

THÈSE DE DOCTEUR - INGÉNIEUR

Présentée
à l'Université Pierre et Marie Curie
PARIS - 6

Par : Jean-Pierre DELHOMME
Pour obtenir le titre de DOCTEUR - INGÉNIEUR

Sujet de la thèse :

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES VARIABLES RÉGIONALISÉES DANS LES SCIENCES DE L'EAU

(Variabilité spatiale des grandeurs hydroclimatiques et hydrogéologiques
& précision de leur connaissance)

Soutenue le 15 Novembre 1976

devant le jury composé de :

M. JAUZEIN	}	Président
M. CASTANY		
M. LETOLLE	}	Examineurs
M. de MARSILY		
M. MATHERON		

A23
TH-HA8

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE
— I. N. R. A. —
STATION de SCIENCE du SOL
Domaine Saint-Paul
84140 MONTFAVET

REMERCIEMENTS

INRA
STATION DE SCIENCE DU SOL
17. JUIL. 1991
Domaine St-Paul - B.P. 91
84140 MONTFAVET

Je tiens, tout d'abord, à exprimer ma reconnaissance à mes camarades des Centres d'Informatique Géologique, et de Morphologie Mathématique. Il serait très long de les mentionner tous, et seuls les noms de certains apparaîtront çà ou là parmi les références bibliographiques. Mais que tous sachent qu'au cours des nombreuses discussions amicales que nous avons eues, ils m'ont beaucoup apporté.

Je sais infiniment gré à Monsieur MATHERON, Directeur du Centre de Morphologie Mathématique, d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je le remercie aussi de la possibilité qu'il m'a accordée de travailler deux années durant au sein de son Centre, où j'ai pu me familiariser avec la théorie des variables régionalisées et ses applications.

Je dois beaucoup à G. de MARSILY, Directeur du Centre d'Informatique Géologique, et rapporteur de ma thèse, qui a toujours encouragé son équipe à développer des techniques nouvelles dans le domaine des sciences de l'eau. Je lui suis également reconnaissant d'avoir relu attentivement mon manuscrit et d'avoir contribué, par ses remarques, à améliorer la clarté de l'exposé.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur JAUZEIN qui a bien voulu assurer la présidence de mon jury, à Monsieur LETOLLE qui a accepté d'être mon directeur de thèse à l'Université de Pierre et Marie Curie, et à Monsieur CASTANY qui m'a fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Je dois témoigner aussi toute ma gratitude à P. DELFINER qui, au cours des années de travail commun, m'a apporté une aide importante par ses réflexions riches d'enseignement et son soutien amical.

Qu'il me soit enfin permis de remercier Madame COLLARD qui a eu la tâche ingrate de mener à bien la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

	page
INTRODUCTION	1
I - METHODES D'ESTIMATION EN USAGE EN GEOLOGIE ET DANS LES SCIENCES DE L'EAU	5
1 - Méthodes analytiques d'interpolation	5
a) Transposition du procédé manuel	5
b) Interpolation polynômiale	7
c) Fonctions splines	8
d) Procédés divers	9
2 - Méthode des moindres carrés	12
a) Fondements théoriques	12
b) Notion de "trend"	15
3 - Méthodes élémentaires de pondération	17
a) Pondération en fonction de la distance	17
b) Méthode des polygones d'influence	20
4 - Méthodes probabilistes	23
a) Caractérisation de la structure	23
α) Normales, anomalies et coefficients de corrélation	23
β) Fonction de corrélation	25
γ) Interprétation climatologique	27
b) Prise en compte de la structure dans l'estimation .	23
α) Structure et erreur d'estimation	28
β) Interpolation optimale	31
γ) Moyenne pondérée optimale	33
δ) Applications	34
II - THEORIE DES VARIABLES REGIONALISEES. INFERENCE STATISTIQUE ET ESTIMATION OPTIMALE	39
1 - Bases conceptuelles	39
a) Notion de variable régionalisée	39
b) But de la théorie des variables régionalisées	41
c) Interprétation probabiliste	41
d) Problème de l'inférence statistique	42

2 - Inférence statistique dans le cadre de l'hypothèse intrinsèque	43
a) Stationnarité d'ordre 2	43
b) Hypothèse intrinsèque	44
c) Variogramme	45
α) Définition	45
β) Estimation du variogramme	45
γ) Comportement du graphe	47
. à l'origine	47
. à l'infini	50
δ) Ajustement à un modèle	53
3 - Krigeage	56
a) Exemple introductif	56
b) Cas sans dérive: krigeage simple	57
α) Position du problème	57
β) Estimation zonale	57
γ) Estimation ponctuelle	61
c) Cas avec dérive: krigeage universel	62
α) Modèle interprétatif	62
β) Calculs	63
d) Propriétés du krigeage	65
4 - Retour à l'inférence statistique: LES F.A.I.- k	66
a) Variogramme brut et variogramme sous-jacent	66
b) Variogramme des résidus	68
c) Hypothèse intrinsèque généralisée	69
α) Généralisation de la notion d'accroissement ..	70
β) Stationnarité des accroissements d'ordre k ..	71
γ) Covariance généralisée: modèle polynômial et ajustement automatique	72
III - APPLICATION A L'ETUDE DES VARIATIONS SPATIALES DES GRANDEURS HYDROLOGIQUES	77
1 - Estimations ponctuelles et zonales	77
a) Vérification de la validité du modèle structural adopté	77
b) Emploi du krigeage en cartographie	79
c) Estimation optimale des valeurs moyennes	84
α) Cas d'un maillage	84
β) Cas d'un domaine quelconque	87
d) Adaptation de la méthode à des problèmes particuliers	93
α) Hétérogénéité de la structure	93
β) Transformation logarithmique	93
γ) Données incertaines	95
δ) Présence de failles	99

	page
2 - Optimisation du renforcement d'un réseau de mesures ...	105
a) Méthode du point fictif	105
b) Objectif global	107
c) Objectif local	109
d) Influence de la qualité de la station supplémentaire	110
e) Recherche d'un optimum économique	111
3 - Simulations conditionnelles	113
a) Principe	113
b) Méthode des bandes tournantes	115
c) Aperçu de la théorie	116
d) Exemples	117
4 - Identification des systèmes hydrogéologiques	122
CONCLUSION	129

LISTE DES FIGURES

- FIG. 1 - Méthode élémentaire de cartographie piézométrique.
- FIG. 2 - Système global et système local de coordonnées.
- FIG. 3 - Ajustement local par moindres carrés d'un polynôme du 1er degré.
- FIG. 4 - Ajustement local par moindres carrés d'un polynôme du 2ème degré.
- FIG. 5 - Pondération par l'inverse de la distance.
- FIG. 6 - Pondération par l'inverse du carré de la distance.
- FIG. 7 - Inconvénient de la pondération en fonction de la distance au point à estimer.
- FIG. 8 - Tracé des polygones et pondération de Thiessen.
- FIG. 9 - Courbes d'isocorrélation entre une station-clé et les autres stations d'un réseau.
- FIG. 10 - Report en fonction de la distance des coefficients de corrélation.
- FIG. 11 - Tracé de la fonction de corrélation spatiale pour 5 bassins versants des Etats-Unis.
- FIG. 12 - Fonction de corrélation de la pluviométrie mensuelle (Valdaï, URSS).
- FIG. 13 - Echos radar observés durant un orage (Californie, USA).
- FIG. 14 - Evolution de la profondeur de la nappe au puits n°3 de Korhogo.
- FIG. 15 - Valeurs de la transmissivité mesurées dans la nappe alluviale de la Durance.
- FIG. 16 - Comportement du variogramme à l'origine.
- FIG. 17 - Exemples de variogrammes illustrant les 4 types de comportement à l'origine.
- FIG. 18 - Variogramme non borné et variogramme à palier.
- FIG. 19 - Exemples de variogrammes présentant un palier.
- FIG. 20 - Comportements particuliers du variogramme.
- FIG. 21 - Principaux modèles de variogramme utilisés et exemple d'ajustement.
- FIG. 22 - Modélisation aux distances inférieures au pas d'échantillonnage.
- FIG. 23 - Nappe de la Crau: variogramme brut.
- FIG. 24 - Variogramme expérimental en présence d'une dérive et variogramme sous-jacent.

- FIG. 25 - Variogramme réel et variogramme des résidus.
- FIG. 26 - Réalisations de F.A.I. généralisées d'ordre 0, 1 et 2.
- FIG. 27 - Basse-Normandie (logarithmes des transmissivités): essai de krigeage.
- FIG. 28 - Bassin versant de Kadjemeur: tracé manuel des isohyètes.
- FIG. 29 - Bassin versant de Kadjemeur: carte krigée (écarts-types d'estimation en tireté).
- FIG. 30 - Bassin versant de Kadjemeur: carte obtenue par krigeage en négligeant l'effet de pépite.
- FIG. 31 - Influence de la structure sur les poids de krigeage.
- FIG. 32 - Basse-Normandie: piézométrie moyenne par maille.
- FIG. 33 - Basse-Normandie: écarts-types d'estimation des moyennes par maille.
- FIG. 34 - Bassin versant de Kadjemeur: polygones de Thiessen et pondération correspondante.
- FIG. 35 - Bassin versant de Kadjemeur: pondération optimale obtenue par krigeage.
- FIG. 36 - Bassin versant de Kadjemeur: comparaison des différentes méthodes d'estimation globale.
- FIG. 37 - Pondération de krigeage dans le cas d'une dérive linéaire.
- FIG. 38 - Pondération de krigeage dans le cas d'une dérive quadratique.
- FIG. 39 - Sables éocènes.Nord-Aquitaine: variogramme construit à partir des données de transmissivité.
- FIG. 40 - Sables éocènes.Nord-Aquitaine: histogramme des données.
- FIG. 41 - Sables éocènes.Nord-Aquitaine: variogramme construit à partir des logarithmes.
- FIG. 42 - Données sûres et données incertaines.
- FIG. 43 - Influence de l'incertitude sur le poids.
- FIG. 44 - Basse-Normandie: prise en compte des débits spécifiques dans l'estimation de la transmissivité de la nappe bathonienne.
- FIG. 45 - Failles géologiques et effet d'écran formé par un cap.
- FIG. 46 - Basse-Normandie: prise en compte de failles dans l'estimation de la cote du mur du Bathonien.
- FIG. 47 - El Aziziyah: test de la pertinence de deux failles possibles.
- FIG. 48 - El Aziziyah: problème de la cartographie automatique au voisinage d'une faille.
- FIG. 49 - Bassin versant de Kadjemeur: implantation du réseau pluviométrique.
- FIG. 50 - Méthode du point fictif: courbes d'égal gain en précision.
- FIG. 51 - Réseau piézométrique de l'Huveaune: écarts-types de krigeage.

- FIG. 52 - Ecart-types de krigeage après addition d'un piézomètre supplémentaire.
- FIG. 53 - Influence de l'incertitude affectant la donnée supplémentaire sur le gain en précision.
- FIG. 54 - Méthode des bandes tournantes.
- FIG. 55 - Bassin versant de Kadjemeur: trois simulations conditionnelles.
- FIG. 56 - Nappe de l'Huveaune: carte krigée.
- FIG. 57 - Nappe de l'Huveaune: écart-types d'estimation.
- FIG. 58 - Comparaison entre la carte krigée et deux simulations conditionnelles.
- FIG. 59 - Comparaison sur le profil AB du krigeage et de deux simulations conditionnelles.
- FIG. 60 - Nappe de Kairouan: écarts de calage.
- FIG. 61 - Nappe de Kairouan: écarts réduits.

ORIGINE DES DONNEES UTILISEES

- ASSENS, G., de MARSILY, G. de, POTIE, L. (1974):
Basse vallée de l'Huveaune: étude des écoulements souterrains
sur modèle mathématique.
Ecole des Mines - Société des Eaux de Marseille.
- ASTIE, H., BOURGEOIS, M, TRUPIN, G. (1967):
Caractéristiques hydrauliques de la nappe des sables éocènes
de la Gironde: essai de représentation cartographique des
transmissivités.
BRGM, D.S.G.R. 67 A 34.
- BESBES, M. (1972):
Ressources en eau de la plaine de Kairouan.
D.R.E, Tunis.
- BESBES, M. (1975):
Etude hydrogéologique de la plaine de Kairouan sur modèles
mathématiques.
Ecole des Mines, LHM, R75/16.
- BONNET, M., CLOUET D'ORVAL, M. (1969):
Méthodologie d'emploi des simulateurs d'écoulement pour
l'étude des nappes souterraines: application à la Crau.
Géohydraulique - DGRST Action Concertée Eau 1967-1968.
- BOSSY, G. (1965):
Documents sur la nappe alluviale de la Basse Durance et de
la Crau (1953-1962).
Mémoire du CERH, Montpellier.
- DASSIBAT, C., PASCAUD, P. (1975):
Modèle mathématique des nappes du Jurassique de la plaine
de Caen: acquisition de données hydrogéologiques.
BRGM, 75 SGN 340 PNO.
- DEGALLIER, R., (1970):
Communication personnelle à l'auteur.
- DEGALLIER, R., (1975):
Interprétation des variations naturelles du niveau des nappes
souterraines: applications aux données provenant du bassin
versant de Korhogo, Côte d'Ivoire.
Thèse de Doctorat es Sciences, Montpellier.

G.E.F.L.I. (1962):

Structural map of the top of Al Aziziyah formation (Libya).
Soil and Water Resources Survey for Hydroagricultural
Development (Western zone).

LA QUERIERE, Ph. de, ROUX, J.C. (1969):

Le bassin versant représentatif de l'Hallue.
BRGM - PND 69/6.

ROCHE, M.A. (1968):

Écoulement de surface, alimentation de nappe et transport
solide des ouadis Fera, Kadjemeur et Sofoya
ORSTOM, Fort-Lamy.

INTRODUCTION

Sciences appliquées, les sciences de l'eau nécessitent l'acquisition d'un grand nombre de données de tous ordres: cote du niveau piézométrique dans un puits, transmissivité déterminée par un essai de pompage, cote du mur imperméable de la nappe quand celui-ci a été atteint par un forage, hauteur de précipitation mesurée dans un pluviomètre, etc.... Mais cette acquisition de données ne saurait constituer en soi un but suffisant. Pour pouvoir en tirer des enseignements, ces données numériques brutes doivent toujours subir un traitement permettant de dégager les grands traits structuraux des grandeurs étudiées.

La présentation des données sous une forme cartographique permet ainsi de donner rapidement une idée de la variation d'un paramètre dans l'espace. Cependant, comme le note le Guide des Pratiques Hydro-météorologiques de l'O.M.M., "si l'on ne dispose que d'une information peu abondante, la carte présentera, dans une certaine mesure, une interprétation subjective des données; on risque d'ignorer partiellement ou totalement les différents degrés de subjectivité qui se rapportent aux diverses parties de la carte, ce qui produira des résultats dont la précision apparente dépassera de beaucoup la précision réelle" [1]. Cette difficulté de quantifier la précision se retrouve quand on doit estimer, à partir des données, les valeurs moyennes prises par un paramètre sur chacune des mailles d'un modèle mathématique discrétisé, ou encore quand on doit estimer la lame d'eau moyenne sur un bassin versant.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE L'INTRODUCTION

- [1] O.M.M. (1970):
Guide des pratiques hydrométéorologiques.
(IV - Rassemblement, traitement et publication des données).
Publ. O.M.M., n° 168, TP 82.
- [2] UNESCO (1970):
Les bassins représentatifs et expérimentaux: guide
international des pratiques en matière de recherche.
Etudes et Rapports d'Hydrologie, n°4.
- [3] UNESCO (1973):
Groundwater studies: an international guide for research
and practice.

CHAPITRE I
METHODES D'ESTIMATION EN USAGE
EN GEOLOGIE
ET DANS LES SCIENCES DE L'EAU

1 - METHODES ANALYTIQUES D'INTERPOLATION

a) Transposition du procédé manuel

En géologie comme dans les sciences de l'eau, la cartographie manuelle est une technique très répandue. Quand on trace une carte à la main, on interpole en général visuellement entre les points expérimentaux: on fait en sorte, par exemple, que la courbe isovale 40 passe entre les données 39.7 et 40.1, un peu plus près du point de cote 40.1. Une telle interpolation visuelle est en gros linéaire.

Voulant calquer ce procédé pour bâtir une méthode de tracé automatique de cartes, certains auteurs ont pensé à déterminer d'abord des points de cotes entières, en interpolant linéairement le long des segments joignant les points expérimentaux deux à deux, et à relier ensuite les points de même cote en opérant un certain lissage des courbes obtenues [8].

Mais si l'on essaie ainsi de tenir compte de tous les couples de points expérimentaux, la méthode devient extrêmement lourde, avec des risques de conflit au moment du chaînage des courbes.

D'ailleurs, la pratique qui s'est introduite en hydrogéologie pour faciliter le tracé manuel des cartes piézométriques consiste à ne retenir que trois piézomètres à la fois. On approxime la surface à l'aide de facettes planes triangulaires reliant les points expérimentaux (Fig.1).

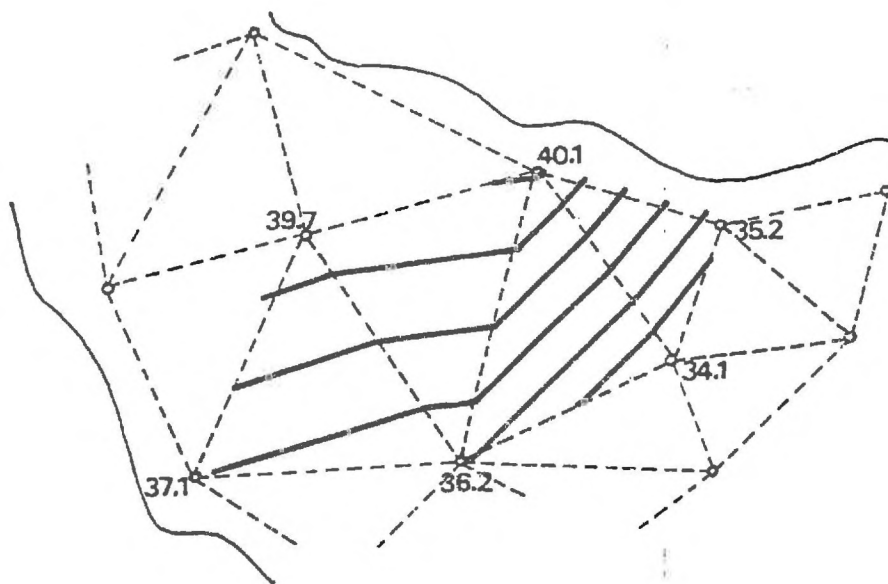


FIG. 1 - METHODE ELEMENTAIRE DE CARTOGRAPHIE PIEZOMETRIQUE

Cette méthode très répandue, encore appelée "contouring par triangulation" [2], est généralement appliquée en prenant soin de bâtir, autant que possible, des triangles à peu près équilatéraux. Un programme de calcul déterminant un tel ensemble de triangles est assez compliqué, et long à exécuter, ce qui enlève beaucoup à la simplicité apparente de la méthode quand il s'agit de l'automatiser.

Ce n'est donc pas vers une simple transposition des méthodes manuelles de cartographie que s'est tourné l'essentiel de la recherche dans ce domaine. La partie "tracé" est généralement simplifiée par le recours à une estimation préalable de la valeur du champ aux noeuds d'une grille régulière. Dans cette première phase d'interpolation proprement dite, l'utilisation des ordinateurs a permis en outre de ne pas se limiter à une simple interpolation linéaire et d'utiliser des méthodes analytiques d'interpolation plus sophistiquées.

b) Interpolation polynômiale .

Pour interpoler le champ étudié à partir des valeurs mesurées aux points expérimentaux, les méthodes analytiques usuelles emploient des fonctions mathématiques comme les polynômes, plus rarement des fonctions trigonométriques. On notera le champ $z(x)$, les points expérimentaux x_i (cette notation condensée à une seule lettre recouvrant en fait des points de l'espace à deux dimensions, de coordonnées X_i et Y_i), les valeurs expérimentales $z_i = z(x_i)$. On prend comme modèle de $z(x)$:

$$z(x) = \sum_{l=1}^k a_l \cdot f^l(x)$$

où les f^l sont des fonctions de base données (par exemple, les monômes $1, X, Y, X^2, Y^2, XY$, etc...), et les a_l des coefficients calculés en sorte que l'on ait un ajustement exact aux points expérimentaux.

Par commodité d'écriture, on notera les fonctions de base avec un indice en position supérieure, f^l désignant ainsi la $l^{\text{ième}}$ fonction de base.

On prendra en compte un nombre de points expérimentaux identique au nombre de fonctions f^l retenu (en général < 10), en procédant, si le nombre total de points expérimentaux est trop élevé, par voisinages glissants.

Les coefficients a_l sont obtenus en résolvant le système linéaire:

$$\sum_{l=1}^k a_l \cdot f^l(x_i) = z_i \quad i = 1, \dots, k$$

Ces méthodes sont satisfaisantes lorsque le champ étudié possède une assez bonne régularité spatiale; encore que le choix du nombre de fonctions de base f^l soit assez délicat. Des polynômes de degré élevé conduisent en effet à des cartes à l'aspect très tourmenté, avec des gradients très forts et souvent irréalistes [4]. Mais ces méthodes d'interpolation analytiques peuvent se révéler catastrophiques si le champ étudié est un peu chaotique.

Or, de nombreuses données géologiques, ou hydrogéologiques, ont une variabilité locale relativement importante qui a donc fait renoncer à la technique précédente au profit de celle des moindres carrés, où l'on n'imposera plus à la carte de respecter scrupuleusement les valeurs expérimentales.

c) Fonctions splines

Un regain d'intérêt pour les méthodes d'interpolation polynômiale est pourtant apparu ces derniers temps par le biais des fonctions splines. Quelques auteurs ont proposé l'emploi de ces fonctions splines pour résoudre les problèmes d'interpolation qui se posent en géologie [12], géophysique [6] et en hydrométéorologie [11].

Le terme "spline" désignait, à l'origine, la languette métallique flexible utilisée par les architectes navals et les ingénieurs aéronautiques pour faciliter le tracé d'une courbe régulière passant par une série de points donnés. Ses propriétés élastiques garantissaient la continuité de la pente et de la courbure aux points imposés, les segments de courbe joignant ces points ayant, en première approximation, une allure polynômiale du 3^{ème} degré. Cet ajustement polynômial par morceaux d'une courbe plane a été facilement adaptable au calcul numérique [9].

Par analogie avec ces courbes splines, les surfaces splines sont des surfaces polynômiales bicubiques ajustées par morceaux [3], [5]. Malheureusement, leur usage se restreint pour l'instant, pour des raisons de commodité de calcul, au cas de données disposées sur une grille rectangulaire, ou à la rigueur sur un maillage topologiquement équivalent [6]. Il faut donc attendre que la méthode soit étendue à des données irrégulièrement espacées pour qu'elle puisse être appliquée à des exemples réels. Si pour des phénomènes très continus comme la piézométrie on peut espérer de bons résultats, pour des phénomènes chaotiques on retrouvera les défauts de toute interpolation polynômiale.

d) Procédés divers

Avant d'aborder la méthode des moindres carrés, on peut encore citer, pour mémoire, deux tentatives d'application, au problème de l'interpolation, de procédés utilisés par ailleurs en hydrologie: les techniques des différences finies et des éléments finis, auxquelles on a classiquement recours dans la construction des modèles mathématiques d'écoulement souterrain.

HUTCHINSON et WALLEY [7] ont proposé l'emploi des fonctions d'interpolation utilisées en éléments finis pour la représentation de la pluviométrie. Le domaine ayant été divisé en quadrilatères convexes avec un pluviomètre à chaque sommet, ils adoptent donc comme estimation au point x , de coordonnées ξ et η dans le système local (cf. Fig.2), la valeur:

$$z^* = \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta)z_1 + (1+\xi)(1-\eta)z_2 + (1+\xi)(1+\eta)z_3 + (1-\xi)(1+\eta)z_4]$$

ce qui ne correspond en fait qu'à un modèle analytique particulier.

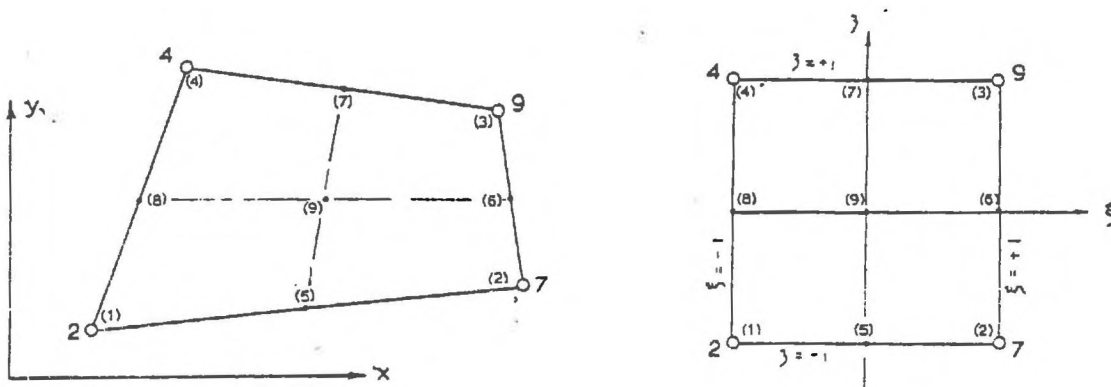


FIG. 2 - SYSTEME GLOBAL (x,y) ET SYSTEME LOCAL (xi,eta) DE COORDONNEES

NOMA et MISULIA [10] ont proposé, eux, une procédure itérative inspirée des différences finies. Après avoir affecté aux points de grille les plus proches les valeurs expérimentales et initialisé à la valeur moyenne les autres points de grille, on fait à chaque pas:

$$z(i,j) = \frac{1}{4} [z(i-1,j) + z(i+1,j) + z(i,j-1) + z(i,j+1)]$$

pour les points de grille (i,j) "non expérimentaux"; les points "expérimentaux" conservant leurs valeurs.

Cette méthode revient en fait à chercher, par la technique des différences finies, la fonction z satisfaisant l'équation de Laplace:

$$\Delta z = 0$$

avec comme conditions aux limites l'imposition des valeurs expérimentales aux points de grille les plus proches.

Ces deux méthodes n'ont jamais eu la diffusion qu'ont pu avoir l'interpolation polynômiale ou l'estimation par moindres carrés.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP.1, § 1

- [1] AHLBERG, J.H., NILSON, E.N., WALSH, J.L. (1967):
The theory of splines and their applications.
Academic Press.
- [2] BATCHA, J.B., REESE, J.R. (1964): cité par [4]
Surface determination and automatic contouring for mineral
exploration, extraction and processing.
Colo. School Mines, quart., 59, pp. 1-14
- [3] BIRKHOFF, G., GARABEDIAN, H.L. (1960):
Smooth surface interpolation.
Journ. Math. Physics, vol. 39, n°4, pp. 258-268
- [4] CRAIN, J.K. (1970):
Computer interpolation and contouring of two-dimensional
data: a review.
Geoexploration, 8, pp. 71-86
- [5] DE BOOR, C. (1962) cité par [12]
Bicubic spline interpolation
Journ. Math. Physics, vol.41, n°3, pp. 212-218

- [6] HESSING, R.C., LEE, H.K., PIERCE, A., POWERS, E.N. (1972)
Automatic contouring using bicubic functions.
Geophysics, vol.37, n°4, pp. 669-674
- [7] HUTCHINSON, P., WALLEY, W.J. (1972):
Calculation of areal rainfall using finite element techniques
with altitudinal corrections.
Bull. Int. Assoc. Scient. Hydrol., XVII, 3, pp. 259-272
- [8] KWAN, J.Y., RILEY, J.P., AMISIAL, R.A. (1969):
A digital computer program to plot isohyctal maps and
calculate volumes of precipitation.
Symposium on the use of analog and digital computers in
hydrology, Tucson, 1968.
Int. Assoc. Scient. Hydrol. publ. n° 80 , pp. 240-248
- [9] MAC LAREN, M.D. (1958):
Formulas for fitting a splined curved through a set of points.
Appl. Math. Rep. 2, Applied Math. Staff, Boving Co., 12 p.
cité par [12]
- [10] NOMA, A.A., MISULIA, M.G. (1959):
Programming topographic maps for automatic terrain model
construction.
Surveying Mapping, 19, pp. 355-366
cité par [4]
- [11] SHAW, E.M., LYNN, P.P. (1972):
Areal rainfall evaluation using two surface fitting techniques.
Bull. Int. Assoc. Scient. Hydrol., XVII, 4, pp. 419-433.
-
- [12] WHITTEN, E.H.T., KOELLING, M.E.V. (1973):
Spline surface interpolation, spatial filtering and trend
surfaces for geological mapped variables.
Mathematical Geology, vol. 5, n°2, pp. 111-125.

2 - METHODE DES MOINDRES CARRES

On a vu l'échec des méthodes analytiques d'interpolation pour les grandeurs dont le comportement spatial est irrégulier, voire erratique, comme, par exemple, la pluviométrie ou la perméabilité. Quand les données montrent ainsi une importante dispersion, on ne cherche donc pas à contraindre la surface à passer par les points expérimentaux. On se contente d'imposer que les écarts aux points expérimentaux entre valeurs réelles et valeurs reconstituées par le modèle choisi soient aussi faibles que possible.

Les critères du type minimax étant d'un emploi malaisé, on a généralement recours à la méthode statistique d'ajustement par moindres carrés.

a) Fondements théoriques

L'hypothèse sous-jacente est que le phénomène réel est régulier, - et peut être décrit par une fonction mathématique $m(x)$ - mais qu'il s'y superpose une erreur $\epsilon(x)$ de moyenne nulle, de variance constante et sans auto-corrélation:

$$z(x) = m(x) + \epsilon(x)$$

Prenant pour $m(x)$ un modèle du type $\sum_{l=1}^k a_l f^l(x)$, on cherche à l'ajuster à l'aide de n points expérimentaux (avec évidemment $n > k$), en minimisant l'expression:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^k a_l f^l(x_i) - z_i \right)^2$$

Les coefficients a_l sont déterminés en égalant à zéro les dérivées partielles relatives à chacun d'eux, ce qui conduit au système d'équations suivant:

$$\sum_{l=1}^k a_l \cdot \left(\sum_{i=1}^n f^s(x_i) \cdot f^l(x_i) \right) = \sum_{i=1}^n f^s(x_i) \cdot z_i \quad s = 1, \dots, k$$

L'utilisateur est maître du choix des fonctions de base, de leur nombre k , et du nombre n de points expérimentaux pris en compte (s'il opère, comme c'est le cas généralement, par voisinages glissants).

En ce qui concerne les types de fonctions de base, on peut mentionner quelques essais de développements en double série de Fourier, employant des fonctions trigonométriques [3]. En dehors de ces tentatives, sont presque exclusivement utilisés des polynômes, généralement les monômes $1, X, Y, X^2, XY, Y^2$, etc... Parfois, les termes croisés, du type XY , sont omis pour simplifier les calculs ("abbreviated regression method" [6]), mais ce procédé n'est pas recommandé si le phénomène ne manifeste pas une orientation préférentielle nette dans la direction des axes de coordonnées. Certains auteurs [1] préconisent l'emploi de polynômes orthogonaux, c'est à dire tels que:

$$\sum_{i=1}^n f^l(x_i) \cdot f^s(x_i) = 0 \quad \forall l \neq s$$

Ces polynômes sont obtenus à partir des monômes $1, X, Y, \dots$ par une technique d'orthogonalisation comme celle de GRAM-SCHMIDT. Les tenants de la méthode mettent en avant le fait que les coefficients a_l s'expriment ensuite simplement en fonction des $f^l(x_i)$; mais le volume total des calculs semble voisin de celui correspondant à la pratique courante, avec peut-être un avantage quant à la précision en faveur des polynômes orthogonaux.

En ce qui concerne maintenant le choix des nombres de points et de fonctions de base à prendre, il est essentiellement fonction du résultat souhaité, le nombre de points étant toujours au moins de l'ordre du double du nombre de fonctions de base. Ainsi, par exemple, pour ajuster localement un plan ($f^0=1, f^1=x, f^2=y$), on prend environ six points [7].

En jouant sur ces deux nombres, on décide implicitement de la part qui sera filtrée et de celle qui sera conservée et à laquelle on donnera généralement le nom de "trend" (tendance). Bien que le résultat puisse différer notablement, comme on peut le constater aux Fig. 3 et 4, selon que l'on adopte un ajustement polynômial du 1er ou du 2ème degré, on attribue généralement à cette trend une signification physique.

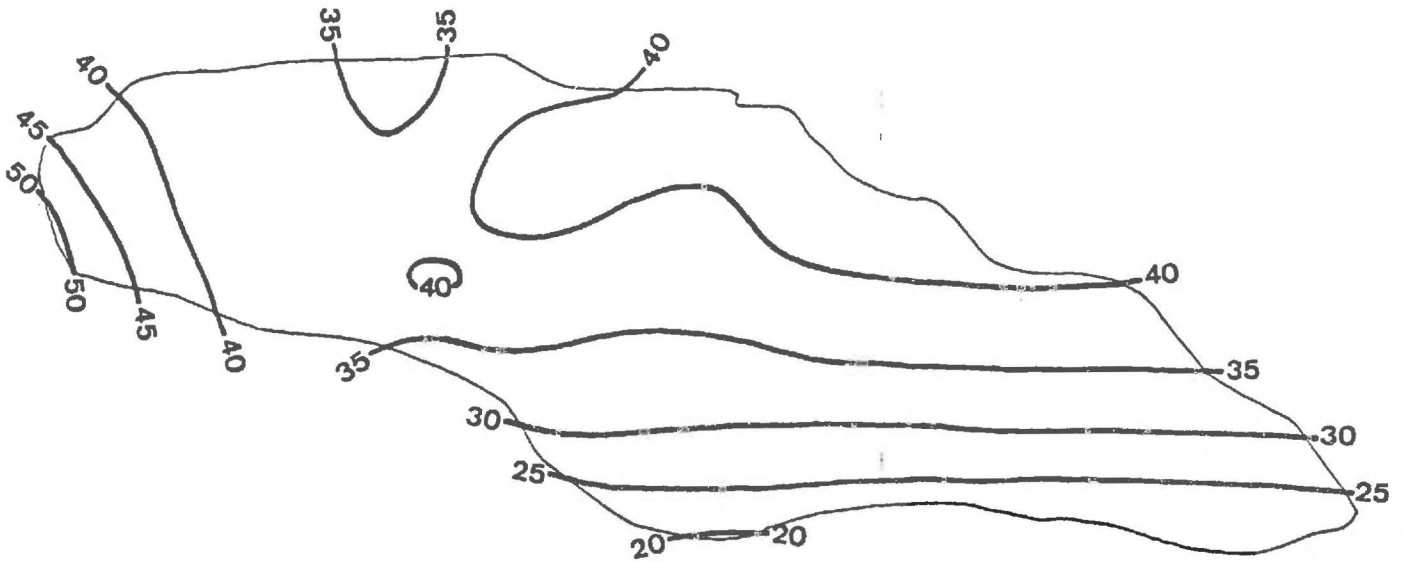


FIG. 3 - AJUSTEMENT LOCAL PAR MOINDRES CARRES D'UN POLYNOME DU 1er DEGRE
(Données pluviométriques sur le bassin versant de Kadjemeur)

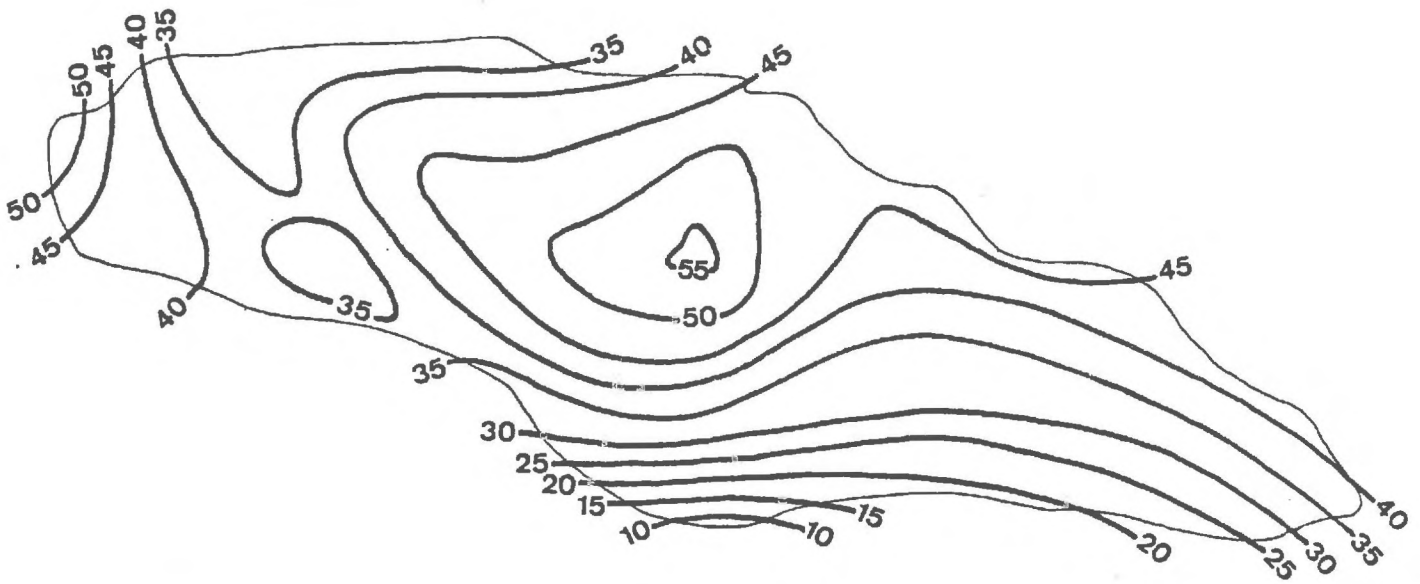


FIG. 4 - AJUSTEMENT LOCAL PAR MOINDRES CARRES D'UN POLYNOME DU 2ème DEGRE

b) Notion de "trend"

En effet, les auteurs utilisant la technique des moindres carrés passent souvent de la formulation "mathématique" initiale:

valeur observée = valeur d'une fonction déterministe + erreur aléatoire [8]

à la formulation "physique" suivante, indiquant le but poursuivi:

valeur observée = composante régionale + fluctuation locale
(trend) (résidu ou anomalie)

On modélise à l'aide de fonctions mathématiques régulières la composante régionale ("car les causes hydrauliques et géologiques générales produisent toujours (en piézométrie par exemple) des effets morphologiques réguliers" [2]) et l'on impose à des résidus au statut peu clair un modèle sans auto-corrélation. Cette dichotomie entre trend et résidus est classique dans les sciences de la terre, notamment en géologie [3], [4], [5], [6]. Certains auteurs [2], s'inspirant des méthodes utilisées en géophysique, ont tenté de l'introduire en hydrogéologie pour l'étude de la piézométrie.

Mais l'assimilation entre les deux formulations présentées ci-dessus est un peu hâtive: les résidus ne constituent pas des erreurs; ils font partie intégrante du phénomène, dont ils rendent compte de fluctuations à échelle plus petite que la trend. De nombreux auteurs [3] admettent d'ailleurs que l'hypothèse d'absence d'auto-corrélation est rarement vérifiée en géologie, surtout si l'on adopte des polynômes de degré peu élevé comme modèle de "trend". Des méthodes de moindres carrés généralisées, visant à tenir compte de cette auto-corrélation, ont été parfois proposées.

Cependant, le principal reproche que l'on puisse adresser aux tenants des moindres carrés, c'est d'affirmer, comme on le lit souvent, que l'écart quadratique moyen de reconstitution aux points expérimentaux:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \sum_{l=1}^k \hat{a}_l f^l(x_i))^2$$

constitue un bon critère pour juger de l'adéquation du modèle à la réalité. Le procédé des moindres carrés, minimisant les écarts entre trend et réalité aux points expérimentaux, ne garantit en rien que cet écart sera faible en dehors de ces points.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP 1, § 2

- [1] CRAIN, I.K. (1970):
Computer interpolation and contouring of two-dimensional data: a review.
Geoexploration, 8, pp.71-86
- [2] GIURA, R., DE WRACHIEN, D., PONZINI, G.S. (1970):
Procédés automatiques de calcul et de représentation des caractéristiques hydromorphologiques appliquées à l'étude de la surface piézométrique d'une nappe aquifère.
Symposium scientifique international sur l'informatique et les problèmes de l'eau, Montpellier, 1970.
- [3] HARBAUGH, J.W., MERRIAM, D.F. (1968):
Computer applications in stratigraphic analysis.
John Wiley & Sons.
-
- [4] KRUMBEIN, W.C. (1956): cité par [6]
Regional and local components in facies.
Amer. Ass. Petrol. Geol. Bull., 40-9, pp. 2163-2194
- [5] KRUMBEIN, W.C. (1959): cité par [3] et [6]
Trend surface analysis of contour-type maps with irregular control-point spacing.
Jour. Geophysical Res., vol. 64, n°7, pp.823-824.
- [6] MILLER, R.L., KAHN, J.S. (1962):
Statistical analysis in the geological sciences (ch. 17)
. some statistical approaches to mapping problems).
John Wiley & Sons.
- [7] SHEARMAN, R.J., SALTER, P.M. (1975):
An objective rainfall interpolation and mapping technique.
Hydrol. Sci. Bull., XX, 3, pp. 353-363.
- [8] WATSON, G.S. (1972):
Trend surface analysis and spatial correlation.
The Geological Soc. of America - Special Paper 146.

3 - METHODES ELEMENTAIRES DE PONDERATION

Dans les méthodes polynômiales décrites aux deux paragraphes précédents, les coefficients a_1 des différents monômes f^1 pouvaient s'exprimer linéairement en fonction des données $z_i = z(x_i)$; il en était donc de même pour les estimations auxquelles elles conduisaient en un point quelconque x_0 :

$$\hat{z}_0 = \sum_{i=1}^k a_1 f^1(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) z_i$$

Les poids λ_i dépendaient là des $f^1(x_i)$ et $f^1(x_0)$, mais cette idée de pondérer les données a été exploitée bien en dehors du contexte des méthodes polynômiales.

a) Pondération en fonction de la distance

La valeur z_0 en un point non mesuré x_0 ne devant pas être très différente des valeurs expérimentales z_i voisines, on a souvent adopté comme estimation de z_0 une moyenne de ces valeurs expérimentales, calculée en donnant plus de poids aux points de mesure proches qu'au points plus éloignés:

$$\hat{z}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w(d_{i0}) z_i}{\sum_{i=1}^n w(d_{i0})}$$

où $w(d)$ est la fonction de pondération,

d_{i0} la distance du point estimé x_0 au point expérimental x_i .

De nombreuses fonctions de pondération sont proposées dans la littérature, le choix étant plus ou moins arbitraire, question de convictions personnelles ou de tradition, et aussi fonction du résultat souhaité.

Si l'on veut disposer d'un interpolateur exact (c'est à dire que la valeur estimée soit égale à la valeur expérimentale dans le cas où le point à estimer vient à coïncider avec un point de mesure), il faut, par exemple, que la fonction de pondération satisfasse la condition:

$$w(d) \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad d \rightarrow 0$$

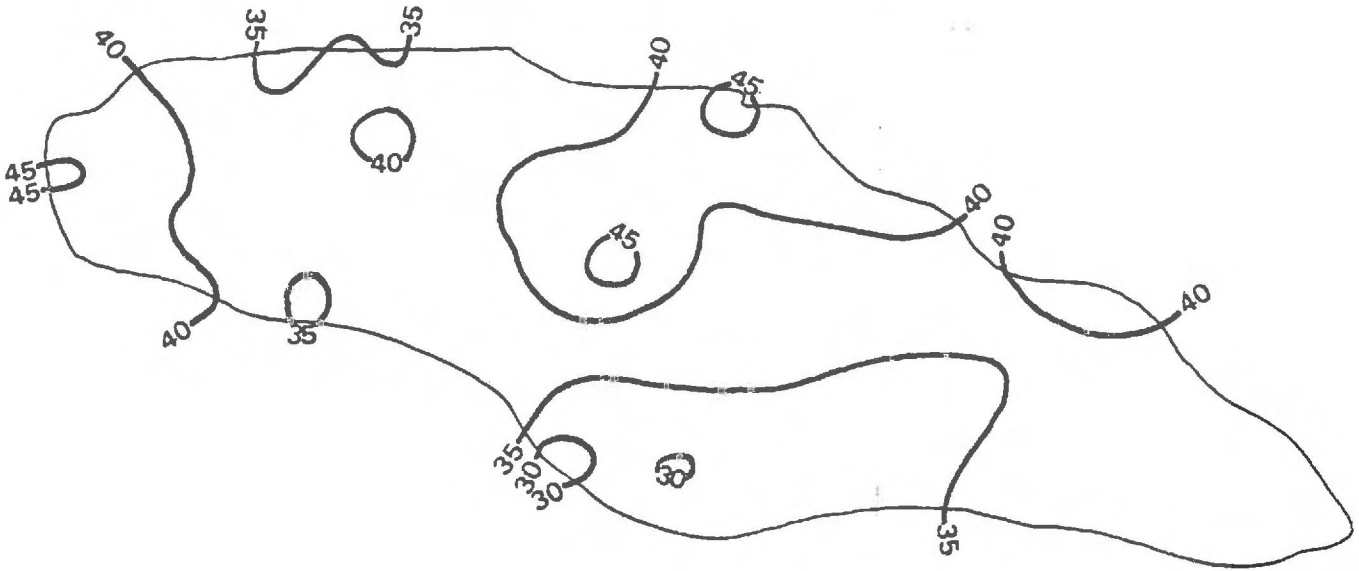


FIG. 5 - PONDERATION PAR L'INVERSE DE LA DISTANCE

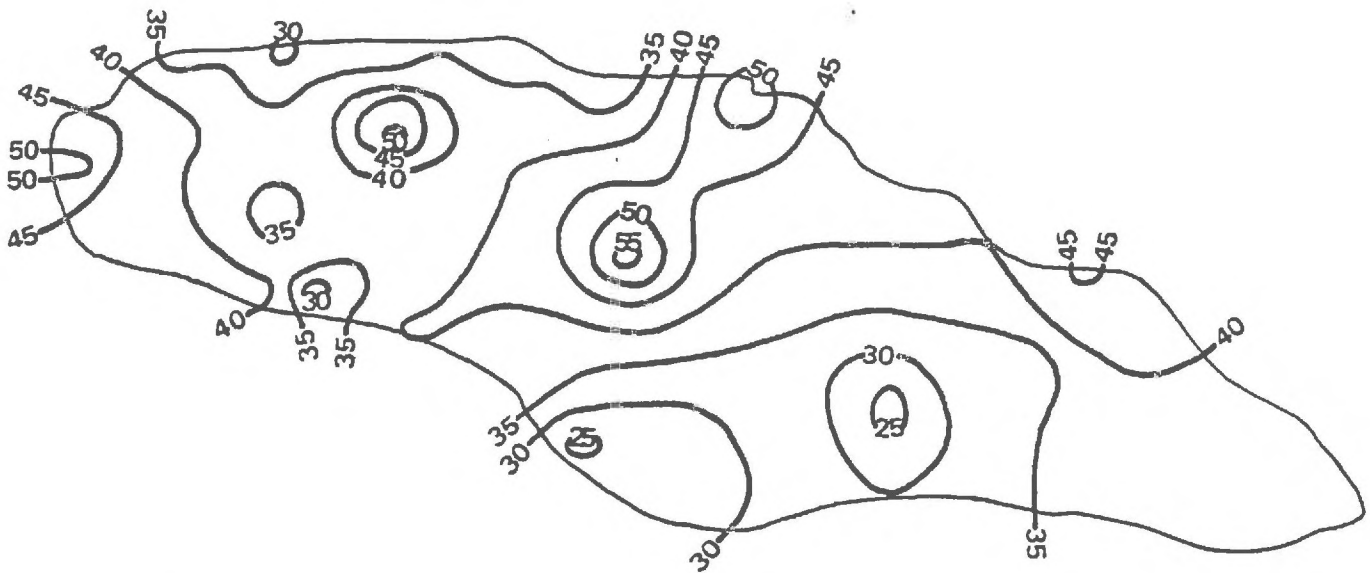


FIG. 6 - PONDERATION PAR L'INVERSE DU CARRE DE LA DISTANCE

Plus la confiance accordée aux données est faible, plus la forme de la fonction de pondération doit être plate, et plus cette confiance est forte, plus elle doit ressembler à un pic [2]. Selon la forme de cette fonction, on introduit ainsi un lissage plus ou moins important, destiné à filtrer ce que les différents auteurs appellent "bruit", "erreur" ou "fluctuations".

Le lissage le plus drastique est celui introduit par le procédé de la "moyenne mobile", qui consiste à assigner un poids identique à tous les points expérimentaux situés dans un certain voisinage:

$$\begin{aligned} w(d) &= 1 & \text{si } d \leq R \\ &= 0 & \text{si } d > R \end{aligned}$$

Parmi les autres fonctions de pondération utilisées, on peut citer:

$$\begin{aligned} w(d) &= \frac{1}{d} & \text{ou } \frac{1}{d^2} & & [2], [8] \\ &= \frac{1}{d+1} & \text{ou } \frac{1}{d^2+1} & & [6] \\ &= e^{-\alpha d} & & & [7] \end{aligned}$$

cette dernière forme introduisant un lissage plus ou moins important selon la valeur de α .

On trouvera, représentées aux figures 5 et 6, deux cartes obtenues à partir des mêmes données en adoptant une pondération dans un cas en $\frac{1}{d}$ et dans l'autre en $\frac{1}{d^2}$; on peut constater combien le choix arbitraire d'une fonction de pondération peut influencer sur l'aspect de la carte.

Mais l'arbitraire ne constitue pas le seul inconvénient de la méthode. Ne prenant en compte que les distances des différents points expérimentaux au point à estimer, elle ne parvient pas à discriminer l'information redondante.

Considérons, par exemple, la configuration de la figure 7a. Les trois points expérimentaux, situés à égale distance du point à estimer, se voient naturellement assigner des poids égaux (1/3). Mais si le point A est remplacé par deux points très proches A' et A" (Fig.7b), une méthode

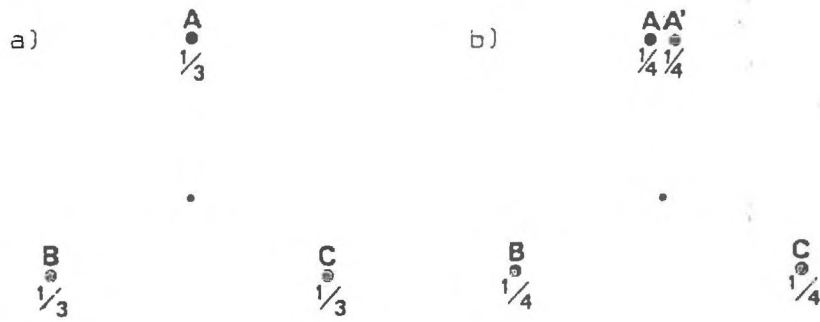


FIG. 7 - INCONVENIENT DE LA PONDERATION EN FONCTION DE LA DISTANCE AU POINT A ESTIMER.

de pondération en fonction de la distance leur assignera à chacun ainsi qu'aux deux autres points B et C, un poids égal à $1/4$. L'influence des deux points B et C sur l'estimation au point central viendrait ainsi à diminuer, alors que la part d'information qu'ils apportent reste identique, et que leurs poids devraient rester inchangés.

b) Méthode des polygones d'influence

Une méthode de pondération élémentaire a été également développée pour l'estimation des valeurs moyennes sur un domaine. Elle a l'avantage sur la précédente de tenir compte de la position relative des différents points expérimentaux entre eux et par rapport au domaine, et de pouvoir ainsi discriminer l'information redondante.

La méthode des polygones, proposée par THIESSEN [9], et adoptée par tous les hydrologues [1], correspond à l'hypothèse suivante: une station est représentative de l'ensemble des points du bassin pour lesquels elle est la station la plus proche. Sa mise en oeuvre nécessite le tracé d'un réseau polygonal formé par les médiatrices des segments joignant les stations (Fig.8). On réalise ainsi une partition du bassin en n zones d'influence, de surface S_i , avec:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

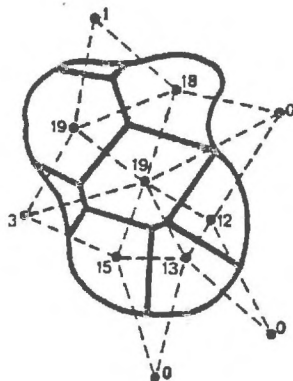


FIG. 8 - TRACE DES POLYGONES ET PONDERATION DE THIESSEN (en %)

(d'après [1])

Sur le plan formel, l'estimation, par la méthode de THIESSEN, de la lame d'eau $\bar{z}_S = \frac{1}{S} \int z(x)dx$ est la moyenne, pondérée par ces surfaces S_i , des hauteurs d'eau z_i mesurées aux n stations:

$$\hat{z}_S = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n S_i \cdot z_i$$

Dire que la station i est représentative du polygone correspondant revient, en effet, à assimiler z_i à la hauteur d'eau moyenne tombée sur le polygone, c'est à dire à $\frac{1}{S_i} \int_{S_i} z(x)dx$.

Parmi les inconvénients de cette méthode, le premier réside dans la relative lourdeur de sa mise en oeuvre, notamment lorsque des absences de mesures en certaines stations obligent à tracer autant de réseaux polygonaux qu'il y a eu de configurations expérimentales. Pour pallier ce dernier inconvénient, on a cherché à automatiser la détermination des poids de THIESSEN, en substituant leur calcul par une méthode de Monte-Carlo [3], ou une méthode associant à une station chaque point d'une grille régulière recouvrant le bassin étudié [5], au procédé graphique traditionnel.

Le second inconvénient présenté par la méthode est qu'elle a été conçue pour être employée à grande échelle dans des régions sans influence orographique très marquée. Ceci a nécessité son adaptation pour prendre en compte les altitudes des stations, en les ramenant à la même cote par régression de la pluviométrie sur l'altitude, ou en rapportant les valeurs expérimentales à leur moyenne saisonnière ou annuelle de façon à compenser l'effet orographique [1].

Les méthodes qui viennent d'être exposées dans ce paragraphe et les précédents réalisent, en fait, des pondérations "passe-partout". Le mode de pondération n'est pas lié aux caractéristiques du phénomène étudié, mais est toujours dû à un choix plus ou moins arbitraire. Les méthodes probabilistes introduites en hydrométéorologie par l'école soviétique reposent, elles, sur une mise en évidence préalable de la variabilité spatiale des phénomènes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP.1, § 3

- [1] CHOW, V.T. & al. (1964):
Handbook of applied hydrology (section 9 - Rainfall)
Mc Graw Hill
- [2] CRAIN, I.K., BHATTACHARYYA, B.K. (1967):
Treatment of non-equispaced two-dimensional data with a
digital computer.
Geoexploration, 5, pp. 173-194.
- [3] DISKIN, M.H. (1969)
Thiessen coefficients by a Monte-Carlo procedure.
J. Hydrol., 8, pp. 323-335.
- [4] DISKIN, M.H. (1970):
On the computer evaluation of Thiessen weights.
J. Hydrol., 11, pp. 69-78.
- [5] GOUBET, A., GENIN, M. (1967):
Application de la méthode de Thiessen à l'aide de machines
électroniques.
1ère C.E. (Service d'Etude des Débits) - S.P.E.P.E.
- [6] NEWTON, R. (1968):
Deriving contour maps from geological data.
Can. J. Earth Sci., 5, pp. 165-166.
- [7] NEWTON, R. (1973):
A statistical prediction technique for deriving contour maps
from geophysical data.
Mathematical Geology, vol.5, n°2, pp. 179-189
- [8] SHEARMAN, R.J., SALTER, P.M. (1975):
An objective rainfall interpolation and mapping technique.
Hydrol. Sci. Bull., XX, 3, pp. 353-363.
- [9] THIESSEN, A.H. (1911):
Precipitation for large areas.
Monthly Weather Review, vol. 39, n°7, pp. 1082-1084.

4 - METHODES PROBABILISTES

a) Caractérisation de la structure

Ce paragraphe concernant l'emploi de méthodes statistiques, ou plutôt probabilistes, ne se réfère qu'à des travaux portant sur les précipitations. L'hydrométéorologue, disposant de plusieurs réalisations du phénomène étudié (plusieurs averses, ou une série de pluies journalières,...), a toujours établi des statistiques simples ponctuelles: moyenne et variance dans le temps calculées à une station. Il a été ensuite amené naturellement à envisager l'étude des liaisons spatiales en utilisant le calcul des corrélations entre stations.

α) Normales, anomalies et coefficients de corrélation

Soient: z le champ considéré (par exemple précipitations journalières)
 $\{x_i \mid i=1, \dots, n\}$ l'ensemble des stations de mesure
 $z_i = z(x_i)$ la valeur du champ au point x_i .

Si une barre en position supérieure indique la moyenne temporelle, on aura en chaque station:

$\overline{z_i}$ moyenne ou "normale" au point x_i
 $z'_i = z_i - \overline{z_i}$ écart à la moyenne ou "anomalie" au point x_i
 $s_i^2 = \overline{z_i'^2}$ variance au point x_i
 $r_{ij} = \frac{\overline{z'_i z'_j}}{s_i s_j}$ coefficient de corrélation entre les points x_i et x_j .

La pratique consistant à travailler sur les anomalies, éventuellement sur les pluies "standardisées" (z'/s) [2] (ou chez certains auteurs [3] à travailler en pourcentage de la moyenne temporelle), vise à homogénéiser le champ des précipitations qui est généralement non stationnaire.

Notons que le champ des normales a les propriétés de régularité spatiale d'une "trend" (tendance en grand): les petites fluctuations sont lissées quand on prend des moyennes sur une longue période, ne laissant plus apparaître que les traits persistant à grande échelle.

A partir de n stations, on peut calculer $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ coefficients de corrélation différents. Ces résultats peuvent être présentés sous forme de n cartes montrant, pour chaque station, ses coefficients de corrélation avec les $n-1$ autres stations (Fig.9). La plupart des auteurs se contentent en fait d'une seule carte se référant à une station-clé occupant une position centrale dans le réseau. On se limite alors à une vue partielle des liaisons spatiales, sur laquelle il est dangereux de raisonner, l'aspect d'une telle carte pouvant changer considérablement si l'on change de station-clé [8].

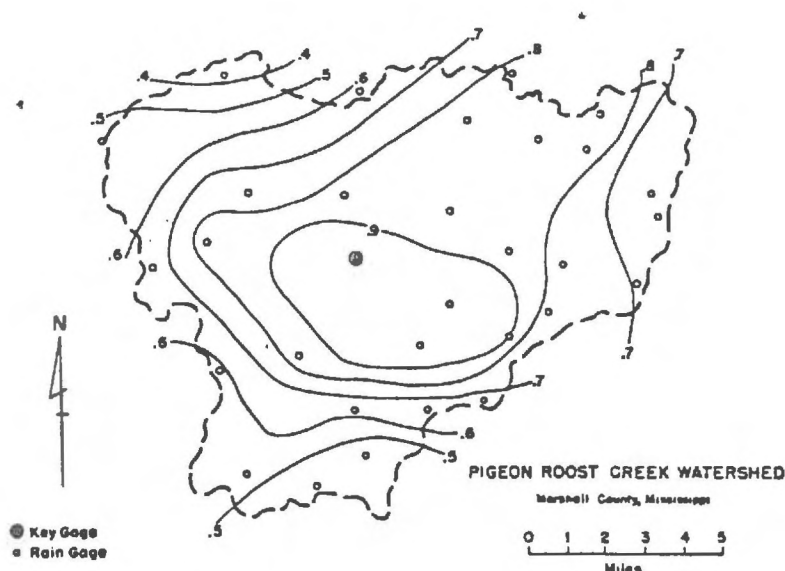


FIG. 9 - COURBES D'ISOCORRELATION ENTRE UNE STATION-CLÉ ET LES AUTRES STATIONS D'UN RESEAU
(d'après [8])

β) Fonction de corrélation

Il est préférable d'adopter une vision plus globale, en utilisant la notion de fonction de corrélation introduite en hydrométéorologie par l'école soviétique (DROZDOV [5], GANDIN [7], KAGAN [9]). Sous certaines hypothèses de stationnarité du champ, on peut considérer que le coefficient de corrélation entre deux points ne dépend que du vecteur les joignant, et non de leurs emplacements.

On peut alors reporter r_{ij} en fonction de la distance d_{ij} (Fig.10), obtenant ainsi un nuage de C_n^2 points illustrant la décroissance de la corrélation avec la distance.

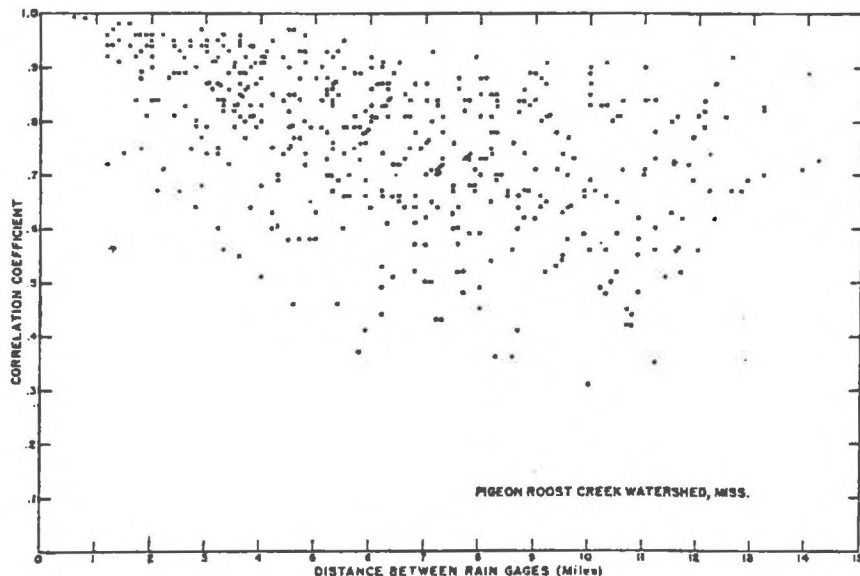


FIG. 10 - REPORT EN FONCTION DE LA DISTANCE DES COEFFICIENTS DE CORRELATION DE TOUS LES COUPLES DE PLUVIOMETRES D'UN BASSIN VERSANT (d'après [8])

Une trop grande dispersion de ce nuage pourra suggérer de classer les couples par direction, et d'étudier r_{ij} en fonction de d_{ij} et θ_{ij} [8] et [16], en cherchant à mettre en évidence une éventuelle anisotropie.

On essaie ensuite de tracer une courbe empirique $r = r(d)$, en calculant, par exemple, pour différentes valeurs choisies de r la valeur moyenne de d correspondante, ou vice-versa [8] (Fig.11).

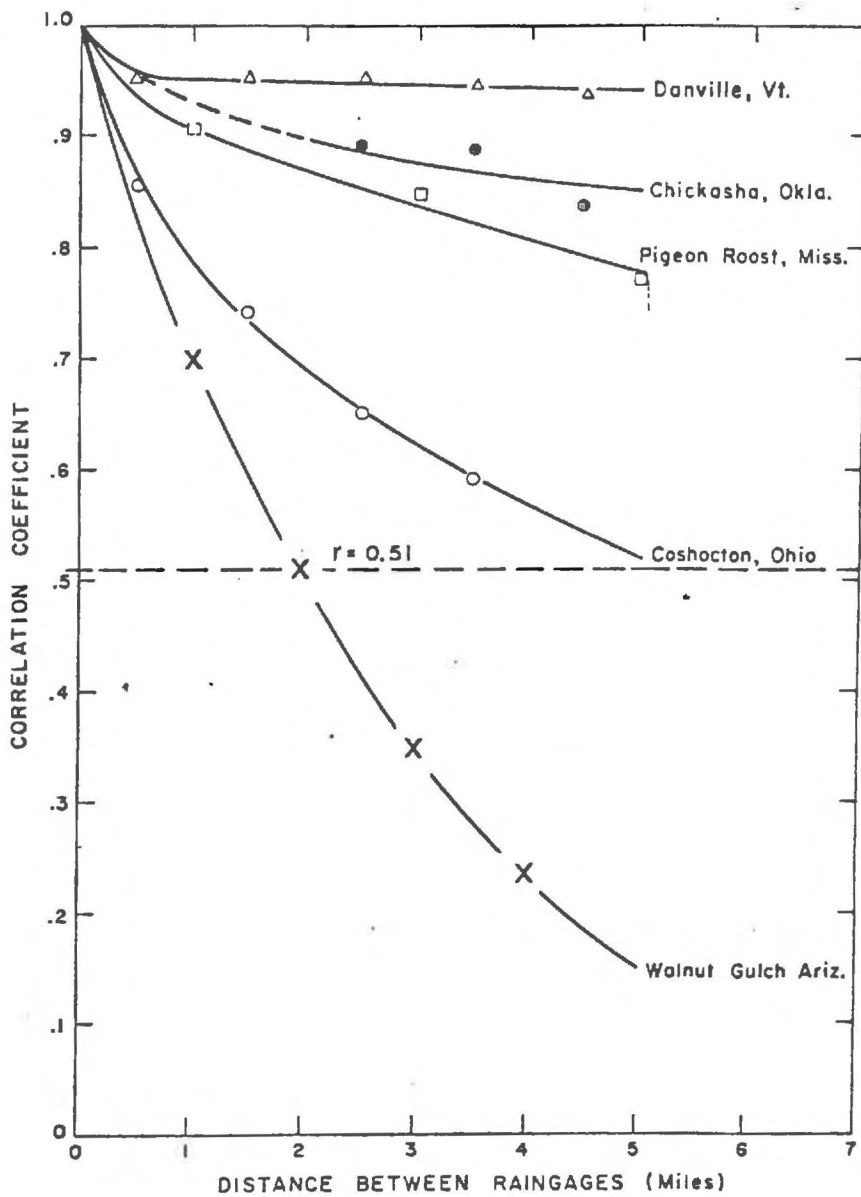


FIG. 11 - TRACE DE LA FONCTION DE CORRELATION SPATIALE POUR
5 BASSINS VERSANTS DES ETATS-UNIS
(d'après [8])

L'étape suivante consiste à ajuster une fonction mathématique à cette courbe empirique. Différents modèles ont été proposés: l'école soviétique a adopté une forme à décroissance exponentielle $r(d) = e^{-\alpha d}$ [12]; RODRIGUEZ-ITURBE [14], se référant plus tard aux travaux de MATERN [11], WHITTLE [19] et YAGLOM [12], a proposé d'introduire en outre un modèle en $r(d) = \alpha d K_1(\alpha)$, où K_1 est une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. Reste la question de l'ajustement du paramètre α : celui-ci est fait soit par moindres carrés en prenant l'ensemble des valeurs de coefficients de corrélation obtenues, soit en prenant comme critère de bien rendre compte des corrélations à la distance moyenne de deux points courants du bassin versant étudié [15].

γ) Interprétation climatologique

L'interprétation climatologique de ces résultats s'appuie sur le fait que, plus la décroissance de la fonction de corrélation est rapide, plus la variabilité spatiale de la pluviométrie est importante.

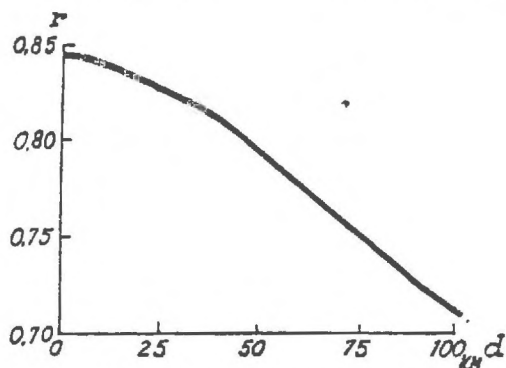


FIG. 12 - FONCTION DE CORRELATION DE LA PLUVIOMETRIE MENSUELLE (VALDAÏ, URSS) (d'après [9])

De nombreux auteurs, en particulier les auteurs soviétiques [9], [12], [2], ont mis en évidence le fait que, en extrapolant à la distance zéro la fonction de corrélation bâtie à partir des données, on n'obtenait pas la valeur 1, mais une valeur légèrement inférieure. Ils ont attribué cette particularité à l'existence "d'erreurs" imputables aux mesures ou à des phénomènes microclimatiques, et donc non corrélées d'une station à une autre [9]. Leur présence revient en effet à majorer les variances ponctuelles d'une quantité égale à la variance de ces "erreurs", et donc, majorant les dénominateurs, à minorer les valeurs trouvées pour les coefficients de corrélation.

L'impact des phénomènes microclimatiques sur la fonction de corrélation spatiale a été étudié par SHARON [16], [17]. Celui-ci a montré que, si les erreurs instrumentales ont pour effet une diminution de la fonction de corrélation indépendante de la distance, la présence de cellules convectives se traduit en fait par une décroissance rapide (le taux étant fonction inverse

de la taille des cellules) de cette fonction au voisinage de l'origine. Quand on dispose d'un réseau pluviométrique suffisamment dense [16], [6] ou d'un balayage radar [1] (cf. Fig.13), on peut observer, en effet, la structure cellulaire de la précipitation due à une convection à petite échelle se superposant aux phénomènes d'échelle supérieure. Celle-ci se traduit sur les isohyètes par la présence de pastilles isolées entourant des maxima locaux, d'où le nom de "spottiness" donné par SHARON [17].

L'examen de la fonction de corrélation est donc riche d'enseignement sur la structure spatiale de la pluviométrie; mais cet outil, ou d'autres outils probabilistes voisins, a permis également de donner un support mathématique aux notions d'erreur d'interpolation ou d'erreur sur le calcul des moyennes spatiales, et d'optimiser ces opérations.

b) Prise en compte de la structure dans l'estimation

a) Structure et erreur d'estimation

Les concepts de base, en ce qui concerne l'étude des réseaux pluviométriques, et leur rationalisation, sont en effet l'erreur maximum admissible sur l'estimation de la pluie en un point quelconque non mesuré, et l'erreur maximum admissible sur l'estimation de la pluie moyenne sur une zone déterminée.

Le concept "d'erreur quadratique moyenne d'interpolation linéaire" est introduit en 1936 par DROZDOV [4] qui le rattache à la distance séparant les stations. Dans un travail ultérieur [5], il montre que l'erreur en question est uniquement liée à ce qu'il appelle la "fonction de structure", c'est à dire à l'évolution de la moyenne quadratique des écarts entre les valeurs prises par le phénomène en deux points, quand on fait varier la distance séparant ces deux points.

Comme on a défini r_{ij} , on définit alors:

$$b_{ij} = \overline{(z_i - z_j)^2}$$

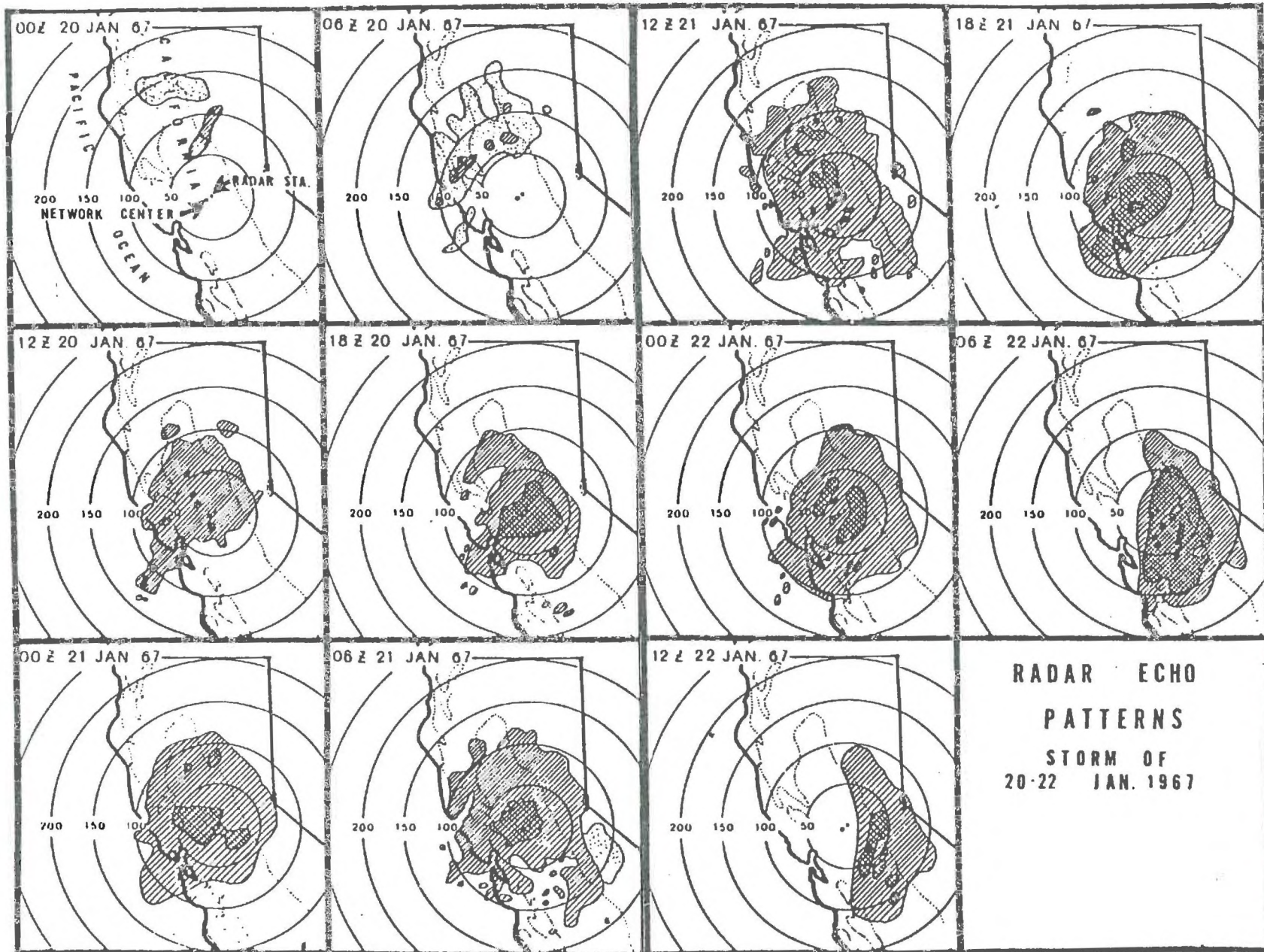


FIG. 13 - ECHOS RADAR OBSERVES DURANT UN ORAGE (CALIFORNIE, USA) - (d'après [1])

et l'on passe à la fonction de structure $b = b(d)$ en faisant les hypothèses de stationnarité et d'isotropie nécessaires, cette fois-ci, sur les écarts.

Cette fonction de structure est reliée d'une façon simple à la fonction de corrélation. Si, par exemple, on travaille sur les pluies "standardisées" [2], on a:

$$\beta_{ij} = \left(\frac{z'_i}{s_i} - \frac{z'_j}{s_j} \right)^2 = 2(1-r_{ij})$$

ou bien encore, dans le cas stationnaire où:

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= \bar{z}_j = m \\ s_i^2 &= s_j^2 = s^2 \end{aligned} \quad \forall i, j$$

on a:
$$b(d) = 2s^2 (1-r(d))$$

Utilisant cet outil pour l'étude des erreurs d'interpolation, DROZDOV [5] montre que l'erreur quadratique moyenne correspondant à une interpolation linéaire entre deux stations est maximum au milieu du segment joignant les deux stations et vaut alors:

$$\epsilon^2 = b\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{4} b(l)$$

si l désigne la distance entre les deux stations.

KHRGIAN [10] a appliqué la même approche à l'interpolation linéaire entre trois stations. On montre alors [5] qu'au point central d'un triangle équilatéral, on a comme erreur quadratique moyenne:

$$\epsilon^2 = b\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3} b(l)$$

si l désigne là encore la distance entre les stations.

De même, en ce qui concerne l'estimation de la précipitation moyenne sur un domaine S , le résultat suivant a été établi [9], en utilisant cette fois la fonction de corrélation: à l'estimation par la moyenne arithmétique simple $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ des valeurs mesurées aux n stations correspond une

erreur quadratique moyenne égale à

$$\epsilon^2 = s^2 \cdot \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n r_{iS} + r_{SS} \right]$$

où r_{iS} désigne la valeur moyenne de la corrélation entre la station i et un point décrivant le domaine S ,

et r_{SS} désigne la valeur moyenne de la corrélation entre deux points décrivant indépendamment le domaine S .

ces deux valeurs étant calculées à partir de la fonction $r(d)$.

De même, avec les mêmes notations, en adoptant la pondération de THIESEN $\sum_{i=1}^n T_i z_i$, on a:

$$\epsilon^2 = s^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_i T_j r_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n T_i r_{iS} + r_{SS} \right]$$

Sont ainsi quantifiées les précisions des méthodes les plus classiques d'interpolation ou d'estimation de valeur moyenne. Mais la démarche utilisée permet d'aller plus loin, et d'optimiser les modes de pondération.

8) Interpolation optimale

En interpolation, GANDIN [7], travaillant sur les anomalies, forme, pour estimer z'_0 en un point x_0 situé en dehors des stations, une combinaison linéaire (ou encore une moyenne pondérée) des anomalies z'_i aux stations $\{x_i, i=1, \dots, n\}$

$$\hat{z}'_0 = \sum_{i=1}^n p_i z'_i$$

Il cherche ensuite les poids p_i qui minimisent l'erreur quadratique moyenne:

$$\epsilon_0^2 = (\hat{z}'_0 - z'_0)^2$$

Le calcul se conduit de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \epsilon_0^2 &= \left(\sum_{i=1}^n p_i z'_i - z'_0 \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j z'_i z'_j - 2 \sum_{i=1}^n p_i z'_i z'_0 + z_0'^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \frac{z'_i z'_j}{z'_i z'_j} - 2 \sum_{i=1}^n p_i \frac{z'_i z'_0}{z'_i z'_0} + \frac{z_0'^2}{z_0'^2} \end{aligned}$$

Si l'on travaille, comme ci-dessus, en corrélation et avec les mêmes hypothèses, on obtient:

$$\epsilon_0^2 = s^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j r_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n p_i r_{i0} + r_{00} \right]$$

Pour minimiser ϵ_0^2 , il suffit d'annuler les dérivées partielles par rapport aux p_i . D'où le système de n équations permettant de calculer les poids optimaux:

$$\sum_{j=1}^n p_j r_{ij} = r_{i0} \quad i = 1, \dots, n$$

La matrice (r_{ij}) , étant une matrice de corrélation, est définie positive, ce qui garantit une solution unique au système.

Le second membre est déterminé à partir de la fonction de corrélation obtenue par ajustement: $r_{i0} = r(d_{i0})$. A noter l'importance du modèle mathématique retenu, celui-ci devant être de type positif (c'est à dire avoir une transformée de Fourier positive) pour éviter d'obtenir une valeur négative pour ϵ_0^2 .

Avec le jeu de poids optimum, l'expression donnant ϵ_0^2 se simplifie et devient:

$$\epsilon_0^2 = s^2 \left[r_{00} - \sum_{i=1}^n p_i r_{i0} \right]$$

γ) Moyenne pondérée optimale

De même, en ce qui concerne l'estimation de la moyenne sur un domaine S, KAGAN [9] donne le système:

$$\sum_{j=1}^n p_j r_{ij} = r_{iS} \quad i=1, \dots, n$$

et à l'optimum:
$$\epsilon_S^2 = s^2 \cdot r_{SS} - \sum_{i=1}^n p_i r_{iS}$$

En outre, la démarche suivie permet de tenir compte de la présence d'erreurs de mesure, si celle-ci a été décelée sur la fonction de corrélation (ou sur la fonction de structure) ajustée sur les valeurs expérimentales.

Les erreurs de mesure δ_i sont supposées non corrélées

- aux valeurs du champ:
$$\overline{\delta_i \cdot z_j'} = 0 \quad \forall i, \forall j$$

- entre elles:
$$\overline{\delta_i \cdot \delta_j} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$= C \quad \text{si } i=j$$

Soit $r_e(d)$ la fonction de corrélation expérimentale. Si $r(d)$ est la fonction de corrélation réelle du champ, il existe alors, entre r_e et r , un rapport $\frac{s^2}{s^2+C}$, les variances étant surestimées de C. En extrapolant à la distance nulle, on a:

$$r_e(0) = \frac{s^2}{s^2+C}$$

et donc [9] [12]:
$$\eta = \frac{C}{s^2} = \frac{1-r_e(0)}{r_e(0)}$$

Le système donnant les poids optimaux devient alors, par exemple dans le cas de l'estimation de la moyenne sur un domaine S [12]:

$$\sum_{j=1}^n p_j r_{ij} + \eta p_i = r_{iS} \quad i=1, \dots, n$$

δ) Applications

Cette méthodologie, basée sur l'emploi de la fonction de corrélation spatiale du champ des précipitations pour résoudre les problèmes d'estimation ponctuelle et zonale, date des années 60. Elle a eu peu d'échos en dehors de l'école qui l'avait développée.

Parmi les rares applications que l'on puisse trouver dans la littérature, on peut citer le travail de CISLEROVA et HUTCHINSON [2] sur la rationalisation du réseau pluviométrique de Zambie. Ces auteurs ont suivi l'approche de DROZDOV, utilisant comme critère l'erreur quadratique moyenne d'interpolation aux milieux des segments reliant deux à deux les stations du réseau. L'étude a porté sur les pluies annuelles préalablement "standardisées" (anomalies rapportées en chaque point aux écarts-types); normales, variances et fonction de corrélation ont été déterminées à partir des 116 stations où existaient plus de trente années de mesures. Le résultat concret de cette étude a été l'optimisation du doublement du réseau de mesure zambien. Dans leurs conclusions, les auteurs mentionnent comme une limite de la méthode employée le fait de n'avoir pas pris en compte les variations spatiales systématiques de la pluviométrie.

Bien que ne se référant pas aux mêmes auteurs, RODRIGUEZ-ITURBE [14] utilise, depuis quelques années, la fonction de corrélation spatiale pour étudier l'erreur d'estimation de la pluviométrie moyenne sur un bassin, pour différents types d'implantation des stations (échantillonnage aléatoire et aléatoire stratifié), en se limitant à l'emploi de la moyenne arithmétique simple. Il aborde en outre l'étude de la variabilité spatio-temporelle de la pluviométrie, en adjoignant à l'hypothèse de stationnarité une hypothèse de séparabilité lui permettant une décomposition en un produit de deux fonctions de corrélation, l'une spatiale, l'autre temporelle [15].

La plupart des méthodes d'estimation décrites dans ce premier chapitre utilisent en fait une pondération des observations qui peut s'écrire:

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^n p_i z(x_i)$$

avec p_i poids attribué au point expérimental x_i ,
 $z(x_i)$ valeur observée au point x_i ,
 n nombre de points utilisé.

chacune de ces méthodes correspondant à un ensemble de règles permettant de déterminer les poids p_i .

La méthode développée par l'école soviétique semble, de toutes, la plus solide, car elle tient compte de la structure du phénomène étudié. Elle présente cependant encore quelques inconvénients, comme l'obligation de travailler sur les anomalies et surtout la nécessité de l'existence d'un ensemble de situations comparables. Il reste à s'affranchir de ces deux conditions. Ce sera la tâche de la théorie des variables régionalisées due à G. MATHERON.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES - CHAP.1, § 4

- [1] AMOROCHO, J., BRANDSTETTER, A., MORGAN, D. (1968):
The effects of density of recording rain gauge networks on the description of precipitation patterns.
Symposium on Geochemistry, Precipitation, Evaporation, Soil-Moisture and Hydrometry, Bern, 1967.
Int. Assoc. Scient. Hydrol. Publ. n°78, pp. 189-202.
- [2] CISLEROVA, M., HUTCHINSON, P. (1974):
The redesign of the raingauge network of Zambia.
Hydrol. Sci. Bull., XIX, 4, pp. 423-434
- [3] DESI, F., CZELNAI, R., RAKOCZI, F. (1965):
On determining the rational density of precipitation measuring networks.
Symposium on the Design of Hydrological Networks, Pt I, Quebec 1965.
Int. Assoc. Scient. Hydrol. Publ. n°67, pp. 127-129.
- [4] DROZDOV, O.A. (1936) cité par [13]
A method for setting up a network of meteorological stations for a level region.
Trudy GGO n°12 (3)

- [5] DROZDOV, O.A., SEPELEVSKIJ, A.A. (1946) cité par [2] et [13]
The theory of interpolation in a stochastic field of meteorological elements and its application to meteorological map and network rationalization problems.
Trudy NIU GUGMS, ser.1, n°18
- [6] FELGATE, D.G., READ, D.G. (1975):
Correlation analysis of the cellular structure of storms observed by raingauges.
J. Hydrol., 24, pp. 201-205.
- [7] GANDIN, L.S. (1963): cité par [9]
Ob'ektivnyj analiz meteorologicheskikh polej.
Gidrometeoizdat, Leningrad, 1963.
Objective analysis of meteorological fields.
Israël Program for scientific translations, Jerusalem, 1965.
- [8] HERSHFELD, D.M. (1968)
Rainfall input for hydrologic models.
Symposium on Geochemistry, Precipitation, Evaporation, Soil-Moisture and Hydrometry, Bern, 1967.
Int. Assoc. Scient. Hydrol. Publ. n°78, pp. 177-188
- [9] KAGAN, R.L. (1967):
Nekotorye voprosy interpretacii osadkomernykh dannyxh (Quelques problèmes relatifs à l'interprétation des données de précipitations).
Trudy Glavn. Geofiz. Obs. A.I. Voejkova n°208, pp. 64-75
- [10] KHRGIAN, A. Kh (1938): cité par [13]
To what extent is temperature interpolation on a climatic map permissible?
Meteorologia i Hidrologia n°7.
- [11] MATERN, B. (1960):
Spatial variation
(Stochastic models and their application to some problems in forest survey and other sampling investigations).
Coll. Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut, Band 49, n°5.
Almaenna Foerlaget, Stockholm.
- [12] POLISHCHUK, A.I. (1967):
K voprosu ob osrednenii osadkomernykh dannyxh (Sur le problème de la moyenne des données de précipitations).
Trudy Glavn. Geofiz. Obs. A.I. Voejkova, n°208, pp. 76-87
- [13] RODDA, J.C. & al. (1969):
Hydrological network design - needs, problems and approaches.
WMO Reports on WMO/IDH Projects - Report n°12, pp. 8-11
- [14] RODRIGUEZ-ITURBE, I., VANMARCKE, E.H., SCHAAKE, J.C. (1972):
Problems of analytical methods in hydrologic data collection. Proceedings of the International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resources Systems, Tucson, 1972, vol.2, pp. 451-472.

CHAPITRE II
THEORIE DES VARIABLES REGIONALISEES
INFERENCE STATISTIQUE
ET
ESTIMATION OPTIMALE

1 - BASES CONCEPTUELLES

a) Notion de variable régionalisée

Le terme "régionalisé" a été proposé par G. MATHERON [5] pour qualifier un phénomène se déployant dans l'espace (et/ou dans le temps), et y manifestant une certaine structure. Une variable caractérisant un tel phénomène est appelée "variable régionalisée" (en abrégé V.R.). En fait, presque toutes les variables descriptives du sous-sol ou de l'atmosphère, donc intéressant le cycle de l'eau, peuvent être considérées comme des V.R.

Du point de vue mathématique, une V.R. est simplement une fonction $z(x)$ donnant la valeur au point x (de l'espace à 1, 2 ou 3 dimensions) d'une caractéristique z du phénomène naturel étudié. Mais, généralement, ces fonctions ont un comportement spatial (ou temporel) bien trop complexe pour se laisser décrire à l'aide d'expressions analytiques classiques.

L'examen de l'évolution de la cote de l'eau dans un piézomètre en nappe libre (Fig.14), ou celui des données de transmissivités recueillies dans une plaine alluviale (Fig.15), montre que l'on pourra rencontrer des phénomènes dont l'aspect structuré ne va pas sans un certain aspect erratique.

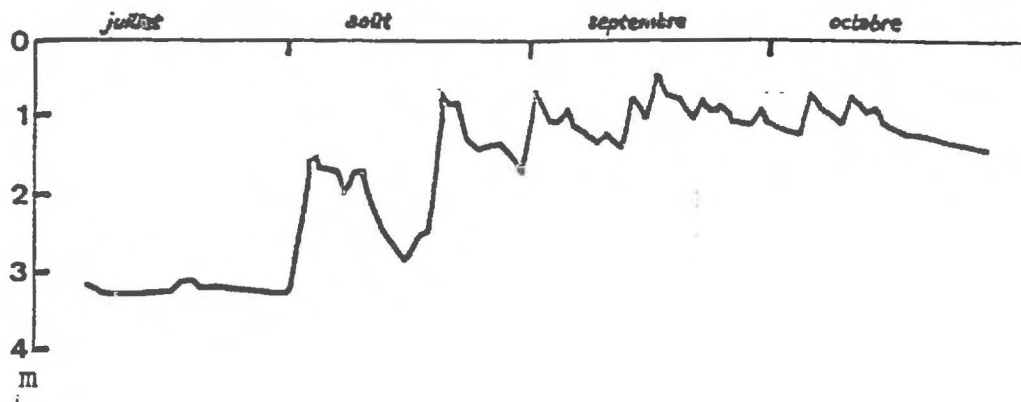


FIG. 14 - EVOLUTION DE LA PROFONDEUR DE LA NAPPE (EN METRES)
AU PUIS N°3 DE KORHOGO



FIG. 15 - VALEURS DE LA TRANSMISSIVITE (EN $10^{-2} m^2/s$) MESUREES
DANS LA NAPPE ALLUVIALE DE LA BASSE-DURANCE

b) But de la théorie des variables régionalisées

La théorie des variables régionalisées [7] a pour but

• d'établir les bases théoriques permettant de rendre compte des caractéristiques structurales des phénomènes naturels sous une forme mathématique appropriée,

• de fournir les moyens pratiques de résoudre les divers problèmes d'estimation qui se posent à partir d'un échantillonnage fragmentaire.

Elle couvre l'ensemble des possibilités allant des surfaces (ou courbes) les plus lisses jusqu'aux plus accidentées.

c) Interprétation probabiliste

Une façon commode à la fois sur le plan conceptuel et pratique de traiter une variable régionalisée est d'utiliser la théorie probabiliste des fonctions aléatoires (en abrégé F.A.). On interprète la V.R. comme une "réalisation de fonction aléatoire", c'est à dire comme le résultat d'un tirage au sort dans un ensemble de fonctions [5], [8]. Pour préciser cette idée, on peut supposer, par exemple, que l'on a rangé dans un même groupe un ensemble d'averses analogues, autrement dit un ensemble de fonctions $z_i(x)$ associant à chaque point x d'un bassin la hauteur de précipitation en ce point.

Sur l'ensemble $I = \{i\}$ des événements et le domaine D représentant le bassin, on définit la F.A. Z telle que:

$$\forall i \in I, x \in D \quad Z(x,i) = z_i(x)$$

Le tirage au sort de l'indice i de l'averse, fixant du même coup les valeurs en tous les points du bassin, donnera ainsi la fonction numérique ordinaire $z_i(x)$, dont on dira qu'elle est une réalisation de la F.A. Z .

On voit que le rapport entre une F.A. et une de ses réalisations est le même que celui qui existe entre une variable aléatoire ordinaire (V.A.) et le résultat numérique d'un tirage au sort selon la loi de probabilité de celle-ci.

Une F.A. est encore, si l'on veut, une variable aléatoire à une infinité de composantes correspondant chacune à un point de l'espace.

Les valeurs prises par le phénomène étudié sont donc considérées comme ayant été obtenues simultanément par un tirage au sort effectué selon la loi de probabilité à une infinité de composantes qui définit une certaine F.A.

d) Problème de l'inférence statistique:

Ce qui précède ne constitue qu'une simple interprétation de la réalité. Pour pouvoir appliquer les résultats de la théorie des F.A., il faut pouvoir reconstituer la loi de la F.A. en question, ou du moins ses premiers moments: c'est ce qu'on appelle l'inférence statistique. Ceci n'est envisageable a priori que si l'on connaît un nombre suffisant de réalisations (averses analogues par exemple): On peut estimer alors les caractéristiques de la F.A. à l'aide de moyennes sur l'ensemble des différents événements. Or, de nombreux phénomènes naturels ont une existence unique. La surface du mur imperméable d'une nappe aquifère ou son champ des transmissivités constituent des cas où la démarche adoptée semble rencontrer un obstacle insurmontable.

On peut toujours considérer le phénomène unique observé comme une réalisation donnée d'une F.A., mais on ne peut pas en général déduire les moments d'une F.A. à partir d'une seule réalisation, pas plus qu'on ne peut calculer espérance, variance ou densité de probabilité d'une V.A. à partir du résultat numérique (par exemple 33) d'une épreuve unique.

L'inférence statistique requiert alors l'introduction d'hypothèses supplémentaires sur la F.A. permettant de lever l'impossibilité, ces hypothèses devant être malgré tout suffisamment faibles pour couvrir le plus grand nombre de problèmes pratiques possible.

2 - INFERENCE STATISTIQUE DANS LE CADRE DE L'HYPOTHESE INTRINSEQUE [7]

a) Stationnarité d'ordre 2

L'hypothèse que l'on formule couramment dans la théorie des F.A. est celle de sa stationnarité.

Une F.A. est dite stationnaire si la loi de probabilité des valeurs prises par cette fonction en k points arbitraires est invariante par translation d'ensemble de ces points. Autrement dit, un phénomène est appelé stationnaire s'il a une certaine homogénéité spatiale, de nature statistique, qui fait qu'il se répète lui-même en quelque sorte dans l'espace. On admettra en outre la propriété d'ergodicité qui fait que chaque réalisation particulière suffit à rendre compte de l'ensemble des réalisations éventuelles. L'inférence statistique à partir d'une réalisation unique est alors possible, en remplaçant les moyennes, que l'on est normalement amené à faire sur l'ensemble des réalisations disponibles, par des moyennes spatiales sur l'unique réalisation.

En fait, on se limite généralement à faire l'hypothèse de la stationnarité d'ordre 2, dans laquelle on impose seulement aux deux premiers moments de la loi d'être invariants par translation, c'est à dire que:

- l'espérance mathématique soit une constante

$$E [Z(x)] = m(x) = m \quad \text{indépendante de } x$$

- la covariance entre deux points x et y ne dépende pas séparément des deux points d'appui, mais seulement du vecteur $x-y$

$$E \left([Z(x)-m] [Z(y)-m] \right) = K(x-y)$$

en particulier: $E [(Z(x)-m)^2] = \text{var } [Z(x)] = K(0)$ indépendante de x

Cette hypothèse de stationnarité d'ordre 2 a été utilisée par l'école soviétique d'hydrométéorologie. On a vu alors qu'elle pouvait être trop restrictive.

Les précipitations sont, par exemple, plus abondantes en altitude qu'en plaine. Dans le cas d'une région à relief varié, leur moyenne présente ainsi une dérive systématique (ou encore, selon la terminologie anglo-saxonne, une "trend"), et ne peut être considérée comme constante. De même, l'existence du gradient général d'écoulement dans un aquifère rend impossible une telle hypothèse.

GANDIN et l'école soviétique ont eu recours à un artifice; travaillant sur les anomalies, ils se ramenaient à un cas où l'hypothèse de stationnarité restait licite. La formulation du krigeage permettra de tenir compte de la présence de telles dérives (krigeage universel).

b) Hypothèse intrinsèque

On supposera pourtant, momentanément, que l'hypothèse d'espérance constante est satisfaite, et ce, pour les besoins de l'exposé.

Cependant, on abandonnera l'hypothèse de stationnarité de la F.A.. Il apparaît en effet que le développement des calculs d'estimation optimale n'exige pas que la F.A. elle-même, mais seulement ses accroissements, soient stationnaires d'ordre 2. On se contentera donc de faire l'hypothèse que, pour tout vecteur h , l'accroissement $Z(x+h)-Z(x)$ possède une espérance mathématique et une variance indépendantes du point x . On supposera ainsi:

$$\begin{cases} E [Z(x+h) - Z(x)] = 0 \\ \text{var} [Z(x+h) - Z(x)] = 2\gamma(h) \end{cases}$$

Cette hypothèse, plus faible que la stationnarité d'ordre 2, a reçu le nom "d'hypothèse intrinsèque". On dira d'une F.A. satisfaisant cette hypothèse que c'est une F.A. intrinsèque. La fonction $\gamma(h)$ s'appelle le "demi-variogramme" (conformément à une habitude établie, on emploiera par abus de langage "variogramme").

c) Variogramme

α) Définition

Le variogramme d'une fonction aléatoire intrinsèque est ainsi par définition:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{var} [Z(x+h) - Z(x)]$$

Comme on a supposé par ailleurs que:

$$E[Z(x+h) - Z(x)] = 0$$

on peut également écrire cette expression sous la forme:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E [(Z(x+h) - Z(x))^2]$$

ce qui exprime que $2\gamma(h)$ est l'accroissement quadratique moyen entre deux points distants de h . Le variogramme est donc comparable à la fonction de structure introduite par DROZDOV.

En supposant satisfaite l'hypothèse intrinsèque, on estimera cette fonction $\gamma(h)$ à partir des couples de points expérimentaux disponibles sur l'unique réalisation accessible.

β) Estimation du variogramme

Quand le phénomène étudié se développe dans un espace à une dimension (par exemple en fonction du temps), ou quand le phénomène est bidimensionnel, mais a été échantillonné le long d'un profil, l'intervalle h considéré est un scalaire. Si les points expérimentaux sont alignés et régulièrement espacés, le variogramme peut être calculé, pour des valeurs de h multiples du pas, à l'aide de la formule:

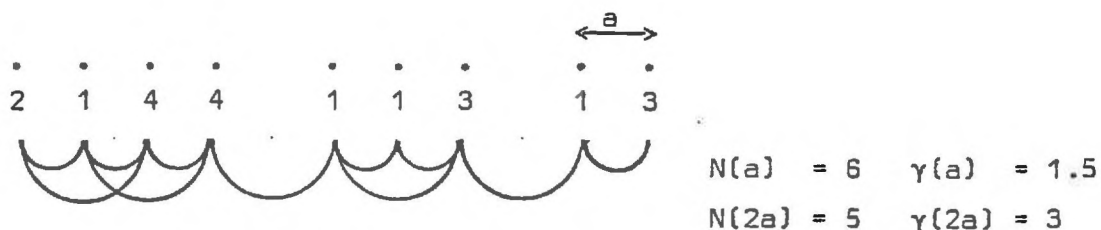
$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i+h) - z(x_i))^2$$

où $z(x_i)$ sont les données,

x_i les points pour lesquels les données sont disponibles à la fois en x_i et x_i+h

et $N(h)$ le nombre de couples de points distants de h .

Exemple:



Quand on étudie un phénomène se développant dans le plan, h est un vecteur de composantes (h_1, h_2) de même que x désigne le point de coordonnées (x_1, x_2) . Le variogramme est alors une fonction des deux variables h_1 et h_2 , ou, en coordonnées polaires, une fonction du module $|h|$, distance entre les points, et de l'angle polaire θ .

$$\gamma(h) \equiv \gamma(h_1, h_2) \equiv \gamma(|h|, \theta)$$

Lorsque les points expérimentaux sont irrégulièrement espacés dans le plan, on procède à des regroupements par classe de distance et d'angle pour calculer les accroissements quadratiques moyens. C'est à dire que l'on considère, par exemple, tous les couples de points séparés par une distance inférieure à 1 km, comprise entre 1 et 2 km, etc..., en distinguant à chaque fois les couples orientés sensiblement N-S de ceux orientés E-O.

La comparaison des comportements du variogramme dans les différentes directions renseigne sur les anisotropies du phénomène. On essaiera toujours de se ramener au cas isotrope, soit par transformation des coordonnées, soit comme on le verra par la suite, en concentrant l'anisotropie du phénomène dans sa dérive. Le variogramme est alors une fonction du seul module $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

$$\gamma(h) \equiv \gamma(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}) \equiv \gamma(|h|)$$

dont on étudiera le comportement du graphe.

γ) Comportement du graphe

Le graphe de cette fonction présente normalement le comportement suivant:

- il passe par l'origine, les écarts étant évidemment nuls pour $h = 0$,

$$\gamma(0) = 0$$

- il croît ensuite, car les valeurs d'un phénomène différent statistiquement de plus en plus (dans le cas général) à mesure qu'augmente la distance entre les points considérés.

Cette croissance, plus ou moins rapide, caractérise ainsi d'une manière statistique la façon dont se détériore l'information apportée par une mesure ponctuelle quand on s'éloigne de ce point connu.

L'examen du comportement du graphe de $\gamma(h)$ est donc particulièrement important; car le variogramme donne une description synthétique de la structure du phénomène étudié et permet en outre la liaison entre cette structure et la précision avec laquelle pourront être résolus les différents problèmes d'interpolation et d'estimation posés. On étudie en particulier avec soin le comportement au voisinage de l'origine (c'est à dire aux faibles distances) et à l'infini (c'est à dire aux grandes distances).

* Comportement à l'origine

Il traduit la continuité de la V.R. Par ordre de régularité décroissante, on distingue classiquement quatre types (Fig.16):

i) Allure parabolique: caractérise une variable extrêmement régulière (dérivable en moyenne quadratique).

ii) Allure linéaire: correspond à une variable moins régulière qu'en i) (continue en moyenne quadratique mais non dérivable).

iii) Discontinuité à l'origine (effet de pépite): signifie que la variable est très irrégulière (non continue en moyenne quadratique). Deux points distincts, mais très proches, présentent encore un écart, de variance au moins égale à l'effet de pépite C.

Le terme "effet de pépite" tire son origine des gisements d'or pépitiqes, où la teneur en or varie considérablement selon que le point se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur d'une pépite. Le terme a été conservé pour désigner cette discontinuité du variogramme qui peut être due:

- soit à une microrégionalisation d'échelle très inférieure à l'espacement des données,
- soit à des erreurs de mesure,

sans qu'il soit possible de discerner a priori la part respective de ces deux causes.

iv) Aspect plat (effet de pépite pur): correspond au cas aléatoire pur. $Z(x)$ et $Z(x+h)$ sont sans corrélation quelque soit leur distance h non nulle. Ceci est le cas limite de l'absence totale de structure, qui était précisément l'hypothèse faite sur les résidus dans la méthode des moindres carrés.

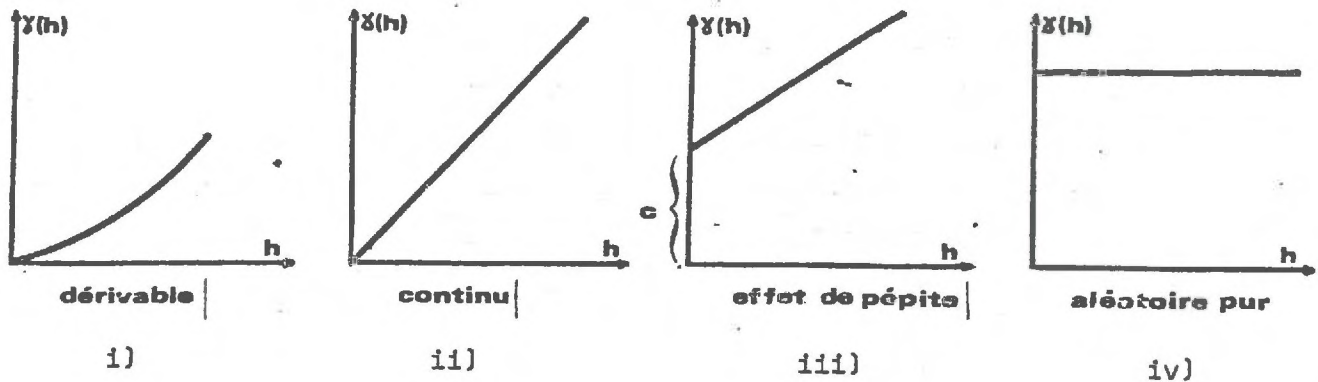
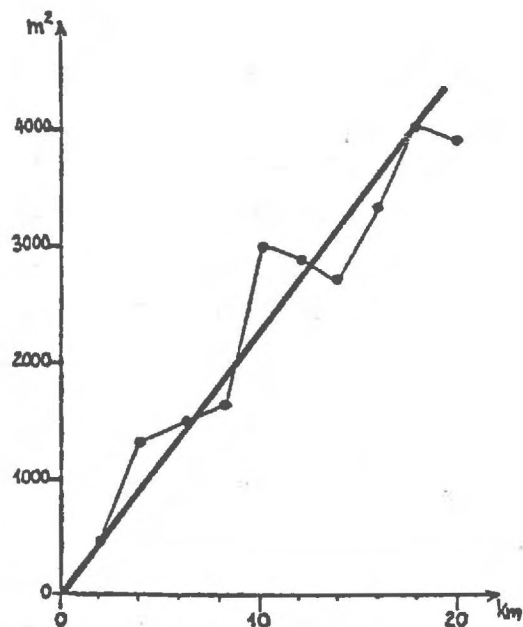
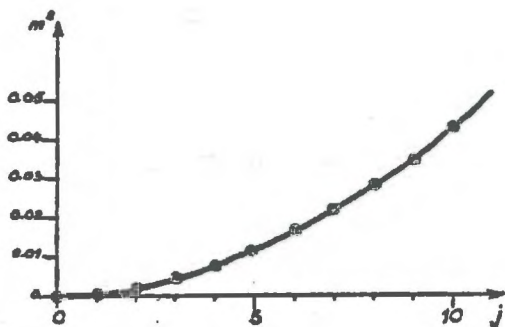


FIG. 16 - COMPORTEMENT DU VARIOGRAMME A L'ORIGINE

La figure 17 permet de rattacher ces quatre types théoriques à quatre exemples réels obtenus à partir de données sur:

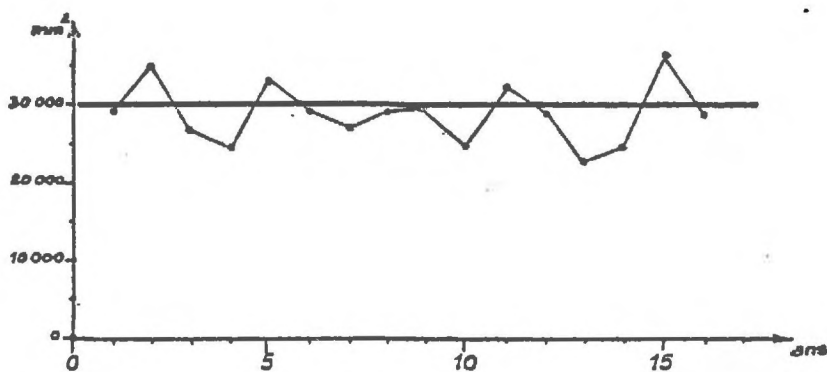
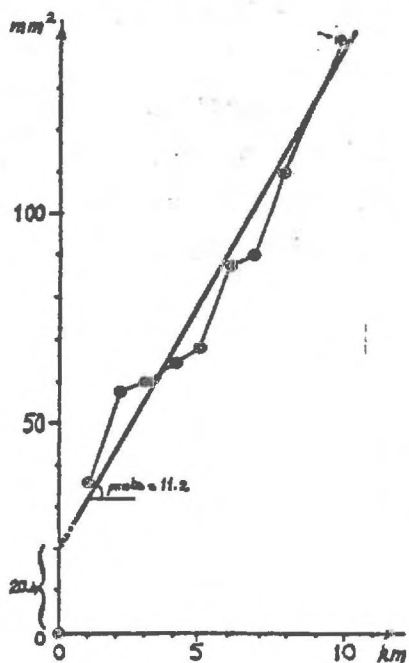
- i) l'évolution journalière de la piézométrie dans un puits donné;
- ii) la variation spatiale de l'épaisseur d'une formation géologique;
- iii) la variation spatiale de la pluviométrie sur un bassin;
- iv) l'évolution des précipitations annuelles à une station.

On peut constater qu'à l'extrême régularité des variations piézométriques au puits considéré s'oppose le caractère pratiquement aléatoire de la succession des précipitations annuelles.



i) Série des niveaux piézométriques journaliers dans un puits (puits n°28, Korhogo, Côte d'Ivoire)

ii) épaisseur d'une formation géologique (puissance d'un réservoir pétrolier, d'après HAAS et JOUSSELIN)



iii) pluviométrie lors d'une averse (B.V. de Kadjemeur, Tchad)

iv) série des précipitations annuelles à une station (Mettmann, R.F.A.)

FIG. 17 - EXEMPLES DE VARIOGRAMMES ILLUSTRANT LES QUATRE TYPES DE COMPORTEMENT A L'ORIGINE

En ce qui concerne les variations spatiales des grandeurs hydrogéologiques ou hydrométéorologiques, si certaines grandeurs varient de façon continue, comme dans l'exemple ii) l'épaisseur d'une formation géologique, nombreuses sont celles présentant une très importante variabilité locale, comme dans l'exemple iii) la pluviométrie, ou encore comme la transmissivité. Dans l'exemple iii), la valeur de l'effet de pépite obtenue par extrapolation est de 20.4 alors que la pente est estimée à 11.2 (les distances étant exprimées en km et la pluviométrie en mm). Cela signifie que, pour une distance de 1 km, près des 2/3 de la variance de l'écart sont pris en compte par l'effet de pépite. On verra toute l'importance de ce fait en ce qui concerne l'estimation.

Outre cet examen du comportement du variogramme au voisinage de l'origine, on étudie également son comportement aux grandes distances.

* Comportement à l'infini:

Contrairement aux fonctions de covariance (ou de corrélation) qui demeurent nécessairement bornées, le variogramme peut, lui, continuer indéfiniment à croître. Mais il peut aussi se stabiliser autour d'une valeur limite, appelée "palier". La distance à laquelle ce palier est atteint est appelée "portée"; elle renseigne sur l'extension de la zone d'influence d'un point expérimental (Fig.18). Aux distances supérieures à la portée, les corrélations sont nulles.

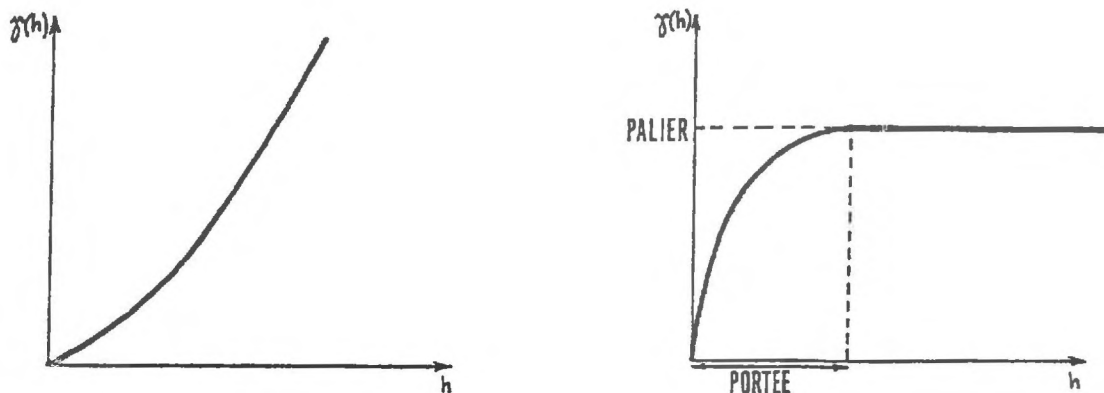


FIG 18 - VARIOGRAMME NON BORNE ET VARIOGRAMME A PALIER

La valeur du palier est égale à la variance des données. En effet, pour une valeur de h supérieure à la portée, on a :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \frac{1}{2} \text{var} [Z(x+h) - Z(x)] = \frac{1}{2} (\text{var} [Z(x+h)] + \text{var} [Z(x)]) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sigma^2 = \sigma^2\end{aligned}$$

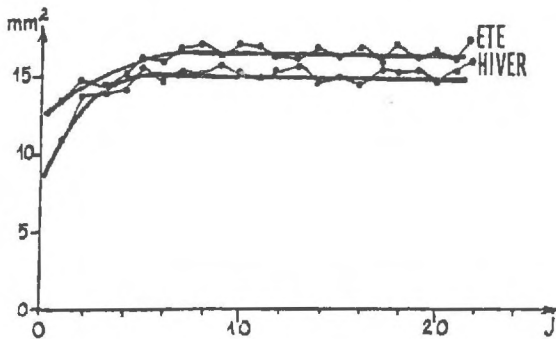
du fait de l'extinction des corrélations au-delà de la portée.

Quand le variogramme est ainsi borné, on peut également montrer qu'il est alors relié à la fonction de covariance $K(h)$, définie dans le cas stationnaire d'ordre 2, par :

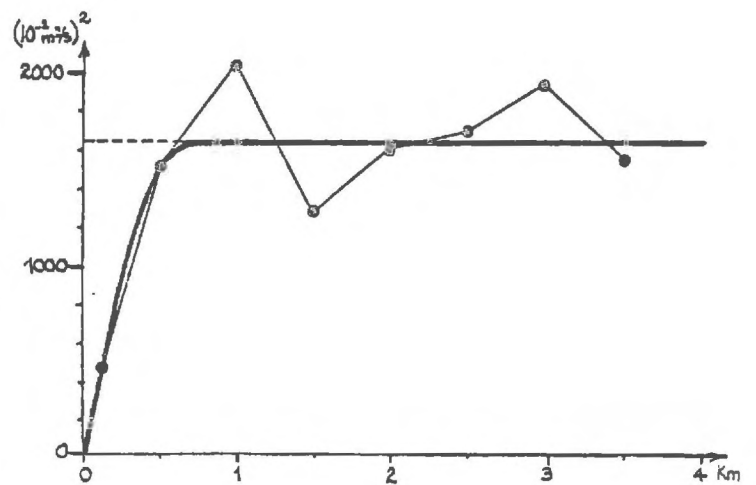
$$\gamma(h) = K(0) - K(h)$$

La figure 19 montre deux exemples de variogrammes bornés obtenus :

- le premier, à partir de séries chronologiques de précipitations journalières à une station, en été et en hiver. On peut observer les portées et paliers correspondant à des types de précipitation différents.
- le deuxième, à partir de données de transmissivités de la nappe alluviale de la Durance. On peut estimer la portée apparente à 700 m environ, les corrélations ne s'étendant pas très loin dans cette zone où les conditions de dépôt alluvial ont été très tourmentées.



Précipitations journalières
sur le bassin de l'Hallue
(près d'Amiens)



Transmissivité de la nappe alluviale
de la Durance

FIG. 19 - EXEMPLES DE VARIOGRAMMES PRESENTANT UN PALIER

On pourrait songer à pousser plus loin l'interprétation d'un variogramme tiré de données expérimentales, en essayant d'expliquer chacune des fluctuations apparentes du graphe. Si certains phénomènes présentent effectivement des périodicités, des structures-gigognes (superposition de variations d'échelles différentes), ou des effets de trou (existence de corrélations négatives dues à la présence de zones "riches" entourées de zones "pauvres") (Fig.20), la plupart du temps, ces fluctuations sont simplement dues à ce que les différentes valeurs de $\gamma(h)$ calculées ne sont en fait que des estimations, obtenues parfois avec un petit nombre de couples.

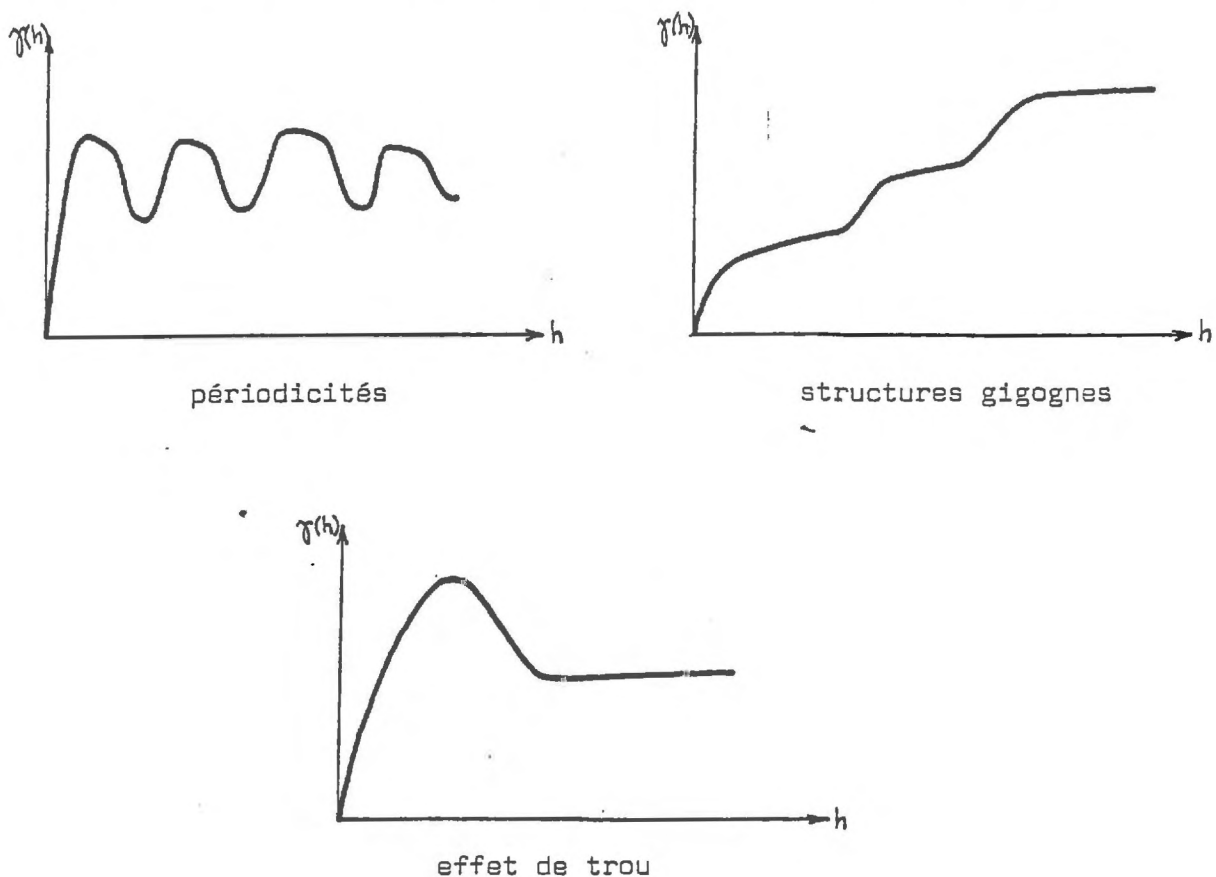


FIG. 20 - COMPORTEMENTS PARTICULIERS DU VARIOGRAMME

De là la pratique courante d'ajuster aux variogrammes expérimentaux des modèles théoriques simples, qui seuls, d'ailleurs, garantissent la cohérence mathématique nécessaire pour les calculs ultérieurs.

δ) Ajustement à un modèle

Le modèle utilisé devra garantir que les calculs de variance de combinaisons linéaires du type

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

qui seront employées par la suite donnent bien toujours un résultat positif.

Pour tout ensemble de n points x_i et de n coefficients λ_i arbitraires vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ (de façon à se ramener à une combinaison linéaire d'accroissements, sur lesquels seuls on peut travailler dans le cadre de l'hypothèse intrinsèque), la fonction $\gamma(h)$ doit être telle que:

$$\text{var}(Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(x_i - x_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0$$

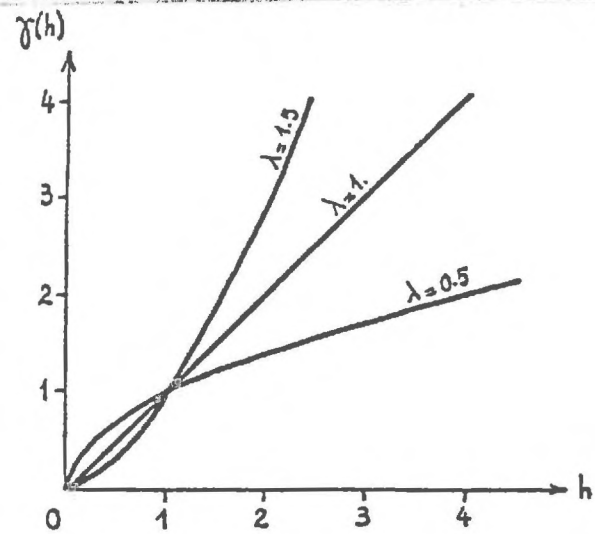
Les modèles de variogramme les plus fréquemment utilisés sont les modèles en h^λ et les modèles sphérique, exponentiel et gaussien, représentés Fig. 21 ci-après.

On peut également essayer d'ajuster une combinaison linéaire (à coefficients positifs) de ces différents modèles au variogramme obtenu expérimentalement.

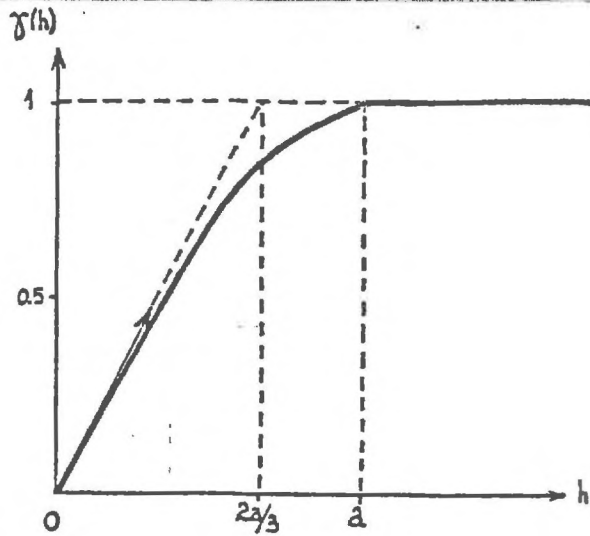
La présence d'un effet de pépite C se traduit par l'addition de la quantité C à un modèle classique γ_0 en dehors de l'origine:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{pour } h = 0 \\ \gamma_0(h) + C & \text{pour } h \neq 0 \end{cases}$$

La valeur de C est déterminée par extrapolation vers $h=0$ sur la courbe expérimentale (cf. Fig. 17, iii), p. 49).



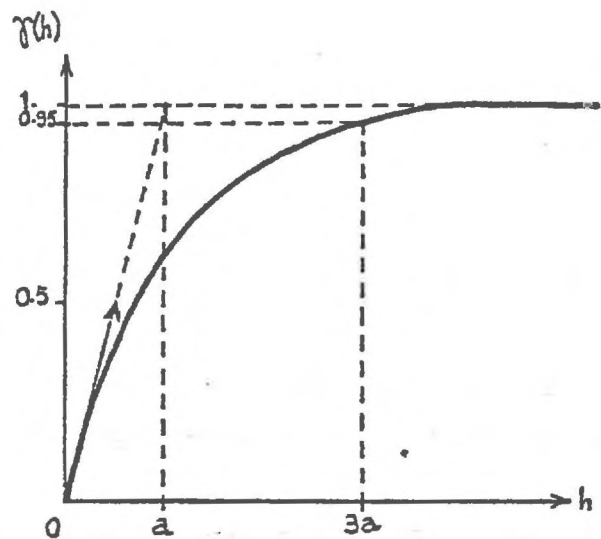
modèle en h^λ : $\gamma(h) = \omega|h|^\lambda$



modèle sphérique:

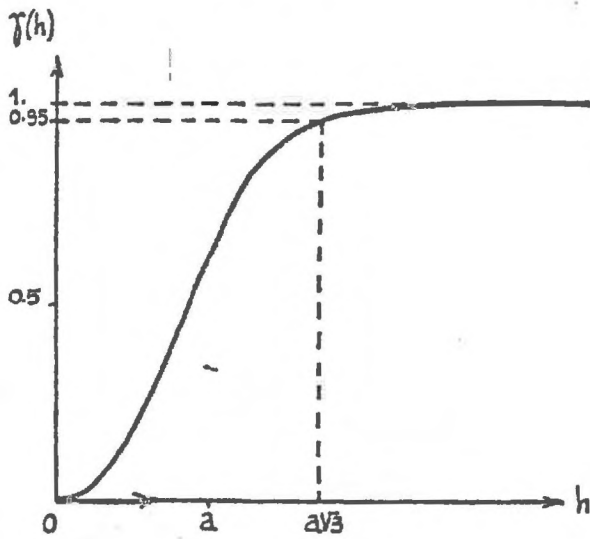
$$\gamma(h) = \omega \left[\frac{3}{2} \frac{|h|}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|}{a} \right)^3 \right] \quad h \leq a$$

$$\gamma(h) = \omega \quad h > a$$



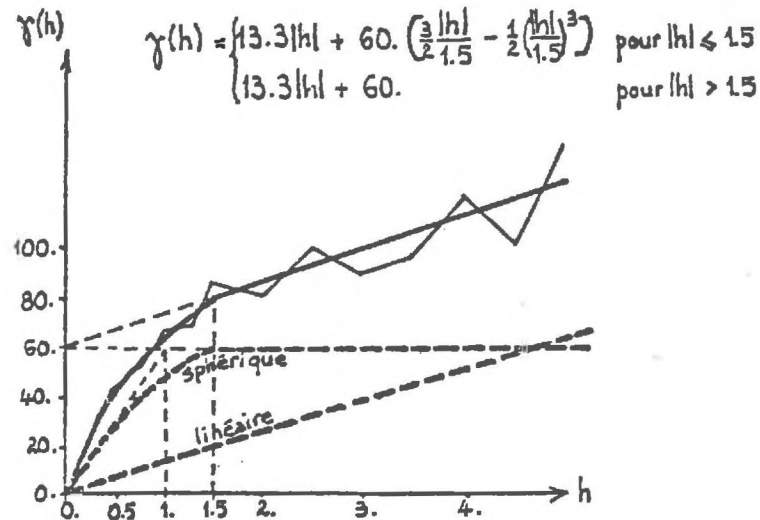
modèle exponentiel:

$$\gamma(h) = \omega \left[1 - e^{-\frac{|h|}{a}} \right]$$



modèle gaussien:

$$\gamma(h) = \omega \left[1 - e^{-\left(\frac{|h|}{a}\right)^2} \right]$$



ajustement à un modèle "linéaire + sphérique"

FIG. 21 - PRINCIPAUX MODELES DE VARIOGRAMME UTILISES ET EXEMPLE D'AJUSTEMENT

On écrit encore: $\gamma(h) = C(1-\delta) + \gamma_0(h)$

le symbole δ représentant la mesure de Dirac.

Dans certains cas, assez rares, on a la certitude que le phénomène est continu et qu'il n'y a pas d'erreurs de mesure, mais on pense que le pas d'échantillonnage a été trop lâche pour mettre en évidence une croissance rapide du variogramme correspondant à une microrégionalisation. On pourrait alors remplacer l'effet de pépite C par une composante sphérique de palier C et de portée inférieure au pas d'échantillonnage λ (Fig. 22).

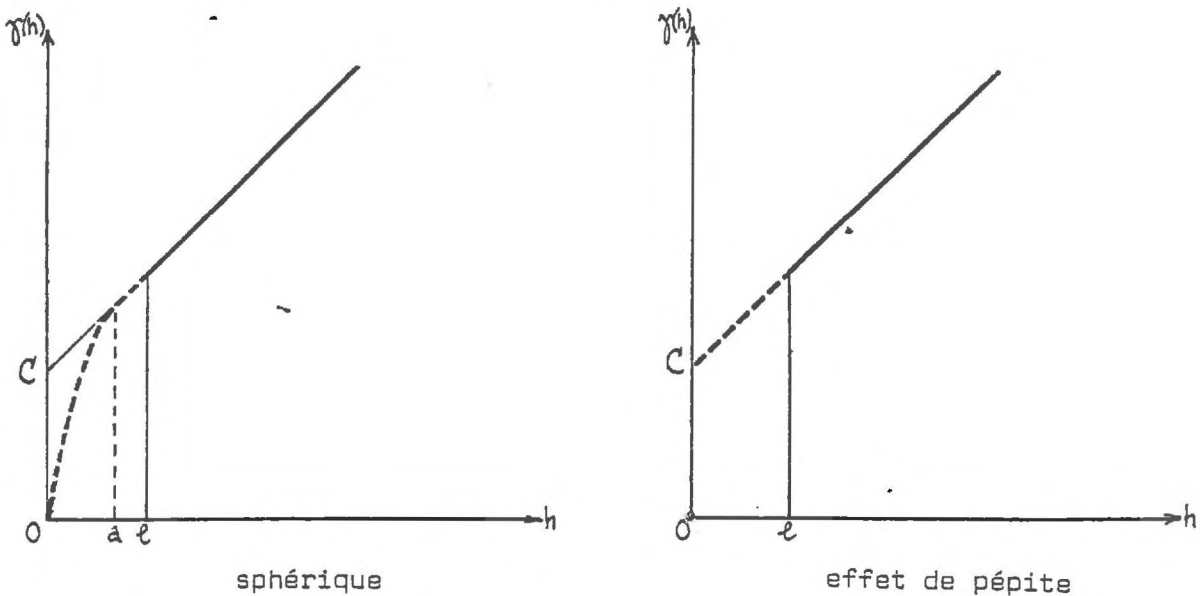


FIG. 22 - MODELISATION AUX DISTANCES INFÉRIEURES AU PAS D'ÉCHANTILLONNAGE

L'estimation du variogramme, l'examen du comportement de son graphe et son ajustement à un modèle ont permis de se doter d'un outil capable de caractériser la variabilité spatiale d'un phénomène. Le premier but de la théorie des variables régionalisées est ainsi atteint. Il reste à faire le lien avec les problèmes d'estimation: c'est ce que réalise la théorie du krigeage.

3 - KRIGEAGE

a) Exemple introductif

Considérant un phénomène dont on étudie les variations dans le temps (comme la température de l'eau ou son PH en un point d'une rivière), on peut se poser le problème simple suivant:

Obtient-on une estimation plus précise de sa valeur moyenne sur les intervalles de temps séparant deux heures justes, en faisant les mesures aux demies et en retenant ces valeurs, ou en faisant les mesures aux heures justes et en adoptant la demi-somme de deux mesures consécutives ?

Soient σ_A^2 la variance de l'erreur commise en retenant la valeur de la mesure prise à la demie,

et σ_B^2 celle correspondant à la demi-somme des deux mesures prises aux heures justes.

On montre que σ_A^2 et σ_B^2 peuvent s'exprimer en fonction du variogramme. Supposons que celui-ci soit de la forme $\gamma(h) = n^\lambda$ ($0 \leq \lambda < 2$): on constate alors que $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$ pour $\lambda > 1$, et inversement, l'égalité étant réalisée pour $\lambda = 1$.

La question posée n'a ainsi de réponse que si l'on a caractérisé auparavant la structure, ici temporelle, du phénomène étudié.

Un variogramme en h^λ avec $\lambda > 1$ correspond à un phénomène très régulier. Une mesure unique, mais bien placée au milieu de l'intervalle, est préférable à deux mesures mal placées par rapport à l'intervalle étudié.

Un variogramme en h^λ avec $\lambda < 1$ correspond à un phénomène beaucoup moins régulier et, comme dans le cas aléatoire pur atteint pour $\lambda = 0$, le facteur déterminant est le nombre de mesures prises en compte, quelle que soit leur localisation.

Cet exemple a mis en évidence le lien étroit entre la structure du phénomène, caractérisée par le variogramme, et la précision d'une estimation. C'est autour de ce lien que va maintenant s'articuler le krigeage.

b) Cas sans dérive: krigeage simple [7]

α) Position du problème

On rappelle la situation de départ: les valeurs de la variable $z(x)$ sont connues en n points expérimentaux x_1, x_2, \dots, x_n , et l'on désire estimer une quantité z_0 qui peut être, en fait, toute fonctionnelle linéaire de la variable. On se limitera ici aux trois cas suivants qui feront l'objet d'applications au Chapitre III:

i) $z_0 = z(x_0)$ valeur prise par z au point $x = x_0$

ii) $z_0 = \frac{1}{s} \int_{s_0} z(x) dx$ valeur moyenne de $z(x)$ sur la maille s_0 de surface s_0 , centrée au point $x = x_0$.

iii) $z_0 = \frac{1}{S} \int_S z(x) ds$ valeur moyenne de $z(x)$ sur le domaine S .

Ces trois objectifs correspondent aux trois besoins définis précédemment de la cartographie, de l'initialisation de modèles numériques et du calcul des lames d'eau sur un bassin versant.

De façon à simplifier l'exposé, les calculs seront développés pour le cas iii), et les résultats seront ensuite repris pour le cas i) qui ne constitue en fait que le cas limite où le domaine se réduit à un point.

β) Estimation zonale

Pour estimer $z_0 = \frac{1}{S} \int_S z(x) dx$, on adopte une moyenne pondérée des n données disponibles:

$$z_0^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i)$$

Le problème est donc de trouver les poids λ_i qui donneront la meilleure estimation possible.

Pour cela, on va faire appel à l'interprétation probabiliste que l'on a donnée de la V.R. étudiée, et raisonner sur la F.A. intrinsèque $Z(x)$ dont $z(x)$ est censée être une représentation.

On considère ainsi l'estimateur:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

(On rappelle que les majuscules caractérisent, par convention dans ce texte, les grandeurs aléatoires).

On cherchera les poids λ_i conduisant à un estimateur:

- sans biais $E [Z_0^* - Z_0] = 0$
- d'erreur quadratique moyenne minimale $E [(Z_0^* - Z_0)^2]$ minimum

Comme l'on a:
$$\text{var} [Z_0^* - Z_0] = E [(Z_0^* - Z_0)^2] - (E [Z_0^* - Z_0])^2$$

ces conditions peuvent encore s'écrire:

$$\begin{cases} E [Z_0^* - Z_0] = 0 \\ \text{var} [Z_0^* - Z_0] \text{ minimum} \end{cases}$$

Comme l'on a conservé l'hypothèse d'espérance constante, c'est à dire:

$$E [Z(x)] = m, \quad \forall x$$

on a en particulier:
$$E [Z(x_i)] = m \quad i = 1, \dots, n$$

et en ce qui concerne
$$E [Z_0] = E \left[\frac{1}{S} \int_S Z(x) dx \right]$$

(Z_0 transposition probabiliste de z_0 , est ici une intégrale stochastique)

on a, en utilisant la permutabilité des opérations d'intégration et d'espérance mathématique:

$$E [Z_0] = \frac{1}{S} \int_S E [Z(x)] dx = \frac{1}{S} \int_S m dx = m$$

La première condition (non-biais) devient:

$$E \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z_0 \right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i E [Z(x_i)] - E [Z_0]$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i m - m = m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) = 0$$

Pour que cette égalité soit vérifiée quelle que soit la valeur (inconnue) de m , il faut donc que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 = 0$$

Cette égalité permet d'écrire l'erreur $Z_0^* - Z_0$ sous la forme d'une combinaison linéaire d'accroissement de la F.A. Z :

$$Z_0^* - Z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (Z(x_i) - Z_0)$$

sur laquelle on pourra donc travailler dans le cadre de l'hypothèse intrinsèque.

La variance de cette erreur peut s'explicitier après quelques calculs à l'aide du variogramme:

$$\text{var} [Z_0^* - Z_0] = \text{var} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z_0 \right]$$

$$= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{iS} - \gamma_{SS}$$

où $\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j)$

est la valeur du variogramme entre les deux points expérimentaux x_i et x_j ;

$$\gamma_{iS} = \frac{1}{S} \int_S \gamma(x_i - x) dx$$

est la valeur moyenne du variogramme entre le point x_i et un point décrivant le domaine S ;

$$\gamma_{SS} = \frac{1}{S^2} \int_S \int_S \gamma(x - x') dx dx'$$

est la valeur moyenne du variogramme entre deux points décrivant indépendamment le domaine S .

La minimisation de la forme quadratique en λ_i :

$$Q = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{iS} - \gamma_{SS}$$

sous la contrainte $E = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} = 0$ se fait en introduisant un multiplicateur de Lagrange μ' et en annulant les dérivées partielles, par rapport aux différents λ_i , de la quantité $Q + \mu' E$.

Les calculs conduisent, en posant $\mu = -\frac{\mu'}{2}$ au système linéaire suivant, appelé "système de krigeage simple":

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} + \mu = \gamma_{iS} & i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases}$$

C'est un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (les n poids λ_i et le multiplicateur de Lagrange μ) qui s'écrit encore matriciellement:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\Gamma} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix}}_{\Lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{1S} \\ \gamma_{2S} \\ \vdots \\ \gamma_{nS} \\ 1 \end{pmatrix}}_B$$

en remarquant que $\gamma_{ii} = \gamma(0) = 0$

La solution s'écrit alors: $\Lambda = \Gamma^{-1} B$ à l'aide de la notation matricielle.

Les poids λ_i ainsi trouvés sont ensuite reportés dans l'expression

$$z_0^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i)$$

pour obtenir la valeur estimée par krigeage (ou valeur krigée).

A l'optimum, en reportant $\sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} = \gamma_{iS} - \mu$ dans l'expression donnant la variance de l'erreur, on obtient:

$$\sigma_K^2 = \text{var} [Z_0^* - Z_0] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{iS} + \mu - \gamma_{SS}$$

σ_K^2 est la variance d'estimation par krigeage (ou variance de krigeage).

Matriciellement: $\sigma_K^2 = \lambda \cdot B - \gamma_{SS}$ (λ = transposée de)

γ) Estimation ponctuelle

Pour le cas de l'estimation ponctuelle,

γ_{iS} est remplacé par $\gamma_{i0} = \gamma(x_i - x_0)$

γ_{SS} est remplacé par $\gamma_{00} = \gamma(x_0 - x_0) = \gamma(0) = 0$

Le système de krigeage s'écrit alors:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} + \mu = \gamma_{i0} & i=1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases}$$

et la variance de krigeage: $\sigma_K^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} + \mu$

Pour l'estimation ponctuelle, comme d'ailleurs pour celle de moyenne par maille, il y a autant de systèmes de krigeage que de points (ou de mailles) à estimer. Si l'on prend en compte à chaque fois la totalité des données disponibles - et on parlera alors de "voisinage unique" - on peut remarquer que seul change en fait à chaque fois le second membre. On pourra alors tirer parti de ce fait en inversant une fois pour toute la matrice Γ .

Pourtant, généralement, le nombre de points expérimentaux est trop important pour pouvoir procéder ainsi sans allonger par trop le temps de calcul et compromettre la précision des résultats. On reformera alors à chaque fois le système de krigeage, en ne retenant que les données (entre 10 et 20) situées au voisinage du point (ou de la maille) à estimer. On parlera alors de "voisinage glissant".

c) Cas avec dérive: krigeage universel [6], [7]

Les problèmes d'estimation posés sont ainsi résolus dans le cas où l'hypothèse intrinsèque est compatible avec la réalité du phénomène étudié. Mais il existe de nombreuses situations où l'hypothèse de moyenne constante, que nous avons formulée jusqu'ici, ne peut être raisonnablement maintenue. On a déjà cité, par exemple, le cas de la piézométrie d'une nappe ou celui de précipitations liées à l'orographie. On doit alors recourir à un modèle plus élaboré pour pouvoir prendre en compte les tendances en grand de tels phénomènes.

α) Modèle interprétatif

On supposera maintenant que l'espérance mathématique de la F.A. $Z(x)$ (dont le phénomène est censé être une réalisation) est une fonction

$$m(x) = E[Z(x)]$$

qui varie d'une manière lente et régulière relativement à l'échelle à laquelle on travaille, et à laquelle on donnera le nom de "dérive".

Cette fonction $m(x)$ sera suffisamment régulière pour pouvoir être représentée localement par une expression de la forme:

$$m(x) = \sum_{l=1}^k a_l f^l(x)$$

où les f^l sont des fonctions données, en pratique presque toujours des monômes, et les a_l des coefficients évidemment inconnus.

Une telle formulation englobe d'ailleurs le cas précédent où la moyenne était constante. La dérive $m(x)$ se réduit alors à:

$$m(x) = a_1 f^1(x) = a_1$$

$f^1(x)$ étant la fonction identiquement égale à 1.

Explicitons l'expression de la dérive dans le cas d'un phénomène se développant dans le plan. Si X et Y désignent les coordonnées d'un point x du plan, on pourra avoir par exemple:

$$m(X,Y) = a_1 + a_2X + a_3Y$$

et on parlera alors de dérive linéaire ou:

$$m(X,Y) = a_1 + a_2X + a_3Y + a_4X^2 + a_5XY + a_6Y^2$$

et on parlera alors de dérive quadratique.

On conservera la seconde hypothèse qui avait été précédemment formulée, à savoir: $\text{var} [Z(x+h)-Z(x)] = 2\gamma(h)$. Sans préjuger de l'estimation de $\gamma(h)$ dans le cas présent où $E[Z(x+h)-Z(x)] \neq 0$, problème qui sera abordé au paragraphe 4, on peut développer à nouveau les calculs qui avaient conduit au système de krigeage.

β) Calculs

L'estimateur de krigeage est toujours de la forme:

$$Z_o^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

mais on a maintenant:

$$E [Z(x_i)] = m(x_i) = \sum_{l=1}^k a_l f^l(x_i)$$

$$\begin{aligned} E [Z_o] &= \frac{1}{S} \int_S E [Z(x)] dx = \frac{1}{S} \int_S m(x) dx \\ &= \frac{1}{S} \int_S \sum_{l=1}^k a_l f^l(x) dx = \sum_{l=1}^k a_l \frac{1}{S} \int_S f^l(x) dx \end{aligned}$$

C'est à dire, en posant $f_i^l = f^l(x_i)$ et $f_S^l = \frac{1}{S} \int_S f^l(x) dx$:

$$E [Z(x_i)] = \sum_{l=1}^k a_l f_i^l \quad \text{et} \quad E [Z_o] = \sum_{l=1}^k a_l f_S^l$$

La condition de non-biais s'écrit donc maintenant:

$$E [Z_o^* - Z_o] = E \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z_o \right] \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{l=1}^k a_{li} f_i^l - \sum_{l=1}^k a_{lS} f_S^l = \sum_{l=1}^k a_{l1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_S^l \right) = 0$$

Cette égalité devant être réalisée, quelles que soient les valeurs inconnues (et que l'on n'a d'ailleurs pas besoin d'estimer) des a_l , il faut poser:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_S^l = 0 \quad l = 1, \dots, k$$

En prenant $f^1 \equiv 1$, on retrouve comme première équation:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 = 0$$

qui permet encore de travailler sur des combinaisons linéaires d'accroissements.

Le reste des calculs est identique, si ce n'est que la minimisation de la forme quadratique doit se faire maintenant sous les k contraintes exprimant la condition de non-biais. On introduit donc k multiplicateurs de Lagrange, μ_1, \dots, μ_k , et l'on aboutit au système suivant, à $n+k$ équations et $n+k$ inconnues:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} + \sum_{l=1}^k \mu_l f_i^l = \gamma_{iS} & i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^l = f_S^l & l = 1, \dots, k \end{cases}$$

La variance du krigeage s'écrit de même:

$$\sigma_K^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{iS} + \sum_{l=1}^k \mu_l f_S^l - \gamma_{SS}$$

On passe au cas ponctuel de la même façon que précédemment. Le système de krigeage universel peut alors se mettre par exemple sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 & f_1^2 & \dots & f_1^k \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2n} & 1 & f_2^2 & \dots & f_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & 0 & 1 & f_n^2 & \dots & f_n^k \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^k & f_2^k & \dots & f_n^k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \vdots \\ \gamma_{n0} \\ 1 \\ f_0^2 \\ \vdots \\ f_0^k \end{pmatrix}$$

en posant $f^1(x_0) = f_0^1$

d) Propriétés du krigeage:

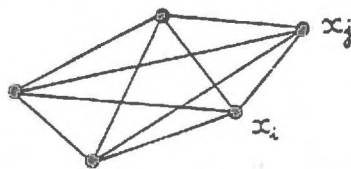
On peut énoncer maintenant quelques propriétés du krigeage valables dans les deux cas avec et sans dérive.

α) On peut remarquer que le système de krigeage prend bien en considération les éléments suivants:

- position relative du domaine (ou du point) à estimer et des points expérimentaux:



- position relative des points expérimentaux entre eux:



par l'intermédiaire des γ_{iS} (ou γ_{i0}) et des γ_{ij} ,

- structure du phénomène, à travers le variogramme γ .

On verra, au Chapitre III, § 1, l'influence de ces trois éléments, et surtout du troisième, sur la pondération opérée par le krigeage.

β) Lorsque le point x_0 coïncide avec un point expérimental x_i , on vérifie que la solution du système est $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = 0$ pour $j \neq i$. On a donc bien: $z_0 = z(x_0)$ (le krigeage est un interpolateur exact), et on a également alors $\sigma_K^2 = 0$.

γ) Le système de krigeage, et donc la variance de krigeage σ_K^2 , ne font intervenir que la structure et la configuration géométrique des données et du domaine à estimer. Elle ne dépend pas des valeurs expérimentales $z(x_i)$. Cette propriété remarquable sera utilisée au Chapitre III, § 2, pour l'optimisation des réseaux de mesure.

4 - RETOUR A L'INFERENCE STATISTIQUE: LES F.A.I.-K

a) Variogramme brut et variogramme sous-jacent

On dispose donc maintenant du moyen d'estimer en tout point un phénomène présentant ou non une dérive. Mais, dans le cas où existe une dérive, un problème est resté en suspens: celui de l'estimation du variogramme $\gamma(h)$. En effet, la méthode proposée pour son estimation supposait en fait: $E [Z(x+h) - Z(x)] = 0$, c'est à dire une moyenne constante.

Que se passe-t-il si l'on essaie d'appliquer brutalement le procédé décrit alors à une variable manifestant une tendance en grand ?

Si l'on examine le variogramme expérimental (on dit encore "variogramme brut") obtenu ainsi à partir des données de piézométrie de la nappe de la Crau (Fig.23), on observe un comportement anisotrope marqué aux grandes distances, avec une croissance très rapide dans la direction NE-SO. La grande amplitude des écarts dans cette direction, par rapport aux écarts NO-SE, correspond au sens général de la nappe, qui s'écoule du NE vers le SO avec un gradient hydraulique moyen compris entre 3 et 4 m/km.

En pratique, on rencontre ainsi souvent des variogrammes bruts, dont la croissance aux grandes distances semble parabolique (ou encore plus rapide), ce qui est contraire à une propriété de $\gamma(h)$ imposée par des

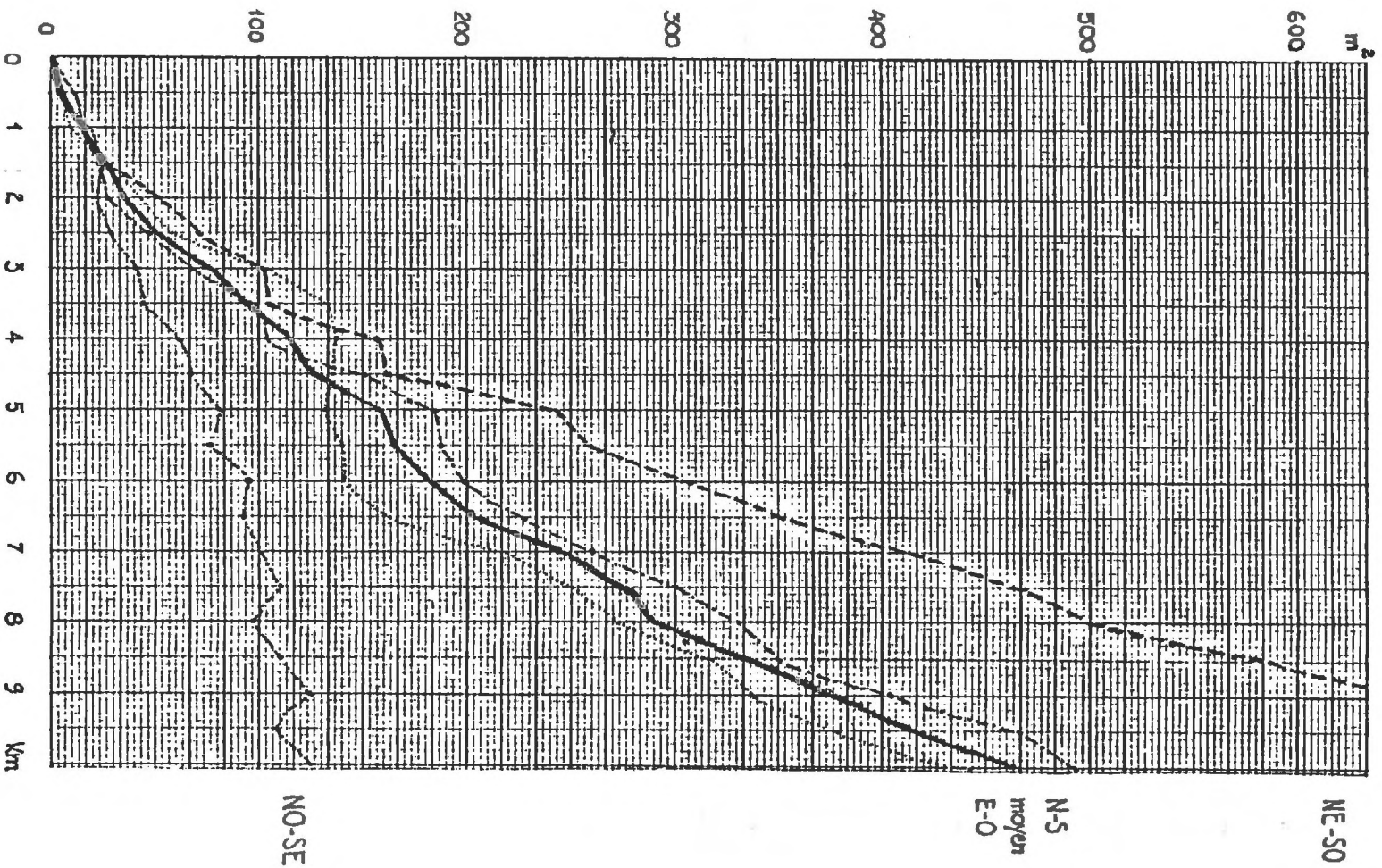


FIG. 23 - NAPPE DE LA CRAU: VARIOGRAMME BRUT

considérations de cohérence mathématique:

$$\frac{\gamma(h)}{|h|^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |h| \rightarrow \infty$$

En fait, ces comportements apparents viennent de ce que l'on a négligé l'existence d'une dérive.

$$\begin{aligned} \text{Dans l'égalité} \quad 2\gamma(h) &= \text{var} [Z(x+h)-Z(x)] \\ &= E [(Z(x+h)-Z(x))^2] - (E[Z(x+h)-Z(x)])^2 \end{aligned}$$

le deuxième terme de la différence n'est pas nul, et en calculant le variogramme brut, on obtient en fait:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{exp}}(h) &= \gamma_{\text{réel}}(h) + \frac{1}{2} (E[Z(x+h)-Z(x)])^2 \\ &= \gamma_{\text{réel}}(h) + \frac{1}{2} (m(x+h)-m(x))^2 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une dérive linéaire, il se superpose ainsi une parabole au variogramme réel.

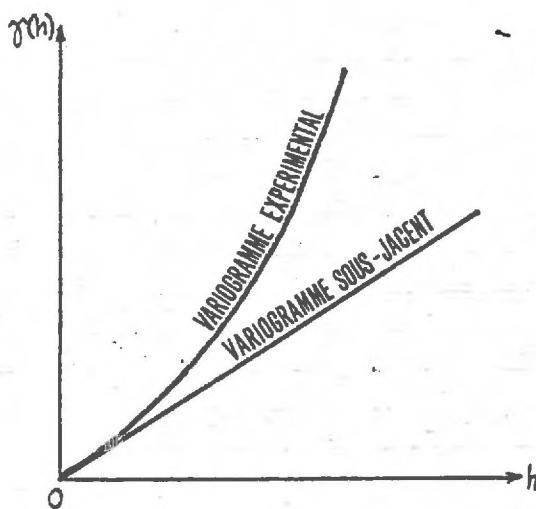


FIG. 24 - VARIOGRAMME EXPERIMENTAL EN PRESENCE
D'UNE DERIVE ET VARIOGRAMME SOUS-JACENT

Dans certains cas simples où la dérive n'est pas apparente dans une direction, on pourra estimer directement le variogramme réel en ne considérant que des couples de points orientés selon cette direction privilégiée et, ayant ajusté celui-ci à un modèle théorique, procéder au krigeage.

Mais en dehors de ces cas simples, on ne peut accéder directement au variogramme réel (appelé variogramme "sous-jacent").

b) Variogramme des résidus

On peut songer alors à estimer, dans un premier temps, la valeur de la dérive $m(x)$ aux différents points expérimentaux, et calculer ensuite le variogramme à partir des résidus estimés $z(x_i) - m^*(x_i)$.

Malheureusement, le variogramme obtenu constitue une estimation profondément biaisée du variogramme réel. Dans le cas, par exemple, d'une dérive linéaire et d'un variogramme sous-jacent linéaire, le variogramme des résidus aura une forme parabolique (Fig. 25).

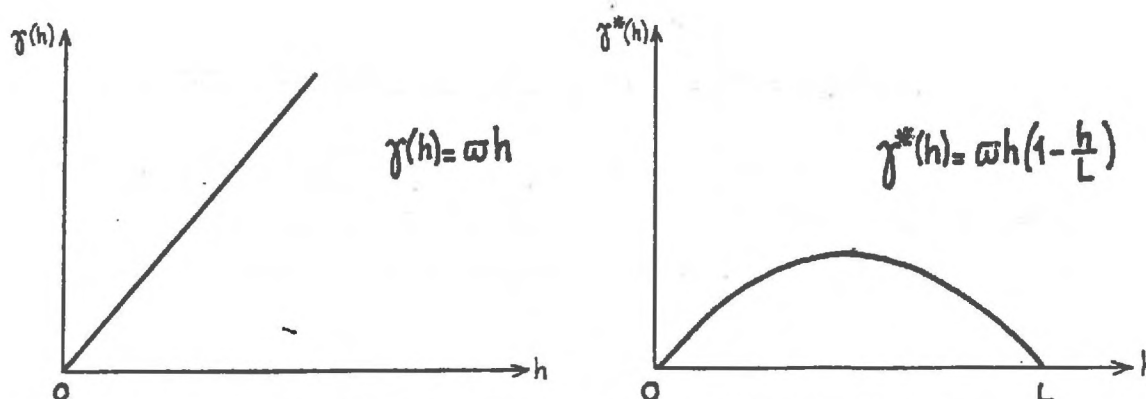


FIG. 25 - VARIOGRAMME REEL ET VARIOGRAMME DES RESIDUS

Il a été pourtant possible de mettre au point des méthodes d'identification du variogramme sous-jacent à partir de ces variogrammes des résidus [3], mais leur lourdeur, et surtout l'impossibilité de les automatiser, les ont fait pratiquement abandonner à l'heure actuelle.

c) Hypothèse intrinsèque généralisée [9], [10]:

Il est préférable en effet de repartir de la définition même du variogramme, qui est une variance d'accroissement (ou, autrement dit, de différence première).

L'intérêt des différences premières est de filtrer les constantes. Quand $E[Z(x)]$ est une constante inconnue m , les accroissements $Z(x+h) - Z(x)$ ont

une espérance nulle, quelle que soit cette valeur de m , et le variogramme peut alors s'estimer sans biais à partir des écarts quadratiques expérimentaux $(z(x+h)-z(x))^2$.

L'idée est alors, pour les phénomènes auxquels on ne peut appliquer l'hypothèse intrinsèque, de faire intervenir des différences secondes, tierces,.... qui ont la propriété de filtrer les polynômes de degré 1, 2, etc... Ce genre de procédé est d'un emploi courant dans l'étude des séries chronologiques non-stationnaires où l'on calcule des différences finies successives jusqu'à obtenir un résultat à peu près stationnaire. On généralise la méthode au cas de données réparties irrégulièrement dans le plan.

a) Généralisation de la notion d'accroissement [2]

Pour des données régulièrement espacées sur la droite, une différence première s'écrit par exemple: $Z(x+a)-Z(x)$. Les poids $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, affectés aux données d'abscisses $x_1 = x+a$ et $x_2 = x$, vérifient:

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1 + (-1) = 0$$

Une différence seconde s'écrira: $Z(x+a) - 2Z(x) + Z(x-a)$. Les poids $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 1$, affectés aux données d'abscisses $x_1 = x+a$, $x_2 = x$ et $x_3 = x-a$, vérifient:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 + (-2) + 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i = 1(x+a) + (-2)x + 1(x-a) = 0$$

Dans le plan, considérant les n points x_i de coordonnées (X_i, Y_i) et les n poids λ_i , on dira que $\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$ est un accroissement d'ordre k de la F.A. Z si:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f^1(x_i) = 0$$

pour tous les monômes f^1 de degré inférieur ou égal à k , c'est à dire de la forme: $X^p Y^q$ avec $0 \leq p+q \leq k$.

Ainsi • pour $k = 0$, on aura la condition unique:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

• pour $k = 1$, on aura la triple condition:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i = 0$$

généralisant bien respectivement les conditions correspondant aux différences première et seconde sur la droite.

β) Stationnarité des accroissements d'ordre k

En revenant aux notations employées pour les calculs du krigeage, la condition $\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 = 0$ du krigeage simple faisait que l'erreur d'estimation

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)$$

était une combinaison linéaire d'accroissements. Seule la stationnarité de ces accroissements était nécessaire et l'on montrait que la variance de l'erreur pouvait s'exprimer en fonction du variogramme $\gamma(h)$.

De même, dans le krigeage universel, si on admet une dérive polynômiale de degré k , c'est à dire une dérive dont les fonctions de base f^1 sont les monômes de degré inférieur ou égal à k , les conditions de non-biais:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f^1(x_i) - f^1(x_0) = 0$$

qui peuvent encore s'écrire:

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i f^1(x_i) = 0 \quad \text{en posant } \lambda_0 = -1$$

font que l'erreur d'estimation

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)$$

est un accroissement d'ordre k . L'hypothèse minimale pour l'inférence statistique est alors la stationnarité de ces accroissements d'ordre k .

Autrement dit, si $\sum_i \lambda_i Z(x_i)$ est un accroissement d'ordre k , $\sum_i \lambda_i Z(x_i+h)$ doit avoir même moyenne et même variance, quel que soit le vecteur h .

C'est une généralisation de l'hypothèse intrinsèque usuelle où seuls étaient concernés les accroissements d'ordre 0.

On emploie le terme de "fonction aléatoire intrinsèque généralisée d'ordre k " (en abrégé F.A.I.- k) pour désigner une F.A. satisfaisant cette hypothèse nouvelle.

γ) Covariance généralisée: modèle polynômial et ajustement automatique

La théorie montre alors que la variance d'accroissements d'ordre k s'exprime à l'aide d'une fonction $K(h)$ appelée covariance généralisée d'ordre k . Ainsi, pourvu que $\sum_i \lambda_i Z(x_i)$ soit un accroissement d'ordre k , sa variance s'écrit:

$$\text{var} \left[\sum_i \lambda_i Z(x_i) \right] = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j K(x_i - x_j)$$

Ceci étant en particulier valable pour l'erreur de krigeage, les calculs peuvent se dérouler comme précédemment, en remplaçant $-\gamma$ par K , et tout ce qui a été dit sur les propriétés du krigeage se conserve. Pour $k=0$, on retrouve comme covariance généralisée d'ordre 0, au signe près, le variogramme pour lequel on avait déjà écrit:

$$\text{var} \left[\sum_i \lambda_i Z(x_i) \right] = - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j)$$

Comme pour le variogramme, une fonction quelconque ne peut être une covariance généralisée. Elle doit satisfaire certaines conditions de cohérence mathématique assurant essentiellement que les variances d'accroissements sont toujours positives. Ici l'ensemble des covariances généralisées d'ordre k contient en particulier les polynômes de degré inférieur à $2k+2$.

Dans le cas du plan, les modèles polynômiaux possibles sont résumés dans le tableau suivant: