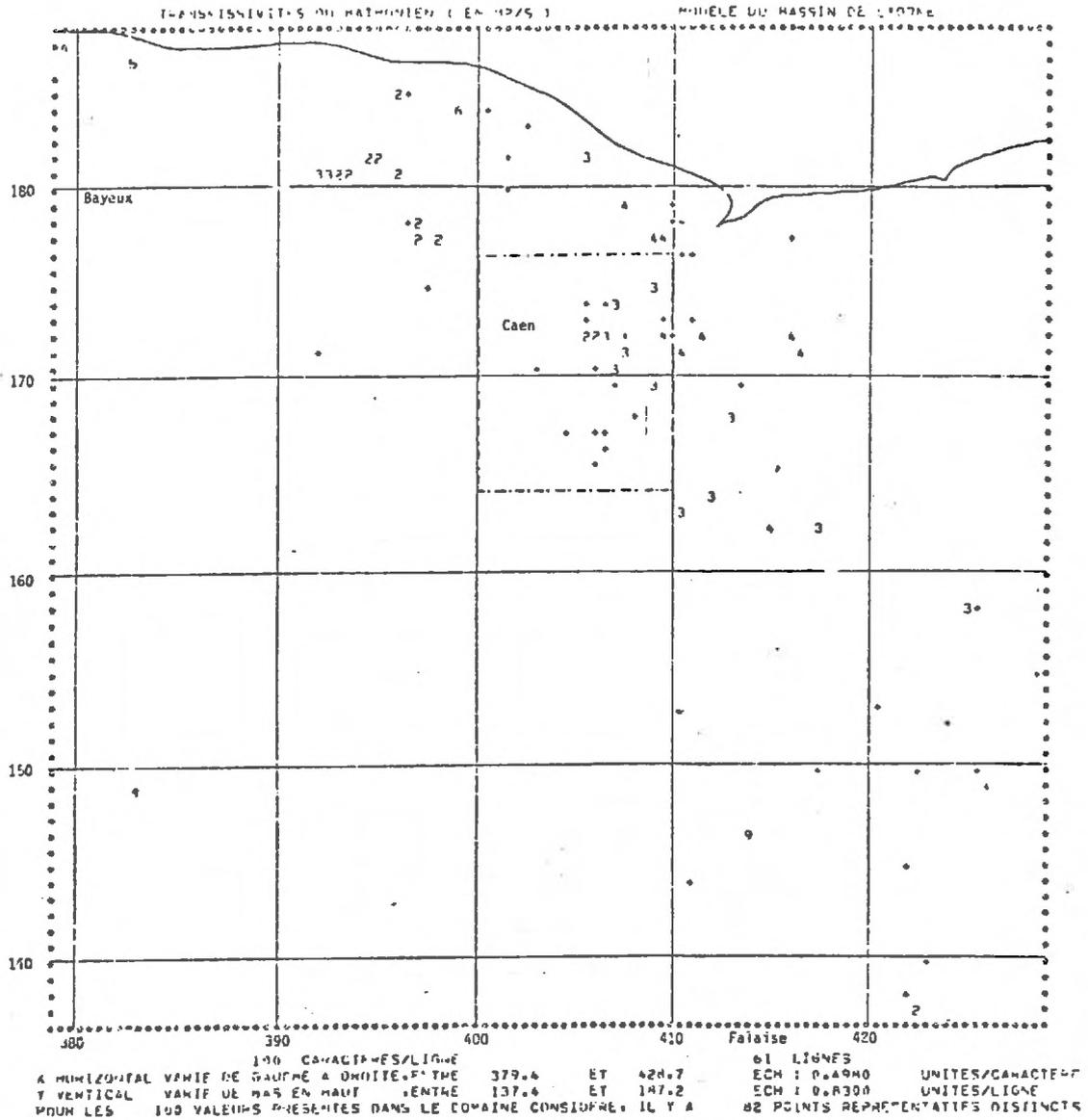
Les coefficients a et b des équations de régression: $\log_{10} T = a \log_{10} Q/S + b$ ont été calculés par moindres carrés, et les droites de régression tracées sur les figures A-5 et A-7. Pour l'aquifère du Bathonien, à partir des 45 couples disponibles, on a obtenu:

$$\log_{10} T = 0,898 \log_{10} Q/S - 0,209$$

En ce qui concerne le Bajocien, malgré le faible nombre de couples (10), le calcul a néanmoins été fait et a donné:

$$\log_{10} T = 1,30 \log_{10} Q/S + 0,563$$

FIG. A-4 - BATHONIEN: POSITION DES FORAGES ET VALEURS DE TRANSMISSIVITES OBTENUES PAR ESSAIS DE POMPAGE

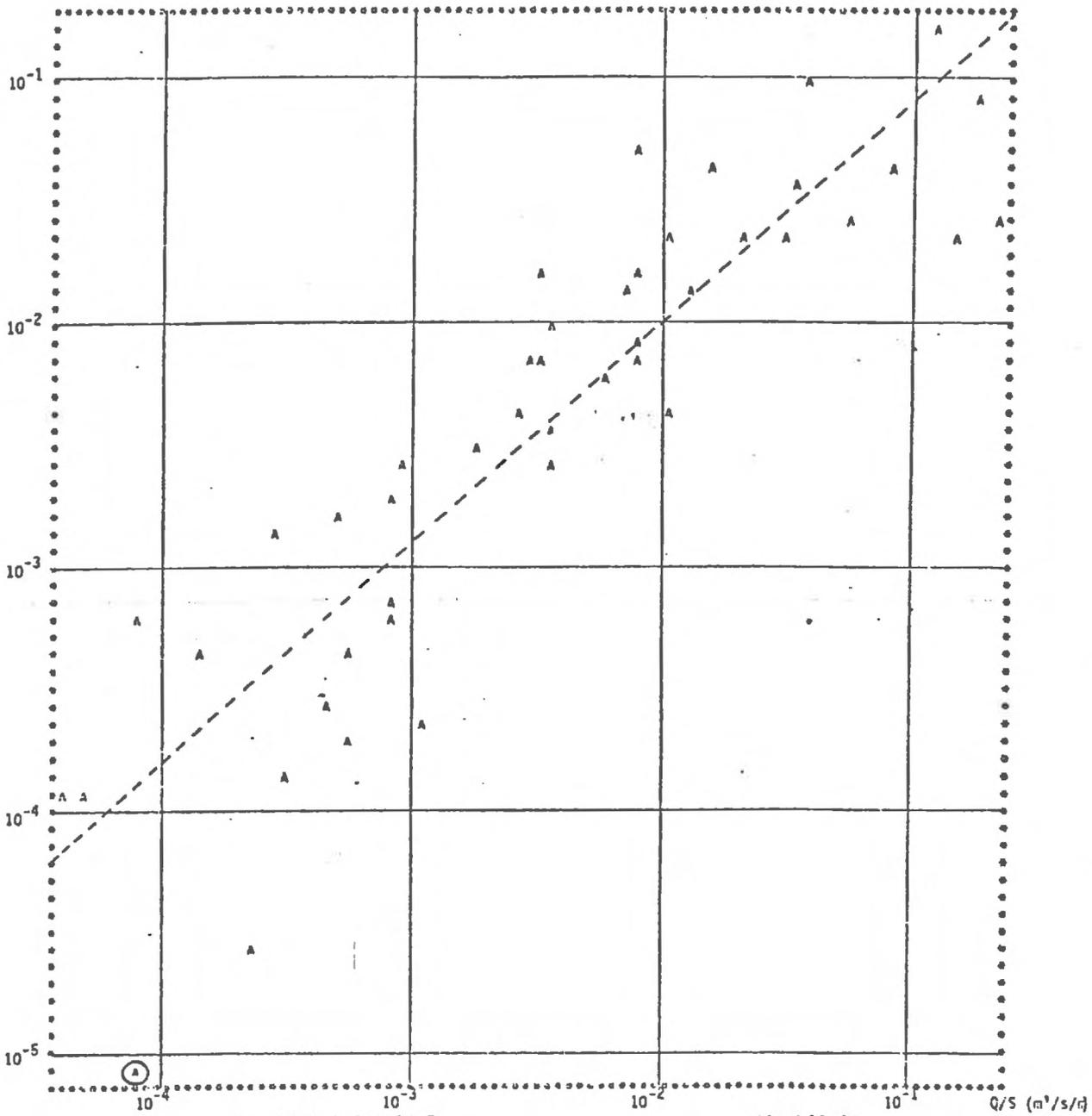


- Le signe + est réservé aux forages où aucun essai de pompage n'a permis de déterminer la transmissivité.

- Les valeurs numériques sont affectées aux forages où la transmissivité est connue par essais de pompage.

- 1 - représente les valeurs de T supérieures à 10^{-1} m²/s
- 2 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-1} et 10^{-2} m²/s
- 3 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-2} et 10^{-3} m²/s
- 4 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-3} et 10^{-4} m²/s
- 5 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-4} et 10^{-5} m²/s
- 6 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-5} et 10^{-6} m²/s
- 7 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-6} et 10^{-7} m²/s
- 8 - représente les valeurs de T comprises entre 10^{-7} et 10^{-8} m²/s
- 9 - représente les valeurs de T inférieures à 10^{-9} m²/s.

FIG. A-5 - AQUIFERE DU BATHONIEN: REGRESSION LINEAIRE DE LOG₁₀(T)
EN LOG₁₀ (Q/S)



49 CARACTERES/LIGNE
 A HORIZONTAL VARIE DE GAUCHE A DROITE, ENTREE -4.409 ET -0.6540
 Y VERTICAL VARIE DE BAS EN HAUT, ENTREE -5.074 ET -0.7959
 POUR LES 45 VALEURS PRESENTES DANS LE DOMAINE CONSIDERE, IL Y A 45 POINTS REPRESENTATIFS DISTINCTS

A1 LIGNES
 ECH : 0.4261E-01 UNITES/CARACTERE
 ECH : 0.7139E-01 UNITES/LIGNE

RTIME ALORIGIT) = 0.498E 00 PALORIGIT) / S) -0.209E 00 A PARTIR DES 45 POINTS DISPONIBLES VAR.RES. = 0.205E 00

FIG. A-6 - BAJOCIEN: POSITION DES FORAGES ET VALEURS DES TRANSMISSIVITES
OBTENUES PAR ESSAIS DE POMPAGE

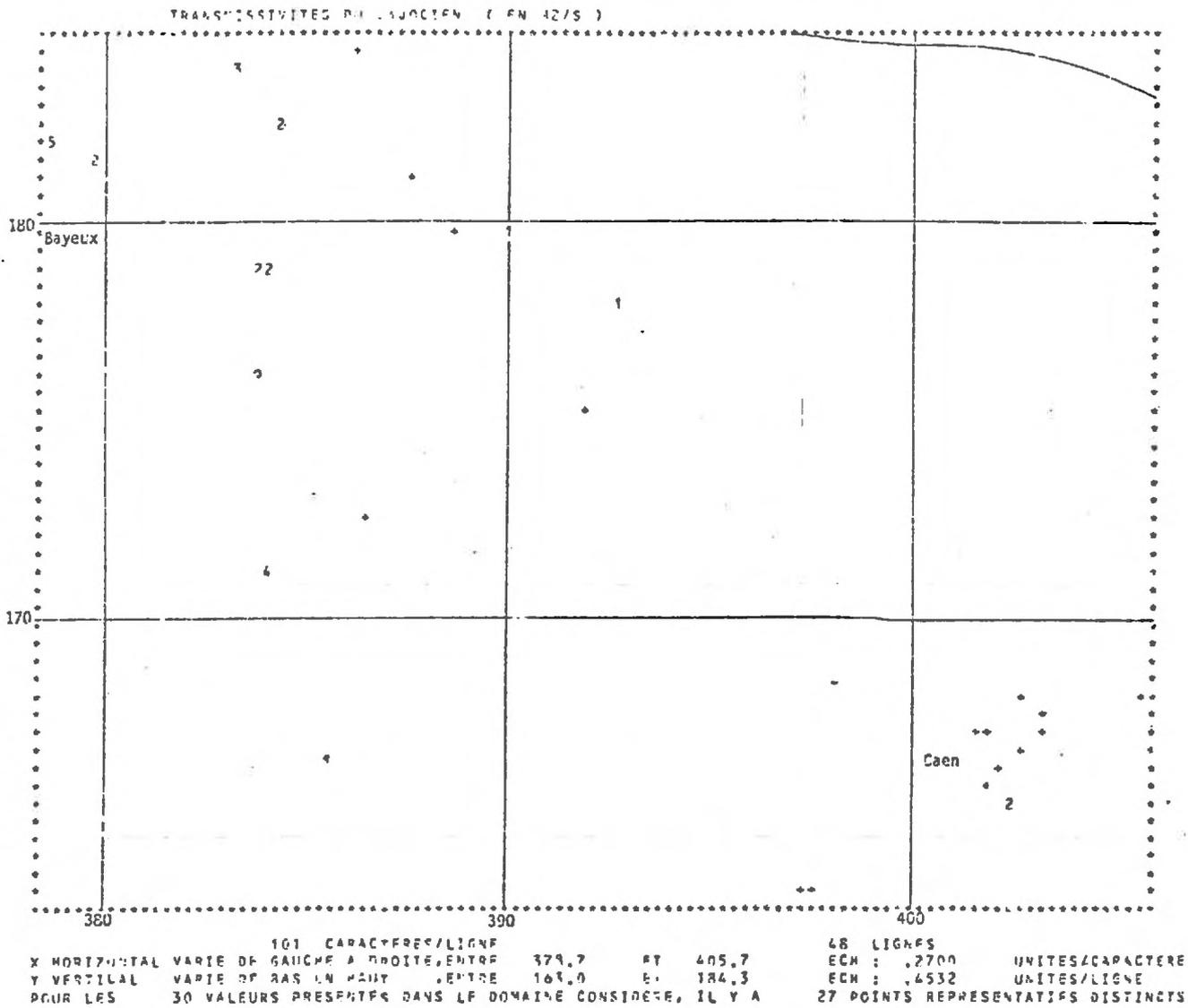
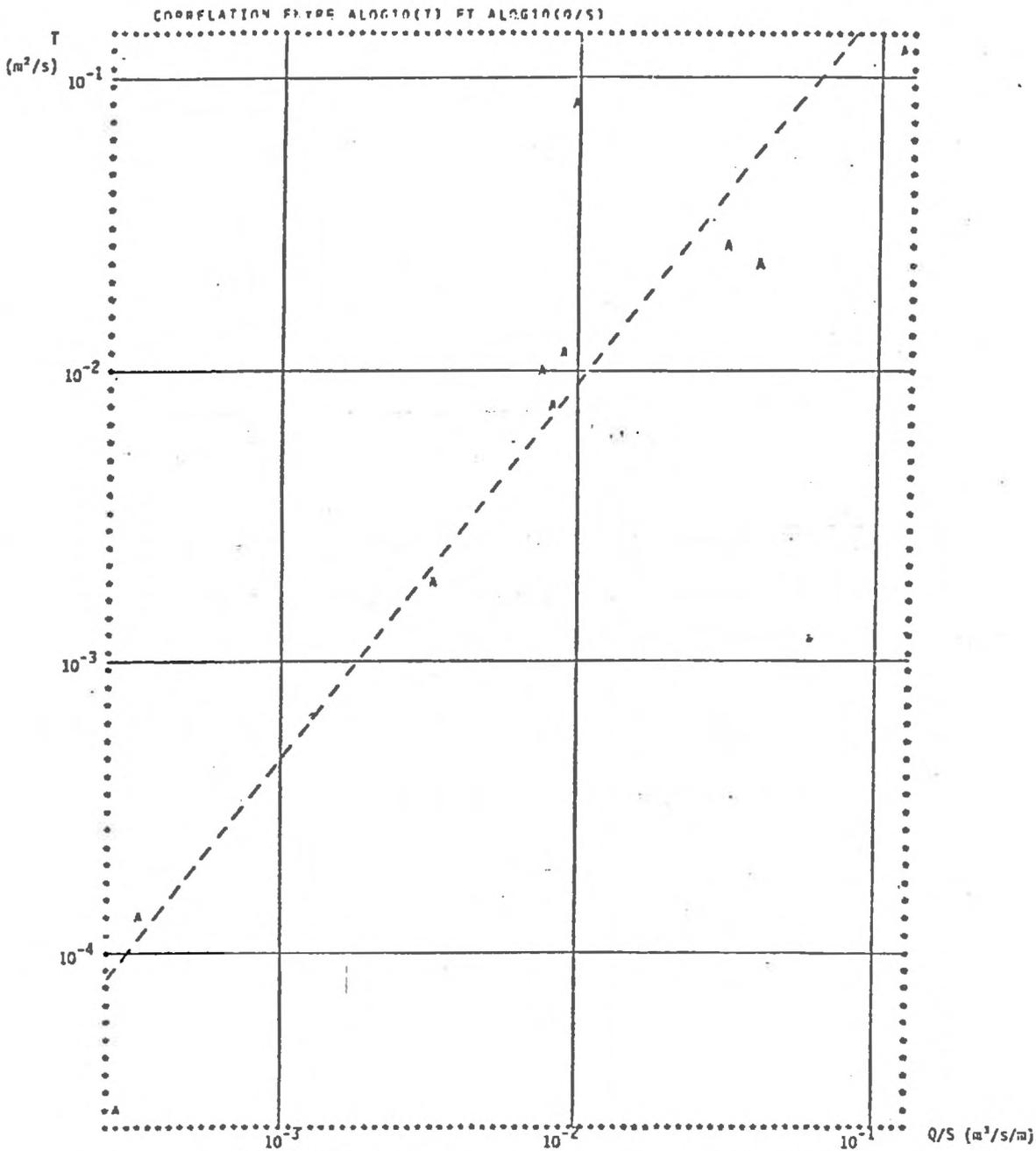


FIG. A-7 - AQUIFERE DU BAJOCIEN: REGRESSION LINEAIRE DU $\log_{10}(T)$
EN $\log_{10}(Q/S)$



73 CARACTERES/LIGNE

61 LIGNES

X HORIZONTAL VARIE DE GAUCHE A DROITE, ENTRE -3,540 ET -0,9234 FCM 1 ,3634E-01 UNITES/CARACTERE
 Y VERTICAL VARIE DE BAS EN HAUT, ENTRE -4,556 ET -0,9079 FCM 1 ,6031E-01 UNITES/LIGNE
 POUR LES 10 VALEURS PRESENTEES DANS LE DOMAINE CONSIDERE, IL Y A 10 POINTS REPRESENTATIFS DISTINCTS

STIENT $\text{ALOG}_{10}(T) = .130E+01 \cdot \text{ALOG}_{10}(Q/S) + .543E+00$ A PARTIR DES 10 POINTS DISPONIBLES VAR.RES.= ,186E+00

• La liaison linéaire entre $\log_{10} T$ et $\log_{10} Q/s$, bien que nette, n'en est pas pour autant une liaison exacte (fonctionnelle), la qualité de cette liaison étant d'ailleurs mesurée par la variance résiduelle:

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [\log_{10} T_i - (a \log_{10} (Q/s)_i + b)]^2$$

la sommation courant sur les n couples disponibles.

En estimant $\log_{10} T_j$ à partir de $\log_{10} (Q/s)_j$, pour les $m-n$ puits où seule est disponible une valeur de débit spécifique, on commet donc inévitablement une erreur de prédiction dont la variance peut être calculée comme:

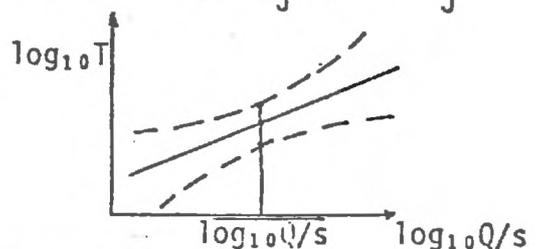
$$\sigma_j^2 = \sigma_{\epsilon}^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{[\log_{10} (Q/s)_j - \overline{\log_{10} Q/s}]^2}{\sum_{i=1}^n [\log_{10} (Q/s)_i - \overline{\log_{10} Q/s}]^2} \right] \text{ pour } j = n+1, \dots, m$$

où $\overline{\log_{10} Q/s}$ désigne la valeur moyenne $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_{10} (Q/s)_i$.

La précision de la reconstitution peut être approximativement fournie par l'intervalle à 95%:

$$(a \log_{10} (Q/s)_j + b) - 2 \sigma_j \leq (\log_{10} T_j) \text{ vrai} \leq (a \log_{10} (Q/s)_j + b) + 2 \sigma_j$$

La formule donnant σ_j^2 montre que l'amplitude de cet intervalle croît quand $\log_{10} (Q/s)_j$ s'éloigne de $\overline{\log_{10} Q/s}$.



En repassant des logarithmes aux valeurs de transmissivités, cet intervalle de confiance se met sous la forme d'un facteur d'incertitude égal à $10^{2\sigma_j}$ affectant la valeur T_j estimée.

Les valeurs obtenues par essais de pompage sont, pour les besoins de la cause et faute de pouvoir apprécier l'incertitude les affectant, considérées connues exactement, c'est à dire à un facteur 1 près.

On trouvera dans les pages suivantes les différentes valeurs de transmissivités accompagnées de leur facteur d'incertitude pour les deux aquifères étudiés.

A ces données proprement dites ont été ajoutées deux valeurs de transmissivité très faibles figurant la fenêtre de la Brèche-au-Diable sur le Laison pour le Bathonien, et celle de la Haute Seulle pour le Bajocien.

FORAGES CAPTANT LE BATHONIEN

| CODE | X | Y | TRANS. | FACT. |
|----------|---------|---------|----------|-------|
| 96.5.001 | 379.400 | 187.100 | 0.28E-03 | 1.0 |
| 96.5.002 | 379.500 | 187.200 | 0.56E-03 | 1.0 |
| 96.5.006 | 382.900 | 186.400 | 0.28E-04 | 1.0 |
| 96.7.003 | 396.300 | 184.500 | 0.18E-00 | 8.9 |
| 96.7.005 | 396.700 | 184.800 | 0.17E-01 | 8.3 |
| 96.7.058 | 396.400 | 184.400 | 0.76E-01 | 1.0 |
| 96.8.002 | 400.900 | 183.700 | 0.31E-03 | 8.5 |
| 96.8.019 | 399.400 | 184.100 | 0.83E-05 | 1.0 |
| 19.3.168 | 394.700 | 181.100 | 0.16E-00 | 1.0 |
| 19.3.169 | 396.200 | 180.700 | 0.64E-02 | 1.0 |
| 19.3.170 | 396.400 | 180.600 | 0.24E-01 | 1.0 |
| 19.3.171 | 394.900 | 181.000 | 0.45E-01 | 1.0 |
| 19.3.172 | 395.200 | 181.300 | 0.97E-01 | 1.0 |
| 19.3.173 | 393.600 | 180.900 | 0.39E-01 | 1.0 |
| 19.3.179 | 392.300 | 180.500 | 0.69E-02 | 1.0 |
| 19.3.180 | 392.600 | 180.900 | 0.31E-02 | 1.0 |
| 19.3.181 | 393.100 | 180.400 | 0.15E-01 | 1.0 |
| 19.3.182 | 393.400 | 180.700 | 0.15E-01 | 1.0 |
| 19.4.007 | 401.800 | 180.100 | 0.10E-01 | 8.3 |
| 19.4.079 | 401.600 | 181.100 | 0.22E-03 | 8.6 |
| 19.4.097 | 402.800 | 183.100 | 0.38E-03 | 8.5 |
| 19.4.139 | 396.600 | 177.800 | 0.71E-02 | 8.2 |
| 19.4.140 | 397.500 | 177.500 | 0.22E-01 | 1.0 |
| 19.4.142 | 397.500 | 178.300 | 0.40E-01 | 1.0 |
| 19.4.145 | 398.300 | 177.100 | 0.27E-01 | 1.0 |
| 19.4.149 | 397.900 | 174.600 | 0.26E-03 | 8.5 |
| 19.7.045 | 392.300 | 171.400 | 0.35E-02 | 8.2 |
| 19.8.066 | 403.200 | 170.700 | 0.47E-02 | 8.2 |
| 20.1.002 | 407.400 | 173.800 | 0.73E-02 | 1.0 |
| 20.1.011 | 405.700 | 181.600 | 0.42E-02 | 1.0 |
| 20.1.012 | 407.900 | 178.700 | 0.19E-03 | 1.0 |
| 20.1.015 | 406.000 | 173.800 | 0.24E-02 | 8.2 |
| 20.1.080 | 409.300 | 177.000 | 0.42E-03 | 1.0 |
| 20.1.083 | 409.200 | 174.800 | 0.14E-02 | 1.0 |
| 20.1.156 | 406.700 | 173.800 | 0.86E-03 | 8.3 |
| 20.1.158 | 410.000 | 177.600 | 0.14E-03 | 1.0 |
| 20.2.002 | 410.200 | 178.600 | 0.50E-03 | 8.4 |
| 20.2.003 | 410.700 | 177.800 | 0.20E-01 | 8.4 |
| 20.2.006 | 416.100 | 177.000 | 0.41E-02 | 8.2 |
| 20.2.020 | 410.300 | 177.900 | 0.10E-01 | 8.3 |
| 20.2.071 | 410.600 | 176.600 | 0.27E-02 | 8.2 |
| 20.2.076 | 411.200 | 176.500 | 0.91E-03 | 8.3 |
| 20.5.002 | 406.800 | 167.200 | 0.60E-01 | 8.6 |
| 20.5.003 | 408.300 | 167.900 | 0.87E-02 | 8.3 |
| 20.5.005 | 406.800 | 171.900 | 0.97E-02 | 1.0 |
| 20.5.006 | 406.100 | 170.900 | 0.14E-01 | 1.0 |
| 20.5.007 | 406.400 | 165.800 | 0.46E-02 | 8.2 |
| 20.5.107 | 406.500 | 171.000 | 0.99E-02 | 8.3 |
| 20.5.108 | 406.200 | 170.800 | 0.87E-02 | 8.3 |
| 20.5.109 | 406.200 | 172.200 | 0.13E-01 | 1.0 |
| 20.5.110 | 406.000 | 172.400 | 0.50E-01 | 1.0 |
| 20.5.113 | 406.500 | 166.900 | 0.23E-00 | 9.0 |
| 20.5.114 | 406.800 | 166.400 | 0.15E-01 | 8.3 |
| 20.5.116 | 406.600 | 167.600 | 0.25E-01 | 1.0 |
| 20.5.117 | 406.700 | 167.400 | 0.22E-01 | 1.0 |
| 20.5.133 | 407.000 | 166.700 | 0.44E-01 | 8.5 |

BOUAGES CAPTANT LE BATHONIEN

(suite)

| | | | | |
|----------|---------|---------|----------|------|
| 20.5.135 | 405.000 | 167.200 | 0.14E-00 | 8.9 |
| 20.5.141 | 408.200 | 167.700 | 0.74E-02 | 8.2 |
| 20.5.143 | 407.200 | 169.500 | 0.56E-00 | 9.4 |
| 20.5.151 | 405.600 | 166.800 | 0.41E-03 | 8.4 |
| 20.5.153 | 405.700 | 166.200 | 0.18E-02 | 8.2 |
| 20.5.184 | 408.000 | 172.600 | 0.21E-02 | 8.2 |
| 20.5.226 | 404.900 | 167.600 | 0.17E-01 | 8.3 |
| 20.5.254 | 409.700 | 172.700 | 0.41E-03 | 8.4 |
| 20.5.255 | 409.600 | 172.400 | 0.38E-02 | 8.2 |
| 20.5.321 | 405.900 | 172.900 | 0.46E-01 | 8.5 |
| 20.5.322 | 406.000 | 173.100 | 0.57E-02 | 8.2 |
| 20.5.384 | 407.700 | 171.800 | 0.78E-02 | 1.0 |
| 20.5.387 | 409.500 | 169.700 | 0.19E-02 | 1.0 |
| 20.5.427 | 409.800 | 171.900 | 0.11E-03 | 1.0 |
| 20.5.441 | 407.400 | 170.700 | 0.69E-02 | 1.0 |
| 20.6.100 | 413.300 | 168.300 | 0.15E-02 | 1.0 |
| 20.6.145 | 413.600 | 169.800 | 0.48E-03 | 8.4 |
| 20.6.146 | 412.500 | 163.800 | 0.44E-02 | 1.0 |
| 20.6.154 | 416.300 | 172.100 | 0.22E-03 | 1.0 |
| 20.6.173 | 410.300 | 172.400 | 0.71E-05 | 10.1 |
| 20.6.174 | 410.700 | 163.200 | 0.28E-02 | 1.0 |
| 20.6.175 | 411.100 | 172.900 | 0.26E-02 | 8.2 |
| 20.6.177 | 411.800 | 172.500 | 0.42E-03 | 1.0 |
| 20.6.179 | 410.900 | 171.600 | 0.11E-03 | 1.0 |
| 20.7.061 | 416.800 | 171.500 | 0.75E-03 | 1.0 |
| 46.2.128 | 415.200 | 162.100 | 0.56E-03 | 1.0 |
| 46.3.097 | 417.700 | 161.900 | 0.25E-02 | 1.0 |
| 46.3.114 | 420.600 | 153.400 | 0.26E-02 | 8.2 |
| 46.4.001 | 425.700 | 158.100 | 0.14E-02 | 8.3 |
| 46.4.002 | 425.300 | 158.100 | 0.38E-02 | 1.0 |
| 46.4.003 | 428.700 | 154.800 | 0.13E-03 | 8.7 |
| 46.6.057 | 411.100 | 144.100 | 0.29E-02 | 8.2 |
| 46.7.047 | 417.800 | 149.700 | 0.42E-01 | 8.5 |
| 46.8.001 | 425.500 | 149.900 | 0.70E-02 | 8.2 |
| 46.8.002 | 425.700 | 149.500 | 0.33E-02 | 8.2 |
| 46.8.003 | 422.400 | 144.700 | 0.61E-02 | 8.2 |
| 46.8.004 | 424.300 | 152.600 | 0.13E-01 | 8.3 |
| 46.8.011 | 422.600 | 149.700 | 0.46E-03 | 8.4 |
| 46.8.032 | 426.400 | 149.000 | 0.20E-01 | 8.4 |
| 76.4.009 | 422.500 | 137.400 | 0.23E-01 | 1.0 |
| 76.4.010 | 423.000 | 140.000 | 0.11E-01 | 8.3 |
| 76.4.011 | 423.000 | 139.700 | 0.56E-02 | 8.2 |
| 76.4.012 | 422.400 | 138.100 | 0.33E-02 | 8.2 |

FORAGES CAPTANT LE BAJOCIEN

| CODE | X | Y | TRANSM. | FACT. |
|----------|---------|---------|---------|-------|
| 9A.6.001 | 386.300 | 184.300 | .47E-02 | 7.9 |
| 19.1.046 | 383.200 | 183.800 | .81E-02 | 1.0 |
| 19.1.161 | 387.600 | 181.200 | .89E-05 | 14.5 |
| 19.1.234 | 383.700 | 178.800 | .22E-01 | 1.0 |
| 19.1.237 | 378.700 | 181.900 | .28E-04 | 1.0 |
| 19.1.239 | 383.300 | 184.000 | .19E-02 | 1.0 |
| 19.1.250 | 384.400 | 182.700 | .10E-01 | 1.0 |
| 19.1.251 | 379.900 | 181.800 | .26E-01 | 1.0 |
| 19.2.100 | 388.700 | 179.800 | .11E-01 | 8.0 |
| 19.2.210 | 384.100 | 178.900 | .11E-01 | 1.0 |
| 19.2.213 | 390.100 | 179.600 | .20E+00 | 1.0 |
| 19.3.175 | 392.800 | 178.100 | .12E+00 | 1.0 |
| 19.3.176 | 391.900 | 175.200 | .43E-02 | 8.0 |
| 19.6.077 | 386.600 | 172.600 | .16E-02 | 8.2 |
| 19.6.105 | 384.200 | 171.200 | .14E-03 | 1.0 |
| 19.8.001 | 402.500 | 165.100 | .76E-01 | 1.0 |
| 19.8.037 | 402.600 | 166.800 | .17E-01 | 8.1 |
| 19.8.042 | 402.300 | 166.300 | .48E-03 | 8.8 |
| 19.8.043 | 401.900 | 165.500 | .58E-02 | 7.9 |
| 19.8.047 | 401.600 | 167.000 | .37E-02 | 8.0 |
| 19.8.050 | 402.000 | 167.000 | .16E-01 | 8.1 |
| 19.8.120 | 401.900 | 165.500 | .65E-02 | 7.9 |
| 19.8.196 | 402.800 | 167.900 | .43E-01 | 8.5 |
| 20.5.106 | 403.200 | 167.200 | .88E-03 | 8.4 |
| 20.5.149 | 405.700 | 168.000 | .72E-04 | 10.7 |
| 20.5.274 | 403.300 | 167.700 | .94E-02 | 8.0 |
| 45.4.005 | 397.300 | 163.200 | .10E-02 | 8.3 |
| 45.4.069 | 397.300 | 163.000 | .54E-03 | 8.7 |
| 45.4.070 | 397.600 | 163.200 | .13E-02 | 8.2 |

b) Méthode (Rappel):

Les données provenant de la régression doivent être, comme on l'a vu, utilisées avec précaution, mais elles ne peuvent être rejetées sous peine de se priver d'une information non négligeable.

On a donc eu recours à une formulation adaptée du krigeage, autorisant la prise en compte de données de différentes qualités, pour estimer les valeurs de transmissivités à afficher sur les mailles du modèle en construction.

Le krigeage prend en compte:

- les positions relatives des points expérimentaux entre eux et par rapport à la maille à estimer,
- la structure du phénomène étudié: présence éventuelle de tendances à grande échelle (dérive), et surtout variabilité, caractérisée par le variogramme (ou la covariance généralisée).

Il fournit, à l'aide d'une pondération des valeurs expérimentales du voisinage, l'estimation la plus précise possible ("optimale"), sans sur- ou (sous-) évaluation systématique ("sans biais"), ainsi que la précision de cette estimation, sous la forme d'une variance d'estimation.

Dans le cas présent, la pondération optimale des données que réalise le krigeage prend en compte, en outre, les qualités respectives des dites données. Il faut également noter que les calculs, s'effectuant sur les logarithmes des transmissivités, donnent un estimateur de krigeage Z_K , un écart-type d'estimation σ_K et donc un intervalle de confiance $Z_K \pm 2 \sigma_K$ relatifs à cette variable transformée.

Le retour aux valeurs de transmissivité elles-mêmes conduit à un estimateur médian de T égal à 10^{Z_K} et l'assortit d'une spécification de l'intervalle de confiance sous forme d'un coefficient multiplicateur égal à $10^{2\sigma_K}$.

$$10^{Z_K} / 10^{2\sigma_K} < T < 10^{Z_K} \cdot 10^{2\sigma_K}$$

c) Résultats:

α) Reconnaissance structurale: La première phase du travail, préalable au krigeage proprement dit, est constituée par l'étude de la structure du phénomène.

Le modèle de variogramme retenu pour le logarithme de la transmissivité a été, pour le Bathonien comme pour le Bajocien, un modèle linéaire avec discontinuité à l'origine.

Dans les deux cas, il a été conclu également à une absence de dérive systématique.

- En ce qui concerne le Bathonien, la reconnaissance structurale a été faite à partir des seules 45 données provenant d'essais de pompage, de façon à éviter de sur-estimer l'effet de pépité du fait de la présence de données susceptibles d'être entachées d'erreur.

Les transmissivités étant exprimées en m^2/s et les coordonnées des forages en km., les coefficients de $\gamma(h)$ ont été déterminés comme suit:

effet de pépité: $C = 0.09$ pente: $A1 = 0.125$

- En ce qui concerne le Bajocien, le nombre des données d'essais de pompage n'étant que de 10, la reconnaissance a dû porter sur l'ensemble des 29 données.

Les coefficients trouvés ont alors été:

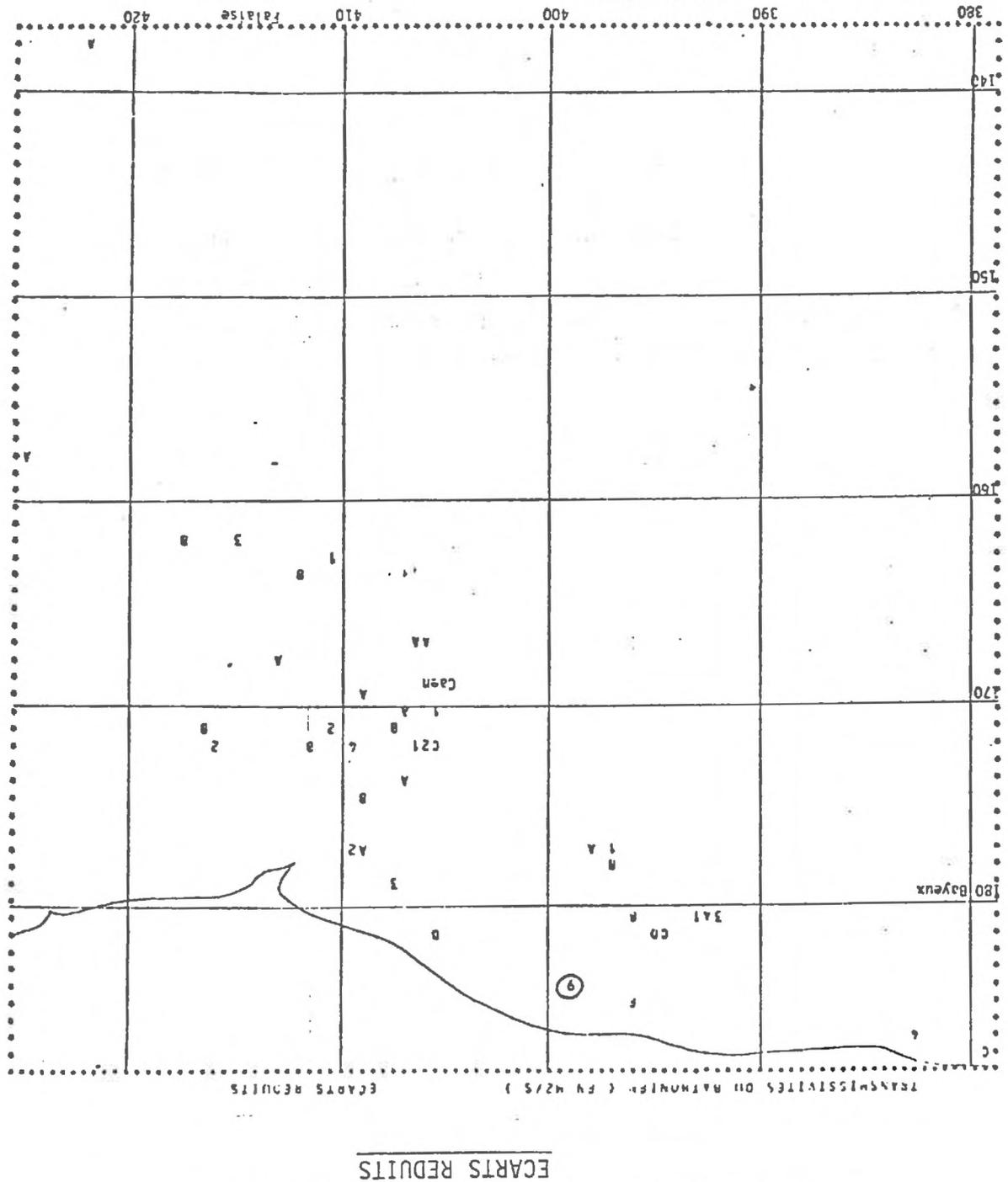
effet de pépité: $C = 0.56$ pente: $A1 = 0.037$

La valeur plus forte de la discontinuité C est à relier à la présence de données incertaines dans le jeu. Quant à la pente $A1$ plus faible, elle semblerait indiquer une moindre variabilité de la transmissivité dans l'aquifère inférieur.

- Un essai de krigeage a été, en outre, réalisé à titre d'exemple sur le Bathonien, afin de vérifier la validité des paramètres calculés. La méthode consiste à supprimer fictivement les points expérimentaux l'un après l'autre, à les kriger à l'aide de leurs voisins, et à comparer les erreurs d'estimation expérimentales ainsi obtenues aux écarts-types d'estimation théoriques.

Ceci a été fait sur l'ensemble des forages où existait un essai de pompage, et les écarts réduits $\frac{Z_{réel} - Z_K}{\sigma_K}$ ont été reportés sur la figure A-8:

FIG. A-8 - LOGARITHMES DES TRANSMISSIVITES DU BATHONIEN



93 CARACTERES/LIGNE
 HORIZONTAL VARIÉ DE GAUCHE À DROITE, ENTRE 170,5 ET 425,3
 VERTICAL VARIÉ DE HAUT EN BAS, ENTRE 137,6 ET 187,2
 LES VALEURS PRESSÉES DANS LE DOMAINE CONSIDÉRÉ, IL Y A 60 POINTS REPRESENTATIFS DISTINCTS
 UNITÉS/LIGNE ECH 1,4978
 UNITÉS/CARACTÈRE ECH 1,8300

| | | | | | | | | |
|----|------------|-----|---------|------------|-------|---------|----|---------|
| 1 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 1,0000 | ET | 1,5000 |
| 2 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 1,5000 | ET | 2,0000 |
| 3 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 2,0000 | ET | 2,5000 |
| 4 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 2,5000 | ET | 3,0000 |
| 5 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 3,0000 | ET | 3,5000 |
| 6 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 3,5000 | ET | 4,0000 |
| 7 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 4,0000 | ET | 4,5000 |
| 8 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 4,5000 | ET | 5,0000 |
| 9 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 5,0000 | ET | 5,5000 |
| 10 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 5,5000 | ET | 6,0000 |
| 11 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 6,0000 | ET | 6,5000 |
| 12 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 6,5000 | ET | 7,0000 |
| 13 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 7,0000 | ET | 7,5000 |
| 14 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 7,5000 | ET | 8,0000 |
| 15 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 8,0000 | ET | 8,5000 |
| 16 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 8,5000 | ET | 9,0000 |
| 17 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 9,0000 | ET | 9,5000 |
| 18 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 9,5000 | ET | 10,0000 |
| 19 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 10,0000 | ET | 10,5000 |
| 20 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 10,5000 | ET | 11,0000 |
| 21 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 11,0000 | ET | 11,5000 |
| 22 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 11,5000 | ET | 12,0000 |
| 23 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 12,0000 | ET | 12,5000 |
| 24 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 12,5000 | ET | 13,0000 |
| 25 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 13,0000 | ET | 13,5000 |
| 26 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 13,5000 | ET | 14,0000 |
| 27 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 14,0000 | ET | 14,5000 |
| 28 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 14,5000 | ET | 15,0000 |
| 29 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 15,0000 | ET | 15,5000 |
| 30 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 15,5000 | ET | 16,0000 |
| 31 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 16,0000 | ET | 16,5000 |
| 32 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 16,5000 | ET | 17,0000 |
| 33 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 17,0000 | ET | 17,5000 |
| 34 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 17,5000 | ET | 18,0000 |
| 35 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 18,0000 | ET | 18,5000 |
| 36 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 18,5000 | ET | 19,0000 |
| 37 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 19,0000 | ET | 19,5000 |
| 38 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 19,5000 | ET | 20,0000 |
| 39 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 20,0000 | ET | 20,5000 |
| 40 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 20,5000 | ET | 21,0000 |
| 41 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 21,0000 | ET | 21,5000 |
| 42 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 21,5000 | ET | 22,0000 |
| 43 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 22,0000 | ET | 22,5000 |
| 44 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 22,5000 | ET | 23,0000 |
| 45 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 23,0000 | ET | 23,5000 |
| 46 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 23,5000 | ET | 24,0000 |
| 47 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 24,0000 | ET | 24,5000 |
| 48 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 24,5000 | ET | 25,0000 |
| 49 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 25,0000 | ET | 25,5000 |
| 50 | REPRESENTÉ | LES | VALEURS | COMPARISÉS | ENTRE | 25,5000 | ET | 26,0000 |

On a pu vérifier (cf. Fig. 27, p. 78 dans le corps du texte*) qu'en moyenne il n'y avait bien ni sous- ni sur-estimation systématique:

$$\text{erreur moyenne} = \frac{1}{n} \sum (Z - Z_K) = -0.026 \approx 0$$

et que les écarts-types d'estimation annoncés étaient bien cohérents avec les erreurs constatées:

$$\text{erreur quadratique réduite moyenne} = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{Z - Z_K}{\sigma_K} \right)^2 = 0.96 \approx 1$$

Les écarts réduits restent partout inférieurs à 2, sauf dans la région de Bernières s/Mer où la transmissivité de $0,83 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ obtenue par essai de pompage au forage 96.8.19 n'apparaît pas cohérente avec l'information obtenue au cours des essais du voisinage (écart réduit > 4).

Une valeur de débit spécifique de l'ordre de $10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, semblable à celle des forages avoisinants, et la position à l'écart en bas et à gauche du point correspondant sur le graphique $T \leftrightarrow Q/s$ (Fig. A-5) semblent plaider en faveur d'un réexamen de cette valeur.

Comme on peut le voir, le krigeage peut être un bon outil de vérification de la cohérence des données.

- B) Krigeage:

• Aquifère du Bathonien:

- Une première estimation de la transmissivité, à partir des seules données provenant d'essais de pompage (plus 1 point figurant la fenêtre) a donné un modèle assez pauvre, avec seulement trois grandes zones: transmissivités fortes dans le Nord-Ouest, assez faibles dans le Nord-Est et très faibles dans tout le Sud-Est (du fait de la grande importance que prend le point figurant la fenêtre, rajouté dans une zone très pauvre en essais de pompage).

* Un certain nombre de planches figurant déjà dans le corps du texte n'ont pas été reprises dans la présente annexe.

Les coefficients multiplicateurs, indiquant les bornes de l'intervalle de confiance à 95%, décroissent jusqu'à 2. dans les zones bien reconnues, mais dépassent 100. sur les limites où la transmissivité n'est pratiquement pas connue.

- L'estimation a été faite à nouveau en prenant, cette fois, l'ensemble des données (y compris le point figurant la fenêtre), et en tenant compte des incertitudes entachant les valeurs. Les traits majeurs de la répartition spatiale de la transmissivité semblent mieux se dégager: on obtient une meilleure focalisation des zones à forte transmissivité ($> 10^{-2}$ m²/s) autour de Caen et de la Mue. A noter aussi l'emprise moindre de la zone à très faible transmissivité ($< 5.10^{-4}$ m²/s) entourant la fenêtre de la Brèche au Diable, et la mise en évidence de zones à faible transmissivité, orientées sensiblement NW-SE, et correspondant sans doute à l'influence de l'accident de Ranville et à son prolongement (cf. Fig. A-9).

Du fait de la prise en compte d'une information supplémentaire, même si elle est entachée d'incertitude, les coefficients de l'intervalle de confiance (cf. Fig. A-10) sont inférieurs à ceux trouvés précédemment, la baisse observée étant évidemment la plus forte dans les zones peu reconnues par essais de pompage.

Afin de visualiser cette baisse, on a calculé et reporté, pour chaque maille, le facteur d'amélioration de la connaissance de la transmissivité correspondant au passage des seuls essais de pompage à l'ensemble englobant les valeurs obtenues par régression. Si ce facteur reste sensiblement égal à 1. dans la région caennaise bien connue à partir des seuls essais de pompage, il passe à des valeurs supérieures à 10. du côté de la Dives et de la Haute-Mue, où l'appoint des débits spécifiques a été décisif (cf. Fig. 44, p. 98 dans le corps du texte).

- Enfin, l'importance de la fenêtre de la Brèche au Diable sur le modèle des transmissivités est apparue telle que l'on a repris l'estimation en supprimant le point la représentant: on peut constater sur la Fig. A-11 que tout le tiers Sud-Est en est affecté.

Si la carte obtenue en tenant compte de la présence de la fenêtre semble plus satisfaisante (zone à faible transmissivité allongée dans le sens des barres de grès armoricain entourant la fenêtre), il faut bien admettre que l'on a ajouté, dans cette région, un point informant. Seul le modèle permettra de vérifier l'hypothèse faite.

• Aquifère du Bajocien:

- Le faible nombre de données n'a pas justifié une étude aussi poussée que pour le Bathonien.

A noter seulement que les intervalles de confiance sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus pour le Bathonien, malgré le nombre moindre de données; et ce, du fait de la plus grande régularité du phénomène, du moins en apparence.

Les zones bien connues sont centrées sur les régions de Caen et Bayeux. Les fortes transmissivités apparaissant dans les basses vallées de la Thueet de la Mue doivent être considérées avec précaution du fait de la grande amplitude des intervalles de confiance correspondants (extrapolation en direction de la mer de deux fortes transmissivités obtenues dans la région par essais de pompage)

Le travail, qui a été réalisé sur les transmissivités, a permis de tirer parti au maximum de l'information disponible à partir des essais de pompage et des calculs de débits spécifiques.

Des zones d'ombre subsistent, là où les intervalles de confiance restent très grands: la connaissance de la transmissivité ne pourra y progresser qu'à travers son rapport avec le modèle piézométrique, lors du calage du modèle d'écoulement souterrain.

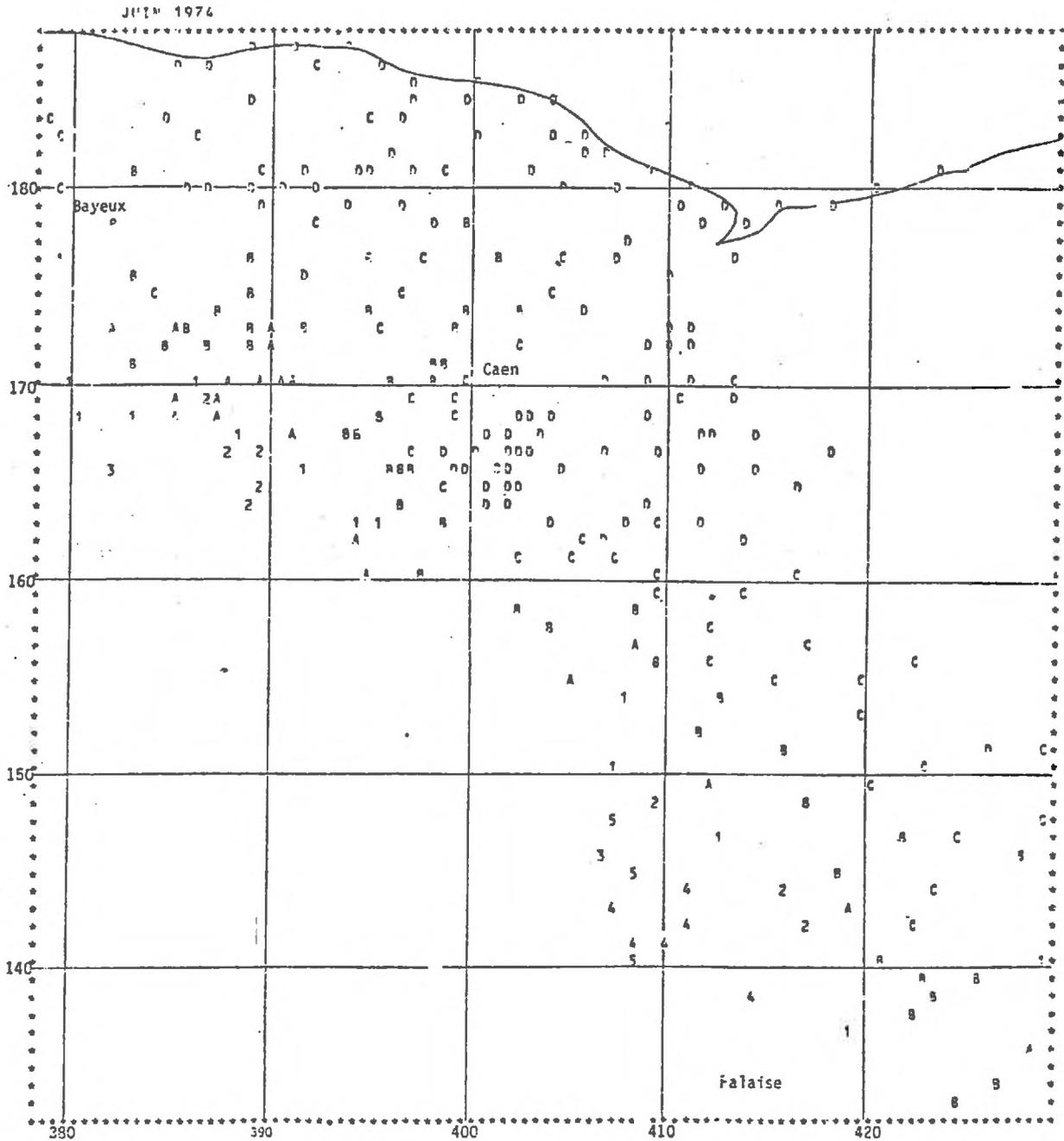
ETUDE DE LA PIEZOMETRIE

Afin de disposer d'états piézométriques de référence pour le calage du modèle, on a estimé par krigeage la piézométrie moyenne sur des mailles de 2 km x 2 km aux 3 dates suivantes :

- Juin 1974 où l'on dispose de 208 relevés piézométriques
- Octobre 1974 où l'on dispose de 201 relevés piézométriques
- Avril 1974 où l'on ne dispose que de 176 relevés, avec une absence de données du côté de la Dives.

La piézométrie a dû être étudiée, les deux nappes confondues, en l'absence de mesures séparées dans les zones où existe un bicouche.

FIG. A-12 - PIEZOMETRIE DU DOGGER
DONNEES DISPONIBLES POUR JUIN 1974



94 CARACTERES/LIGNE
X HORIZONTAL VARIE DE GAUCHE A DROITE, ENTRE 378,7 ET 428,7
Y VERTICAL VARIE DE BAS EN HAUT, ENTRE 133,6 ET 187,0
POUR LES 254 VALEURS PRESENTEES DANS LE DOMAINE CONSIDERE, IL Y A 251 POINTS REPRESENTATIFS DONT ENCE

41 LIGNES
ECH 1,5374 UNITES/CARACTERE
ECH 1,8917 UNITES/LIGNE

| | | | | |
|---|--|--------|----|--------|
| 1 | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 80,00 | ET | 100,00 |
| 2 | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 100,00 | ET | 120,00 |
| 3 | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 120,00 | ET | 140,00 |
| 4 | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 140,00 | ET | 160,00 |
| 5 | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 160,00 | ET | 180,00 |
| A | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 60,00 | ET | 80,00 |
| B | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 80,00 | ET | 100,00 |
| C | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 100,00 | ET | 120,00 |
| D | REPRESENTA LES VALEURS COMPRISES ENTRE | 120,00 | ET | 140,00 |

Cette piézométrie reflète, en fait, les parties libres des 2 nappes. Aux relevés piézométriques disponibles, on a rajouté quelques points correspondant à des endroits où les cours d'eaux (27) ou la mer (19) imposent le potentiel de la nappe, ce qui porte le nombre de données à 254 par exemple pour Juin 1974 (cf. Fig. A-12).

Les caractéristiques structurales qui ont été déterminées à l'aide de la procédure automatique issue de la théorie des FAI-k et utilisées pour le krigeage sont:

- dérive linéaire,
- covariance généralisée sans effet de pépite (phénomène continu)

$$K(h) = - 10. |h| + 0.75 |h|^3$$

On peut constater sur la figure 32 (p. 85 dans le corps du texte) que les modèles piézométriques sont bien rendus par le krigeage.

Les écarts types d'estimation sont de l'ordre de 3 mètres en général, souvent inférieurs, avec quelques zones où leurs valeurs élevées coïncident avec une absence totale de données (Vallée de la Dives en Avril 1975)

Il est à noter dès à présent que le fait que les écarts-types d'estimation de la piézométrie sont toujours supérieurs au mètre indique que l'on devra envisager une précision de calage de l'ordre métrique et non une précision centimétrique qui serait sans rapport avec le degré réel de connaissance du phénomène : on est en effet en présence d'une nappe libre en pays calcaire au modèle très tourmenté, et l'échantillonnage piézométrique est relativement lâche.

ETUDE DE LA GEOMETRIE DES AQUIFERES

Ont été estimées enfin les valeurs moyennes sur des mailles de 2 x 2 km de :

- l'épaisseur des marnes de Port en Bessin,
- la cote du mur du Bathonien,
- la cote du mur du Bajocien.

a) Epaisseur des marnes de Port en Bessin:

Cette épaisseur était disponible en 36 forages

Les caractéristiques structurales mises en évidence sont les suivantes:

- dérive linéaire,
- $K(h) = - 38 \cdot |h|$ (h en km)

Les résultats du krigeage montrent le biseautage des marnes vers le Sud-Est (cf. Fig. A-13).

Les écarts-types assez forts (> 10 m) dans cette zone indiquent une incertitude sur la position du biseau de l'ordre à peu près d'une maille (2 km).

b) Mur du Bathonien:

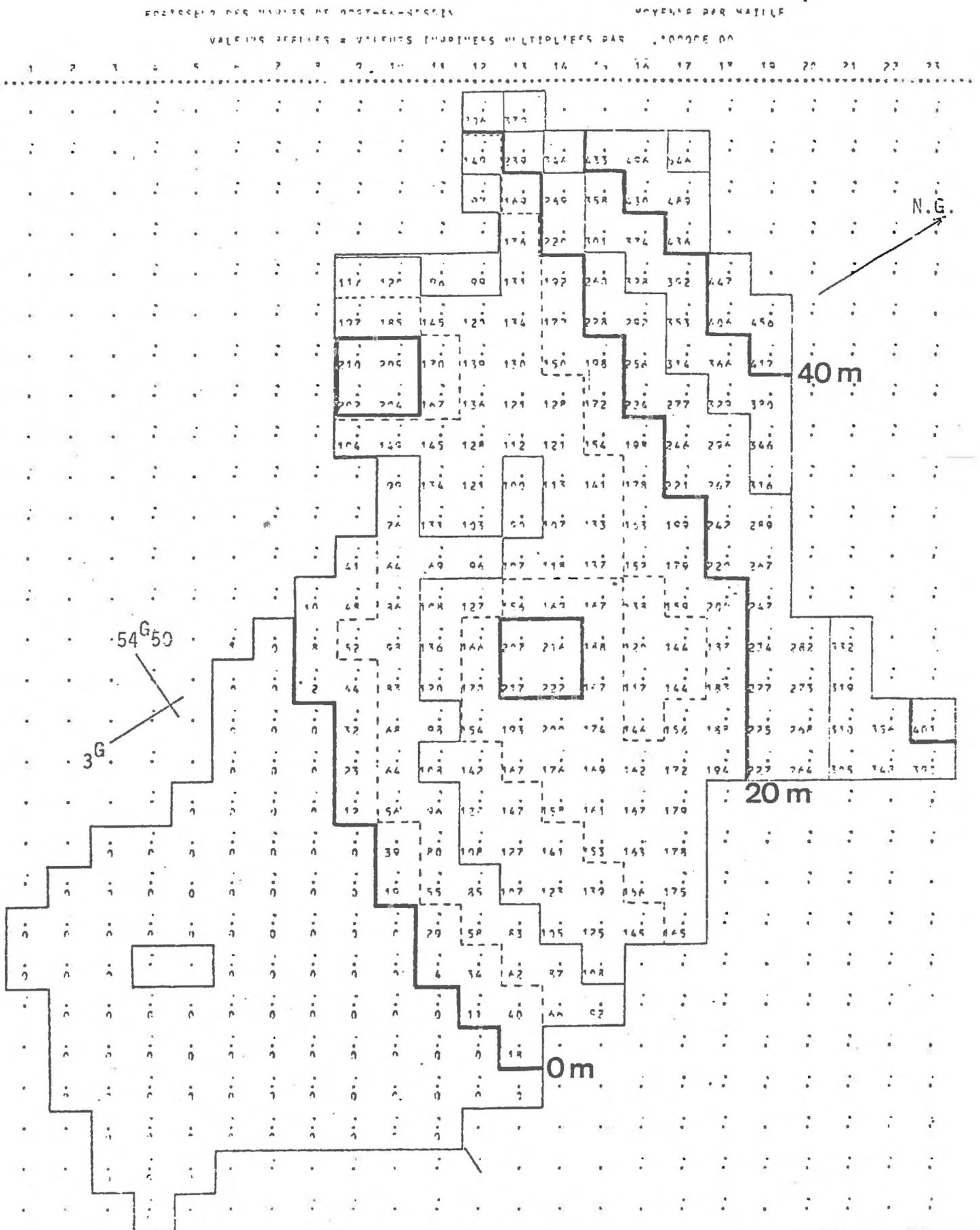
On n'a retenu en principe que les forages ayant effectivement atteint le mur.

Aux 97 données disponibles, on a été amené à rajouter 2 indications imprécises, fournies par 2 forages n'ayant pas atteint le mur, mais situés dans des zones mal reconnues. On a ainsi introduit dans les données la cote -99 ± 50 au forage 120.8.001 à Mery Corbon sur le Laison (de façon à indiquer le pendage vers le N.E. au sud de la grille) et la cote -89 ± 10 au forage 120.2.006 à Gonnevillie en Auge.

On a, par ailleurs, tenu compte dans le krigeage de l'existence de failles sensiblement orientées dans la direction armoricaine:

- une seule à Ranville (faute de données permettant de tenir compte d'un éventuel horst);
- un jeu de deux failles entourant Amblie.

FIG. A-13 - EPAISSEUR DES MARNES DE PORT-EN-BESSIN
VALEURS MOYENNES PAR MAILLE OBTENUES PAR KRIGEAGE



Les paramètres structuraux obtenus sont:

- dérive linéaire,
- $K(h) = -23|h| + 4.4|h|^3$

Les résultats (Fig. 46, p. 100 dans le corps du texte) concordent assez bien avec une carte tracée à la main par les géologues du SGR (BRGM) figurant dans la documentation recueillie.

A noter que la cote du mur n'est réellement bien connue (écart-types d'estimation < 10 m) que dans les régions de Caen et de la Seulle, de la Thue et de la Mue.

c) Mur du Bajocien:

67 forages sont disponibles dont un bon nombre dans la partie libre de la nappe bajocienne.

Une carte tracée à la main par un géologue ferait intervenir la similitude avec les couches supérieures.

Ne travaillant ici qu'avec les seules cotes obtenues aux forages ayant atteint le Bajocien, on a dû introduire les données fictives suivantes:

- 23 ± 10 à Creully (119.2.213)
- 110 ± 30 à Bures sur Dives (120.7.088)
- 130 ± 30 à Gonneville en Auge (120.2.006)
- 130 ± 50 à Mery-Corbon (120.8.001)

pour tenir compte de l'information de type "géologue".

Le manque de données n'a permis en outre de ne prendre en considération qu'une seule faille, celle de Ranville.

 * IDENTIFICATION STRUCTURALE AUTOMATIQUE *

1) IDENTIFICATION DE LA DÉRIVE

partage local des points expérimentaux en deux groupes de façon à contrôler la variabilité des résultats

pour chaque point expérimental, régression, classement des différentes hypothèses de dérive selon leurs performances (critère plus robuste que la moyenne des écarts quadratiques)

| | | MOYENNES DES ECARTS QUADRATIQUES | | | CLASSEMENT DES ESSAIS MOYENS | | |
|---|-------|----------------------------------|---|-------|------------------------------|------|-------|
| | | 1 | 2 | TOTAL | 1 | 2 | TOTAL |
| I | NB FL | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| I | | 0 | 3 | 1 | 1.93 | 1.85 | 1.90 |
| I | | 1 | 1 | 1 | 1.00 | 1.70 | 1.05 |
| I | | 1 | 1 | 1 | 2.47 | 2.44 | 2.46 |

→ rang minimum: NBFL=3 est retenu

NOMBRE OPTIMUM DE FONCTIONS FL = 3

EFFECTIFS AUR 1: 650 AUR 2: 592 TOTAL: 1258
 COEFFICIENT DE CONCORDANCE DE RENDALL W = .1707
 STATISTIQUE ASSOCIEE (TOTAL - 1258 * (1 - W)) = 258.705

régression des variances d'estimation expérimentales sur leurs valeurs théoriques d'essai en fonction des différents paramètres de la covariance

concordance entre les classements des hypothèses aux différents points expérimentaux régressés. (fournie à titre purement indicatif)

2) IDENTIFICATION DE LA COVARIANCE

$\frac{\text{var. résiduelle}}{\text{var. totale}} = 1 - \frac{\text{var. expliquée}}{\text{var. totale}}$ ($\approx \frac{1}{3}$ dans le cas présent)

| COEFFICIENTS DE LA COVARIANCE | | | | RAPPORTS DES VARIANCES EXPERIMENTALES AUX VARIANCES THEORIQUES | | | |
|-------------------------------|----|----|----|--|--------|--------|-----------|
| 1 | 2 | 3 | 5 | RESIDUS | E1/T1 | E2/T2 | JACKKNIFE |
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| I | 0. | 0. | 0. | 0. | 7.5006 | 6.1067 | 6.9183 |
| I | 0. | 0. | 0. | 0. | 0.8179 | 0.7718 | 0.7990 |
| I | 0. | 0. | 0. | 0. | 0.2806 | 0.3745 | 0.2964 |
| I | 0. | 0. | 0. | 0. | 0.3234 | 0.4539 | 0.3650 |

X

→ jackknife le plus proche de 1. → méthode retenue

MIEUX AJUSTEMENT DE LA COVARIANCE

récapitulatif:

| | | | | |
|-------------|--------|-----------------|---------|---------|
| DEGRE K = 1 | C = 0. | A1 = -.1007E+03 | A3 = 0. | A5 = 0. |
|-------------|--------|-----------------|---------|---------|

FIG. A-14 - MUR DU BAJOCIEN: EXEMPLE D'IDENTIFICATION AUTOMATIQUE DES PARAMETRES STRUCTURAUX

Les paramètres structuraux obtenus par l'indentification structurale automatique (Fig. A-14) sont:

- dérive linéaire,
- $K(h) = - 100 \cdot |h|$

Les résultats (Fig. A-15) obtenus par krigeage concordent assez bien, compte-tenu des remarques précédentes, avec un tracé manuel disponible dans la documentation BRGM.