



*Thèse*  
*présentée pour obtenir le titre de Docteur de*  
*l'Institut National Polytechnique de Toulouse*  
*Spécialité : Mécanique des Fluides*

---



**Interactions hydrodynamiques entre particule  
et paroi en écoulement de Stokes :  
Application à la filtration**

par

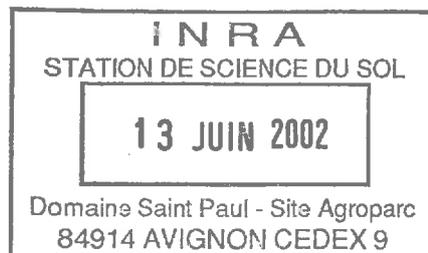
**Jean-Michel FREY**

soutenue le 22 Décembre 1998 devant le jury composé de :

M. J. FABRE  
Mme N. COUTRIS  
M.M. J.P. HULIN  
P. AIMAR  
J.A. DODDS  
D. HOUI  
P. SCHMITZ  
A. KOURTA

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Directeur des travaux de recherche

*N° d'ordre : 1516*



## Résumé

Les interactions hydrodynamiques entre particules en suspension et paroi interviennent dans de nombreuses situations physiques aussi bien dans le domaine environnemental que dans le secteur de l'industrie. Lors de processus de filtration, elles conditionnent le comportement des particules à proximité du collecteur. L'objectif de ce travail est de caractériser les interactions hydrodynamiques, en régime de Stokes, et d'en déduire la répartition du dépôt que constitue la première couche de particules déposées sur la paroi. Deux situations de filtration ont été étudiées.

En filtration en masse, une étude numérique a permis de modéliser le transport de particules sphériques à l'échelle des pores d'un milieu poreux modèle. Les modes de capture ont été analysés à partir d'une approche lagrangienne. L'efficacité de capture du milieu et la répartition des dépôts ont été caractérisées en fonction des paramètres hydrodynamiques et géométriques des pores. Les résultats numériques ont permis d'interpréter des résultats expérimentaux obtenus sur des micro-modèles gravés dont les pores présentaient une géométrie similaire.

En filtration tangentielle, l'interaction entre la paroi poreuse filtrante et des particules sphériques en suspension a été analysée. Dans un premier temps, l'influence d'une singularité de paroi sur la force hydrodynamique appliquée à une particule a été étudiée numériquement, par une méthode quasi analytique. Les résultats ont été interprétés en termes de raccordement des deux cas asymptotiques du problème. La méthode employée a été généralisée au cas d'une singularité de type pore. Dans un deuxième temps, l'étude des trajectoires de particules au-dessus d'une paroi comportant des pores périodiquement répartis a été effectuée. A partir d'un calcul simplifié de l'écoulement, les forces hydrodynamiques qui agissent sur les particules et les trajectoires de particules associées ont été déterminées. La densité de probabilité de capture des particules sur la paroi poreuse a été calculée en fonction de la porosité, de l'inertie des particules, des effets physico-chimiques et de l'intensité du cisaillement. Finalement, l'influence mutuelle de deux sphères placées simultanément dans l'écoulement, au voisinage du pore, a été discutée qualitativement.

**Mots-clés:** Particule, Sphère, Stokes, Paroi, Filtration, Trajectoire

## Abstract

Hydrodynamical interactions between wall and suspended particles occur in many situations in both environmental domain and industry.

During filtration processes, they determine the motion of particles close to the collector.

The aim of this work is to characterize these interactions in Stokes regime and, then, to deduce the first layer of particle deposit on the wall. Two different processes of filtration have been studied.

In deep bed filtration, a numerical study enables us to model the transport of spherical particles at pore scale in the porous medium. Capture mechanisms have been studied with a lagrangian approach. The capture efficiency of the medium and deposit distribution have been characterized as a function of hydrodynamics and pore geometry. Numerical results allow us to interpret some experimental results obtained with transparent etched micro-models of same geometry.

In crossflow microfiltration, the interaction between a filtering porous wall and spherical particles has been treated. First, the influence of a wall singularity on hydrodynamical force applied to a particle has been numerically studied. Results have been interpreted by linking up the two asymptotical cases associated with the problem. The same method has been used to propose simple correlations for the case of a pore singularity. Second, the study of particle trajectories near a wall with spatially spaced pores has been performed. Using a simplified flow calculus, correction factors to Stokes law have been determined and particle trajectories have been computed. The distribution of particle deposits on the filtering wall has been analysed. The particle capture density probability function on the wall has been characterised in terms of porosity, particle weak inertia, physico-chemical effects and shear flow intensity. Finally, the influence of two spheres moving together, close to a pore, has been qualitatively discussed.

**Keywords:** Particle, Sphere, Stokes, Wall, Filtration, Trajectory

## Remerciements

Les travaux qui font l'objet de ce mémoire se sont déroulés à L'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, au sein du Groupe d'Etude sur les Milieux Poreux.

Je tiens à remercier Monsieur Jean Fabre, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse et responsable de la formation doctorale Mécanique des Fluides pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse.

J'adresse mes remerciements à Messieurs Didier Houi, responsable du Groupe d'Etude sur les Milieux Poreux pendant la plus grande partie de ma thèse, et Marc Prat, actuel responsable du groupe, pour tous les enrichissements qu'ils ont apportés à mon travail.

Je tiens à remercier Monsieur Azeddine Kourta, mon directeur de thèse, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail ainsi que pour ses conseils qui ont permis de l'améliorer.

Je ne remercierai jamais assez Monsieur Philippe Schmitz, chargé de recherche au CNRS, pour son étroite collaboration. Je lui suis reconnaissant pour tous les moments que nous avons passés ensemble, pour ses qualités professionnelles et humaines.

Mes remerciements vont également à Madame N. Coutris et Monsieur J.P. Hulin, rapporteurs de cette thèse, pour avoir accepté de consacrer une partie de leur temps à l'analyse de mon travail, ainsi qu'à Messieurs J.A. Dodds et P. Aimar qui ont participé au jury.

Je remercie l'ensemble du personnel du Groupe d'Etude sur les Milieux Poreux, avec une pensée particulière pour Messieurs Serge Bories, pour les instructives discussions que nous avons eues, et César Zarccone, pour son sens physique et son amitié.

Je tiens à remercier l'ensemble des doctorants qui font régner dans le groupe une ambiance à la fois studieuse et conviviale.

J'adresse mon amitié à mes compagnons de bureau successifs : Yves, Sandra et François.

Ma reconnaissance va également à l'ensemble du personnel des services communs du laboratoire et particulièrement à Mesdames Domène et Rambouil, qui ont assuré l'impression de ce document.

Je termine cette liste non exhaustive par ma famille, qui m'a soutenu durant toute la durée de ma thèse, et par mon épouse, pour ces longues heures passées à la relecture du document.

*à Célia, mon épouse  
à mes parents*

# Table des matières

## Introduction

1	Divers modes de filtration . . . . .	4
1.1	Filtration en masse . . . . .	4
1.2	Filtration sur gâteaux . . . . .	4
1.3	Filtration sur membrane . . . . .	5
2	Plan de la thèse . . . . .	5

<b>Bibliographie</b>	<b>9</b>
----------------------	----------

## Chapitre 1

### Trajectoire de particules

1.1	Ecoulement . . . . .	13
1.1.1	Equations de Navier-Stokes . . . . .	13
1.1.2	Ecoulement de Stokes . . . . .	15
1.2	Mouvement des particules . . . . .	16
1.2.1	Equation du mouvement . . . . .	16
1.2.2	Forces appliquées à une particule . . . . .	17
1.3	Conclusion . . . . .	25

<b>Bibliographie</b>	<b>27</b>
----------------------	-----------

## Chapitre 2

### Dépôt de particules en filtration en masse

2.1	Introduction . . . . .	33
2.1.1	Bibliographie . . . . .	33
2.1.2	Présentation des résultats expérimentaux . . . . .	34
2.1.3	Ordre de grandeur des forces rencontrées . . . . .	37

2.2	Modélisation numérique . . . . .	38
2.2.1	Écoulement . . . . .	39
2.2.2	Trajectoire de particule . . . . .	40
2.2.3	Efficacité de capture . . . . .	42
2.2.4	Densité de probabilité de capture sur un grain . . . . .	43
2.2.5	Visualisation des dépôts . . . . .	45
2.3	Résultats numériques . . . . .	45
2.3.1	Lignes de courant . . . . .	47
2.3.2	Efficacité de capture . . . . .	49
2.4	Interprétation des observations expérimentales . . . . .	52
2.4.1	Répartition $(h, r)$ dans un micro-modèle . . . . .	53
2.4.2	Prédiction des dépôts dans le cas à $60^\circ$ . . . . .	54
2.4.3	Prédiction des dépôts dans le cas à $45^\circ$ . . . . .	57
2.4.4	Forme des dépôts . . . . .	59
2.5	Conclusion . . . . .	62

## Bibliographie

67

### Chapitre 3

#### Sphère s'approchant d'une paroi présentant une singularité

3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Formulation Mathématique . . . . .	72
3.2.1	Description du problème . . . . .	72
3.2.2	Conditions Limites . . . . .	74
3.2.3	Projection Orthogonale . . . . .	76
3.2.4	Minimisation de l'erreur sur la condition limite singulière . . . . .	77
3.3	Résultats . . . . .	80
3.3.1	Facteur correcteur à la force de Stokes . . . . .	80
3.3.2	Influence relative des conditions limites . . . . .	81
3.3.3	Estimation du coefficient de traînée . . . . .	83
3.4	Généralisation à d'autres singularités de paroi . . . . .	89
3.4.1	Sphère se déplaçant dans l'axe d'un orifice circulaire . . . . .	89
3.4.2	Sphère se déplaçant orthogonalement à une paroi comportant un orifice circulaire: cas tridimensionnel . . . . .	93
3.4.3	Sphère immobile dans un écoulement de Sampson . . . . .	98

3.5 Conclusion . . . . .	100
--------------------------	-----

<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>
----------------------	------------

<b>Chapitre 4</b>
-------------------

<b>Filtration sur membrane</b>
--------------------------------

4.1 Introduction . . . . .	111
4.1.1 Ecoulement dans un canal poreux . . . . .	112
4.1.2 Trajectoire des particules . . . . .	113
4.1.3 Répartition des dépôts sur la membrane . . . . .	114
4.2 Modélisation . . . . .	114
4.2.1 Ecoulement sans particule au voisinage d'un pore . . . . .	114
4.2.2 Calcul de trajectoire . . . . .	121
4.2.3 Probabilité de capture . . . . .	138
4.3 Résultats . . . . .	142
4.3.1 Influence de la porosité . . . . .	142
4.3.2 Influence de la distance de capture . . . . .	150
4.3.3 Influence de l'inertie . . . . .	150
4.3.4 Influence du cisaillement . . . . .	156
4.4 Etude de trajectoires . . . . .	160
4.4.1 Rotation de la sphère . . . . .	160
4.4.2 Influence d'une deuxième sphère dans l'écoulement . . . . .	162
4.5 Conclusions . . . . .	166

<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>
----------------------	------------

<b>Conclusion générale</b>
----------------------------

<b>Annexe A</b>
-----------------

<b>Corrections typographiques de l'article Wang</b>
---

<b>Annexe B</b>
-----------------

<b>Expression des coefficients reliant <math>a_n</math>, <math>b_n</math> et <math>c_n</math> à <math>d_n</math></b>
--

<b>Annexe C</b>
-----------------

<b>Facteurs correcteurs des cas asymptotiques du chapitre 4</b>
---

**Annexe D****Description du code aux éléments de frontière**

D.1	Introduction . . . . .	197
D.2	Résolution des équations de Stokes par la méthode des éléments de frontière	197
D.2.1	Mise en équations . . . . .	197
D.2.2	Problème singulier . . . . .	199
D.2.3	Discrétisation . . . . .	200
D.2.4	Traitement des intégrales singulières . . . . .	203
D.2.5	Optimisation du temps de calcul . . . . .	204
D.3	Validation du code . . . . .	205
D.3.1	Sphères concentriques . . . . .	205
D.3.2	Sphère dans l'axe d'un tube cylindrique . . . . .	206

**Bibliographie****213**

# Introduction

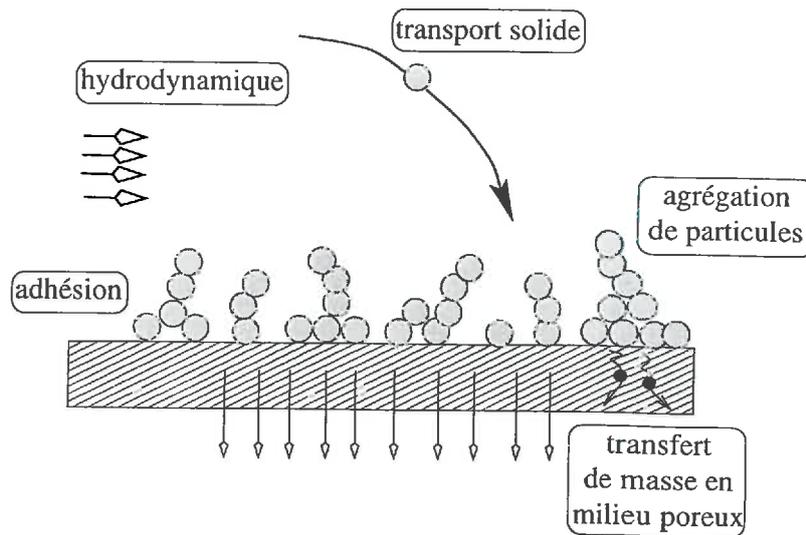


FIG. 1 – Champs d'application lors d'un processus de filtration

La filtration intervient dans de nombreuses applications industrielles. Que ce soit dans le domaine automobile, aéronautique, dans le traitement des eaux ou l'agroalimentaire, l'emploi de filtres est primordial pour obtenir des fluides propres. On retrouve le même type de phénomènes lors d'un transport de particules en milieu poreux. Par exemple, les problèmes de pollution des sols ou de récupération pétrolière font intervenir des solutions de particules qui migrent au travers d'un milieu poreux. La matrice solide du milieu se comporte de manière similaire à un filtre et fixe un certain nombre de particules.

Lors d'une telle épuration, les particules parasites que l'on souhaite éliminer se déposent sur l'obstacle que constitue le filtre. Le dépôt qui en résulte modifie les caractéristiques du filtre. Ce colmatage est de toute évidence nuisible au bon déroulement du processus de filtration. L'accumulation de particules tend à rendre le passage du fluide au travers de l'ensemble filtre-dépôt de plus en plus difficile et on assiste à une chute de perméabilité de l'ensemble.

Le propre de la filtration étant de fixer les particules indésirables sur un collecteur, la chute de perméabilité est inéluctable. La question de la filtration est de trouver un compromis convenable entre le nombre de particules que l'on souhaite capturer et la chute de perméabilité qui en résulte.

Il est alors intéressant de comprendre comment vont s'agréger les particules, afin de minimiser les pertes de charge au travers du bloc filtrant, et, par la même occasion, d'augmenter la durée de vie du filtre.

Différents champs d'application (Figure 1) interviennent lors d'un processus de filtra-

tion :

- hydrodynamique – détermination de l'écoulement du fluide à proximité du filtre,
- transport solide – caractérisation des trajectoires des particules,
- agrégation de particules – évolution et caractérisation de la forme du dépôt,
- adhésion de particules – détermination des interactions physico-chimiques entre particules et interaction particules/collecteur,
- transfert de masse en milieu poreux – modélisation de l'écoulement à travers le dépôt.

## 1 Divers modes de filtration

Lors d'un processus industriel, le choix du mode de filtration varie. Il est fait en fonction du type de particules que l'on veut traiter, de l'espace disponible et des moyens financiers disponibles. Nous présentons ici les modes de filtration les plus répandus.

### 1.1 Filtration en masse

La filtration en masse est le système le plus simple pour filtrer une suspension. Le principe est de faire passer la suspension au travers d'un milieu poreux de grande taille. Ainsi, lors de leur migration à travers le milieu poreux, les particules en suspension rencontrent un grand nombre d'obstacles susceptibles de les capturer. Ce principe est souvent utilisé comme première étape d'un processus de traitement des eaux. Le milieu poreux est en général un bassin rempli de sable. Il est intéressant de noter que l'on retrouve les mêmes mécanismes lors de transfert de polluant dans les sols ou lors de problèmes de récupération pétrolière.

### 1.2 Filtration sur gâteaux

La filtration sur gâteaux est en général utilisée à des échelles plus petites. On utilise un filtre de faible épaisseur pour arrêter les particules de l'écoulement. Le filtre est percé de trous qui laissent passer le fluide mais pas les particules en suspension. L'écoulement de la suspension se fait orthogonalement au filtre. Les particules se déposant sur le filtre forment

un milieu poreux appelé gâteau, qui va à son tour servir de filtre pour les particules à venir.

### 1.3 Filtration sur membrane

L'inconvénient des systèmes de filtration précédents est le colmatage rapide du filtre. Au cours du processus de filtration on observe une décroissance rapide de la perméabilité du système filtrant.

Afin de limiter la chute de perméabilité, un nouveau système de filtration s'est développé depuis quelques années : la filtration tangentielle.

Le filtre est un tube circulaire aux parois poreuses et appelé fibre creuse. L'écoulement de la suspension se fait soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du tube. Une dépression est imposée de l'autre côté de la membrane afin de générer un écoulement au travers de celle-ci. Les particules de la suspension se déposent sur la paroi filtrante. L'intérêt du processus réside dans le fait que le dépôt sur la membrane est sollicité par l'écoulement principal dans le tube. Le cisaillement généré par l'écoulement tend à ralentir la formation des dépôts et à les uniformiser sur la membrane.

Cette technique est, de nos jours, employée dans divers domaines industriels, allant du traitement de l'eau à l'agroalimentaire.

## 2 Plan de la thèse

Les premiers travaux effectués dans le laboratoire, dans le but de déterminer la manière dont des particules solides s'accumulent à la surface d'une paroi, ont été menés par Houi [8]. Il a analysé, à l'aide d'une étude expérimentale, l'importance des phénomènes en présence et a caractérisé la formation de dépôts de particules à la surface d'un filtre.

Depuis 1986, dans le cadre d'un Groupement de Recherche "Filtration et fibres creuses", de nouvelles études ont été entreprises, au sein du Groupe d'Etudes sur les Milieux Poreux, pour caractériser chacun des mécanismes qui interviennent lors d'un processus de filtration.

L'hydrodynamique a tout d'abord été étudiée, numériquement, par Schmitz [10] et, expérimentalement, par Gouverneur [7]. Ces travaux ont permis de caractériser notamment l'écoulement au voisinage d'un pore d'une paroi poreuse avec aspiration en présence de cisaillement. De plus, Schmitz [10] a développé une modélisation statistique bidimensionnelle de la formation d'un dépôt de milliers de particules sur une membrane modèle en

microfiltration tangentielle. Cette étude était basée sur des règles simples de déplacement et de capture des particules.

Par la suite, Wandelt [11] a analysé expérimentalement la formation de dépôts dans une fibre creuse utilisée en microfiltration tangentielle. L'imagerie RMN a permis de visualiser et de caractériser l'évolution spatio-temporelle d'un dépôt de particules à la surface d'une fibre creuse. L'épaisseur, l'anisotropie et la compressibilité des dépôts ont été étudiées. Des simulations effectuées par le modèle statistique de Schmitz ont donné des résultats qualitativement en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Un effort important a été ensuite entrepris pour évaluer les interactions physico-chimiques entre particules et paroi. L'expérience d'Elzo [3] a permis de mettre en place un protocole expérimental visant à les déterminer par le biais de la force hydrodynamique nécessaire à l'arrachement d'une particule préalablement déposée sur le fond d'une cellule hydrodynamique à écoulement cisailé.

Ces mêmes interactions ont également été étudiées par Gohr-Pinheiro [6] lors d'une étude expérimentale de filtration en masse. L'utilisation de micro-modèles en résine transparente comme milieu poreux modèle a permis de visualiser les dépôts formés à l'intérieur du milieu. La forme et la localisation des dépôts ont été analysées en fonction des interactions hydrodynamiques et physico-chimiques entre particules et paroi. Un modèle de réseau s'appuyant sur des lois de probabilité de capture dans les canaux du milieu poreux a également été développé.

Ces dernières années, de nouvelles expériences de détermination des forces d'adhésion, utilisant la même technique que Elzo, étendent le champ des domaines étudiés. Lorthois [9] caractérise l'influence de la présence de fibrine à la surface de la paroi sur les forces d'adhésion en vue d'étudier le phénomène d'embol (fragmentation de caillots sanguins) et Cardot [1] étudie les forces d'adhésion de particules en milieu fibreux sous écoulement d'air.

Le travail présenté ici s'intègre dans la continuité de l'ensemble des études menées dans la thématique de recherche "Adhésion de particules et dynamique des fluides". Jusqu'à présent, l'interaction hydrodynamique particule-paroi n'était pas prise en compte (modèle statistique de Schmitz, modèle de réseau de Gohr-Pinheiro). L'objectif de cette thèse est de mieux comprendre les effets hydrodynamiques que subit une particule qui se déplace à proximité d'une paroi.

Dans le chapitre 1, nous évoquerons de manière générale les différentes étapes nécessaires à la détermination de trajectoires de particules au voisinage d'une paroi. Nous

présenterons, dans un premier temps, les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide incompressible ainsi que les différentes formulations que nous utiliserons par la suite. Dans un deuxième temps, nous énumérerons, à partir d'une revue bibliographique, l'ensemble des forces susceptibles de s'appliquer à une particule en suspension.

Par la suite, nous allons nous intéresser à deux types de parois correspondant à deux situations différentes de filtration. Lors d'un processus de filtration en masse, les particules en suspension se trouvent en présence de nombreux grains qui gênent constamment leur progression dans le milieu poreux. En revanche, lors d'un processus de filtration par membrane, les particules sont librement transportées par l'écoulement jusqu'à proximité de la paroi poreuse par laquelle elles sont alors capturées. Les configurations d'écoulement n'étant pas les mêmes, nous allons les étudier séparément.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude du dépôt de particules en filtration en masse lorsque les effets hydrodynamiques dominant (Frey et al [4]). En nous plaçant à l'échelle du pore, nous allons déterminer la trajectoire de particules au travers d'une cellule représentative du milieu poreux modèle étudié. Nous décrirons les méthodes utilisées pour quantifier les dépôts sur les grains du milieu. L'efficacité de capture et la répartition spatiale des dépôts le long des grains seront étudiées en fonction des paramètres géométriques et hydrodynamiques des pores. Finalement, nous fournirons une interprétation de résultats expérimentaux obtenus sur des micro-modèles transparents par Gohr-Pinheiro [6] et Dufreche [2]. L'influence de l'orientation des directions principales des canaux par rapport à l'écoulement moyen sera étudié.

Les deux chapitres suivants correspondent à des situations de filtrations par membrane.

Dans le chapitre 3, nous nous intéresserons à l'influence d'une singularité de paroi sur la force de traînée appliquée à une sphère se déplaçant à proximité de celle-ci. Nous décrirons tout d'abord la formulation mathématique utilisée pour déterminer quasi-analytiquement l'écoulement généré par le déplacement d'une sphère au-dessus d'une paroi infinie munie d'un disque non contraint. Les résultats obtenus seront exprimés en terme de raccordement aux cas asymptotiques. Puis, nous utiliserons cette méthode pour dégager des corrélations simples à utiliser dans des cas de filtration étudiés par d'autres auteurs.

Dans le chapitre 4 nous nous intéresserons au dépôt de particules sur une membrane filtrante. Nous décrirons les simplifications effectuées pour la détermination de l'écoulement sans particule (Frey et al [5]). Par la suite, en reprenant la méthode du chapitre 3, nous déterminerons les différents facteurs correcteurs à la force de Stokes dans la géométrie étudiée. Le calcul de la densité de probabilité de capture du chapitre 2 sera adapté

à ce problème. Ainsi, l'influence de la porosité, des effets physico-chimiques, de l'inertie et du cisaillement sur la répartition du dépôt sur la membrane sera étudiée. L'introduction d'une deuxième sphère dans l'écoulement sera discutée qualitativement à partir de quelques simulations.

Enfin, nous conclurons et présenterons les perspectives de recherche envisagées.

# Bibliographie

- [1] J. Cardot. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., en cours.
- [2] J. Dufreche. Effet d'anisotropie du champ de vitesse sur le transport de particules en milieux poreux. Rapport de DEA, INPT, 1996.
- [3] Dominique Elzo. Etude théorique et expérimentale de l'adhésion de particules de taille micronique sur une surface plane. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., 1994.
- [4] J. M. Frey, P. Schmitz, J. Dufreche, and I. Gohr-Pinheiro. Particle deposition in porous media – analysis of hydrodynamic and weak inertial effects. Accepté dans *Transport In Porous Media*, 1998.
- [5] J. M. Frey, P. Schmitz, and M. Prat. Sur l'écoulement à proximité d'une paroi poreuse avec aspiration. Accepté dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1998.
- [6] Ivone Gohr-Pinheiro. Transport et dépôt de particules en milieu poreux : de l'échelle du pore à l'échelle macroscopique. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., 1996.
- [7] C. Gouverneur. Etude expérimentale du champ hydrodynamique dans un tube poreux avec transfert de masse pariétal : Application à la production d'eau potable par ultrafiltration tangentielle dans les fibres creuses. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., 1991.
- [8] D. Houi. Modélisations expérimentales et théorique de l'accumulation de particules à la surface d'un milieu poreux. Thèse de docteur d'état de l'I.N.P.T., 1986.
- [9] S. Lorthois. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., en cours.
- [10] P. Schmitz. Mécanismes d'interaction : hydrodynamique et agrégation, dans la formation du dépôt en filtration tangentielle. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., 1990.

- [11] B. Wandelt. Analyse de la formation des dépôts de particules lors d'un procédé d'ultrafiltration tangentielle. visualisation par imagerie à résonance nucléaire. Thèse de doctorat de l'I.N.P.T., 1993.

# Chapitre 1

## Trajectoire de particules



En fonction de l'application pour laquelle a lieu la filtration, la taille des particules varie. Au cours du processus de filtration par osmose inverse, les particules ont des diamètres de l'ordre du nanomètre. On trouvera des particules de taille plus importante (du micromètre au millimètre) lors d'une filtration en masse. Le comportement des particules dans l'écoulement est essentiellement lié à leur taille.

En général on distingue deux grandes classes de particules en fonction de leur taille :

- les particules colloïdales, de diamètre inférieur au micromètre,
- les particules en suspension, de diamètre supérieur au micromètre.

La diffusion brownienne pourra, par exemple, être négligée lorsque les particules convectées par un fluide en mouvement sont d'une taille supérieure au micromètre. La comparaison du mouvement brownien ou diffusif par rapport au mouvement convectif est caractérisée par le nombre adimensionnel de Péclet,  $Pe$  :

$$Pe = 6\pi\kappa U d^2 / kT \quad (1.1)$$

où  $\kappa$  est la viscosité du fluide,  $U$  une vitesse caractéristique du fluide,  $d$  le diamètre des particules,  $k$  la constante de Boltzman et  $T$  la température. Lorsque le nombre de Péclet est grand, le mouvement brownien peut être négligé.

En général, pour des particules colloïdales il faut tenir compte de la diffusion brownienne, alors qu'avec des particules en suspension elle peut être négligée.

Nous allons passer en revue, dans ce chapitre, toutes les étapes nécessaires à la détermination, d'une part, du comportement des particules à proximité d'un collecteur et, d'autre part, du dépôt qui en résulte.

## 1.1 Écoulement

### 1.1.1 Equations de Navier-Stokes

L'écoulement stationnaire d'un fluide Newtonien incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

où  $P$  est la pression,  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide,  $\rho$  sa densité,  $\kappa$  sa viscosité et  $\mathbf{f}$  une force extérieure de volume.

Si  $L_0$  est une longueur et  $U_0$  une vitesse, chacune caractéristique de l'écoulement, on définit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_0} \quad (1.4)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L_0} \quad (1.5)$$

$$\tilde{P} = \frac{P}{\rho U_0^2} \quad (1.6)$$

L'équation dynamique de Navier-Stokes s'écrit alors sous forme adimensionnelle :

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{P} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.7)$$

Le nombre de Reynolds  $Re$  est le nombre adimensionnel qui conditionne le comportement du fluide. Il traduit l'importance des effets d'inertie par rapport aux effets visqueux.

Le nombre de Reynolds est donné par la relation :

$$Re = \frac{\rho L_0 U_0}{\kappa} \quad (1.8)$$

La valeur du nombre de Reynolds va déterminer le régime de l'écoulement :

- si  $Re \ll 1$  alors l'inertie du fluide est négligeable. Nous sommes en présence d'un écoulement rampant ou écoulement de Stokes
- si  $1 < Re < Re_c$  l'inertie du fluide ne peut plus être négligée. Le régime est laminaire.
- à partir d'un nombre de Reynolds critique  $Re_c$  on assiste à une bifurcation et le régime devient turbulent. La valeur du nombre de Reynolds critique dépend de la géométrie du problème,
- lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, l'inertie du fluide est prépondérante et les termes visqueux sont négligeables. L'écoulement est alors appelé écoulement d'un fluide parfait ( $\kappa = 0$ ).

Au voisinage des surfaces collectrices (dans le milieu poreux en filtration de masse ou à proximité de la membrane filtrante en filtration sur membrane), l'écoulement du

fluide porteur est en général lent ( $R_c$  est petit). Par exemple, une sphère d'un micron de diamètre se déplaçant dans de l'eau doit avoir une vitesse de l'ordre du  $ms^{-1}$  pour que le Reynolds s'approche de 1.

### 1.1.2 Ecoulement de Stokes

Dans ces conditions, lors de l'étude du transport de particules au cours d'un processus de filtration, il est raisonnable de faire l'hypothèse que le régime de l'écoulement est rampant.

Les équations qui régissent l'écoulement sont alors les équations de Stokes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla P / \kappa \quad (1.10)$$

Il existe différentes formulations pour ces équations en fonction des grandeurs choisies pour caractériser l'écoulement.

#### Formulation vitesse-pression

Les équations 1.9 et 1.10 sont une formulation en vitesse et pression. Dans un repère cartésien, en utilisant les conventions de sommation des indices muets, elles s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

$$\kappa \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (1.12)$$

#### Formulation avec la fonction de courant

Il est parfois plus commode d'utiliser une formulation faisant intervenir la fonction de courant  $\Psi$ . C'est en particulier le cas lorsque l'écoulement est bidimensionnel ou axisymétrique. Par exemple, dans le cas bidimensionnel, on introduit  $\Psi$  tel que :

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (1.13)$$

et

$$u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.14)$$

La résolution des équations de Stokes se ramène alors à la résolution d'une unique équation :

$$\Delta^2 \Psi = 0 \quad (1.15)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien. C'est-à-dire que la fonction de courant est bi-harmonique. L'équation 1.15 est obtenue à partir de l'équation de conservation de la masse (1.9). Sa résolution permet d'accéder à la vitesse grâce aux équations 1.13 et 1.14. Le champ de pression est alors déterminé avec l'équation 1.10.

### Formulation vitesse-contraintes

Nous verrons par la suite qu'une formulation en vitesse-contraintes peut-être utile lors du calcul de trajectoires de particules. Les équations de Stokes s'écrivent dans ce cas :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (1.17)$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes. Pour un fluide Newtonien, on a :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \kappa \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.18)$$

Le choix de la formulation des équations de Stokes va dépendre du type de problème étudié, de la dimension de l'espace, de la géométrie, des symétries éventuelles. Il va également dépendre des grandeurs auxquelles on souhaite accéder directement.

## 1.2 Mouvement des particules

### 1.2.1 Equation du mouvement

Nous avons choisi une approche Lagrangienne pour décrire les phénomènes de transport de particules. Nous suivons, de ce fait, la particule dans son mouvement. La trajectoire d'une particule solide dans un écoulement est régie par la relation fondamentale de la dynamique :

pour la translation :

$$m_p \frac{d}{dt} \mathbf{u}_p = \sum \mathbf{F} \quad (1.19)$$

où  $m_p$  est la masse de la particule,  $\mathbf{u}_p$  sa vitesse et  $\mathbf{F}$  représente l'ensemble des forces qui s'appliquent à la particule.

pour la rotation :

$$I_p \frac{d}{dt} \omega_p = \sum \mathbf{M} \quad (1.20)$$

où  $I_p$  est le moment d'inertie de la particule,  $\omega_p$  sa vitesse de rotation et  $\mathbf{M}$  représente les moments des forces  $\mathbf{F}$

La position et l'angle relatif des particules sont donnés par les équations cinématiques :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_p = \mathbf{u}_p \quad (1.21)$$

et

$$\frac{d}{dt} \theta_p = \omega_p \quad (1.22)$$

### 1.2.2 Forces appliquées à une particule

Le comportement d'une particule est entièrement déterminé par l'ensemble des forces qui s'appliquent sur elle. On peut les classer suivant quatre grandes catégories :

- les forces liées à un champ extérieur (gravité, électromagnétisme, ...)
- les forces physico-chimiques résultant d'interactions à courte portée,
- les forces hydrodynamiques résultant de la présence d'un écoulement,
- les forces liées à l'inertie de la particule ou du fluide.

L'intensité des forces présentes dans l'écoulement dépend essentiellement de la taille des particules. Pour des grosses particules, d'une taille caractéristique supérieure à  $10\mu m$ , l'hydrodynamique, la gravité et l'inertie dominant. Par contre, des particules d'une taille inférieure au micron seront essentiellement soumises aux forces électro-chimiques et à la diffusion brownienne.

Dans les différents problèmes que nous aborderons par la suite, nous nous intéresserons à des suspensions diluées de particules sphériques. De ce fait, nous n'évoquerons pas dans

ce chapitre les différents mécanismes qui interviennent dans des suspensions de concentration élevée. Dans ce cas, il faudrait tenir compte des interactions particule-particule, que ce soit au niveau physico-chimique, qu'au niveau hydrodynamique.

### forces liées à un champ extérieur

Dans la plupart des applications, le seul champ qui intervient est le champ de gravité  $g$ . Toute particule de volume  $V_p$  et de masse volumique  $\rho_p$  plongée dans un fluide de masse volumique  $\rho_f$  subit une force dite de gravité égale à :

$$F_g = V_p g (\rho_p - \rho_f) \quad (1.23)$$

### Forces Physico-chimiques

**Forces de Van der Waals** La polarisation électrique et magnétique des molécules de deux corps suffisamment proches génère un champ électromagnétique entre les deux corps. Il en résulte une interaction entre les deux particules, caractérisée par un potentiel attracteur. De nombreux auteurs se sont intéressés à l'expression de cette force en fonction de la géométrie des deux corps (Elimelech et al [7], Elzo [8] et Gohr-Pinheiro [11]).

Dans le cas d'une interaction sphère-plan le potentiel est donné par :

$$V_{vdw} = -\frac{A}{6} \left[ \frac{a}{h} + \frac{a}{h+2a} + \ln\left(\frac{h}{h+2a}\right) \right] \quad (1.24)$$

où  $A$  est la constante de Hamaker,  $h$  la distance de la sphère au plan et  $a$  le rayon de la sphère.

La constante de Hamaker est liée aux propriétés d'interaction entre les corps et le milieu. Typiquement, elle est comprise entre  $10^{-20}$  et  $10^{-18}$  J (Gregory [16]).

Lorsque la sphère est très proche du plan, le potentiel se réduit à :

$$V_{vdw} = -\frac{Aa}{6h} \quad (1.25)$$

Par dérivation du potentiel par rapport à la distance  $h$ , Derjaguin [5] donne directement l'expression de la force de Van der Waals :

$$F_{vdw} = \frac{Aa}{6h^2} \quad (1.26)$$

**Force de double couche** En général, la grande majorité des particules a une charge négative en surface. Lorsque les particules sont en suspension, le milieu fluide cède des ions positifs pour compenser la différence de charge. Il se crée alors une double couche électrique autour de chaque particule. Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire les différents mécanismes de formation de la double couche (Helmholtz [18], Gouy [14], Stern [23], Grahame [15]).

La théorie de Gouy-Chapman permet d'exprimer la différence de potentiel électrique entre l'interface solide-liquide et le reste de la solution. La différence de potentiel est liée à la distance à l'interface et au paramètre  $\kappa_d$  qui prend en compte les conditions électrochimiques de la solution.

Le potentiel est donné par :

$$V_{dc} = V_{dc0} \exp(-\kappa_d h) \quad (1.27)$$

ou  $V_{dc0}$  est le potentiel de surface,  $h$  la distance à la surface et  $\kappa_d$  la longueur réciproque de Debye.

$1/\kappa_d$  est souvent appelée épaisseur de double couche. Pour des solutions aqueuses ne comportant que des ions monovalents, on a :

$$\kappa_d = 3.28\sqrt{I} \quad (1.28)$$

où  $I$  est la force ionique de la solution.

Le potentiel de surface étant difficile à déterminer, il est estimé en général à partir du potentiel zeta, obtenu expérimentalement par détermination de la mobilité électrophorétique des particules considérées.

Spielman et Cukor [22] donnent une approximation de la force de double couche lorsque le collecteur est grand par rapport à la taille de la particule :

$$F_{dc} = \frac{\epsilon a \kappa_d e^{-\kappa_d h} \zeta_p \zeta_m}{2(1 + e^{-\kappa_d h})} \quad (1.29)$$

où  $a$  est le rayon de la sphère,  $h$  la distance sphère plan,  $\epsilon$  la constante diélectrique,  $\zeta_p$  et  $\zeta_m$  les potentiels zeta respectifs de la particule et du collecteur. Pour de l'eau à  $20^\circ C$ ,  $\kappa_d^{-1}$  vaut  $3.10^{-10} I^{-\frac{1}{2}}$  m, où  $I$  est la force ionique pour un sel monovalent en moles par litres.

**Répulsion de Born** La répulsion de Born résulte de l'interaction à très faible distance des nuages électroniques des surfaces.

Le potentiel de répulsion est donné par Ruckenstein et Prieve [21]:

$$V_b = \frac{A\sigma_c^6}{7560} \left( \frac{8a+h}{(2a+h)^7} + \frac{6a-h}{h^7} \right) \quad (1.30)$$

où  $\sigma_c$  est le diamètre de collision et  $h$  la distance entre la particule et la surface.

**La théorie D.L.V.O.** La théorie D.L.V.O. doit son nom aux auteurs qui l'ont mise en oeuvre: Derjaguin et Landau en 1941 puis Verwey et Overbeek en 1948.

La théorie D.L.V.O. permet de quantifier l'influence sur les interactions entre surfaces de différents paramètres tels que la salinité, le potentiel électrocinétique des surfaces, les propriétés et la nature des matériaux en présence.

La compétition entre les différents effets est pris en compte à l'aide du potentiel d'interaction totale  $V_T$  égal à la somme de tous les potentiels d'interaction. On inclut en général dans ce potentiel, les attractions de Van der Waals et les répulsions de double couche. On ajoute parfois à ces deux effets le potentiel de répulsion de Born.

La Figure 1.1 montre l'évolution de l'énergie globale en fonction de la distance d'une sphère à un plan. Pour des salinités de  $10^{-4}M$  et  $10^{-3}M$ , l'énergie admet un maximum. Lorsque la distance est faible, les forces d'attraction de Van der Waals sont prédominantes. Pour des distances de l'ordre de la longueur de Debye  $1/\kappa_d$ , l'effet répulsif de la force de double couche est du même ordre de grandeur que l'effet attractif de la force de Van der Waals. Il est possible qu'il soit supérieur sous certaines conditions. La sphère, en se rapprochant de la paroi, doit vaincre cette barrière de potentiel avant d'arriver au contact du plan.

Lorsque la salinité devient plus importante ( $10^{-1}M$  sur la figure), il n'y a plus de barrière de potentiel et le système est entièrement attractif.

**Autres forces physico-chimiques** Sous certaines conditions d'autres forces physico-chimiques peuvent entrer en jeu (voir les revues bibliographiques [7, 8, 11]). Pour de très faibles distances (inférieures au nanomètre), la force de Van der Waals devient très grande, et même infinie au contact. On peut assister à la désolidarisation des surfaces en présence. Certaines particules peuvent se détacher des surfaces collectrices (répeptization). Ainsi, le confinement des molécules d'eau génère des forces dites de solvation.

La présence de polymères va également modifier les comportements électro-chimiques. L'ajout de polymères a, en général, un effet répulsif. Cependant, pour des polymères de forte masse moléculaire, on peut assister à un pontage entre les surfaces. Dans ce cas, les

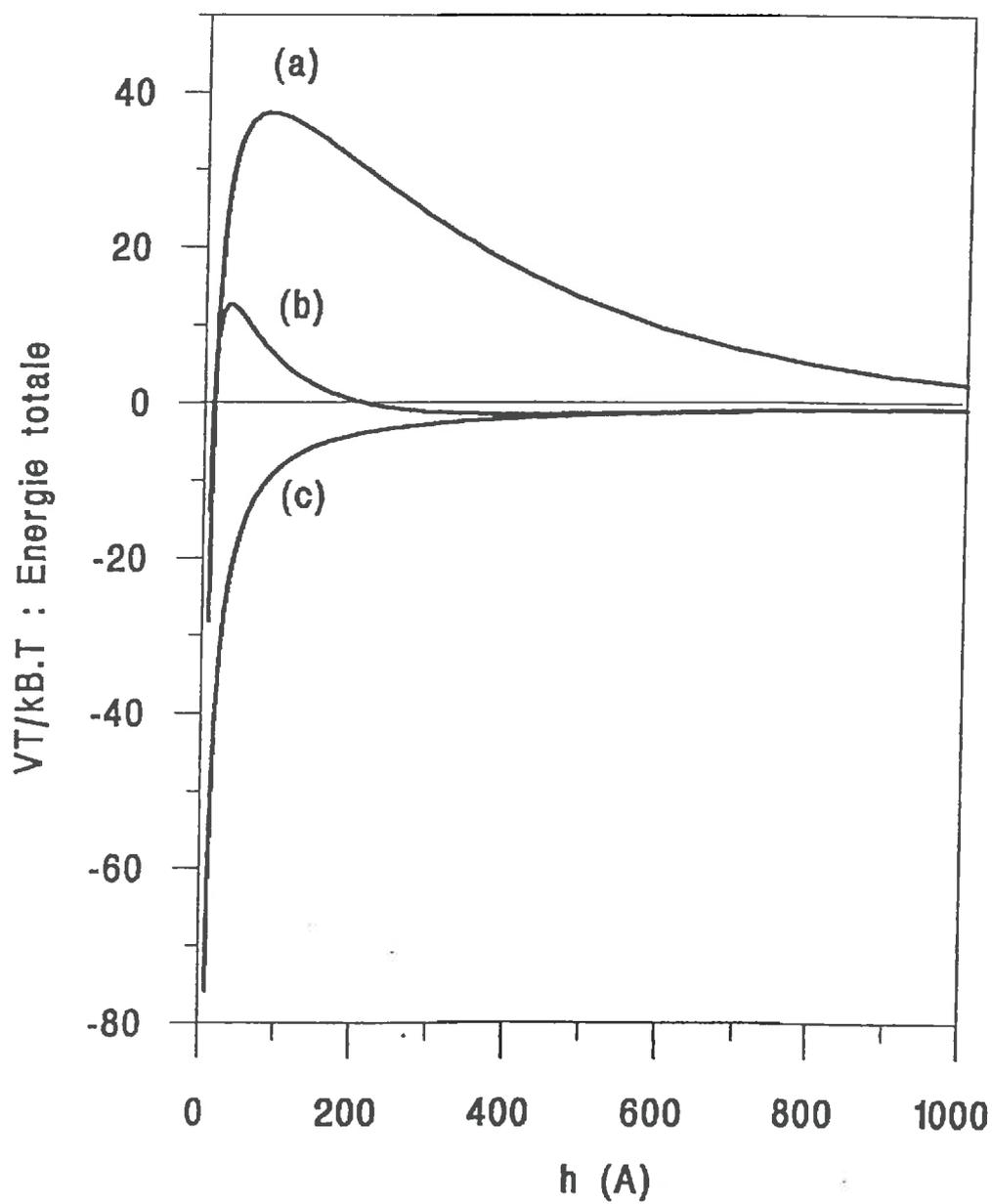


FIG. 1.1 – Energie d'interaction totale pour le système sphère/plan, en fonction de l'écart  $h$  entre les surface. salinité: (a)  $10^{-4}M$ , (b)  $10^{-3}M$ , (c)  $10^{-1}M$  – d'après Elzo

longues chaînes de polymères ont un effet attractif.

Les effets hydrophobes ou d'hydratation, apparaissant en fonction des caractéristiques des surfaces des matériaux, peuvent jouer un rôle important. Une surface hydrophile possède des groupes d'ions qui absorbent les molécules d'eau. Ainsi, lors du rapprochement de deux particules hydrophiles, dont les surfaces sont hydratées, les molécules d'eau s'orientent de manière à s'opposer au contact. A proximité de particules possédant une surface hydrophobe, l'arrangement des molécules d'eau est modifié par rapport à leur arrangement naturel. Les molécules d'eau migrent à l'intérieur de la suspension. Il apparaît alors des forces d'attraction entre les particules.

## Hydrodynamique

**écoulement uniforme** Pour un écoulement de Stokes uniforme en milieu infini, la traînée exercée sur une sphère est donnée par la force de Stokes.

$$F_h = 6\pi\kappa aU \quad (1.31)$$

où  $\kappa$  est la viscosité du fluide,  $a$  le rayon de la sphère,  $U$  la vitesse du fluide à l'infini.

Dès que la forme de la particule change, que l'écoulement n'est plus uniforme ou que l'écoulement est en présence de paroi, il convient de modifier la force de Stokes par un facteur correcteur  $K$ . La force hydrodynamique  $F_h$  s'écrit alors :

$$F_h = 6\pi\kappa aKU \quad (1.32)$$

De nombreux auteurs ont contribué à la détermination de facteurs correcteurs dans diverses configurations (Figure 1.2). Nous donnons, ci-dessous, les résultats pour la force hydrodynamique, mais en général, les auteurs étudient également les effets de rotation et donnent les valeurs des facteurs correcteurs pour les moments.

**sphère se déplaçant perpendiculairement à un plan infini** Brenner [1] a déterminé de façon analytique l'expression du facteur correcteur dans le cas d'une sphère se déplaçant perpendiculairement à un plan infini. Le plan utilisé était soit une surface solide, soit une surface non contrainte.

Par la suite, Cox et Brenner [3] ont proposé une expression simplifiée lorsque la sphère est proche d'un plan solide infini :

$$K = \frac{a}{h} - 0.21 \ln\left(\frac{h}{a}\right) + 0.97 \quad (1.33)$$

**sphère se déplaçant parallèlement à une surface** Faxen [9] a donné un développement asymptotique du facteur correcteur en fonction de la distance relative de la sphère à la paroi lorsque la sphère est assez loin du plan :

$$K = \left[ 1 - \frac{9}{16} \frac{a}{h} + \frac{1}{8} \frac{a^3}{h^3} - \frac{45}{256} \frac{a^4}{h^4} - \frac{1}{16} \frac{a^5}{h^5} + \dots \right]^{-1} \quad (1.34)$$

Dans le même esprit, Faxen et Dahl [10] ont étudié le déplacement d'une sphère parallèlement à une surface plane non contrainte.

Haberman et Sayre [17] ont étudié cette situation avec comme surface la paroi d'un cylindre rigide. Ils donnent pour le facteur correcteur :

$$K = 1 + 2.105 \frac{a}{R} \quad (1.35)$$

Finalement, Goldman et al [12, 13] ont complété l'étude de Faxen en traitant le cas où la sphère est proche d'un plan infini.

$$K = -\frac{8}{15} \ln(h/a) + 0.9588 \quad (1.36)$$

La valeur limite (sphère au contact) est en bon accord avec les résultats de O'Neill [6].

**sphère s'approchant d'une paroi avec un orifice** La traînée s'exerçant sur une sphère se déplaçant dans l'axe d'un orifice circulaire de longueur finie a été étudié par Dagan et al [4]. Les auteurs ont déterminé dans un premier temps, par l'introduction de séries infinies, l'écoulement généré par le déplacement de la sphère et par la suite, la modification de l'écoulement due à la présence de la sphère lorsque celle-ci est immobile. Ils donnent, pour ces deux cas, le facteur correcteur à la force de Stokes.

Par la suite, Yan et al [25] ont généralisé les travaux de Dagan et al [4] au problème tridimensionnel.

Ils donnent les différents facteurs correcteurs pour une sphère se déplaçant dans n'importe quelle direction, dans un fluide au repos, au-dessus d'un écran mince comportant un trou circulaire. Par ailleurs, ils donnent également les facteurs correcteurs à la force de Stokes lorsque la sphère est immobile mais plongée dans un écoulement de Sampson.

**Sphère s'approchant d'un obstacle poreux** Michalopoulo et al [20] se sont intéressés à une sphère s'approchant d'un obstacle perméable. En utilisant une méthode de séparation des variables et des coordonnées adaptées à leur géométrie, ils ont déterminé le facteur correcteur à la force de Stokes s'appliquant sur la sphère.

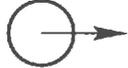
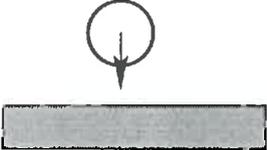
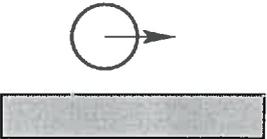
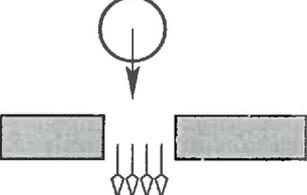
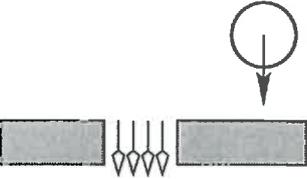
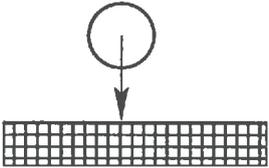
Cas étudié	Auteurs
	Stokes
	Brenner Cox et Brenner
	Faxen Faxen et Dahl Hamberman et Sayre Goldman O'Neill
	Dagan et al
	Yan et al
	Michalopoulo

FIG. 1.2 – Récapitulatif des cas hydrodynamiques présentés, avec leurs auteurs

### Autres Forces

Dès que l'inertie du fluide ou de la particule n'est plus négligeable, il convient d'introduire des forces supplémentaires, notamment la force de portance.

Vasseur et Cox [24] ont montré qu'une particule sphérique, dans un écoulement cisailé, subissait une migration latérale. Par la suite, Cherukat et McLaughlin [2], puis Krishnan et Leighton [19] ont donné la force de portance pour une particule en mouvement dans un écoulement cisailé. Dans le cas d'une sphère immobile au contact de la paroi, ils donnent :

$$F_L = 9.257\rho U^2 a^2 \quad (1.37)$$

où  $U$  est la vitesse de l'écoulement non perturbé à une hauteur de la paroi égale à un rayon de sphère  $a$ .

On peut également tenir compte de l'histoire de la particule en introduisant la force de Basset.

De plus, lorsque l'inertie de la particule ne peut plus être négligée, il convient de tenir compte de la force de masse ajoutée. En effet, dans son déplacement, la particule entraîne autour d'elle un certain volume du fluide qui l'entoure. La force de masse ajoutée tient compte de l'inertie que possède ce volume fluide.

## 1.3 Conclusion

Lors de l'étude d'un problème de trajectoire de particules avec une approche Lagrangienne, il est nécessaire de bien évaluer les différents phénomènes qui entrent en jeu.

La géométrie du domaine, les symétries éventuelles et la dimension de l'espace vont conditionner, en grande partie, le type de formulation choisi pour exprimer les équations qui régissent le mouvement du fluide.

Les forces qui s'appliquent à une particule sont nombreuses et sont parfois difficiles à déterminer précisément.

Il est cependant possible d'estimer a priori l'ordre de grandeur des forces en présence. La connaissance de paramètres comme la taille des particules, le régime de l'écoulement ou des matériaux en présence permet d'évaluer les forces.

Il conviendra, dans un premier temps, de déterminer l'ordre de grandeur des différentes forces afin de ne conserver ensuite pour les calculs que les plus significatives.

# Bibliographie

- [1] H. Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chem. Eng. Sci.*, 16:242, 1961.
- [2] P. Cherukat and J. B. Mc Laughlin. The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall. *J. Fluid Mech.*, 263:1–18, 1994.
- [3] R. G. Cox and H Brenner. The slow motion of a sphere through viscous fluid towards a plane surface. *Chem. Eng. Sci.*, 22:1753–1777, 67.
- [4] Z. Dagan, S. Weinbaum, and R Pfeffer. General theory for the creeping motion of a finite sphere along the axis of a circular orifice. *J. Fluid Mech.*, 117:143–170, 1982.
- [5] B. V. Derjaguin and L. D. Landau. Theory of the stability of strongly charged lyophobic sols and of the adhesion of strongly charged particles in solution of electrolytes. *Acta Physicochim. URSS*, 14:733–762, 1941.
- [6] O’Neill M. E. A spher in contact with a plane wall in a slow linear shear flow. *Chem. Eng. Scie.*, 23:1293–1298, 1968.
- [7] M. Elimelech, J. Gregory, X. Jia, and R. Williams. *Particle deposition and aggregation: measurement, modelling and simulation*. Butterworth Heinemann, Oxford, 1995.
- [8] Dominique Elzo. *Etude théorique et expérimentale de l’adhésion de particules de taille micronique sur une surface plane*. PhD thesis, I.N.P.T., 1994.
- [9] H. Faxen. The resistance to the motion of a solid sphere in a viscous liquid enclosed between parallel walls. *Ann. Physik*, 68:89, 1922.
- [10] H. Faxen and H. Dahl. Mutual action of two spheres falling in a viscous liquid. *Arkiv Mat. Astron. Fys.*, 19A:13, 1925.

- [11] Ivone Gohr-Pinheiro. *Transport et dépôt de particules en milieu poreux: de l'échelle du pore à l'échelle macroscopique*. PhD thesis, I.N.P.T., 1996.
- [12] A. Goldman, R. Cox, and H. Brenner. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall – i. motion through a quiescent fluid. *Chem. Eng. Sci.*, 22:637–651, 1967.
- [13] A. Goldman, R. Cox, and H. Brenner. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall – ii. couette flow. *Chem. Eng. Sci.*, 22:653–660, 1967.
- [14] Gouy. . *Journ. de Phys.*, 9:457, 1910.
- [15] D. C. Grahame. The electrical double layer and the theory of electrocapilarity. *Chem. Rev.*, 41:441–501, 1947.
- [16] J. Gregory. The calculation of hamaker constants. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2:396–417, 1969.
- [17] W. Haberman and R. M. Sayre. Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes. Technical Report 1143, US Navy Department, Washinton D.C., 1958.
- [18] Helmholtz. . *Wied Ann.*, 7:337, 1879.
- [19] G. P. Krishnan and D. T. Leighton. Inertial lift on a moving sphere in contact with a plane wall in a shear flow. *Phys. Fluids*, 7(11):2538–2545, 1995.
- [20] A. C. Michalopoulos, V.N. Burganos, and A. C. Payatakes. Creeping axisymmetric flow around a solid particle near a permeable obstacle. *AIChE*, 38:1213, 1992.
- [21] Ruckenstein and Prieve. adsorption and desorption of particle and their chromatographic separation. *AIChE*, 22:276–283, 1976.
- [22] L. Spielman and P. M. Cukor. Deposition of non-brownian particles under colloidal forces. *J. Coll. Int. Sci.*, 1:43–51, 1973.
- [23] Stern. . *Z. Electrochem.*, 30:508, 1924.
- [24] P. Vasseur and Cox R. G. The lateral migration of spherical particle in two dimensional shear flow. *J. Fluid Mech.*, 78:385, 1976.

- [25] Z-Y. Yan, S. Weinbaum, P. Ganatos, and R. Pfeffer. The three-dimensional hydrodynamic interaction of a finite sphere with a circular orifice at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 174:39, 1987.

## Chapitre 2

# Dépôt de particules en filtration en masse

## 2.1 Introduction

Le transport de particules en milieux poreux entre en jeu dans de nombreuses applications industrielles. Il intervient notamment dans des problèmes de pollution des sols, dans la récupération pétrolière et, en ce qui nous concerne plus particulièrement, dans la filtration de masse. Dans tous les cas, de fines particules en suspension dans l'écoulement peuvent être capturées par la partie solide de la matrice poreuse. Ce dépôt génère principalement deux sources de nuisances.

La première résulte de l'accumulation de particules dans une zone restreinte. Ainsi, on obtient localement une augmentation significative de la concentration en particules. La rupture d'une certaine homogénéité en concentration peut introduire une pollution importante des sols.

La deuxième nuisance découle de la première, en ce sens que l'accumulation de particules peut impliquer une réduction importante de la perméabilité du milieu. On peut en effet assister au colmatage d'un certain nombre de canaux.

### 2.1.1 Bibliographie

De nombreuses études expérimentales ont été effectuées afin de déterminer l'évolution de paramètres macroscopiques au cours d'un processus de filtration. A l'échelle du pore, quelques études ont permis, en utilisant des milieux poreux modèles [7, 8, 12, 13], de montrer que les phénomènes locaux de capture dépendaient de la nature et de la taille des particules, de la composition du fluide, ainsi que du débit.

De nombreux modèles ont été proposés pour simuler l'écoulement de suspensions en milieux poreux. Les revues bibliographiques de Tien et Payatakes [20] et Rege et Folder [17] donnent un bon aperçu des différentes possibilités pour traiter le sujet. Ces différentes méthodes peuvent être classées en quatre catégories :

- empirique,
- analyse de Trajectoires,
- stochastique,
- réseaux.

Les modèles empiriques (Ives [9]) considèrent le milieu poreux comme une boîte noire dans laquelle les particules se déposent en suivant une loi macroscopique.

L'analyse des trajectoires (Payatakes et al [14]) représente le milieu poreux comme une succession d'obstacles pouvant capturer les particules. L'étude se fait à l'échelle du pore et tient compte de toutes les forces qui entrent en ligne de compte. Ainsi, il est possible de dégager des valeurs pour l'efficacité de capture.

Les modèles stochastiques (Fan et al [3]) utilisent une approche probabilistique pour tenir compte du blocage des pores.

Les modèles de réseaux utilisent une marche aléatoire, liée à la répartition de l'écoulement dans les canaux, pour le déplacement des particules dans le milieu poreux (Leitzelment et al [10], Rege et Fogler [16, 17]). Récemment, Schmitz et al [19] ont proposé des modèles de réseaux basés sur des micro-modèles expérimentaux, afin d'analyser des écoulements de suspensions en milieux poreux.

Dans tous les cas, les expressions de l'efficacité de capture locale, utilisées dans les modèles numériques, sont en général simplifiées. En effet, le calcul d'un écoulement de suspension, et des phénomènes de dépôt qui en résultent, est assez délicat dans le cas d'un milieu poreux réel.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au transport et à la capture de particules non browniennes dans un milieu poreux modèle. L'étude présentée s'appuie sur les travaux expérimentaux réalisés par Gohr-Pinheiro [6] et Dufreche [2].

La géométrie choisie pour modéliser le milieu poreux découle des travaux de Schmitz et al [19], ainsi que de ceux de Gohr-Pinheiro. Nous allons plus particulièrement caractériser :

- les différents modes de capture,
- l'efficacité de capture à l'échelle du pore,
- la position des points d'impacts des particules sur la matrice solide. Ainsi, nous en déduirons la position des dépôts de particules sur les grains du milieu poreux.
- la forme des dépôts obtenus.

### 2.1.2 Présentation des résultats expérimentaux

L'expérience réalisée par Gohr-Pinheiro [6] et Dufreche [2] consiste à générer l'écoulement d'une suspension à travers un milieu poreux modèle. Une partie des particules en suspension, migrant dans le milieu, est interceptée par les parois de la matrice solide. Les dépôts créés modifient les caractéristiques géométriques du milieu. L'évolution de la perméabilité et de la surface déposée ont été étudiées.

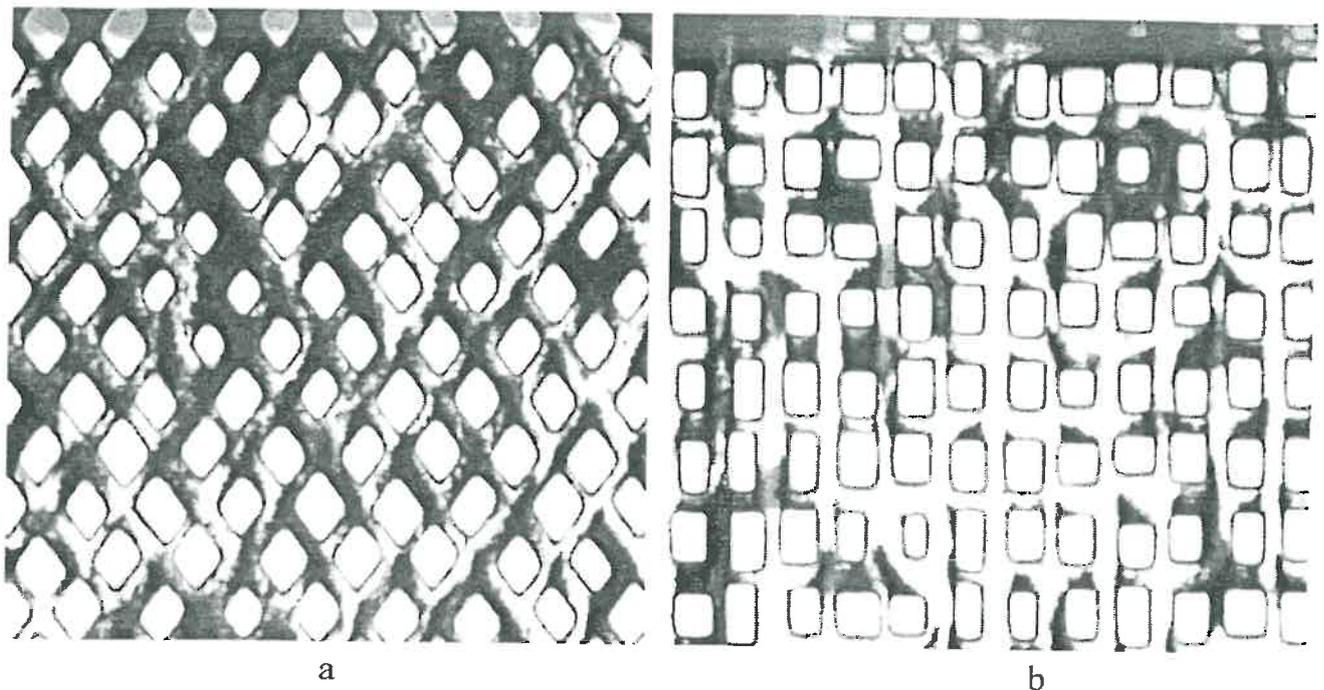


FIG. 2.1 – Visualisation de l'expérience de Dufreche [2]

Le milieu poreux modèle est un micro-modèle en résine transparente constitué d'un ensemble de canaux interconnectés. Comme on peut le voir sur la Figure 2.1, l'intersection de 4 canaux définit un pore et l'ensemble des pores du micro-modèle sont placés périodiquement dans les deux directions. La distance entre pores est constante et égale à 1 mm. Le micro-modèle comprend environ 15000 canaux dont la largeur est répartie en sept classes (de 0.1 à 0.6 mm) suivant une distribution log-normale. Les micro-modèles sont construits selon la technique exposée par Lenormand et al [11]. Différentes orientations des canaux par rapport à la verticale ont été envisagées ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ ).

Le dispositif expérimental est décrit sur la Figure 2.2. Les particules sont initialement stokées dans un réservoir d'alimentation (1). L'écoulement dans le micro-modèle (4) est imposé par deux vases à niveau constant (2 et 3). Le fluide en sortie est pesé par une balance électronique (5). Le système d'observation comprend une caméra CCD (6) munie d'un objectif à fort grossissement. Les images obtenues sont enregistrées sur ordinateur (7) en vue d'un traitement d'image ultérieur.

La suspension est composée de particules de Rilsan de taille moyenne égale à 0.03mm. Les particules ont la même densité que l'eau. La concentration de la solution est de 1g/l.

La Figure 2.3 donne un exemple des résultats obtenus par Gohr-Pinheiro [6]. La Figure montre que l'évolution de la perméabilité globale du milieu au cours de la formation du

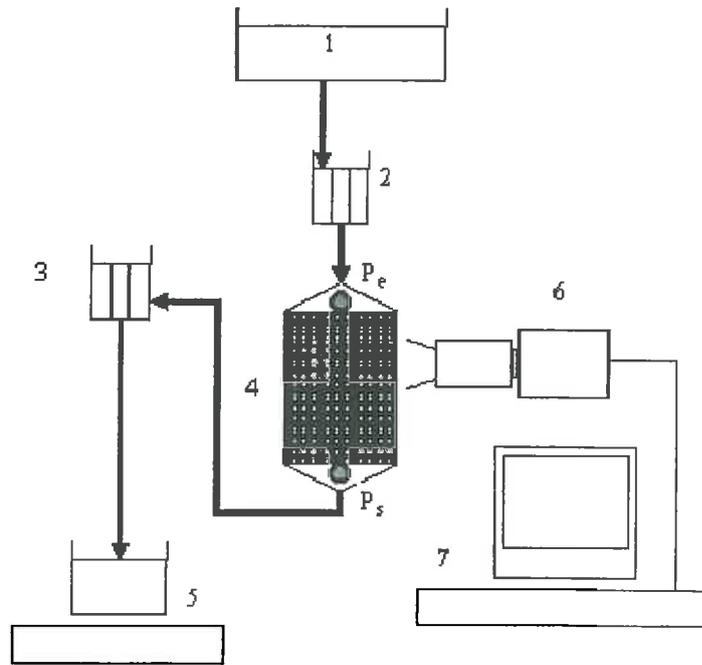


FIG. 2.2 – Dispositif de l'expérience de Dufreche [2]

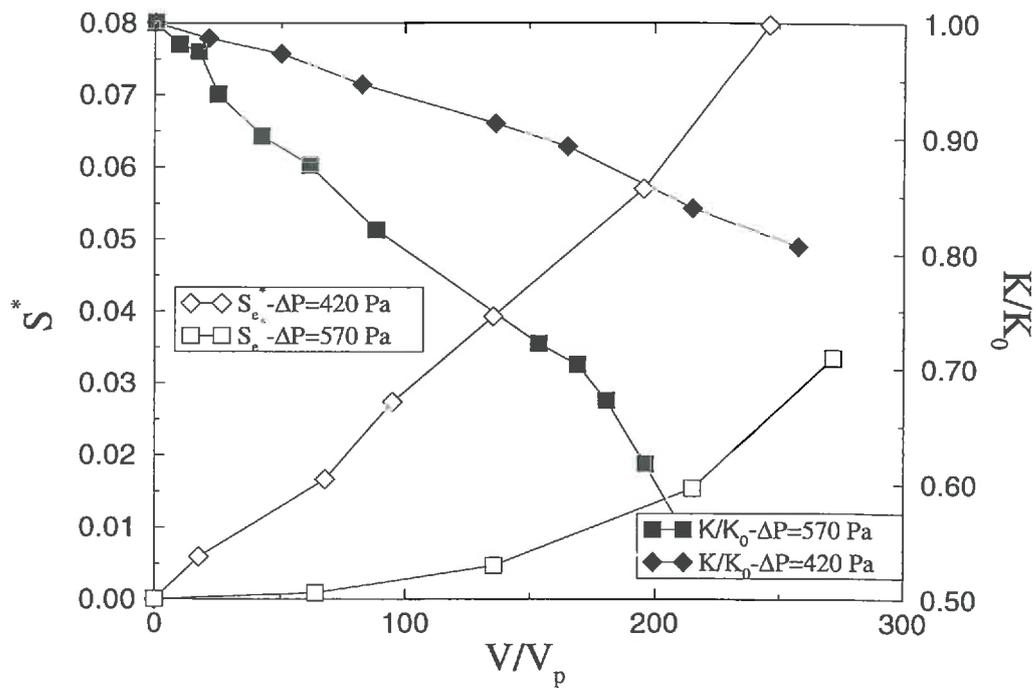


FIG. 2.3 – Perméabilité et surface apparente déposée en fonction du nombre de volumes de pore injectés = canaux à 45°

dépôt dépend de la différence de charge imposée de part et d'autre du micro-modèle.

### 2.1.3 Ordre de grandeur des forces rencontrées

Diverses forces s'appliquent sur une particule en suspension à proximité d'une paroi, la plupart ont été répertoriées dans le premier chapitre.

L'intensité des forces présentes dans l'écoulement dépend essentiellement de la taille des particules.

Dans ce chapitre, les particules ont la même densité que le fluide porteur. Les forces liées à des champs extérieurs sont ainsi négligées. La diffusion brownienne est négligeable comparée au mouvement convectif, puisque le nombre de Péclet  $Pe = 6\pi\kappa U d^2 / kT$  est de l'ordre de  $10^{12}$ .

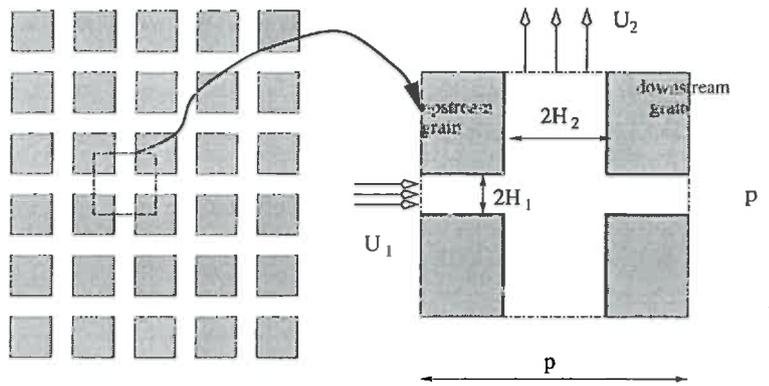
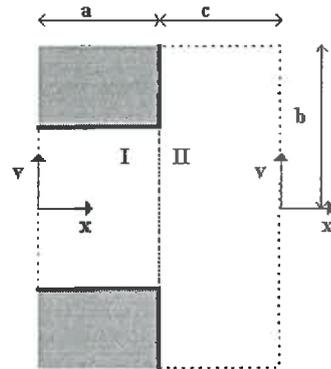
Les forces physico-chimiques et les forces hydrodynamiques sont les forces dominantes prises en compte dans ce chapitre.

Lorsque la particule est loin des parois, les forces physico-chimiques peuvent être négligées. En effet, les potentiels zeta des particules de Rilsan et de la résine du micromodèle sont respectivement de 7.6 mV et de -8mV, la force ionique est égale à  $10^{-2} M/l$ . Ces valeurs conduisent à une force de double couche d'intensité égale à  $10^{-50} N$ . De plus, en choisissant une sphère éloignée de  $10^{-3} mm$  de la paroi, et en prenant  $10^{-2} m/s$  comme vitesse du fluide dans un canal, on trouve que la force hydrodynamique qui s'applique sur la particule est 1000 fois plus importante que la force de Van der Waals.

Cependant, comme l'indiquent Ghidaglia et al [5], lorsque la particule est à proximité de la paroi, les forces physico-chimiques deviennent très importantes et ne peuvent plus être négligées.

La prise en compte des effets physico-chimiques sera faite par l'introduction d'une distance de capture  $e$ . Lorsque une particule se trouve à une distance inférieure à la distance de capture de la paroi, nous considérons que les efforts physico-chimiques sont bien plus importants que les efforts hydrodynamiques. La particule est alors définitivement capturée par la partie solide du milieu poreux.

Le nombre de Stokes  $N_{St} = \rho_p U D_p^2 / 18\kappa H$  caractérise l'inertie de la particule. Dans le cas des expériences menées par Schmitz et al [18], la vitesse caractéristique  $U$  dans les canaux est de l'ordre de  $10^{-2} m/s$  et la taille des canaux  $H$  est de l'ordre de 0.5 mm. Ces valeurs donnent un nombre de Stokes de l'ordre de  $10^{-3}$  et conduisent également à un nombre de Reynolds  $R_e$  dans les canaux de l'ordre de  $10^{-2}$ , ce qui justifie l'hypothèse d'écoulement rampant. L'inertie de la particule est donc faible. Cependant, vu que les

FIG. 2.4 – *Domaine Physique*FIG. 2.5 – *Domaine de calcul*

résultats expérimentaux de Gohr-Pinheiro [6] montrent une sensibilité non linéaire des paramètres macroscopiques à l'intensité du débit (Figure 2.3), nous déterminerons l'effet de cette faible inertie sur la formation des différents types de dépôts.

## 2.2 Modélisation numérique

On considère un arrangement bidimensionnel, périodique dans les deux directions, de grains rectangulaires. La géométrie utilisée est représentée sur la Figure 2.4. La distance entre les centres des pores est constante et notée  $p$ . Le domaine est constitué de l'intersection de deux canaux de tailles différentes. Les demi-largeurs des canaux sont notées  $H_1$  et  $H_2$ . Cette géométrie constitue une modélisation du milieu poreux. Les dimensions caractéristiques du domaine sont comparables à celles rencontrées dans les micro-modèles en résine, utilisés par Schmitz et al [18] et Gohr-Pinheiro [6].

### 2.2.1 Écoulement

En supposant que l'écoulement dans le micro-modèle est Darcéen, l'écoulement à l'échelle du pore est solution des équations de Stokes. Dans notre étude, l'écoulement est induit par une vitesse moyenne macroscopique qui n'est, en général, pas parallèle à l'un des deux axes principaux. On note  $Q_1$  et  $Q_2$  les débits dans les directions principales du micro-modèle. Le rapport de débit dans ces deux directions principales permet de définir le rapport d'anisotropie  $r = \frac{Q_2}{Q_1}$  du milieu. Le rapport de débit s'exprime également en fonction du rapport de tailles des canaux  $h = \frac{H_2}{H_1}$  et du rapport de vitesses  $u = \frac{U_2}{U_1}$ . On obtient ainsi pour le rapport d'anisotropie la relation  $r = u \cdot h$ . De par la linéarité des équations de Stokes, le problème général se décompose en deux problèmes indépendants de même nature. Chacun correspond à l'écoulement, dans le même domaine, forcé par une vitesse macroscopique moyenne  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) parallèle à l'un des deux axes. La solution du problème initial est alors obtenue par superposition des deux problèmes simplifiés.

Le calcul de l'écoulement est donné par Wang [1]. Les équations de Stokes, exprimées avec la fonction de courant  $\Psi$ , se résument à :

$$\nabla^4 \Psi = 0 \tag{2.1}$$

Les conditions limites associées à cette équation sont :

- l'écoulement est périodique dans les deux directions spatiales,
- un débit moyen est imposé suivant une certaine direction,
- une condition de non glissement est imposée à la paroi de la matrice solide.

En terme de fonction de courant, cela se traduit par une condition de Dirichlet à laquelle on ajoute une condition de dérivée normale nulle. La périodicité est respectée par le choix d'une fonction de courant périodique.

Par symétrie, le domaine de calcul peut être ramené à un domaine plus simple en forme de T, comme le montre la Figure 2.5. Le domaine ainsi simplifié est constitué de deux régions rectangulaires  $I$  et  $II$ . La solution générale,  $\Psi_I$  et  $\Psi_{II}$ , de 2.1 dans chacune des deux régions s'obtient en utilisant une méthode de séparation des variables. Les conditions limites sur le contour des régions sont les mêmes que celles du problème complet, auxquelles il faut ajouter une condition de raccordement  $C^3$  à la frontière commune. Les détails de la méthode de résolution et l'expression de  $\Psi_I$  et  $\Psi_{II}$  sont données en Annexe A à partir de l'article de Wang [1] où quelques erreurs typographiques ont été corrigées.

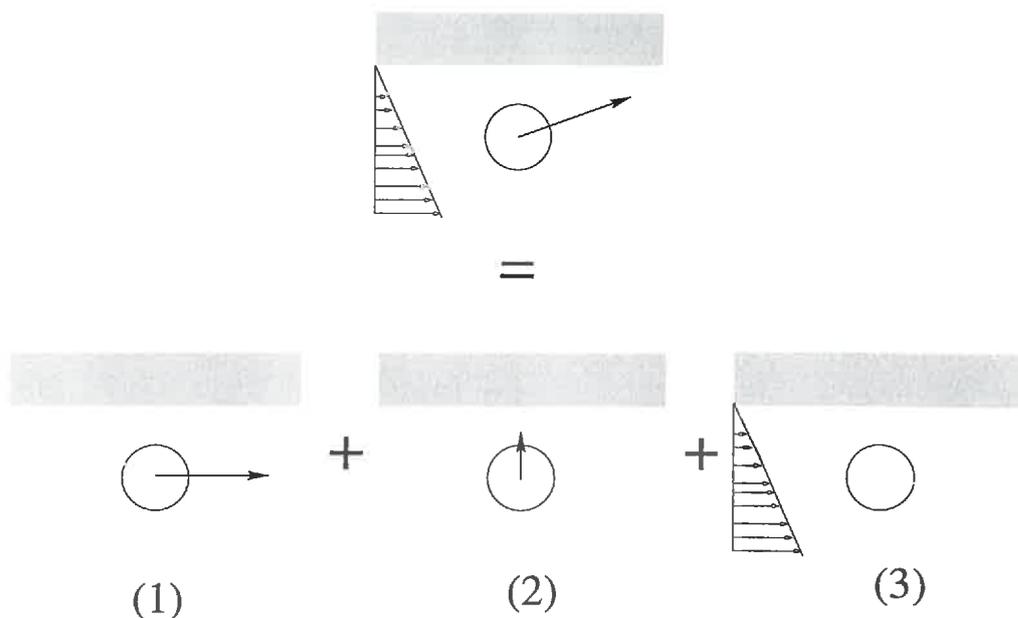


FIG. 2.6 – Décomposition de la force hydrodynamique

## 2.2.2 Trajectoire de particule

Le calcul des trajectoires de particules s'obtient à partir de la relation fondamentale de la dynamique :

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \sum \mathbf{F} \quad (2.2)$$

où  $m_p$  est la masse de la particule,  $\mathbf{u}_p$  sa vitesse et  $\mathbf{F}$  l'ensemble des forces qui s'appliquent à la particule.

Ce chapitre ayant pour objectif de déterminer le rôle de l'hydrodynamique sur le dépôt de particules, nous ne conserverons dans le calcul direct des trajectoires que la force de traînée,  $\mathbf{F}_h$ .

$$\mathbf{F}_h = 3\pi\kappa D_p (\underline{K}_1(\mathbf{x}_p)\mathbf{u} - \underline{K}_2(\mathbf{x}_p)\mathbf{u}_p) \quad (2.3)$$

où  $\kappa$  est la viscosité du fluide,  $D_p$  le diamètre de la particule sphérique,  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide,  $\mathbf{u}_p$  la vitesse de la particule,  $\underline{K}_1$  et  $\underline{K}_2$  les facteurs correcteurs à la force de Stokes.

Comme le montre la Figure 2.6, la force de Stokes, par linéarité des équations, peut être décomposée en 3 problèmes plus simples déjà traités (cf Chapitre 1).

Le facteur correcteur tensoriel  $\underline{K}_1$  correspond au cas d'une particule sphérique immobile dans un écoulement de Poiseuille entre plaques parallèles.

Le facteur correcteur tensoriel  $\underline{K}_2$  possède deux composantes. La première est donnée par le cas d'une sphère se translatant perpendiculairement à une plaque infinie dans un fluide au repos à l'infini. La deuxième tient compte de la translation de la sphère parallèlement au plan. Ces composantes sont inversées lorsque la particule passe d'un canal horizontal à un canal vertical (les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  restant les mêmes).

L'ensemble des forces physico-chimiques qui agissent sur la particule a une faible portée. La prise en compte de ces forces est obtenue par l'introduction d'une distance de capture  $e$ . Lors du calcul de trajectoire, quand une particule arrive à une distance de la paroi inférieure à la distance de capture, elle est définitivement stoppée.

Lorsque la densité des particules est supérieure à celle du fluide, l'inertie des particules peut jouer un rôle. Dans ce cas, les effets liés à la gravité interviennent. Cependant, afin de ne mettre en évidence que l'influence de l'inertie, nous les négligerons.

Afin d'adimensionner le problème, on choisit comme grandeur de référence,  $U_1$  pour les vitesses et  $H_1$  pour les longueurs. On obtient comme variables sans dimension :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_p &= \mathbf{u}_p/U_1 \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}/U_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{x}_p/H_1 \\ \tilde{t} &= t.U_1/H_1\end{aligned}\tag{2.4}$$

Les équations qui régissent les trajectoires des particules, exprimées sous formes adimensionnelles, deviennent :

$$N_{St} \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \underline{K}_1(\mathbf{x}_p)\mathbf{u} - \underline{K}_2(\mathbf{x}_p)\mathbf{u}_p\tag{2.5}$$

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p\tag{2.6}$$

Dans ces équations les "'' ont été omis. Le nombre sans dimension  $N_{St}$  est le nombre de Stokes qui caractérise l'effet d'inertie. On a :

$$N_{St} = \rho_p U_1 D_p^2 / 18\kappa H_1\tag{2.7}$$

Les équations 2.5 et 2.6 sont résolues par une méthode de Runge-Kutta, à l'ordre 4, avec un pas de temps dépendant du nombre de Stokes  $N_{St}$ , afin d'obtenir la meilleure précision. En pratique, le pas de temps est choisi égal à  $\frac{1}{2}N_{St}$ . De plus, lorsque la particule est à une distance de la paroi où elle est susceptible d'être capturée, son déplacement est annulé et le calcul de la trajectoire est repris à l'itération précédente avec un pas de temps

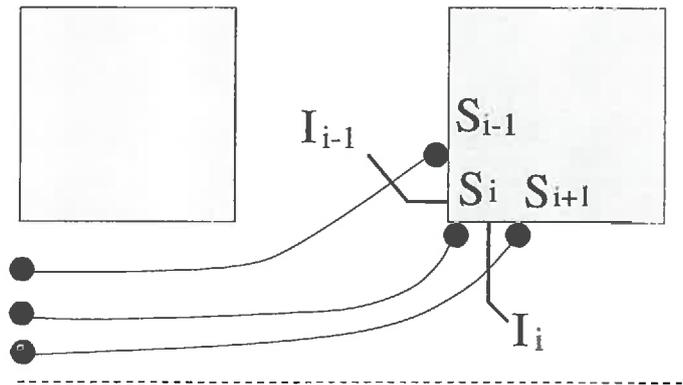


FIG. 2.7 – Points d'impact dans le cas général

10 fois plus petit. Ce raffinement n'est pas dû à un problème de précision de la méthode de Runge-Kutta, mais il permet de déterminer plus précisément la position de la particule au moment de la capture.

Les particules pénètrent dans le domaine par la section d'entrée du canal horizontal. Elles sont initialement uniformément réparties sur toute la section d'entrée. La zone proche de la paroi, d'épaisseur égale à un rayon de particule augmenté de la distance de capture, qui conduirait à un impact immédiat est exclue de la zone de départ. Leur vitesse est prise égale à la vitesse du fluide à leur point de départ respectif.

### 2.2.3 Efficacité de capture

Les particules peuvent se déposer sur deux grains différents (Figure 2.7) :

- le grain amont, le plus proche de la section d'entrée,
- le grain aval, le plus éloigné.

Les observations expérimentales montrent que les mécanismes de dépôt de particules diffèrent en fonction du grain sur lequel s'effectue le dépôt. De ce fait, nous déterminons l'efficacité de capture de chacun des grains. L'efficacité de capture est le taux de particules qui se déposent sur un obstacle par rapport au nombre initial de particules. Les valeurs de l'efficacité de capture étant relativement faibles dans le cas étudié, nous utilisons une technique de raffinements successifs pour obtenir une bonne précision. Le choix de  $n$  positions initiales et le calcul des  $n$  trajectoires correspondantes donnent  $n$  points d'impact sur le contour du domaine. L'élimination des trajectoires, qui aboutissent à des points d'impact loin du grain étudié, permet de redéfinir l'intervalle de la section d'entrée correspondant

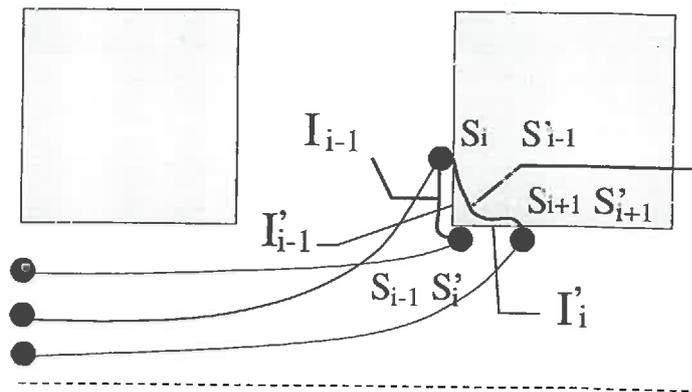


FIG. 2.8 – Points d'impact dans le cas avec recouvrement

aux points de départ des trajectoires. Les raffinements successifs sont effectués jusqu'à ce que tous les points d'impacts soient suffisamment proches du grain choisi. Ainsi, les particules appartenant à l'intervalle de départ se déposent sur le grain. Finalement, l'efficacité de capture est donnée par le rapport entre la longueur de l'intervalle initial obtenu et la largeur de la section d'entrée.

#### 2.2.4 Densité de probabilité de capture sur un grain

Nous nous intéressons ici à la répartition spatiale des points d'impact sur un grain. Nous déterminons la densité de probabilité de capture  $dP(S)$  en fonction de l'abscisse curviligne  $S$ , le long du contour du domaine. L'origine de l'abscisse curviligne,  $S = 0$ , correspond au coin du grain.

##### Cas général

La densité de probabilité de capture est calculée en utilisant  $n + 1$  trajectoires. Nous choisissons  $n + 1$  points uniformément répartis dans la section d'entrée. Le calcul de chaque trajectoire donne un point d'impact d'abscisse curviligne  $S_i$  sur le contour du domaine. Les  $n + 1$  points initiaux étant uniformément répartis, les  $n + 1$  points d'impact divisent le grain en  $n$  segments  $I_i = [S_i, S_{i+1}]$  équiprobables (Figure 2.7). C'est-à-dire que :

$$P(S_i < s < S_{i+1}) = \frac{1}{n} \quad (2.8)$$

Par définition, la densité de probabilité  $dP(S)$  correspond à la probabilité qu'à un point d'impact d'être entre  $S$  et  $S + dS$ . Soit :

$$dP(S) = P(S < s < S + dS) \quad (2.9)$$

Si l'on suppose que la densité de probabilité est constante par élément, on a :

$$\forall S \in I_i, P(S < s < S + dS) = \alpha, \quad (2.10)$$

Mais comme

$$\int_{S_i}^{S_{i+1}} P ds = \frac{1}{n} = \alpha(S_{i+1} - S_i), \quad (2.11)$$

on trouve finalement que la densité de probabilité est directement donnée par la longueur de l'intervalle entre deux points d'impact successifs :

$$\forall S \in I_i, dP(S) = \frac{1}{n} \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \quad (2.12)$$

### Cas avec recouvrement

Les résultats précédents ne sont valables que tant que les trajectoires de particules ne se coupent pas (Figure 2.8). Dans ce cas, certains segments  $I_i$  peuvent se recouvrir. Il faut alors classer les points d'impact  $S_i$  en fonction de l'abscisse curviligne, de telle sorte que la suite  $(S_i)_{i \in [1, n]}$  soit une suite monotone. Les points d'impact ainsi classés sont notés  $S'_i$ . On note de même  $I'_i = [S'_i, S'_{i+1}]$ , les intervalles correspondants. Chaque intervalle  $I'_i$  est l'intersection d'un certain nombre d'intervalles initiaux.

$$I'_i = \bigcup_{j \in E'_i} I_j \cap I'_i \quad (2.13)$$

où

$$E'_i = \{j \in [1, n], I'_i \subset I_j\} \quad (2.14)$$

De ce fait, la probabilité qu'a un point d'impact d'appartenir à un intervalle classé est :

$$P(s \in I'_i) = \sum_{j \in E'_i} P(s \in I_j \cap I'_i) \quad (2.15)$$

avec :

$$P(s \in I_j \cap I'_i) = \int_{I_j \cap I'_i} P(S < s < S + dS) ds = \|I_j \cap I'_i\| \frac{1}{n} \frac{1}{S_{j+1} - S_j} \quad (2.16)$$

Par définition de  $E'_i$ , l'intervalle  $I'_i$  est inclus dans  $I_j$ , si  $j \in E'_i$ , et :

$$\|I_j \cap I'_i\| = S'_{i+1} - S'_i \quad (2.17)$$

La probabilité d'appartenir à un intervalle classé est :

$$P(s \in I'_i) = \frac{1}{n} (S'_{i+1} - S'_i) \sum_{j \in E'_i} \frac{1}{S_{j+1} - S_j} \quad (2.18)$$

Finalement, si l'on suppose constante la densité de probabilité sur un intervalle classé, on trouve :

$$\forall S \in I'_i, dP(S) = \frac{1}{n} \sum_{j \in E'_i} \frac{1}{S_{j+1} - S_j} \quad (2.19)$$

### 2.2.5 Visualisation des dépôts

Afin de pouvoir comparer l'allure des dépôts obtenus numériquement et ceux obtenus expérimentalement par Schmitz et al [18] et Gohr-Pinheiro [6], nous construisons, à partir de la densité de probabilité de capture le long d'un grain, le dépôt correspondant.

Au début de la formation d'un dépôt, celui-ci ne perturbe que très peu l'écoulement. Nous supposons alors que le dépôt va, en un point donné, croître proportionnellement à la densité de capture correspondante en ce point. De plus, on suppose que le dépôt résulte de l'accumulation de particules qui arrivent sur le grain avec la même orientation. La croissance du dépôt se fera dans la direction opposée à celle de la vitesse de la particule impactante.

## 2.3 Résultats numériques

Nous avons étudié la formation de dépôts de particules sur les grains du milieu poreux pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie  $r$  et pour différentes valeurs du nombre de Stokes  $N_{St}$ . Pour des raisons de simplicité, les particules pénètrent dans le domaine uniquement par la section d'entrée du canal horizontal. Dans le cas réel, les particules entrent à la fois par le canal horizontal et le canal vertical. Les dépôts qui en résultent peuvent être obtenus par superposition des cas correspondant.

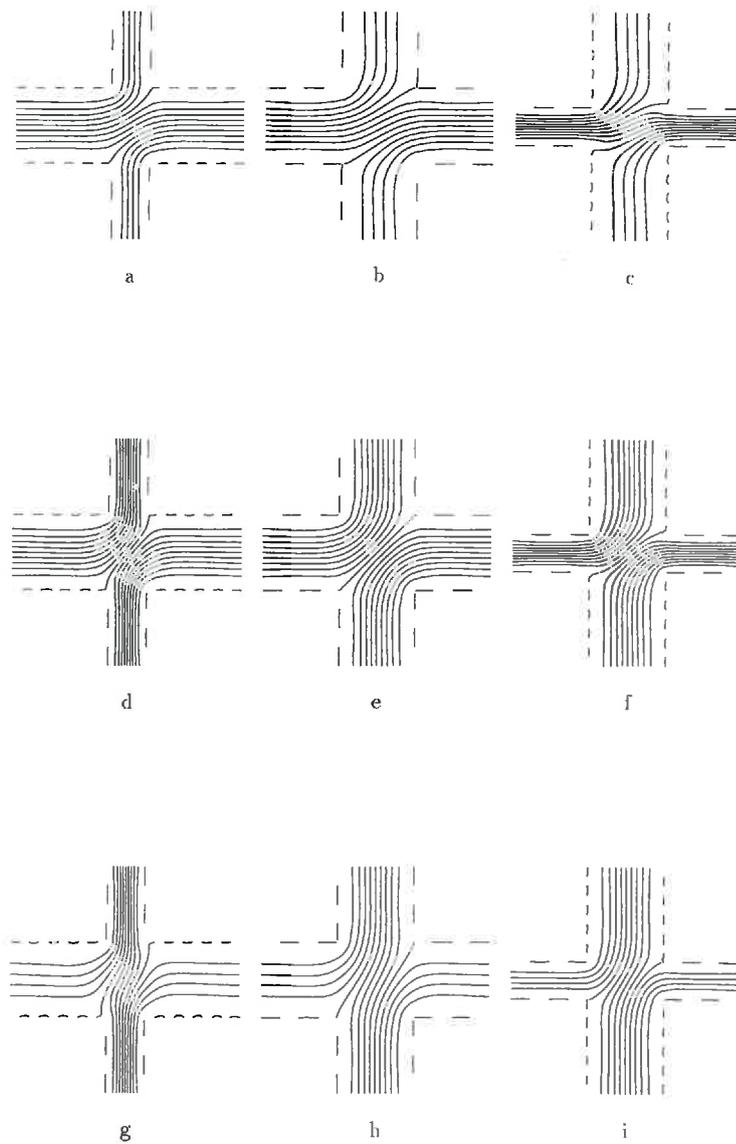


FIG. 2.9 – Lignes de courant dans le pore pour les différents cas étudiés

		$h$		
		$1/2$	$1$	$2$
	$1/2$	$2/2$	$2/1$	$4/1$
$r$	$1$	$1/2$	$1/1$	$2/1$
	$2$	$1/4$	$1/2$	$2/2$

TAB. 2.1 – valeurs de  $U_2/U_1$  étudiées en fonction du rapport de débits  $r$  et du rapport de tailles des canaux  $h$

### 2.3.1 Lignes de courant

Bien que les trajectoires des particules ne soient pas identiques aux lignes de courant, leur observation fournit une première approche qualitative simple. De plus, leurs comportements sont similaires tant que l'inertie est faible et que les particules sont suffisamment loin de la paroi. L'analyse des lignes de courant permet de mettre en évidence certains mécanismes de capture.

La Figure 2.9 montre les lignes de courant obtenues pour les différents cas étudiés. Les valeurs correspondantes du rapport de débit  $r$  et du rapport de taille de canal  $h$  sont données dans la Table 2.1. Dans tous les cas, il existe une ligne de partage de l'écoulement, qui sépare le domaine en deux régions : une est mouillée par le fluide provenant de l'entrée du canal horizontal (celui d'où proviennent les particules), l'autre de l'entrée du canal vertical (sans particule). Cette ligne, séparant une région contenant des particules d'une région sans particule, va probablement jouer un rôle important dans la formation des dépôts. Les résultats présentés sur la Figure 2.9 mettent en évidence la dépendance de la forme de la ligne de séparation avec le rapport de débit  $r$  et le rapport de taille de canaux  $h$ .

Lorsque  $r = 1$  (cas d, e, f), le débit est le même dans chaque canal d'entrée. La ligne de séparation relie le coin des grains opposés. Tout le fluide provenant du canal horizontal sort par le canal vertical.

Lorsque  $r > 1$  (cas g, h, i), celui provenant du canal horizontal sort entièrement par le haut du canal vertical, alors que le fluide provenant du bas du canal vertical sort à la fois par le canal horizontal et le canal vertical.

Au contraire, lorsque  $r < 1$  (cas a, b, c), le fluide provenant du canal horizontal se répartit dans les deux sorties possibles.

A partir de ces observations, nous pouvons pressentir différents types de mécanismes de formation de dépôts.

Lorsque le grain aval est entièrement mouillé par du fluide chargé en particules provenant du canal horizontal, certaines lignes de courant passent près du grain. Il existe notamment une ligne de courant qui débute dans la section d'entrée et qui aboutit sur le coin du grain aval. Il y a de fortes chances qu'un dépôt se développe au voisinage de ce point d'arrêt. Par accumulation, le dépôt devrait croître dans le sens opposé de la vitesse des particules au moment de l'impact. Ce mécanisme est schématisé sur la Figure 2.10. On s'attend donc à voir le dépôt augmenter vers le centre du pore. Si tel est le cas, nous appellerons ce type de dépôt "dépôt d'invasion de pore". La condition pour que ce type

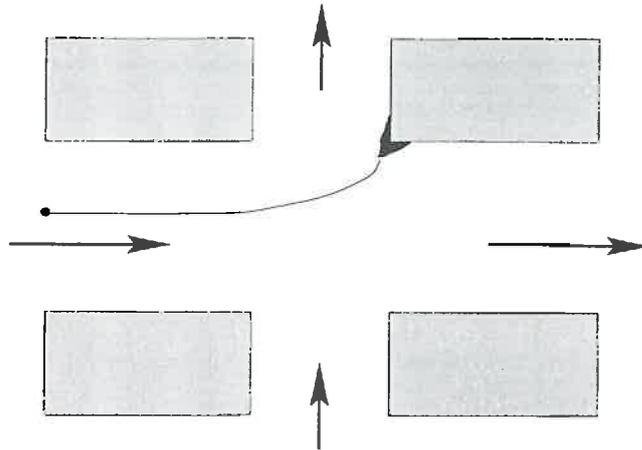


FIG. 2.10 – Dépôt d'invasion de pore

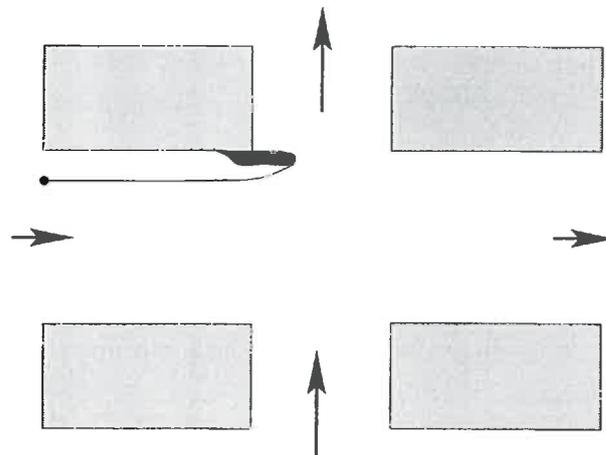


FIG. 2.11 – Dépôt d'invasion de canal

de dépôt existe est une inégalité sur le rapport de débit  $r$  :

$$r < r_c \implies \text{dépôt d'invasion de pore} \quad (2.20)$$

Le rapport de débit critique  $r_c$  doit être proche des conditions hydrodynamiques qui correspondent au mouillage du grain aval par le fluide provenant de la section horizontale. On s'attend à trouver  $r_c$  proche de 1.

On constate également sur la Figure 2.9 que, sous certaines conditions, les lignes de courant se rapprochent l'une de l'autre en sortie. Si les trajectoires des particules se comportent de manière similaire aux lignes de courant, les particules à proximité du bord vont s'approcher de la paroi. Il est alors possible que la distance des particules à la paroi soit inférieure à la distance de capture. On risque donc d'observer une interception des

particules par la matrice solide (Figure 2.11). La condition pour que les lignes de courant se resserrent est une inégalité sur le rapport de vitesse  $u$  :

$$u > u_c \implies \text{dépôt d'invasion de canal} \quad (2.21)$$

On s'attend à trouver  $u_c$  proche de 1.

### 2.3.2 Efficacité de capture

Les trajectoires des particules diffèrent des lignes de courant du fait de deux effets distincts :

- l'inertie des particules,
- l'effet de paroi sur la traînée.

L'effet de centrifugation qui résulte de l'inertie des particules intervient lorsque les particules changent de direction. Les trajectoires vont alors s'écarter des lignes de courant. Dans le cas étudié, les particules doivent opérer une rotation de  $90^\circ$ , lorsqu'elles arrivent au niveau du pore. Les particules vont avoir tendance à se décaler vers le grain aval. L'inertie va donc favoriser les "dépôts d'invasion de pore".

La force de traînée qui s'applique sur une sphère dans un écoulement au voisinage d'une paroi fait apparaître une singularité lorsque la sphère est au contact. Cet effet de répulsion visqueuse va considérablement limiter les dépôts quels qu'ils soient.

En toute rigueur, l'impact d'une sphère dans un écoulement de Stokes avec une paroi imperméable est impossible. Cependant, lorsque la particule devient très proche de la paroi, de nouvelles forces entrent en jeu. A courte portée, les forces physico-chimiques sont bien plus importantes que les forces hydrodynamiques. Dans notre étude, ces forces sont regroupées dans la distance de capture. Dès lors, rien ne s'oppose à ce qu'une particule soit capturée par la paroi du milieu poreux.

Compte tenu des observations faites précédemment, nous déterminons l'influence du rapport de débit  $r$ , du rapport de vitesse  $u$  et du nombre de Stokes  $N_{St}$  sur l'efficacité de capture de chacun des grains.

#### Dépôt d'invasion de pore

Les Figures 2.12 et 2.13 montrent les isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain aval. Les résultats sont présentés en fonction de  $(h, r)$ . Les Figures sont obtenues avec

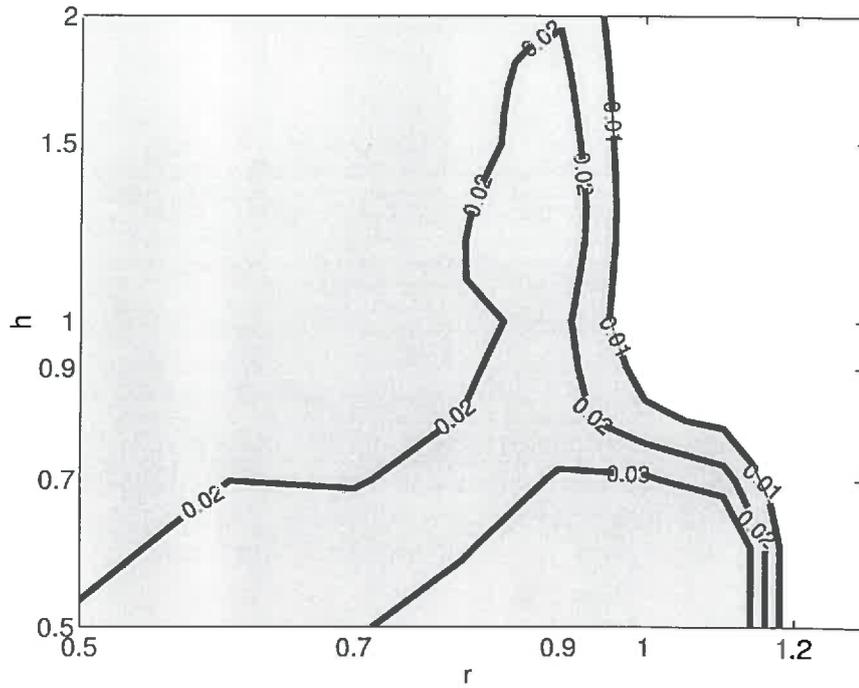


FIG. 2.12 – Isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain aval dans le cas non-inertiel

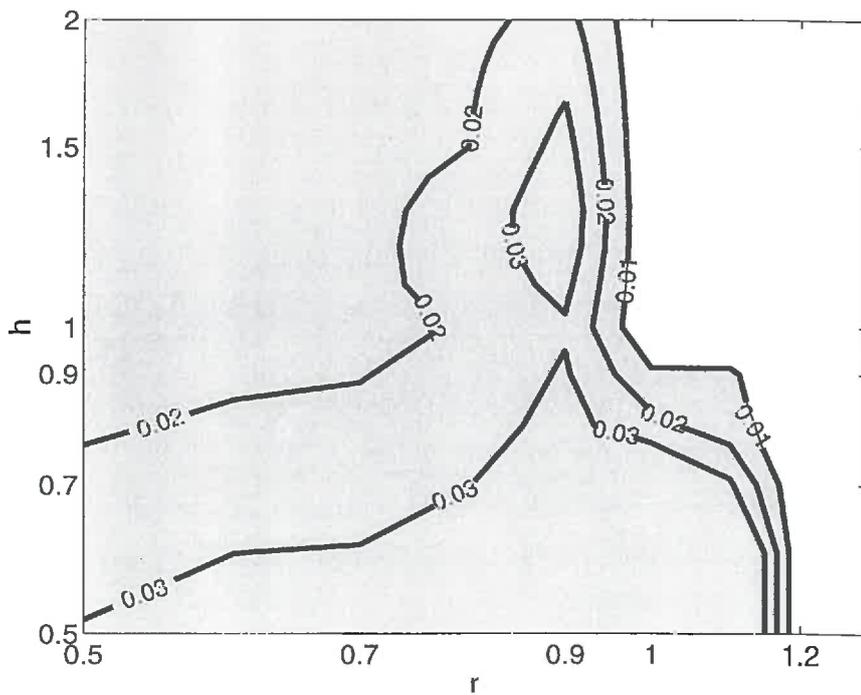


FIG. 2.13 – Isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain aval avec  $N_{St} = 0.01$

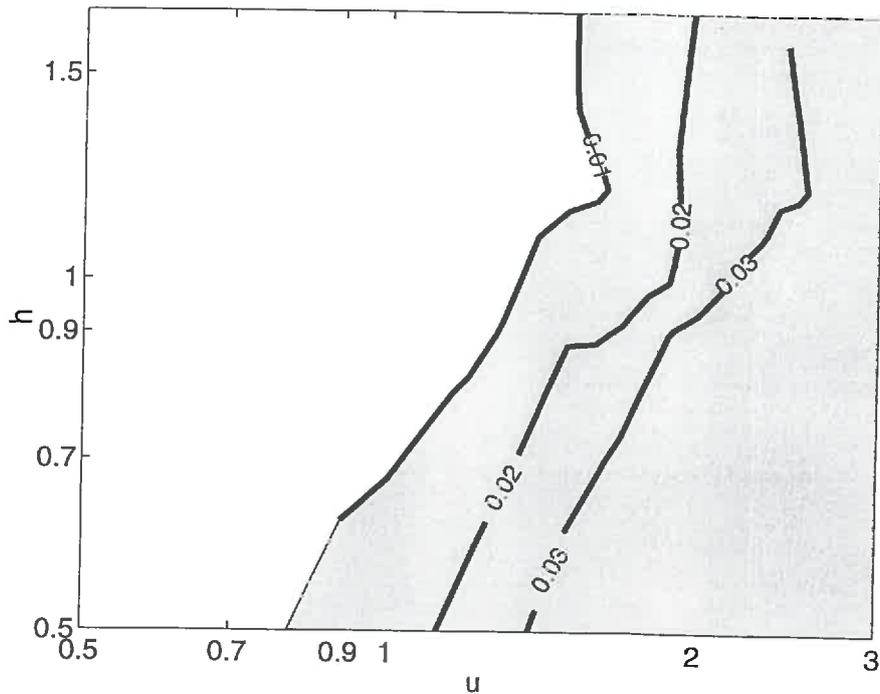


FIG. 2.14 – Isovalues de l'efficacité de capture sur le grain amont dans le cas non-inertiel

différentes valeurs de l'inertie (Figure 2.12 sans inertie ; Figure 2.13  $N_{St} = 0.01$ ).

Considérant que la formation de dépôt est négligeable si l'efficacité de capture est inférieure au pourcent, on discerne deux zones distinctes :

- pour les grandes valeurs du rapport de débits  $r$ , les particules ne se déposent pas sur le grain aval,
- pour les faibles valeurs de  $r$ , on observe la présence d'un dépôt (en grisé sur le diagramme).

Il semble donc que, pour un rapport de taille de canaux  $h$  donné, il existe un rapport de débit critique  $r_c$  au-delà duquel les particules ne se déposent pas. Dans l'ensemble,  $r_c$  est proche de 1, mais il dépend de  $h$ . En effet,  $r_c$  augmente jusqu'à la valeur de 1.2 lorsque  $h < 1$ .

L'inertie tend à favoriser ce type de dépôt. On note que toutes les valeurs de l'efficacité de capture sont augmentées avec l'accroissement de l'effet d'inertie. On constate également une augmentation du rapport de débit critique avec l'augmentation du nombre de Stokes.

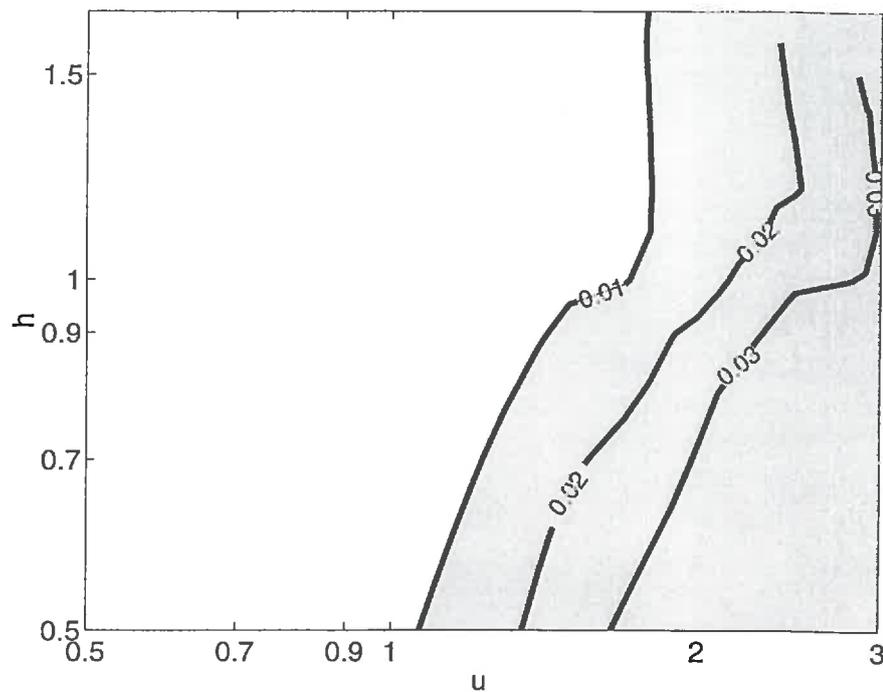


FIG. 2.15 – Isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain amont avec  $N_{St} = 0.01$

### Dépôt d'invasion de canal

La Figure 2.14 (sans inertie) et la Figure 2.15 ( $N_{St} = 0.01$ ) montrent les isovaleurs de l'efficacité de capture par le grain amont. Afin de mettre en évidence la dépendance des “dépôts d'invasion de canal” avec le rapport de vitesses, les contours sont tracés dans le diagramme  $(h, u)$ . On note l'existence d'un rapport de vitesses critique  $u_c$  en-deçà duquel les particules ne se déposent pas sur le grain amont. Pour de faibles valeurs de l'inertie, le rapport critique de vitesses est proche de 1 ( $0.9 < u_c < 1.2$ ).

La Figure 2.15 montre l'évolution de la valeur critique du rapport de vitesses en fonction de l'effet d'inertie. On constate que l'inertie tend à augmenter sensiblement la valeur du rapport critique de vitesses et, de ce fait, à diminuer les dépôts sur le grain amont.

## 2.4 Interprétation des observations expérimentales

L'étude numérique du problème a montré que la présence de dépôts au niveau d'un pore donné dépend du rapport de débit dans les canaux, du rapport de taille des canaux, et du rapport de vitesses dans les canaux. Afin d'interpréter les travaux expérimentaux de Gohr-Pinheiro [6] et de Dufreche [2], nous déterminons numériquement la répartition des

rapports de débits présents dans le micro-modèle en fonction de la répartition de taille des canaux.

### 2.4.1 Répartition $(h, r)$ dans un micro-modèle

Si tous les canaux du milieu poreux avaient la même taille, l'écoulement dans le milieu ne dépendrait que de l'orientation du micro-modèle par rapport à la direction moyenne de l'écoulement. Dans ce cas, nous obtiendrions une unique valeur du débit dans chacune des directions principales. Le diagramme de phase  $(h, r)$ , représentant l'ensemble des valeurs des rapports de tailles et des rapports de débits pour chaque pore du micro-modèle, serait alors constitué de deux points. Si l'on appelle  $\theta$  l'orientation du micro-modèle par rapport à l'orientation de l'écoulement moyen, les deux rapports de débits obtenus sont  $\tan\theta$  et  $\frac{1}{\tan\theta}$ . Sous cette hypothèse, le diagramme de  $(h, r)$  est constitué de deux points, puisque  $h = 1$ . Le milieu poreux réel utilisé dans les expériences de Gohr-Pinheiro [6] est un micro-modèle en résine dont les tailles de canaux sont réparties aléatoirement en suivant une loi de Rayleigh. La présence de canaux de taille variable génère au sein du milieu une fluctuation des débits dans les canaux, et donc des rapports de débits dans les canaux connectés aux pores.

Pour déterminer la répartition des rapports de débits dans le micro-modèle, nous calculons l'écoulement dans le milieu poreux par une méthode de réseau. La méthode de réseau a été introduite par Fatt [4]. Prat et al [15] ont montré que cette méthode permet, en grande partie, de rendre compte de l'interconnection du milieu. Ce modèle est particulièrement adapté au cas étudié puisqu'il consiste en un ensemble de canaux de taille variable interconnectés.

La résolution du problème nous permet d'obtenir, pour chaque pore, la valeur du débit dans chacun des quatre canaux le constituant. Dans l'expérience, l'écoulement s'effectue du haut vers le bas, comme l'indique la Figure 2.16. Les canaux d'entrée sont en haut de la figure, ceux de sortie vers le bas. Chaque pore est décomposé en deux parties, la partie gauche du pore et la droite. Pour chaque partie, le calcul de l'écoulement donne le débit dans les canaux d'entrée et de sortie correspondant. Nous obtenons, pour chacune des parties de chaque pore la valeur du rapport de débit. La valeur du rapport de taille des canaux étant donnée par construction, nous obtenons finalement l'ensemble du diagramme de phase du micro-modèle.

Les Figures 2.17a et 2.17b montrent les répartitions des rapports de débits obtenues dans le micro-modèle pour des orientations de  $\theta = 60^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ . Chaque point représente

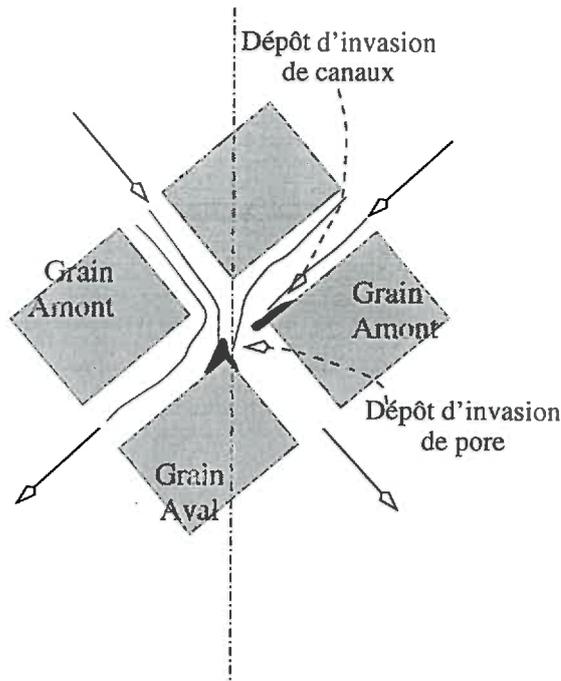


FIG. 2.16 – Description des différents dépôts possibles

les valeurs de  $r$  et  $h$  caractéristiques d'une moitié de pore (soit la partie droite, soit la partie gauche). Lorsque le micro-modèle est orienté à  $60^\circ$ , les points se répartissent selon deux nuages de points distincts autour de deux points particuliers :  $(h, r) = (1, 1/2)$  et  $(h, r) = (1, 2)$ . Le premier nuage, autour de  $(h, r) = (1, 1/2)$ , correspond à la partie gauche des pores. Le deuxième, autour de  $(h, r) = (1, 2)$ , correspond à la partie droite. La répartition aléatoire des tailles de canaux génère une dispersion des rapports de débits autour d'une valeur moyenne. Cette valeur est la valeur que l'on obtiendrait si tous les canaux avaient la même taille. Les mêmes observations peuvent être faites dans le cas à  $45^\circ$ . Dans ce cas, les deux nuages de points coalescent pour donner un groupe centré sur la valeur moyenne  $(h, r) = (1, 1)$ . Il est alors impossible de distinguer directement sur le graphe la partie gauche de la partie droite.

#### 2.4.2 Prédiction des dépôts dans le cas à $60^\circ$

La Figure 2.18 montre les isovaleurs de l'efficacité de capture dans le diagramme de phase  $(h, r)$ . Chaque point représente l'état hydrodynamique d'un demi-pore. La superposition des isovaleurs de l'efficacité de capture au diagramme de phase permet de déterminer si un dépôt peut apparaître dans le demi-pore et, si tel est le cas, quel est le type de dépôt présent.

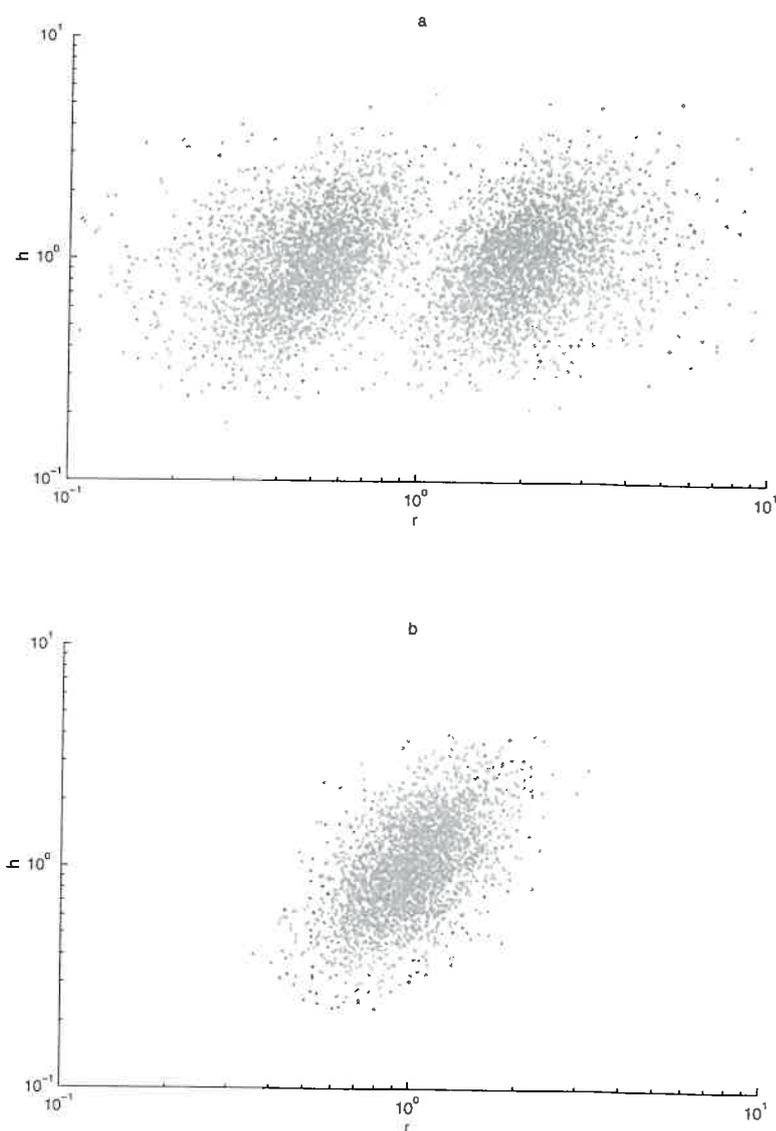
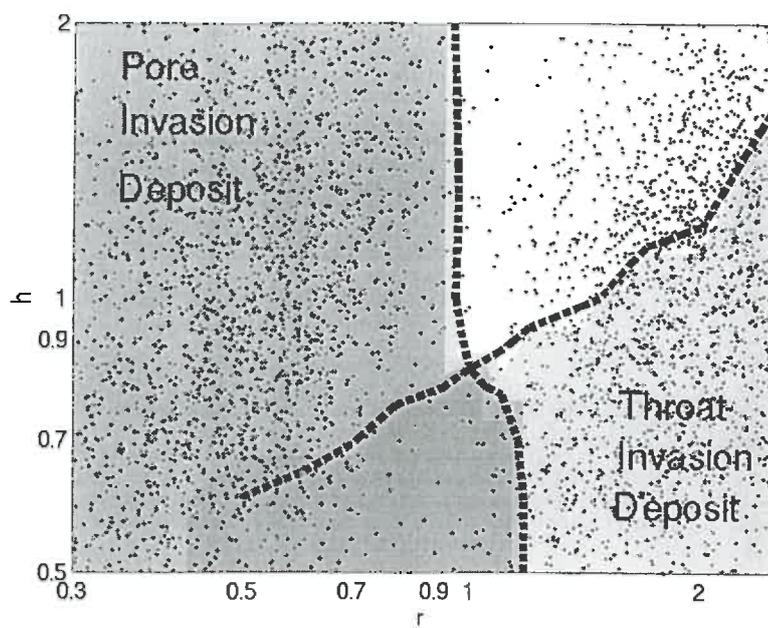
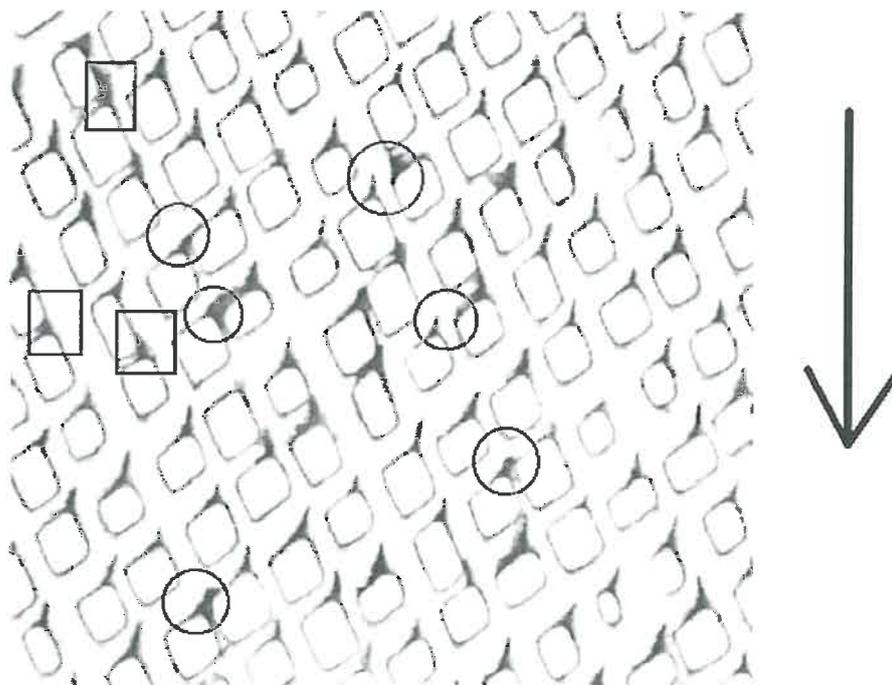


FIG. 2.17 – Répartition de  $(h, r)$  dans le micro-modèle ( a:  $\theta = 60^\circ$ ; b:  $\theta = 45^\circ$  )

FIG. 2.18 - Prédiction des dépôts dans le cas à  $60^\circ$ FIG. 2.19 - Dépôts expérimentaux obtenus dans le cas  $\theta = 60^\circ$

Les conditions de capture ne sont pas les mêmes pour les deux nuages de points. Pour le nuage de gauche, la plupart des points appartiennent à la zone de formation des dépôts de type “invasion de pore”. Ces points correspondent à la partie gauche des pores expérimentaux. La partie droite ne semble pas propice à la formation de “dépôts d’invasion de pore”.

Les conditions d’apparition de “dépôt d’invasion de canal” semblent en partie vérifiées par les deux côtés, mais dans des proportions différentes. La partie du nuage de points de droite, correspondant aux faibles valeurs de  $h$ , satisfait la condition de formation de “dépôts d’invasion de canaux”. La partie gauche peut faire l’objet de ce type de dépôt à condition que le rapport de taille des canaux soit très faible.

Finalement on s’attend à trouver, dans la plupart des pores, des “dépôts d’invasion de pore” plutôt situés sur la gauche des pores, et quelques “dépôts d’invasion de canaux” essentiellement situés dans les canaux à la droite des pores.

L’illustration 2.19 est une photographie du micro-modèle en résine utilisé dans les expériences de Gohr-Pinheiro [6]. L’écoulement principal est vertical et du haut vers le bas. Le cliché montre que dans presque tous les pores se forme un dépôt sur le sommet du grain aval. Les particules en s’agglomérant forment un dépôt qui s’accroît vers le centre du pore. Une observation plus fine de la forme des dépôts révèle une dissymétrie de l’agrégat. La partie gauche possède une surface plus importante que la partie droite. Nous avons entouré sur la photographie les “dépôts d’invasion de canaux” en différenciant les dépôts de la partie droite (entourés d’un cercle) de ceux de la partie gauche (entouré d’un carré). Sur cet exemple, le nombre de dépôts sur la partie droite est plus important que celui de la partie gauche. On retrouve également, par l’expérience, que les canaux à faible rapport de tailles sont obstrués avant les autres.

### 2.4.3 Prédiction des dépôts dans le cas à $45^\circ$

Dans le cas d’une orientation à  $45^\circ$  du micro-modèle par rapport à l’écoulement moyen, il est difficile de discerner sur le diagramme de phase la partie gauche de la partie droite d’un pore. Cependant, la loi de conservation des débits nous permet d’obtenir une relation intéressante pour la suite de l’interprétation. Si l’on note  $q_{eg}$  (resp.  $q_{ed}$ ) le débit dans le canal gauche (resp. droit) d’entrée et  $q_{xg}$  (resp.  $q_{xd}$ ) le débit dans le canal gauche (resp. droit) de sortie, on a :

$$q_{eg} + q_{ed} = q_{xg} + q_{xd} \quad (2.22)$$

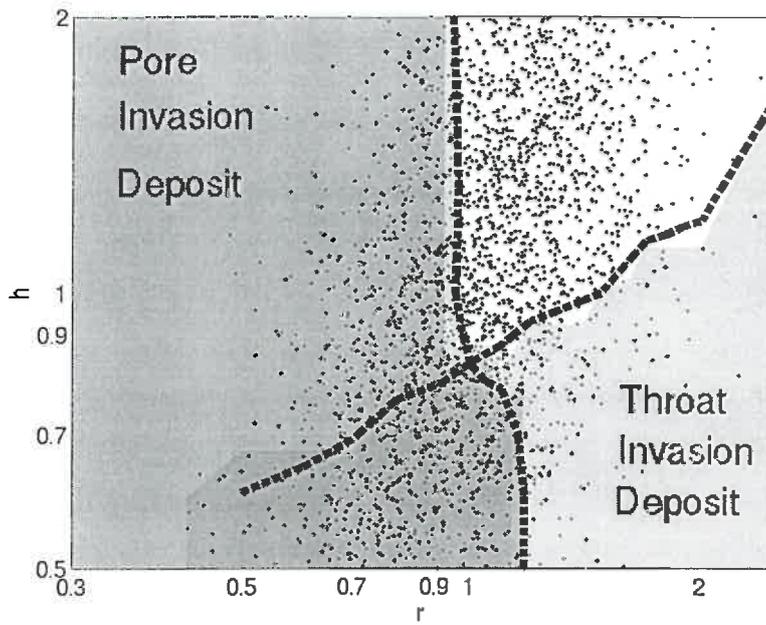


FIG. 2.20 - Prédiction des dépôts dans le cas à  $45^\circ$

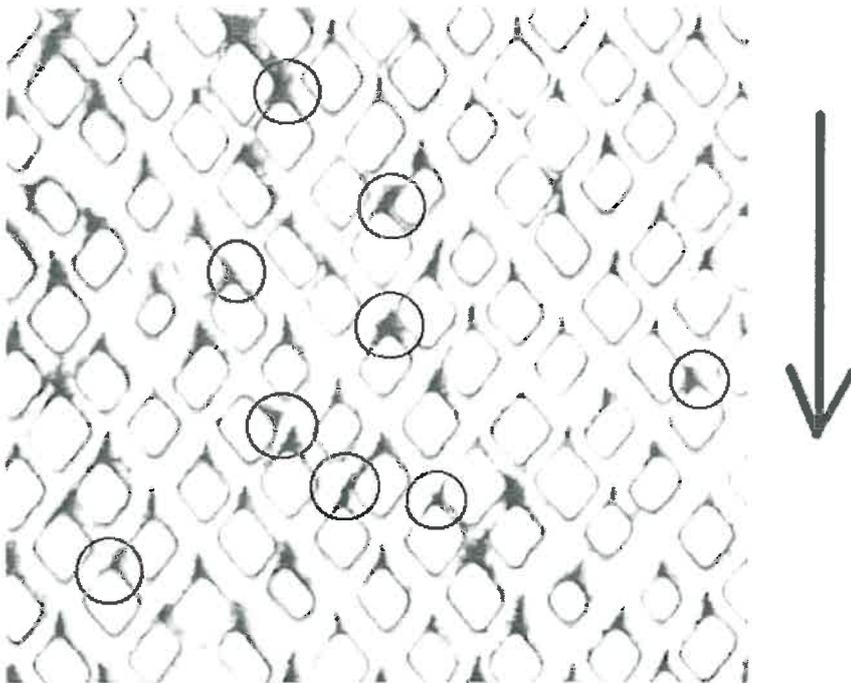


FIG. 2.21 - Dépôts expérimentaux obtenus dans le cas  $\theta = 45^\circ$

En divisant (2.22) par  $q_{xg}$  on obtient :

$$r_g + r_d \frac{q_{xd}}{q_{xg}} = 1 + \frac{q_{xd}}{q_{xg}} \quad (2.23)$$

où  $r_g$  (resp.  $r_d$ ) est le rapport de débits dans la partie gauche (resp. droite) du pore.

Supposons que  $r_g > 1$ , soit encore  $r_g = 1 + \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$ , l'expression précédente peut s'écrire :

$$r_d = 1 - \epsilon \frac{q_{xg}}{q_{xd}} \quad (2.24)$$

Comme  $\epsilon \frac{q_{xd}}{q_{xg}} > 0$  on trouve finalement que  $r_d < 1$ . Le résultat opposé est obtenu en supposant initialement que  $r_g < 1$ .

Finalement, chaque pore est représenté dans le diagramme de phase  $(h, r)$  par deux points. Un point a une valeur pour  $r$  plus petite que 1, l'autre une valeur de  $r$  plus grande que 1.

La Figure 2.20 donne les isovaleurs de l'efficacité de capture dans le diagramme de phase  $(h, r)$ . On s'attend à trouver, pour cette orientation, une grande majorité de "dépôts d'invasion de pore". Les "dépôts d'invasion de canaux" restent inférieurs en nombre. La plus grande différence entre le cas  $45^\circ$  et celui à  $60^\circ$  concerne la symétrie des dépôts.

#### 2.4.4 Forme des dépôts

L'efficacité de capture traduit l'ensemble des particules qui se déposent sur un grain. Elle n'offre aucun enseignement quant à leur répartition le long du grain. Afin de déterminer les lieux les plus probables de dépôts sur un grain, nous déterminons la densité de probabilité de capture des particules le long du grain étudié. La Figure 2.22 représente la densité de probabilité de capture  $dP(s)$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  le long du grain. Les courbes sont obtenues avec un rapport de débit  $r = \frac{1}{2}$  et un rapport de taille de canaux  $h = 1$ . Les différents cas tracés correspondent à plusieurs valeurs du nombre de Stokes  $N_{St}$ . Les plus grandes valeurs du nombre de Stokes choisies sont plus importantes que celles que l'on peut observer dans la configuration de l'expérience. Cependant, nous les conservons pour accentuer la tendance de l'effet d'inertie sur la répartition des dépôts. L'origine de l'abscisse curviligne est choisie sur le coin du grain.

La Figure 2.22 permet de montrer que la densité de probabilité de capture admet un maximum au voisinage de  $s = 0$ , c'est-à-dire sur le coin. Il y a de fortes chances que le dépôt soit plus important sur ce point particulier que sur le reste du grain. De plus, la

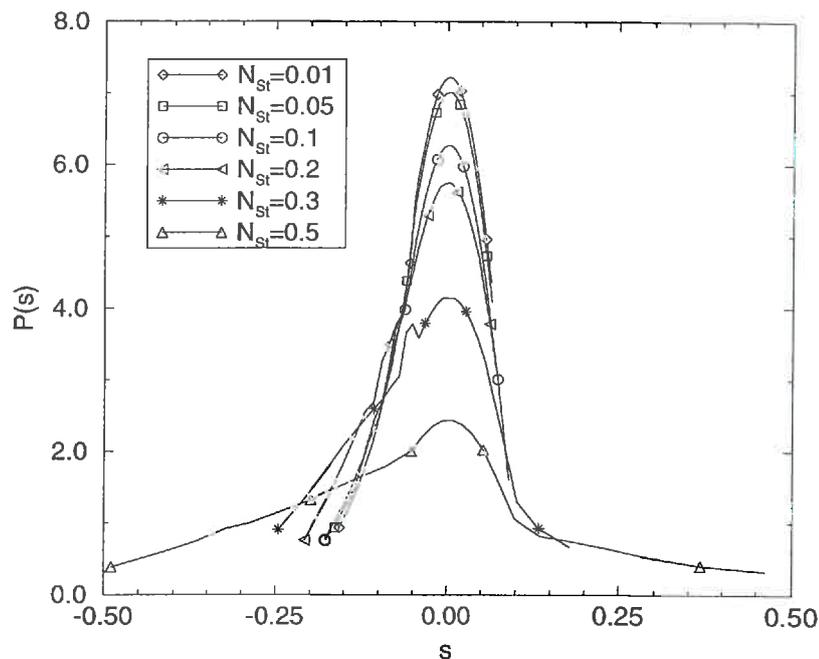


FIG. 2.22 – Densité de probabilité de capture le long du grain aval

répartition n'est pas symétrique par rapport à  $s = 0$ . En effet, la probabilité est plus importante sur la gauche de la figure. Les dépôts sont donc plus importants sur le côté du grain perpendiculaire à l'écoulement amont.

L'inertie modifie la répartition spatiale du dépôt. Elle tend, d'une part, à élargir le lieu du dépôt le long du grain. D'autre part, elle augmente la perte de symétrie, par rapport au coin, de la répartition. Les trajectoires des particules sont presque droites lorsqu'elles sortent par le canal horizontal. L'inertie éloigne alors les particules de la paroi. La probabilité de capture sur ce côté ( $s > 0$ ) est diminuée. En revanche, les particules sortant par le canal vertical doivent opérer une rotation importante. L'inertie s'oppose à la rotation et dévie les particules vers la paroi, favorisant ainsi la probabilité de capture sur ce côté ( $s < 0$ ).

Les dépôts numériques que l'on obtient en utilisant la méthode décrite dans la section 2.2.5 sont tracés sur les Figures 2.23a et b. Les paramètres géométriques et hydrodynamiques correspondants sont décrits sur la Figure. Les tracés sont des agrandissements de la zone du grain où le dépôt se produit. L'écoulement est du haut vers le bas pour permettre une meilleure comparaison avec les résultats expérimentaux. La Figure 2.23a montre des dépôts sur le grain aval, alors que la Figure 2.23b représente uniquement les

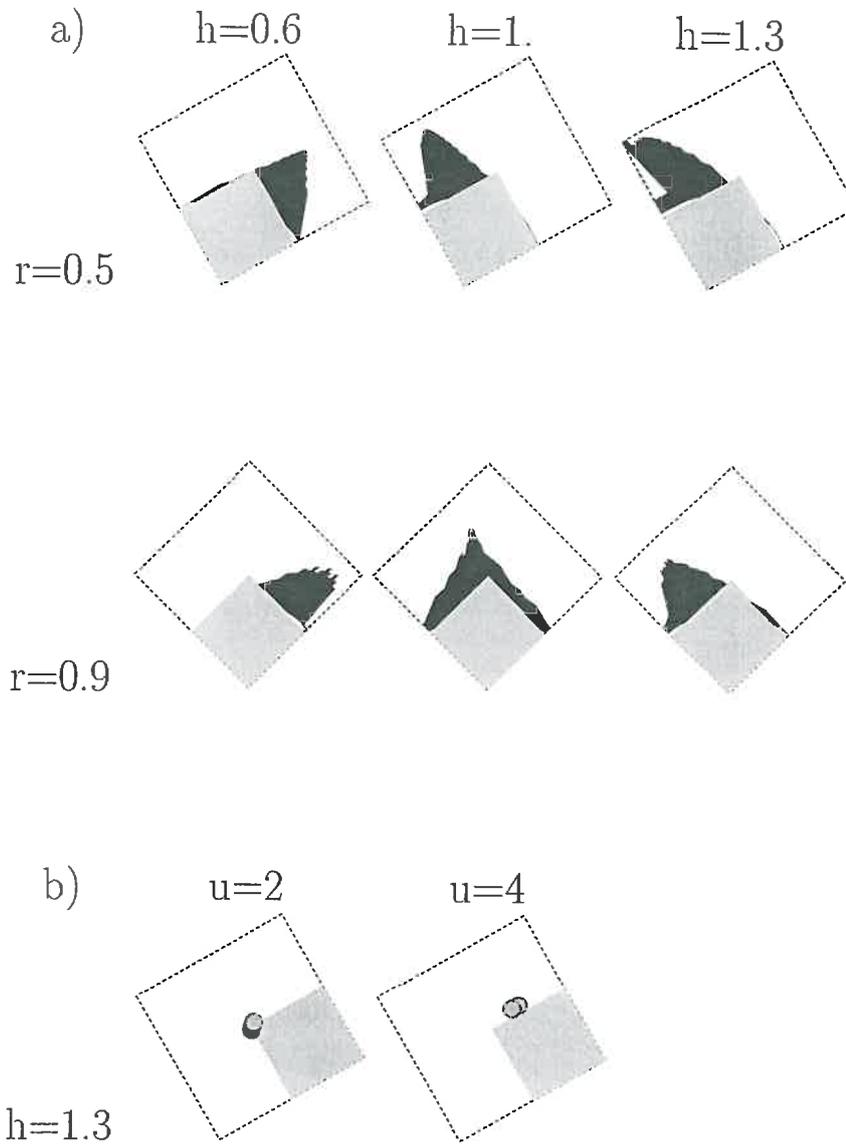


FIG. 2.23 – a : Forme des “dépôts d’invasion de pore”; b : Points d’impact pour les “dépôts d’invasion de canal”

points d'impact sur le grain amont.

Lorsque le micro-modèle expérimental est orienté à  $45^\circ$ , les rapports de débits dans le pore sont en général proches de 1. Les tracés correspondant à cette orientation sont obtenus avec  $r = 0.9$ . Les formes obtenues sont proches de celles que l'on peut observer expérimentalement. On note toutefois que la courbure du dépôt dépend du rapport de taille de canaux  $h$ . En fait, le dépôt croît, à peu de choses près, le long de la ligne de courant séparatrice. Comme nous l'avons déjà signalé lors de l'observation des lignes de courant (Figure 2.9), la ligne séparatrice aboutit sur le coin du grain aval et sa courbure dépend du rapport de taille des canaux.

Pour des micro-modèles orientés à  $60^\circ$ , les rapports de débits sont proches de  $r = \frac{1}{2}$ . Une fois encore, la forme des dépôts numériques est proche des dépôts expérimentaux. Les dépôts sont globalement orientés verticalement, dans la même direction que l'écoulement moyen.

En ce qui concerne les "dépôts d'invasion de canaux", la construction numérique donne des résultats inexploitable pour la forme des dépôts. La méthode utilisée n'est pas adaptée à la croissance de l'aggrégat. La construction suppose que les particules s'accumulent en remontant l'écoulement. Cette hypothèse n'est pas valable pour les particules bloquées par le grain amont. Dès qu'une particule est capturée par la paroi du grain amont (Figure 2.24), elle devient un obstacle aux particules à venir. Le rétrécissement obtenu devient alors un lieu d'impact plus probable pour les particules à venir. Le dépôt va alors croître, dans un premier temps, perpendiculairement à la paroi. Par la suite, le dépôt ainsi constitué va devenir un obstacle de type marche pour les particules à venir. Le dépôt va alors croître en aval de la marche est finir par obstruer le canal de sortie.

Cette forme est observable sur les résultats expérimentaux. Cependant, même si l'analyse numérique ne permet pas de conclure sur la forme des dépôts, elle permet de déterminer la position spatiale sur le grain. La Figure 2.23b montre que les points d'impact des particules se situent sur la paroi du canal d'entrée, proches du coin du grain amont. Les observations expérimentales montrent qu'à partir de ce point, le dépôt croît vers l'aval et obstrue, en général, le canal de sortie.

## 2.5 Conclusion

Lors de cette étude, nous avons mis en évidence deux types distincts de mécanismes de capture de particules lors d'un écoulement de suspension diluée à travers un milieu poreux.

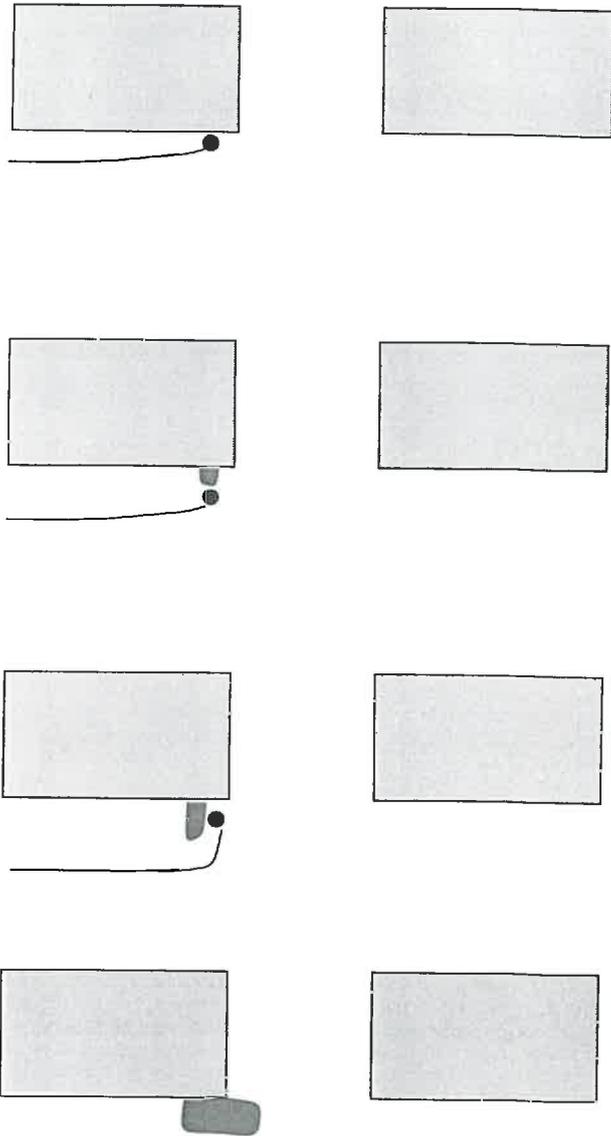


FIG. 2.24 - Formation des "dépôts d'invasion de canaux"

La croissance et les conditions d'apparition des deux types de dépôts sont distinctes. Nous avons également mis en évidence les paramètres à l'échelle du pore qui guident la formation de dépôts :

- le rapport des débits aboutissant au pore,
- le rapport de taille des canaux connectés au pore.

Nous fournissons, à l'échelle du pore, des abaques donnant l'efficacité de capture.

Il est envisageable d'intégrer par la suite ces valeurs dans un modèle de réseaux pour résoudre à une échelle plus grande des problèmes de transport de particules en milieu poreux.

## Liste des Figures du Chapitre 2

2.1	Visualisation de l'expérience de Dufreche [2] . . . . .	35
2.2	Dispositif de l'expérience de Dufreche [2] . . . . .	36
2.3	Perméabilité et surface apparente déposée en fonction du nombre de vo- lumes de pore injectés – canaux à $45^\circ$ . . . . .	36
2.4	Domaine Physique . . . . .	38
2.5	Domaine de calcul . . . . .	38
2.6	Décomposition de la force hydrodynamique . . . . .	40
2.7	Points d'impact dans le cas général . . . . .	42
2.8	Points d'impact dans le cas avec recouvrement . . . . .	43
2.9	Lignes de courant dans le pore pour les différents cas étudiés . . . . .	46
2.10	Dépôt d'invasion de pore . . . . .	48
2.11	Dépôt d'invasion de canal . . . . .	48
2.12	Isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain aval dans le cas non-inertiel	50
2.13	Isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain aval avec $N_{St} = 0.01$ . . . . .	50
2.14	Isovaleurs de l'efficacité de capture sur le grain amont dans le cas non-inertiel	51
2.16	Description des différents dépôts possibles . . . . .	54
2.17	Répartition de $(h, r)$ dans le micro-modèle ( a: $\theta = 60^\circ$ ; b: $\theta = 45^\circ$ ) . . . . .	55
2.18	Prédiction des dépôts dans le cas à $60^\circ$ . . . . .	56
2.19	Dépôts expérimentaux obtenus dans le cas $\theta = 60^\circ$ . . . . .	56
2.20	Prédiction des dépôts dans le cas à $45^\circ$ . . . . .	58
2.21	Dépôts expérimentaux obtenus dans le cas $\theta = 45^\circ$ . . . . .	58
2.22	Densité de probabilité de capture le long du grain aval . . . . .	60
2.23	a: Forme des "dépôts d'invasion de pore"; b: Points d'impact pour les "dépôts d'invasion de canal" . . . . .	61
2.24	Formation des "dépôts d'invasion de canaux" . . . . .	63

## Liste des Tables du Chapitre 2

2.9	valeurs de $U_2/U_1$ étudiées en fonction du rapport de débits $r$ et du rapport de tailles des canaux $h$ . . . . .	46
-----	--	----

# Bibliographie

- [1] Wang C.Y. Stokes flow through an array of rectangular fibers. *Int. J. Multiphase Flow*, 22:185–194, 1996.
- [2] J. Dufrêche. Effet d'anisotropie du champ de vitesse sur le transport de particules en milieux poreux. Rapport de DEA, INPT, 1996.
- [3] L. T. Fan, R. Nassar, S.H. Hwang, and S. T. Chou. Analysis of deep bed filtration data: modeling as a birth-death process. *A.I.Ch.E. Journal*, 31:1781, 1985.
- [4] I. Fatt. The network model of porous media iii. dynamic properties of networks with the tube radius distribution. *Pet. Trans. AIME*, 207:164, 1956.
- [5] C. Ghidaglia, L. Arcangelis, J. Hinch, and E. Guazzelli. Hydrodynamic interactions in deep bed filtration. *Phys. Fluids*, 8:6–14, 1996.
- [6] Ivone Gohr-Pinheiro. *Transport et dépôt de particules en milieu poreux: de l'échelle du pore à l'échelle macroscopique*. PhD thesis, I.N.P.T., 1996.
- [7] L.C. Goldenberg, I. Hutcheon, N. Wardlaw, and A. Melloui. Rearrangement of fine particles in porous media causing reduction of permeability and formation of preferred pathways of flow: experimental findings and a conceptual model. *Transport in Porous Media*, 13:221–237, 1993.
- [8] D. Houi, C. Zarcone, and P. Schmitz. Visualizations of microfiltration processes. In *Proc. 5th World Filtration Congress*, Nice, France, 1990.
- [9] K.J. Ives. Rational design of filters. In *Proc. Inst. Civil Engrs.*, volume 16, page 189, 1960.
- [10] M. Leitzement, P. Maj, J.A. Dodds, and J.L. Greffe. *Deep bed filtration in a network of random tubes*. Ed. J. Gregory, Ellis Horwood, 1984.

- [11] R. Lenormand, C. Zarcone, and A. Sarr. Mechanisms of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts. *J. Fluid Mech.*, 135:337–353, 1983.
- [12] A. Maroudas and P. Eisenklam. Clarification of suspension: a study of particle deposition in granular media. part i: some observations on particle deposition. *Chem. Eng. Sci.*, 20:867–873, 1964.
- [13] A.C. Payatakes, H.Y. Park, and J. Petrie. A visual study of particle deposition and reentrainment during depth filtration of hydrosols with a polyelectrolyte. *Chem. Eng. Sci.*, 36:1319–1335, 1981.
- [14] C. Payatakes, A. C. and Tien and R. M. Turian. A new model for granular porous media, i. model formulation. *A.I.Ch.E. Journal*, 19:58, 1973.
- [15] M. Prat, P. Schmitz, and S. Bories. Modelling of transport phenomena in porous media: the discrete approach. *ERCOTAC Bull.*, 28:10–15, 1996.
- [16] S. D. Rege and H. S. Fogler. Network model for straining dominated particle entrapment in porous media. *Chem. Eng. Sci.*, 42:1553–1564, 1987.
- [17] S. D. Rege and H. S. Fogler. A network model for deep bed filtration of solid particles and emulsion drops. *A.I.Ch.E. Journal*, 34:1761–1772, 1988.
- [18] P. Schmitz, I. Gohr Pinheiro, and D. Houi. Experimental and theoretical modelling of a porous media fouling. In *Proc. 7th World Filtration Congress*, Budapest, Hungary, 1996.
- [19] P. Schmitz, D. Houi, and I. Gohr Pinheiro. A network model to analyze suspension flow in porous media. In *Proc. Journées Numériques de Besançon*, 1994.
- [20] C. Tien and A. C. Payatakes. Advances in deep bed filtration. *A.I.Ch.E Journal*, 25:737–759, 1979.

## Chapitre 3

Sphère s'approchant d'une paroi  
présentant une singularité

## 3.1 Introduction

La trajectoire d'une particule dépend de l'ensemble des forces qui s'appliquent sur elle. Lorsque la particule est en suspension dans un fluide en mouvement, en l'absence de gravité et en régime de Stokes, la particule est essentiellement soumise à la force hydrodynamique. Dans un écoulement de Stokes uniforme, l'expression de la traînée est donnée par la formule de Stokes  $F = 6\pi\kappa aU$ , où  $\kappa$  est la viscosité,  $a$  le rayon de la sphère,  $U$  la vitesse de l'écoulement.

Dés que le domaine est limité par une paroi, il convient de modifier la formule par un facteur correcteur  $K$ , qui tient compte de la modification de l'écoulement et des effets de paroi.

De nombreux auteurs ont travaillé sur l'évaluation de la force hydrodynamique sur une sphère dans diverses configurations d'écoulements (voir Chapitre 1).

Brenner [1] a notamment traité, par une méthode analytique, deux problèmes de géométries similaires, mais de conditions limites différentes :

- une sphère s'approchant orthogonalement d'une paroi solide plane,
- une sphère s'approchant orthogonalement d'une surface plane non-contrainte.

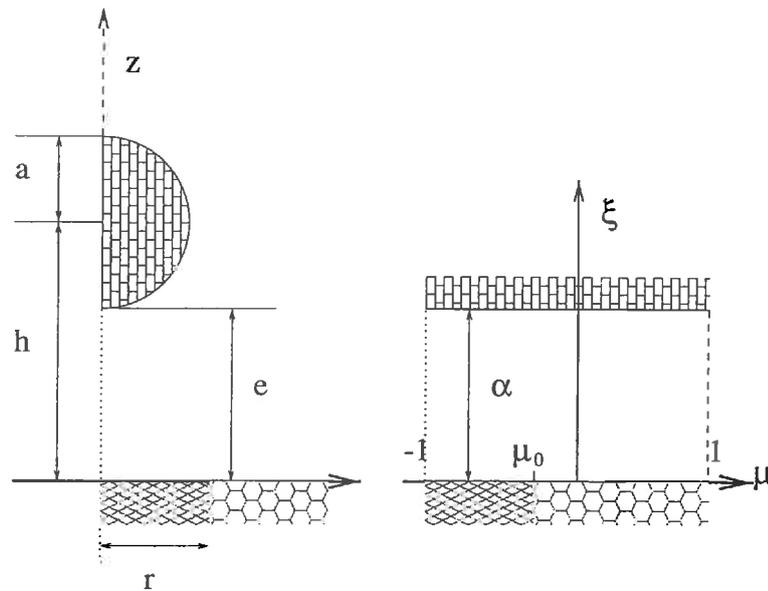
Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'influence d'une singularité de paroi sur la force hydrodynamique exercée sur une particule sphérique.

Dans un premier temps, en utilisant les travaux de Brenner, nous étudierons un cas d'école faisant intervenir le même type de conditions limites que celles utilisées par Brenner. Dans le travail présenté, nous choisissons comme type de singularité un disque non contraint de rayon  $r$ .

Il est difficile de trouver ce type de situation dans la réalité. Cependant, ce choix de singularité nous permet d'accéder facilement au comportement asymptotique de la force hydrodynamique exercée sur la particule lorsqu'elle est soit très proche, soit très éloignée de la singularité. Les résultats obtenus sur le coefficient de traînée sont interprétés en part relative des deux cas asymptotiques. Nous déterminons alors la fonction de raccordement entre les deux cas limites et proposons une approximation simplifiée du raccord.

Nous caractérisons également la distance d'influence de la singularité sur la force hydrodynamique exercée sur la sphère.

Par la suite, nous appliquons la même technique à des travaux antérieurs correspondant à d'autres singularités de paroi. Dagan et al. [3] ont étudié le cas axisymétrique d'une

FIG. 3.1 – *Domaine d'étude et changement de variables*

particule s'approchant d'un orifice circulaire sur une paroi solide. Yan et al [7] ont complété l'étude dans le cas tridimensionnel (sphère non centrée sur l'orifice). Ces différents cas ont des géométries proches du cas d'école présenté. Nous généralisons la fonction de raccord à leurs études, et proposons des approximations, faciles à utiliser, qui donnent la valeur de la traînée sur la sphère.

## 3.2 Formulation Mathématique

### 3.2.1 Description du problème

On considère (Figure 3.1) une sphère solide, de rayon  $a$ , se déplaçant à vitesse  $U$  constante, orthogonalement à une surface plane infinie comportant une singularité circulaire. Le type de singularité choisi est un disque non contraint de rayon  $r$ .

La sphère se déplaçant à la verticale du centre du disque, le problème est axisymétrique. On note  $(z, \bar{\omega})$  le système de coordonnées cylindriques dont l'origine est le centre du disque. On définit  $h$  comme étant la distance du centre de la sphère à l'origine. Ainsi, les coordonnées du centre de la sphère sont  $(0, h)$ .

En supposant que l'écoulement est suffisamment lent, de telle sorte que l'hypothèse d'écoulement rampant soit vérifiée ( $\frac{\rho U r}{\kappa}$  petit), celui-ci est régi par les équations de Stokes. De plus, si la vitesse de la sphère est faible, on peut négliger les termes instationnaires devant les termes visqueux, à condition que  $\frac{\rho U r^2}{\kappa h}$  soit petit (Brenner [1]). Les équations

qui régissent l'écoulement s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \nabla p = \kappa \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\kappa$  est la viscosité du fluide. Le problème étant axisymétrique, on introduit la fonction de courant  $\Psi$ . Exprimées en coordonnées cylindriques  $(z, \bar{\omega})$ , les composantes de la vitesse sont :

$$\begin{cases} v_{\bar{\omega}} = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ v_z = -\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\omega}} \end{cases} \quad (3.2)$$

La fonction de courant est alors régie par :

$$E^4 \Psi = 0 \quad (3.3)$$

où  $E$  est l'opérateur Laplacien qui, en coordonnées cylindriques, s'écrit :

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left( \frac{\partial}{\bar{\omega} \partial \bar{\omega}} \right) \quad (3.4)$$

La résolution de 3.3 se limitera au domaine  $\bar{\omega} \geq 0$  et  $z \geq 0$ .

Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles 3.3 par la méthode de séparation des variables, on cherche un système de coordonnées qui transforme le domaine fluide actuel en un rectangle. Le problème, faisant intervenir une sphère et une paroi plane, on utilise désormais les coordonnées bipolaires  $(\xi, \eta)$  (Happel et Brenner [4]). Le changement de variables s'effectue par la relation :

$$\begin{cases} \bar{\omega} = c \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \mu} \\ z = c \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \mu} \end{cases} \quad (3.5)$$

où pour des raisons de simplicité, on a posé  $\mu = \cos \eta$ .

Dans ce système de coordonnées  $(\xi, \mu)$ , le domaine fluide est ramené au rectangle  $[0, \alpha] \times [-1, 1]$ . La surface de la sphère est alors décrite par l'équation  $\xi = \alpha$ .

Les quatre relations suivantes permettent de relier les dimensions physiques du problème  $h$  et  $a$  aux valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $c$  :

$$\begin{aligned} a &= c \operatorname{cosech} \alpha \\ h &= c \operatorname{coth} \alpha \end{aligned} \quad (3.6)$$

et

$$\begin{aligned}\alpha &= \ln\left\{\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1}\right\} \\ c &= a \sinh \alpha\end{aligned}\quad (3.7)$$

La solution générale, à variables séparées, des équations de Stokes formulées à l'aide de la fonction de courant  $\Psi$ , qui prend en compte l'axisymétrie du problème et considère le fluide au repos à l'infini, a été donnée par Stimson et Jeffery [6]:

$$(\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\mu) \quad (3.8)$$

où  $C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$  est le polynôme de Gegenbauer d'ordre  $n+1$  et de degré  $-\frac{1}{2}$ , et:

$$U_n(\xi) = a_n \cosh\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi + b_n \sinh\left(n - \frac{1}{2}\right)\xi + c_n \cosh\left(n + \frac{3}{2}\right)\xi + d_n \sinh\left(n + \frac{3}{2}\right)\xi \quad (3.9)$$

Les coefficients  $a_n, b_n, c_n, d_n$  restent à déterminer à l'aide des conditions limites. Stimson et Jeffery ont montré que la force hydrodynamique qui s'exerce sur la sphère vaut:

$$F = \frac{-2\pi\kappa\sqrt{2}U}{\sinh \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n + c_n + d_n \quad (3.10)$$

où  $\kappa$  est la viscosité et  $U$  la vitesse de la sphère.

### 3.2.2 Conditions Limites

On considère le déplacement d'une sphère dans un fluide au repos à l'infini. La vitesse  $U$  de la sphère est prise constante et verticale. La condition limite pour le fluide sur la sphère est donc une condition d'adhérence. Exprimée en coordonnées cylindriques, on a sur la paroi de la sphère:

$$\begin{cases} v_{\bar{\omega}} = 0 \\ v_z = -U \end{cases} \quad (3.11)$$

sur la surface de cote  $z = 0$ :

Les conditions limites imposées sur la surface de cote  $z = 0$  sont une combinaison des conditions imposées par Brenner.

Il faut, de ce fait, différencier deux types de conditions limites:

= une condition de surface non contrainte sur le disque de rayon  $r$ ,

– une condition de vitesse nulle sur le reste de la paroi solide.

On obtient :

$$\text{pour } \bar{\omega} < r \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{\bar{\omega}}}{\partial z} = 0 \\ v_z = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

et

$$\text{pour } \bar{\omega} \geq r \left\{ \begin{array}{l} v_{\bar{\omega}} = 0 \\ v_z = 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Brenner a montré que ces conditions limites en coordonnées bipolaires se traduisent, pour la fonction de courant  $\Psi$ , par :

– sur la sphère :

$$\left[ (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \psi \right]_{\xi=\alpha} = \left[ \frac{1}{2} U (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \bar{\omega}^2 \right]_{\xi=\alpha} \quad (3.14)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \psi \right]_{\xi=\alpha} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{2} U (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \bar{\omega}^2 \right]_{\xi=\alpha} \quad (3.15)$$

– sur la paroi solide ( $\mu > \mu_0$ ) :

$$\left[ (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \psi \right]_{\xi=0} = 0 \quad (3.16)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \psi \right]_{\xi=0} = 0 \quad (3.17)$$

– sur le disque non contraint ( $\mu < \mu_0$ ) :

$$\left[ (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \psi \right]_{\xi=0} = 0 \quad (3.18)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \psi \right]_{\xi=0} = 0 \quad (3.19)$$

$\mu_0$  correspond au rayon de la singularité, exprimé dans les nouvelles coordonnées. On a la relation suivante entre le rayon  $r$  et  $\mu_0$  :

$$\mu_0 = \frac{r^2 - c^2}{r^2 + c^2} \quad (3.20)$$

### 3.2.3 Projection Orthogonale

Les polynômes de Gegenbauer forment une base orthogonale des fonctions de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Nous souhaitons de ce fait développer les conditions aux limites en séries de polynômes de Gegenbauer afin de les projeter sur la base de fonctions. Ce développement n'est possible que pour une fonction définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$  tout entier. Ce qui est le cas des conditions 3.14 et 3.15. Les conditions 3.16 et 3.18 permettent de définir sur tout l'intervalle la même condition. Par contre, les conditions 3.17 et 3.19 sont totalement différentes et, de ce fait, on ne pourra pas leur appliquer directement une méthode de projection.

Brenner a donné un développement en série bien utile :

$$(\cosh \xi - \mu)^{\frac{3}{2}} \bar{\omega}^2 = \sqrt{2} \sinh^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left\{ \frac{\exp \left[ -\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi \right]}{2n-1} - \frac{\exp \left[ -\left(n + \frac{3}{2}\right) \xi \right]}{2n+3} \right\} C_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(\mu) \quad (3.21)$$

Après développement et projection, nous obtenons, pour tout  $n$ , trois relations analytiques linéaires entre les coefficients.

L'équation 3.14 donne :

$$\begin{aligned} a_n \cosh\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha + b_n \sinh\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha + c_n \cosh\left(n + \frac{3}{2}\right)\alpha + d_n \sinh\left(n + \frac{3}{2}\right)\alpha \\ = \frac{\sinh^2 \alpha n(n+1)}{\sqrt{(2)}} \left\{ \frac{\exp \left[ -\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi \right]}{2n-1} - \frac{\exp \left[ -\left(n + \frac{3}{2}\right) \xi \right]}{2n+3} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'équation 3.15 donne :

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[ a_n \sinh\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha + b_n \cosh\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha \right] + \\ \left(n + \frac{3}{2}\right) \left[ c_n \sinh\left(n + \frac{3}{2}\right)\alpha + d_n \cosh\left(n + \frac{3}{2}\right)\alpha \right] \\ = \frac{-\sinh^2 \alpha n(n+1)}{2\sqrt{(2)}} \left\{ \exp \left[ -\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi \right] - \exp \left[ -\left(n + \frac{3}{2}\right) \xi \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les équations 3.16 et 3.18 réunies donnent :

$$a_n + c_n = 0 \quad (3.24)$$

Les équations 3.22, 3.23 et 3.24 constituent, pour tout  $n$ , trois relations linéaires entre les quatre coefficients  $a_n, b_n, c_n, d_n$ . On peut donc exprimer trois coefficients à l'aide du quatrième comme suit :

$$\begin{aligned}
a_n &= d_n a_1(n) + a_2(n) \\
b_n &= d_n b_1(n) + b_2(n) \\
c_n &= d_n c_1(n) + c_2(n)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Les fonctions  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  sont détaillées dans l'Annexe B.

### 3.2.4 Minimisation de l'erreur sur la condition limite singulière

La condition limite est singulière à la paroi. On n'a pas une relation identique pour tout  $\mu$ . En effet, l'équation 3.17 est une condition limite faisant intervenir une dérivée première de la fonction de courant  $\Psi$ , alors que la condition 3.19 fait intervenir la dérivée seconde de cette même fonction. De ce fait, le dernier coefficient (ici  $d_n$ ), ne peut être déterminé en utilisant directement une projection orthogonale de la condition limite.

Pour pallier ce problème, nous introduisons la fonction  $E(d_n)$ , définie comme suit :

$$\begin{aligned}
E(d_n) = & \underbrace{\int_{\mu=-1}^{\mu=\mu_0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\cosh \xi - \mu)^{3/2} \Psi|_{\xi=0} \right]^2 d\mu}_{\text{condition limite sur le disque}} + \underbrace{\int_{\mu=\mu_0}^{\mu=1} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\cosh \xi - \mu)^{3/2} \Psi|_{\xi=0} \right]^2 d\mu}_{\text{condition limite sur la paroi solide}} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

La fonction  $E$  correspond, pour un ensemble donné de coefficients  $d_n$ , à l'écart entre la condition limite obtenue et celle que l'on souhaite obtenir. La minimisation de l'écart nous donne un ensemble de valeurs  $d_n$  et donc par 3.25 l'ensemble des coefficients  $a_n, b_n, c_n, d_n$ .

Si les conditions 3.17 et 3.19 sont respectées partout à  $\xi = 0$ , alors l'écart  $E$  est nul. Réciproquement, si  $E = 0$  alors les conditions 3.17 et 3.19 sont vérifiées partout, sauf éventuellement en quelques points isolés.

La solution générale du problème 3.8 comporte une infinité de termes. Il est de ce fait difficile de déterminer les coefficients  $d_n$ . Afin de pouvoir trouver une solution à la minimisation de  $E$ , on tronque la solution générale à l'ordre  $N$ . En injectant 3.8 tronquée dans 3.26, et en utilisant les relations 3.25 entre  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$ , on obtient pour  $E$  une forme quadratique en  $d_n$  :

$$E(d_n) = \frac{1}{2} d_i A_{ij} d_j + B_j d_j + C \tag{3.27}$$

La forme quadratique 3.27 étant symétrique, définie et positive, minimiser  $E$  revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$A_{ij}d_j = B_i \quad (3.28)$$

dans lequel,

$$A_{ij} = \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 a_1(i) + \left( i + \frac{3}{2} \right)^2 c_1(i) \right] \left[ \left( j - \frac{1}{2} \right)^2 a_1(j) + \left( j + \frac{3}{2} \right)^2 c_1(j) \right] \int_{-1}^{\mu_0} C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} C_{j+1}^{-\frac{1}{2}} d_\mu \\ + \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) b_1(i) + \left( i + \frac{3}{2} \right) \right] \left[ \left( j - \frac{1}{2} \right) b_1(j) + \left( j + \frac{3}{2} \right) \right] \int_{\mu_0}^1 C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} d_\mu \quad (3.29)$$

et

$$B_j = \left[ \left( j - \frac{1}{2} \right)^2 a_1(j) + \left( j + \frac{3}{2} \right)^2 c_1(j) \right] \sum_{i=1}^N \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 a_2(i) + \left( i + \frac{3}{2} \right)^2 c_2(i) \right] \int_{-1}^{\mu_0} C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} C_{j+1}^{-\frac{1}{2}} d_\mu \\ + \left[ \left( j - \frac{1}{2} \right) b_1(j) + \left( j + \frac{3}{2} \right) \right] \sum_{i=1}^N \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) b_2(i) \right] \int_{\mu_0}^1 C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} d_\mu \quad (3.30)$$

La précision du résultat dépend en grande partie de l'évaluation des intégrales apparaissant dans le système linéaire. Les polynômes de Gegenbauer sont des combinaisons linéaires des polynômes de Legendre. Le degré du produit  $C_{i+1}^{-\frac{1}{2}} C_{i+1}^{-\frac{1}{2}}$  étant  $i + j + 2$ , on utilise une quadrature de Gauss-Legendre avec au moins  $i + j + 2$  points pour estimer les intégrales. Ainsi, le calcul des intégrales est exact. Les séries utilisées sont à convergence rapide, peu de termes suffisent pour une bonne convergence. De nombreux auteurs ont déjà utilisé ce type de sommation dans des problèmes similaires. Wang [2] a obtenu une erreur inférieure à 1% avec une troncature au 30<sup>ème</sup> terme. Michalopoulo et al [5] ont montré que le taux de convergence dépend de la distance de la sphère au plan. En pratique, ils choisissent 50 termes pour une très bonne précision pour une sphère proche de la paroi. Lorsque la sphère est éloignée de la paroi, Brenner s'est contenté du premier terme. On donne, à titre d'exemple, la convergence de la série pour un rayon de singularité donné (ici  $r = 2$ ). La Table 3.1 donne l'évolution du facteur correcteur en fonction de l'ordre de troncature  $N$ , pour différentes valeurs de  $h$ . On montre que la convergence est d'autant plus lente que la sphère est proche de la paroi. De plus, on montre que la convergence des séries dans le cas présenté se comporte de manière similaire à celle obtenue par Brenner. Dans le pire des cas, on obtient une précision de  $10^{-9}$  pour un ordre de troncature inférieur à  $N = 20$ . En pratique, vu le peu de temps de calcul nécessaire à la résolution, on choisit  $N = 35$ .

$N$	$h = 5$		$h = 2$		$h = 1.2$	
	$R = 2$	Surface non contrainte (Brenner)	$R = 2$	Surface non contrainte (Brenner)	$R = 2$	Surface non contrainte (Brenner)
1	1.265500952	1.158639512	1.760244509	1.476239569	2.724967864	2.539100252
2	1.282376416	1.175312065	1.896616182	1.583101286	3.181245465	2.907008955
3	1.282656804	1.175596514	1.909473722	1.595220958	3.348663610	3.029572471
4	1.282661310	1.175600951	1.910639599	1.596534192	3.414651242	3.076133296
5	1.282661374	1.175601016	1.910764439	1.596667751	3.439465867	3.094016643
6	1.282661374	1.175601017	1.910778262	1.596680676	3.448140658	3.100753620
7	1.282661374	1.175601017	1.910779580	1.596681880	3.450965391	3.103228421
8	1.282661374	1.175601017	1.910779689	1.596681989	3.451833095	3.104116175
9	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452090568	3.104428124
10	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452166722	3.104535839
11	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452190058	3.104572485
12	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452197643	3.104584795
13	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452200262	3.104588886
14	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201197	3.104590232
15	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201534	3.104590672
16	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201653	3.104590814
17	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201694	3.104590860
18	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201708	3.104590874
19	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201712	3.104590879
20	1.282661374	1.175601017	1.910779699	1.596681999	3.452201714	3.104590881

TAB. 3.1 – Convergence des séries

$\alpha$	$h/a$	$r/a \rightarrow \infty$	$r/a = 8$	$r/a = 4$	$r/a = 2$	$r/a = 1$	$r/a = 0.5$	$r/a \rightarrow 0$
0.5000	1.1276	3.9867	3.9867	4.0066	4.3519	5.7462	7.9770	9.2518
0.6786	1.2392	2.8336	2.8337	2.8879	3.2245	4.2591	5.2237	5.4928
0.8571	1.3904	2.2583	2.2599	2.3220	2.6514	3.3495	3.7375	3.8005
1.0357	1.5860	1.9172	1.9260	1.9931	2.2933	2.7274	2.8755	2.8915
1.2143	1.8324	1.6931	1.7042	1.7795	2.0376	2.2867	2.3414	2.3458
1.3929	2.1374	1.5363	1.5502	1.6313	1.8392	1.9715	1.9912	1.9925
1.5714	2.5106	1.4217	1.4398	1.5236	1.6785	1.7436	1.7507	1.7511
1.7500	2.9642	1.3355	1.3577	1.4404	1.5469	1.5768	1.5793	1.5795
1.9286	3.5125	1.2693	1.2962	1.3729	1.4399	1.4528	1.4537	1.4538
2.1071	4.1731	1.2177	1.2495	1.3153	1.3538	1.3591	1.3595	1.3595
2.2857	4.9672	1.1770	1.2130	1.2649	1.2852	1.2873	1.2874	1.2875
2.4643	5.9201	1.1445	1.1837	1.2209	1.2307	1.2316	1.2316	1.2316
2.6429	7.0622	1.1185	1.1587	1.1829	1.1874	1.1878	1.1878	1.1878
2.8214	8.4301	1.0974	1.1365	1.1509	1.1529	1.1530	1.1530	1.1530
3	10.0676	1.0803	1.1166	1.1244	1.1252	1.1252	1.1252	1.1252

TAB. 3.2 – Facteur correcteur  $K$ 

### 3.3 Résultats

#### 3.3.1 Facteur correcteur à la force de Stokes

Nous avons déterminé le facteur correcteur  $K$  à la force de Stokes, dans différentes configurations. Pour une valeur donnée du rapport  $\frac{r}{a}$  entre le rayon de la singularité  $r$  et le rayon de la sphère  $a$ , on détermine l'évolution du facteur correcteur  $K$  en fonction de la distance de la sphère à la paroi.

On appelle  $h$  la distance du centre de la sphère à la paroi. On définit la distance de la sphère à la paroi  $e$ , telle que  $e = h - a$ .

Les valeurs du coefficient de traînée  $K$ , défini tel que  $F = 6\pi\kappa aKU$ , sont reportées dans la Table 3.2. Afin de comparer avec les cas obtenus par Brenner ( $r/a \rightarrow 0$  et  $r/a \rightarrow \infty$ ), le coefficient correcteur  $K$  est reporté en fonction de  $h/a$ .

On constate que  $K(\frac{h}{a}, \frac{r}{a})$  est situé entre les deux cas asymptotiques. Les cas asymptotiques, schématisés sur la Figure 3.2, sont donnés de façon analytique par Brenner. Le premier cas correspond au cas limite  $r \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que le plan  $z = 0$  est entièrement constitué d'une paroi solide. Le deuxième correspond à  $r \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que le plan  $z = 0$  est entièrement constitué d'une surface non contrainte. Lorsque la sphère est

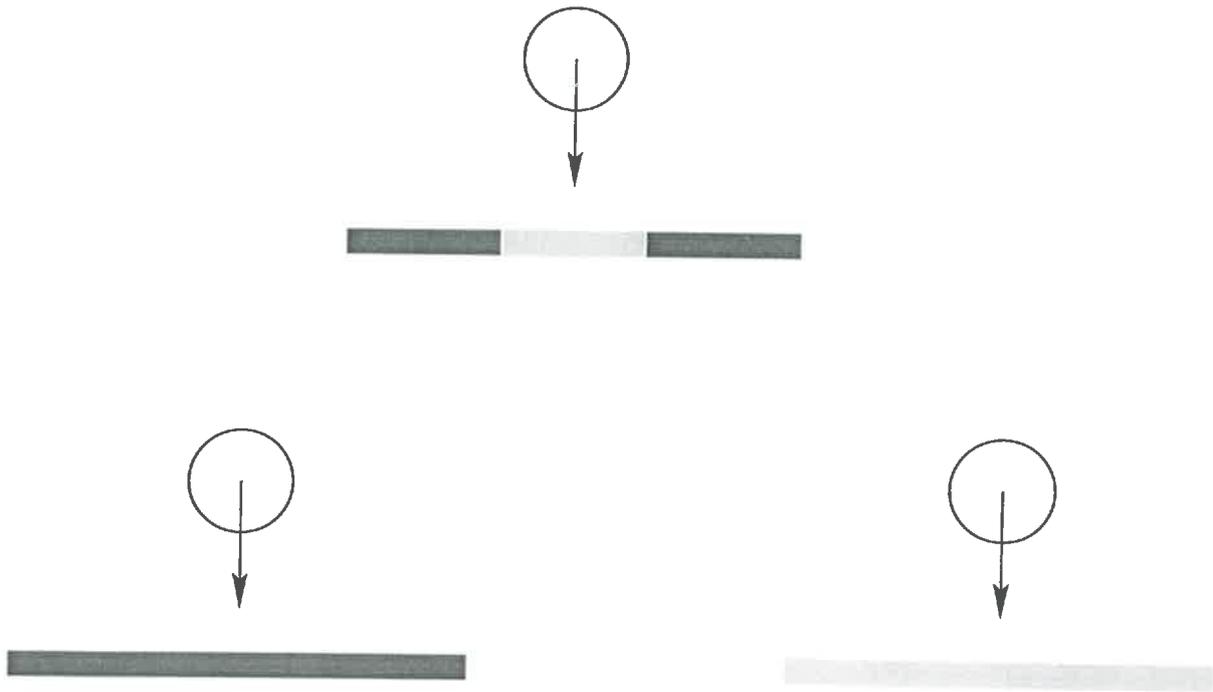


FIG. 3.2 – Cas asymptotiques dans le cas d'école

loin de la singularité ( $\frac{h}{a}$  est grand), le coefficient de traînée est proche du cas comportant une paroi solide. La traînée sur la sphère se comporte comme s'il n'y avait pas de singularité. Inversement, lorsque la sphère est presque au contact, la traînée se comporte comme dans le cas d'une surface non contrainte seule. Dans la zone de raccordement des deux comportements asymptotiques, les deux types de condition limite jouent un rôle important.

### 3.3.2 Influence relative des conditions limites

Afin de caractériser l'influence de chacune, nous introduisons le paramètre  $f$  défini tel que :

$$f\left(\frac{h}{a}, \frac{r}{a}\right) = \frac{K\left(\frac{h}{a}, \frac{r}{a}\right) - K\left(\frac{h}{a}, \infty\right)}{K\left(\frac{h}{a}, 0\right) - K\left(\frac{h}{a}, \infty\right)} \quad (3.31)$$

Le paramètre  $f$  donne la part du coefficient de traînée due à la paroi solide par rapport à celle due à la surface non contrainte. Lorsque  $f$  est proche de 0, le coefficient de traînée est proche de celui obtenu dans le cas où la paroi est constituée d'une surface non contrainte. Inversement lorsque  $f$  est proche de 1, le coefficient de traînée est essentiellement dû à l'influence de la paroi solide.

$h/a$	$r/a = 8$	$r/a = 4$	$r/a = 2$	$r/a = 1$	$r/a = 0.5$
1.1276	0.0000	0.0038	0.069	0.334	0.757
1.2392	0.0000	0.0204	0.147	0.536	0.898
1.3904	0.0010	0.0413	0.254	0.707	0.959
1.5860	0.0090	0.0779	0.386	0.831	0.983
1.8324	0.0169	0.1323	0.527	0.909	0.993
2.1374	0.0306	0.2082	0.664	0.954	0.997
2.5106	0.0550	0.3094	0.779	0.977	0.998
2.9642	0.0910	0.4299	0.866	0.989	0.999
3.5125	0.1461	0.5614	0.924	0.994	0.999
4.1731	0.2243	0.6884	0.960	0.997	0.999
4.9672	0.3260	0.7962	0.979	0.998	0.999
5.9201	0.4493	0.8767	0.989	0.999	0.999
7.0622	0.5799	0.9301	0.995	0.999	1.000
8.4302	0.7040	0.9631	0.997	0.999	1.000
10.067	0.8081	0.9811	0.998	0.999	1.000

TAB. 3.3 – Paramètre d'influence  $f$ 

La Table 3.3 montre que  $f$  est toujours compris entre 0 et 1. La traînée exercée sur la sphère est, de ce fait, influencée par les deux conditions limites. On a représenté sur la Figure 3.3 les variations de  $f$  en fonction de la distance  $\frac{h}{a}$  du centre de la sphère à la paroi. Quelle que soit la taille relative  $\frac{r}{a}$  de la sphère par rapport à la taille de la singularité, l'influence de la singularité diminue jusqu'à devenir négligeable lorsque la sphère s'éloigne de la singularité. La distance, au-delà de laquelle l'influence de la singularité est faible, dépend a priori du rapport  $\frac{r}{a}$ .

L'étude de la Figure 3.4 montre que la distance d'influence de la singularité sur la sphère est conditionnée par le rapport  $e/r$ . La distance  $e$  dépend encore de la taille de la sphère. En effet,  $e = h - a$  est en fait la plus petite distance de la sphère à la paroi. On constate que le choix de  $e/r$  comme paramètre pour décrire l'évolution du coefficient de traînée semble plus judicieux que  $\frac{h}{a}$  pour traduire les effets de la géométrie.

La Figure 3.4 nous permet de conclure que, lorsque la sphère est à une distance de la paroi supérieure à deux rayons de singularité, le coefficient de traînée est dû à plus de 95% à la paroi solide. De plus, si l'on considère l'éloignement de la sphère comme la plus petite distance de la sphère à la paroi  $e$ , l'influence relative de la singularité sur la sphère est peu conditionnée par la taille de la sphère, mais uniquement par le rapport  $e/r$  entre

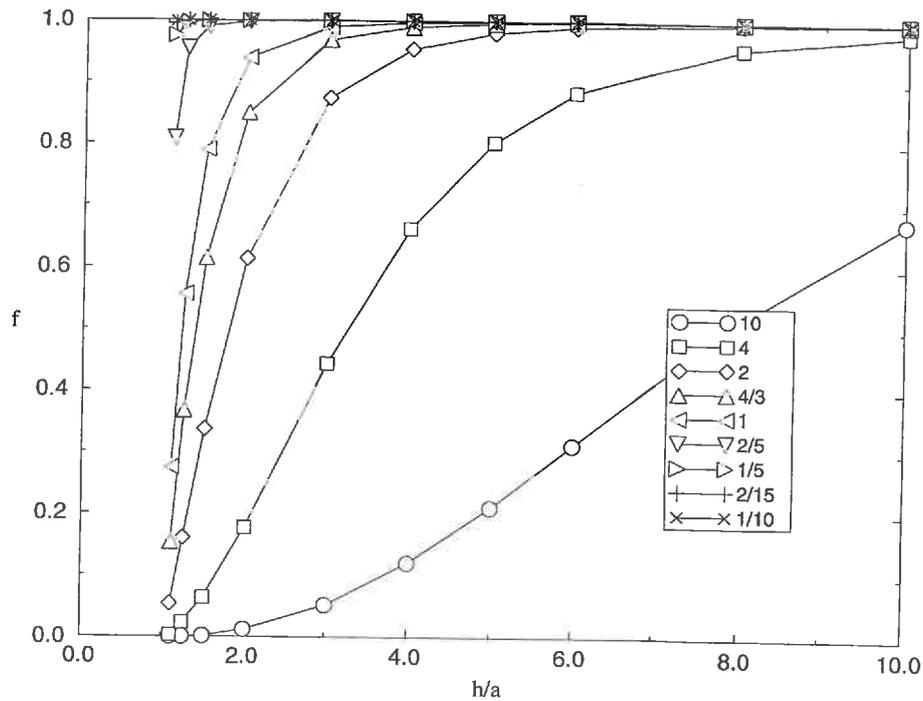


FIG. 3.3 – Paramètre d'influence  $f$  pour différentes valeurs de  $r/a$

l'éloignement et la taille de la singularité.

### 3.3.3 Estimation du coefficient de traînée

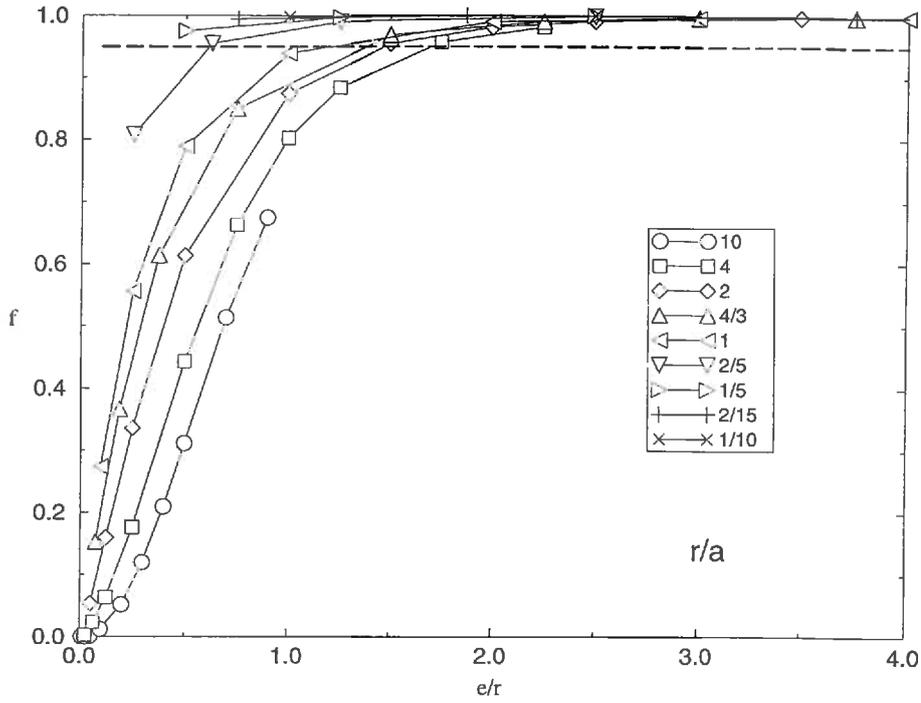
L'objet de cette section est de déterminer une approximation simple du coefficient de traînée à l'aide des deux comportements asymptotiques donnés par Brenner. Vu les résultats obtenus à la section précédente, on cherche une approximation  $f^*$  du paramètre d'influence  $f$ . L'approximation  $K^*$  du facteur correcteur  $K$  à la force de Stokes sera alors donnée par :

$$K^*\left(\frac{h}{a}, \frac{r}{a}\right) = K\left(\frac{h}{a}, 0\right)f^* + K\left(\frac{h}{a}, \infty\right)(1 - f^*) \quad (3.32)$$

Pour que  $f^*$  soit un raccord correct entre les deux cas asymptotiques, il doit admettre les deux limites suivantes

$$\begin{aligned} f^* &\rightarrow 1 \text{ lorsque } \frac{r}{a} \rightarrow 0 \\ f^* &\rightarrow 0 \text{ lorsque } \frac{r}{a} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.33)$$

On a vu précédemment que Brenner se contente du premier terme dans son développement. De façon similaire, en première approximation, on tronque la solution infinie 3.8 à l'ordre 1. Dès lors, le système linéaire 3.28 se résume à une équation scalaire :

FIG. 3.4 – Paramètre d'influence  $f$  pour différentes valeurs de  $r/a$ 

$$[\alpha_{nc}^2(1 - I(\mu_0)) + \alpha_s^2 I(\mu_0)] d_1\left(\frac{h}{a}, \frac{r}{a}\right) = \alpha_{nc}\beta_{nc}(1 - I(\mu_0)) + \alpha_s\beta_s\mu_0 \quad (3.34)$$

où

$$I(\mu_0) = \int_{\mu_0}^{-1} C_1^{-\frac{1}{2}} C_1^{-\frac{1}{2}} d\mu \quad (3.35)$$

Dans 3.34, les indices  $_{nc}$  traduisent la contribution de la surface non contrainte, et les indices  $_s$  celle de la paroi solide.

La solution des cas asymptotiques  $d_{nc}$  et  $d_s$  est donnée par :

$$\alpha_{nc}d_{nc}\left(\frac{h}{a}\right) = \beta_{nc} \quad (3.36)$$

et

$$\alpha_s d_s\left(\frac{h}{a}\right) = \beta_s \quad (3.37)$$

En remplaçant 3.36 et 3.37 dans 3.34, on obtient comme solution au problème complet :

$$d_1\left(\frac{h}{a}, \frac{r}{a}\right) = \frac{(1 - I(\mu_0))}{(1 - I(\mu_0)) + \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{nc}}\right)^2 I(\mu_0)} d_{nc} + \frac{I(\mu_0)}{I(\mu_0) + \left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2 (1 - I(\mu_0))} d_s \quad (3.38)$$

Après identification entre 3.32 et 3.38, nous sommes amenés à chercher  $f^*$  de la forme :

$$f^* = \frac{I(\mu_0)}{I(\mu_0) + \left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2 (1 - I(\mu_0))} \quad (3.39)$$

L'intégrale  $I(\mu_0)$ , définie en 3.35, s'obtient rapidement par intégration :

$$I(\mu_0) = \frac{15}{4} \left( \frac{2}{15} - \frac{\mu_0}{4} + \frac{\mu_0^3}{6} - \frac{\mu_0^5}{20} \right) \quad (3.40)$$

Il reste à déterminer la valeur de  $\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}$ .

Une approximation de cette valeur peut être obtenue dans le cas où  $\alpha$  est grand, c'est-à-dire, lorsque la sphère est loin de la singularité. En utilisant les valeurs de  $\alpha_{nc}$  et de  $\alpha_s$  telle que :

$$\alpha_{nc} = \frac{1}{4}a_1(1) + \frac{2}{5}4c_1(1) \quad (3.41)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2}b_1(1) + \frac{5}{2} \quad (3.42)$$

et en notant que

$$\begin{aligned} a_1(1) &\propto 1 \quad \text{lorsque } \alpha \text{ est grand} \\ b_1(1) &\propto e^\alpha \quad \text{lorsque } \alpha \text{ est grand} \\ c_1(1) &\propto 1 \quad \text{lorsque } \alpha \text{ est grand} \end{aligned} \quad (3.43)$$

on trouve comme première approximation :

$$\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2 \propto e^{-2\alpha} \quad (3.44)$$

On peut également déterminer ce rapport en utilisant directement les valeurs de  $f$  obtenues par le calcul. On a :

$$\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2 = \frac{I(\mu_0)(1-f)}{(1-I(\mu_0))f} \quad (3.45)$$

Les valeurs du rapport ainsi obtenues sont représentées sur la Figure 3.5. On utilise une échelle logarithmique pour le rapport  $\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}$ . On constate que, pour des valeurs suffisamment grandes de  $\alpha$ , on obtient une relation linéaire.

La Table 3.4 donne les valeurs de la pente obtenue après régression linéaire dans la région où  $\alpha$  est suffisamment grand (voir Figure 3.5). On constate que la pente reste proche de  $-2$ . Par contre, l'ordonnée à l'origine dépend du rapport  $r/a$ .

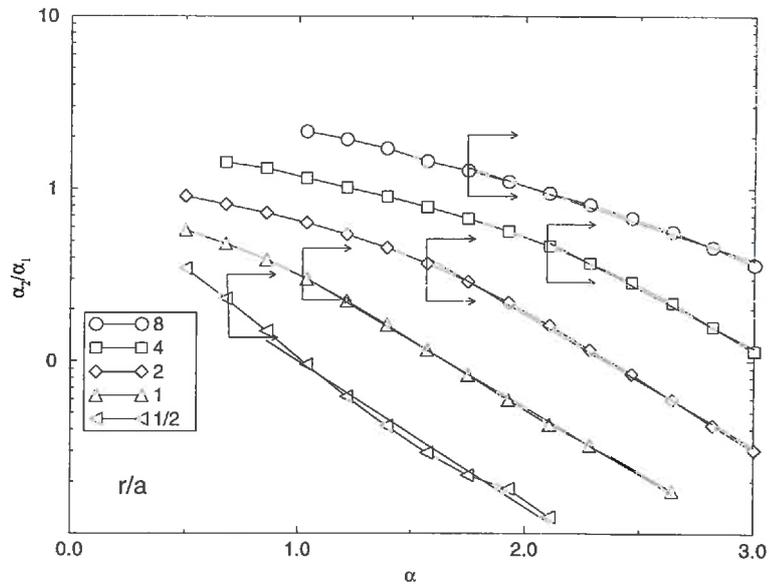


FIG. 3.5 – Paramètre de singularité  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$  et domaine de régression

$r/a$	8	4	2	1	0.5
pente	-0.9917	-1.5718	-1.7715	-1.7880	-1.9474
ordonnée	7.5168	13.3053	6.4263	1.9185	0.6991
à l'origine					
coefficient	0.9967	0.9987	0.9995	0.9996	0.9982
de corrélation					

TAB. 3.4 – Valeur de la pente de la droite de régression de la Figure 3.5

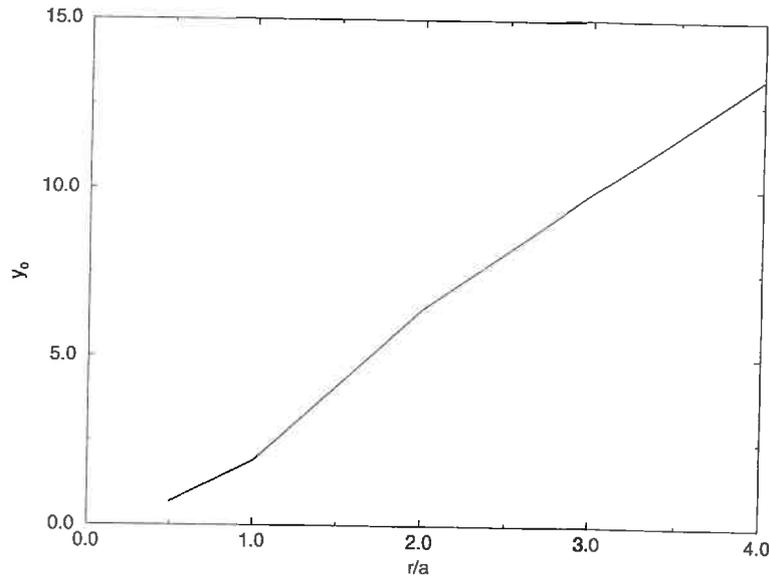


FIG. 3.6 – Ordonnées à l'origine des régressions de la Figure 3.5

Les valeurs de l'ordonnée à l'origine sont reliées linéairement au rapport  $\frac{r}{a}$  (3.6). En effectuant une nouvelle régression pour déterminer la dépendance de l'ordonnée à l'origine par rapport à  $r/a$ , on trouve :

$$y_0 = 3.678 \frac{r}{a} - 1.309 \quad (3.46)$$

avec un coefficient de corrélation de 0.9980. On adopte finalement la corrélation suivante :

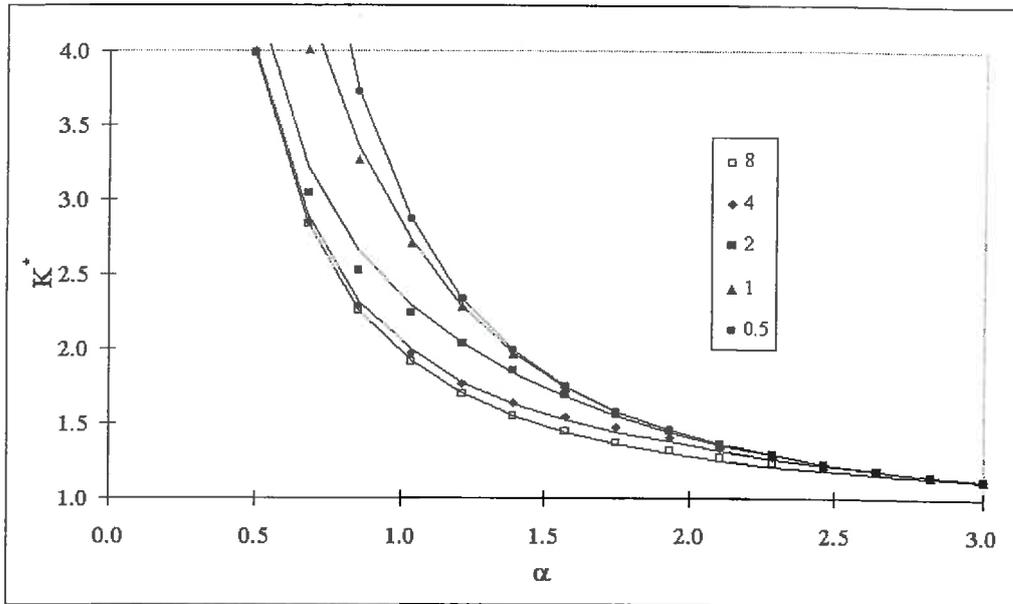
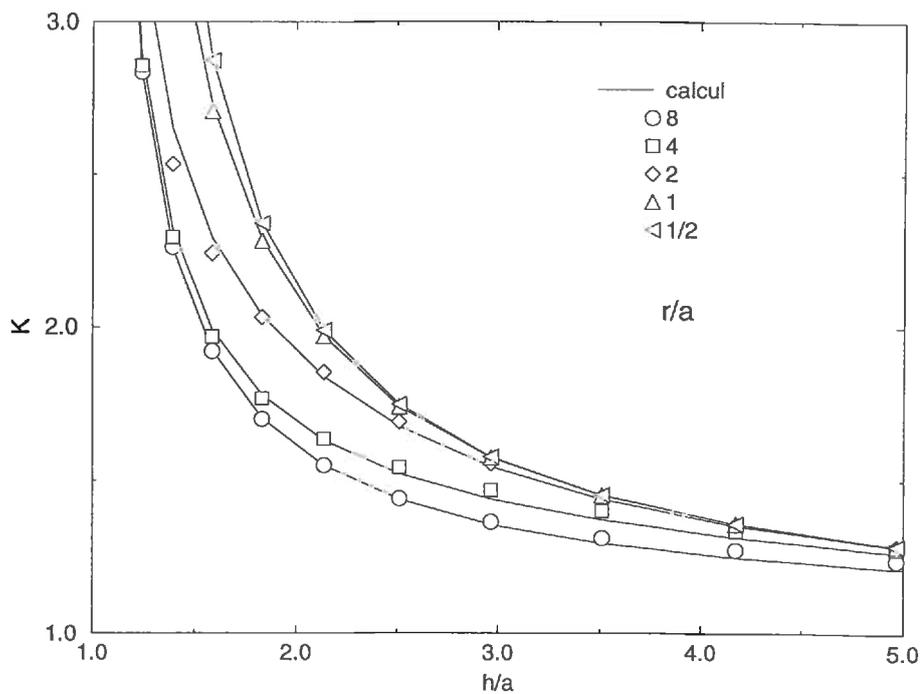
$$\left( \frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s} \right)^2 = \left( 3.678 \frac{r}{a} - 1.309 \right) e^{-2\alpha} \quad (3.47)$$

En rappelant que l'on a la relation suivante :

$$f^* = \frac{I(\mu_0)}{I(\mu_0) + \left( \frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s} \right)^2 (1 - I(\mu_0))} \quad (3.48)$$

on reconstruit l'approximation  $K^*$  du facteur correcteur  $K$  à la force de Stokes à l'aide de la relation 3.32 précédemment définie.

Les Figures 3.7 et 3.8 montrent que l'on obtient ainsi une bonne approximation du facteur correcteur. Sur ces figures, les symboles correspondent aux valeurs trouvées directement par le calcul numérique, les traits continus aux valeurs obtenues par l'approximation. Les tracés sont donnés pour plusieurs valeurs du rapport  $r/a$ .

FIG. 3.7 – Reconstruction du facteur correcteur à la force de Stokes en fonction de  $\alpha$ FIG. 3.8 – Reconstruction du facteur correcteur à la force de Stokes en fonction de  $h/a$  – cas d'école

$h/a$	$\frac{r}{a} \rightarrow \infty$	10	4	2	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{r}{a} \rightarrow 0$
1.1	1.0000	1.0503	1.1412	1.3777	2.2867	5.8900	10.500	11.459
1.25	1.0000	1.0502	1.1419	1.3819	2.1807	4.0355	5.2340	5.3053
1.5	1.0000	1.0504	1.1433	1.3882	2.0334	2.9207	3.1983	3.2054
2.0	1.0000	1.0505	1.1475	1.3919	1.8058	2.0857	2.1248	2.1255
3.0	1.0000	1.0510	1.1579	1.3581	1.5168	1.5649	1.5691	1.5692
4.0	1.0000	1.0519	1.1637	1.3019	1.3655	1.3791	1.3802	1.3802
5.0	1.0000	1.0532	1.1617	1.2509	1.2795	1.2847	1.2851	1.2851
6.0	1.0000	1.0549	1.1541	1.2110	1.2254	1.2277	1.2279	1.2279
8.0	1.0000	1.0579	1.1328	1.1571	1.1617	1.1624	1.1625	1.1625
10.0	1.0000	1.0596	1.1125	1.1240	1.1262	1.1262	1.1262	1.1262

TAB. 3.5 – Facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire – Dagan et al

## 3.4 Généralisation à d'autres singularités de paroi

### 3.4.1 Sphère se déplaçant dans l'axe d'un orifice circulaire

Dagan et al [3] ont étudié la force de traînée qui s'applique sur une sphère lorsque celle-ci s'approche d'un orifice circulaire. Les facteurs correcteurs obtenus sont reportés à titre indicatif dans la Table 3.5, ainsi que sur la Figure 3.9. On constate que l'allure des courbes de la Figure 3.9 est similaire à celle des courbes obtenues précédemment.

De plus, les valeurs sont à nouveau comprises entre deux cas asymptotiques (Figure 3.10). Le premier cas asymptotique correspond au cas où  $r/a \rightarrow 0$ , c'est-à-dire lorsque la sphère est loin de l'orifice. Dans ce cas, l'effet de l'orifice sur la sphère est négligeable. La force de traînée exercée sur la sphère est donc la même que celle obtenue en présence d'une paroi solide infinie. Les valeurs du facteur correcteur sont donnés par Brenner. Le deuxième cas asymptotique ( $r/a \rightarrow \infty$ ) correspond au cas où la sphère est beaucoup plus petite que l'orifice. Dès lors, la paroi solide n'a plus d'influence sur la traînée. On est alors ramené au cas d'une sphère se déplaçant dans un milieu infini au repos. Il n'y a donc pas de correction à apporter à la force de Stokes et le facteur correcteur est égal à 1.

Les deux cas asymptotiques étant déterminés, on peut calculer le facteur d'influence  $f$  qui donne la part relative de chacun des deux cas asymptotiques dans le problème complet. La Figure 3.11 représente les valeurs de  $f$  correspondant à l'étude de Dagan et al. L'allure des courbes est une nouvelle fois proche de celle des courbes obtenues dans le

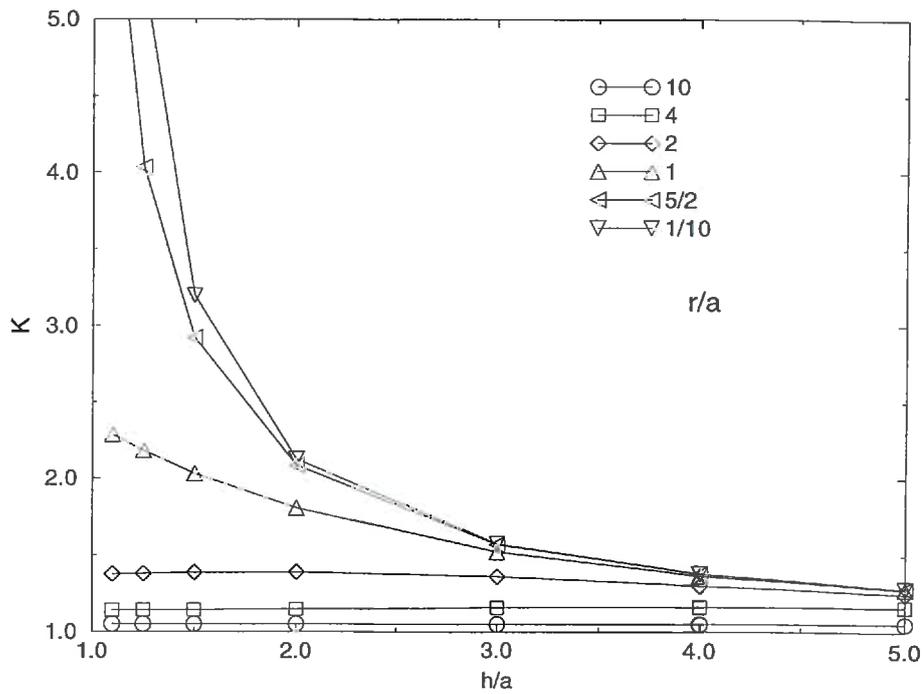


FIG. 3.9 – *Facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire – Dagan et al*

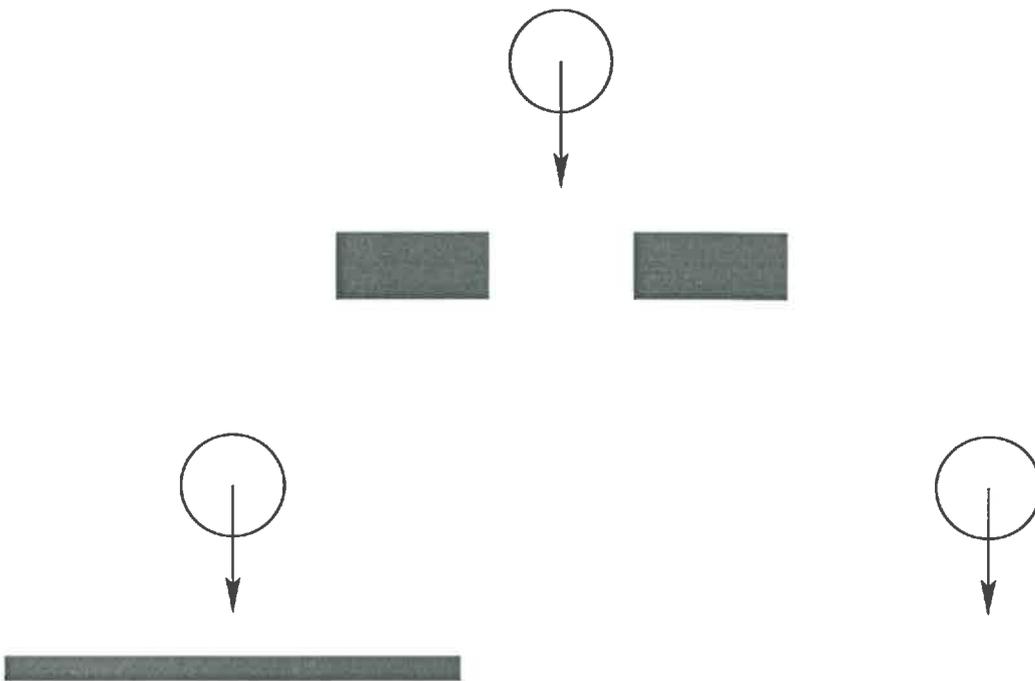


FIG. 3.10 – *Cas asymptotiques pour une sphère se déplaçant dans l'axe d'un orifice circulaire*

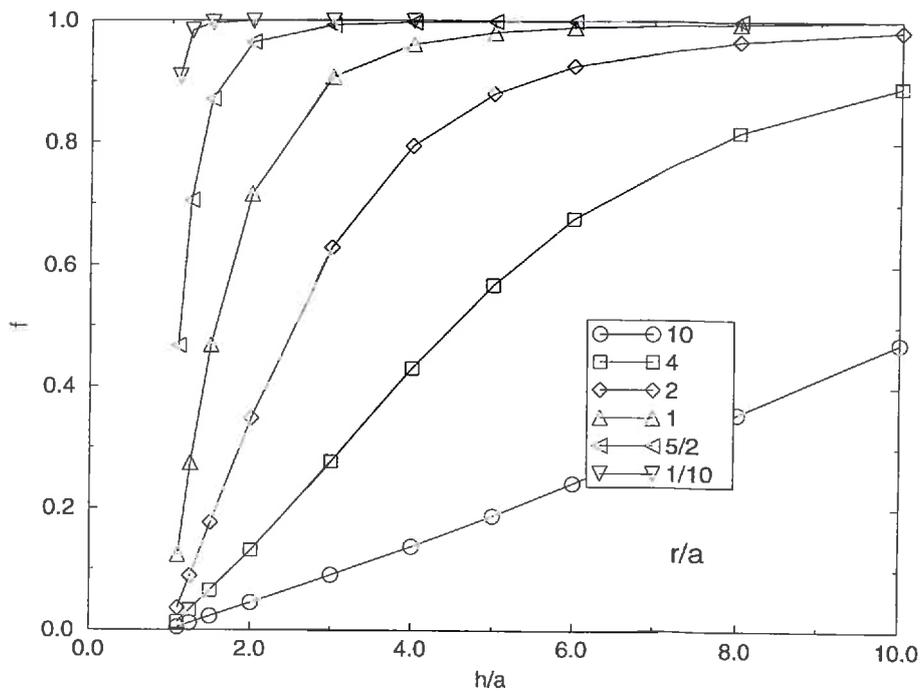


FIG. 3.11 — Paramètre d'influence pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire

cas d'école.

Les symboles de la Figure 3.12 montrent les valeurs du paramètre  $\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2$  obtenues dans le cas traité par Dagan et al. On propose comme corrélation à ces courbes :

$$\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2 = \frac{1.5}{\left(\frac{e}{r}\right)^{0.7} + 0.4 \left(\frac{1}{\frac{e}{r}}\right)^p} \quad (3.49)$$

où :

$$p = \frac{1}{5\frac{a}{r} + 0.7} \quad (3.50)$$

Les résultats de cette corrélation sont représentés sur la Figure 3.12. Les symboles sont les valeurs de  $\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2$  déterminées d'après les résultats de Dagan, les traits continus représentent l'interpolation 3.49.

A partir de l'approximation de la valeur de  $\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2$  on peut remonter via  $f^*$  à une estimation  $K^*$  du facteur correcteur de traînée  $K$  à l'aide d'une relation identique à la relation 3.32. L'approximation du facteur correcteur de traînée est superposée sur la Figure 3.13 aux valeurs données par Dagan pour différentes valeurs de  $r/a$ . On obtient ainsi une bonne approximation du facteur correcteur dans la plupart des cas. On note cependant une légère déviation lorsque  $d/a$  est faible pour des valeurs du rapport de taille

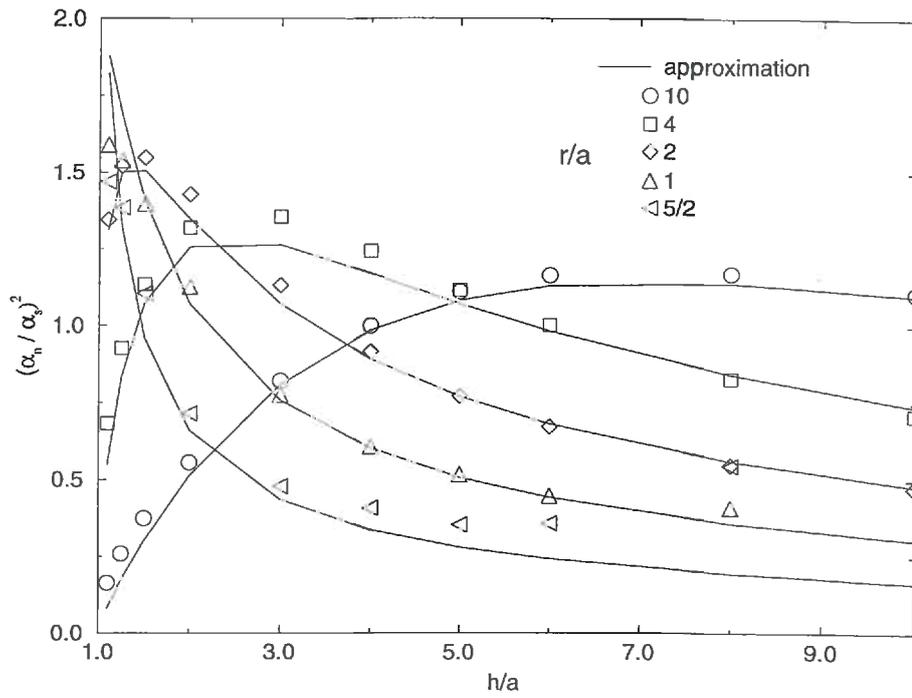


FIG. 3.12 =  $\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_s}\right)^2$  pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire

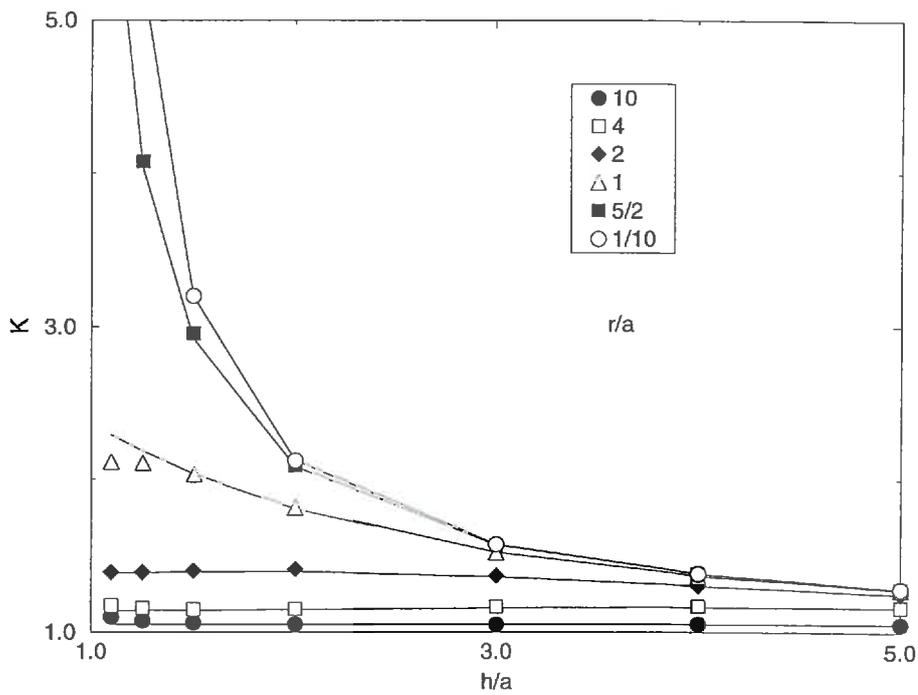


FIG. 3.13 - Approximation du facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire

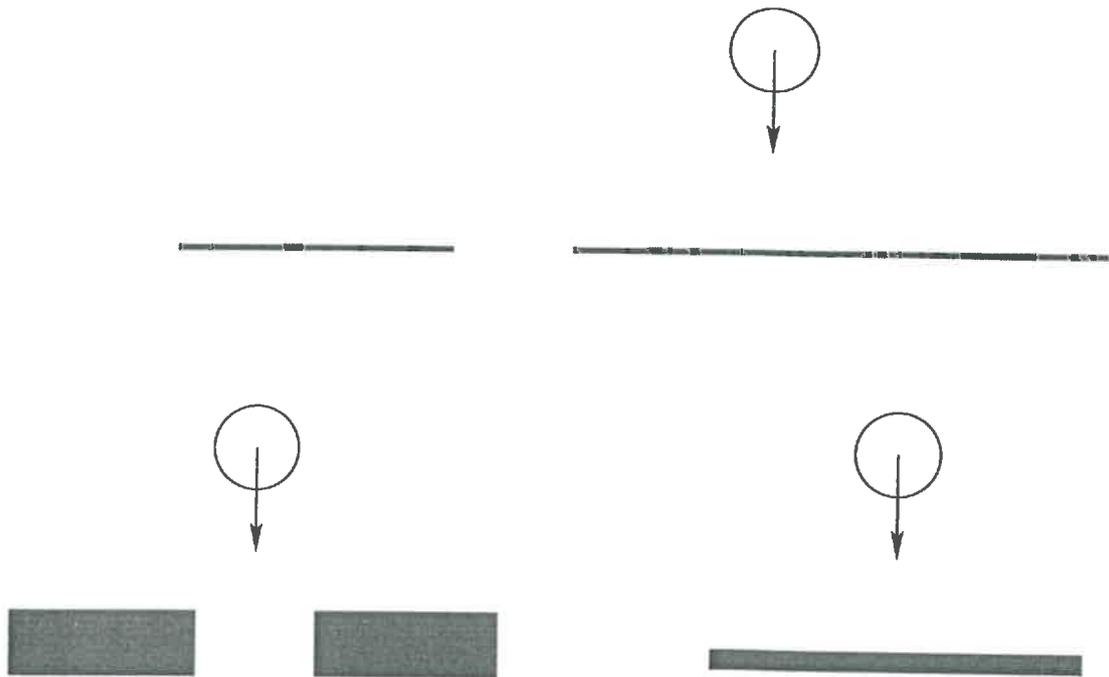


FIG. 3.14 – Cas asymptotiques pour une sphère se déplaçant orthogonalement à une paroi comportant un orifice circulaire : cas tridimensionnel

$r/a$  inférieures à 1.

### 3.4.2 Sphère se déplaçant orthogonalement à une paroi comportant un orifice circulaire : cas tridimensionnel

Dans cette section nous appliquons notre méthode à des résultats obtenus par Yan et al [7]. Les auteurs ont généralisé les travaux axisymétriques de Dagan et al au cas tridimensionnel. Nous retiendrons, en particulier, de leur étude le cas d'une sphère se déplaçant orthogonalement à une paroi comportant un orifice circulaire. L'étude porte sur la modification du facteur de traînée en fonction de l'excentricité de la particule.

Dans ce cas, nous cherchons un raccordement entre deux cas asymptotiques connus (Figure 3.14) :

- la sphère se déplace dans l'axe de l'orifice (Dagan et al)
- la sphère se déplace orthogonalement à une plaque infinie (Brenner)

La Table 3.6 et la Figure 3.15 donnent les valeurs du facteur correcteur de traînée en fonction de la distance  $x/r$  de la sphère par rapport à l'axe de l'orifice. Les données

$d/a$	$x/r = 0$	$x/r = 0.25$	$x/r = 0.5$	$x/r = 1$	$x/r = 1.5$	$x/r = 2$	$x/r = 5$	$x/r = 10$
1.1	1.3777	1.4349	1.6271	6.7243	10.0157	10.6767	11.3378	11.4592
1.5	1.3882	1.431	1.5628	2.3584	2.9414	3.07003	3.1838	3.2054
2	1.3919	1.4159	1.4949	1.7609	2.0023	2.0686	2.1163	2.1255
4	1.3019	1.2956	1.3008	1.3153	1.3478	1.3662	1.3787	1.3802
10	1.124	1.1229	1.1226	1.1225	1.118	1.1205	1.1261	1.1262

TAB. 3.6 – Facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire

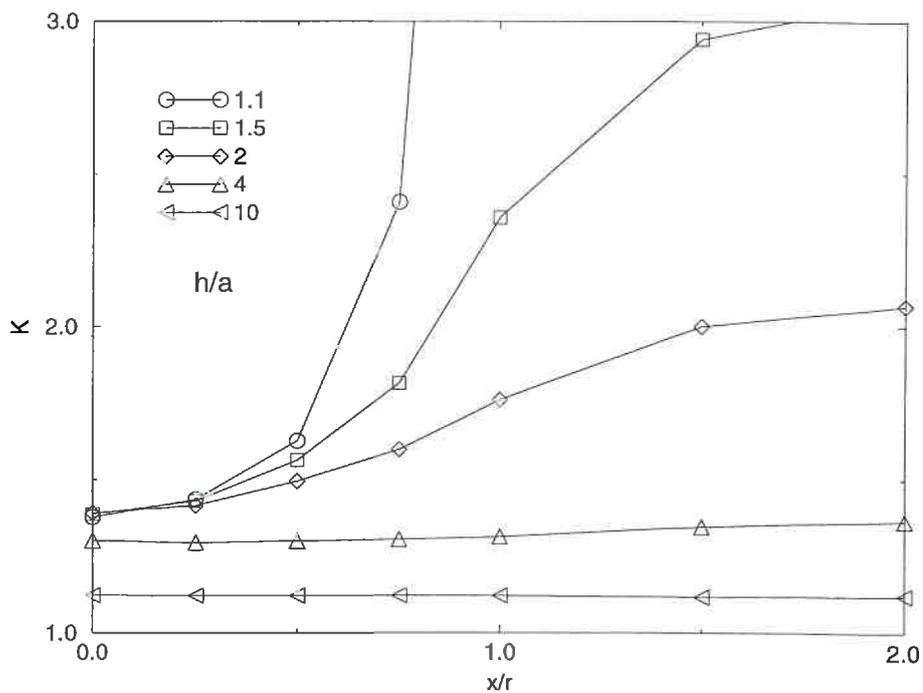


FIG. 3.15 – Facteur correcteur pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire,  $a/r = 0.5$

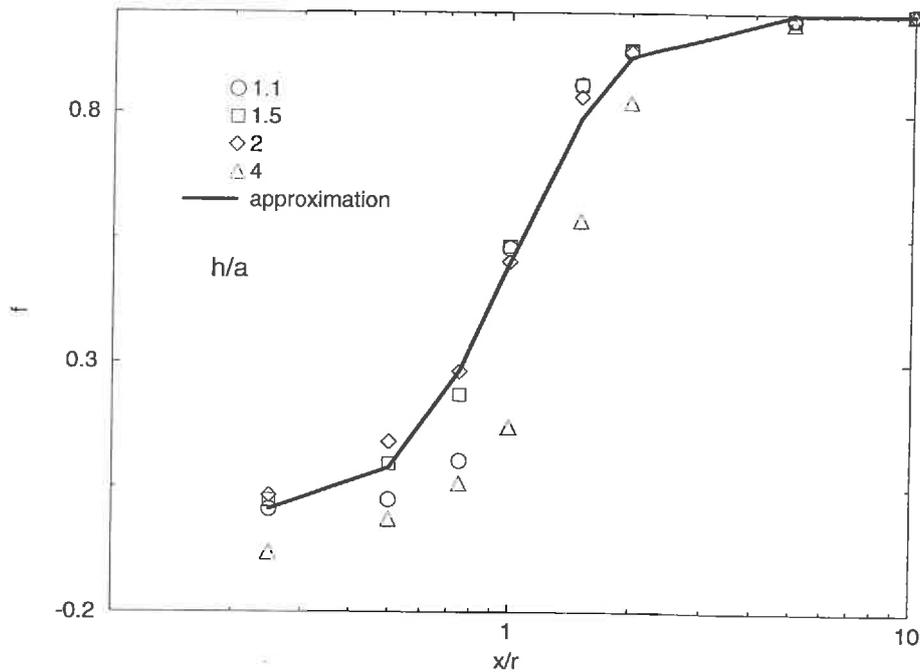


FIG. 3.16 – facteur d'influence pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire,  $a/r = 0.5$

correspondent à un rapport  $a/r = 0.5$ .

Connaissant les deux cas asymptotiques, nous en déduisons le paramètre d'influence  $f$ . Les valeurs obtenues sont reportées sur la Figure 3.16. On constate que le paramètre d'influence est compris entre 0 et 1, et respecte les deux cas asymptotiques. L'allure des courbes rappelle celle de la fonction de raccordement  $I(\mu_0)$ . Or, dans ce cas, le type de géométrie n'est pas tout à fait le même que précédemment. En effet, nous avons perdu l'axisymétrie du problème. Dès lors, la définition de  $\mu_0$  devient impossible. Néanmoins, nous cherchons un raccordement du type :

$$f^* = I(g(x/r)) \quad (3.51)$$

où  $g$  est une fonction qui reste à déterminer, dépendant de l'excentricité. La fonction  $g$  doit, de plus, être une bijection entre  $[0, \infty]$  et  $[-1, 1]$ . La Figure 3.16 est tracée avec l'axe des  $x/r$  en échelle logarithmique. On constate une certaine symétrie pour les valeurs de  $f$  de part et d'autre de  $x/r = 1$ . Ces différentes remarques nous amènent à chercher  $g$  de la forme :

$$g(x/r) = \frac{1 - (x/r)^p}{1 + (x/r)^p} \quad (3.52)$$

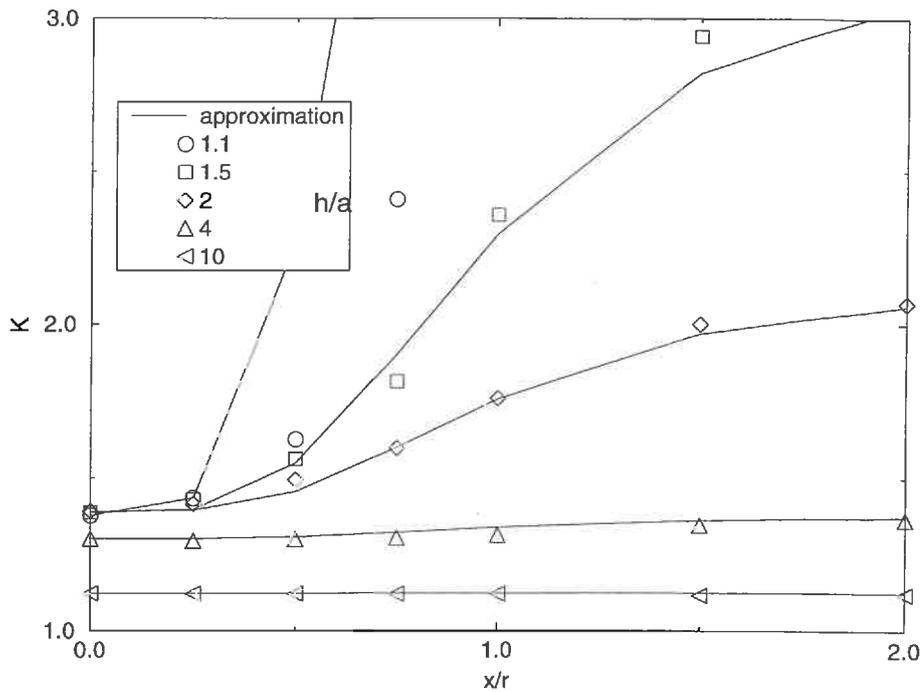


FIG. 3.17 – Corrélation du facteur correcteur pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire,  $a/r = 0.5$

Nous proposons comme corrélation :

$$f^* = I \left( \frac{1 - (x/r)^{1.7}}{1 + (x/r)^{1.7}} \right) \quad (3.53)$$

L'approximation  $f^*$  de  $f$  ainsi obtenue est superposée en trait continu sur la Figure 3.16 aux valeurs de  $f$  calculée d'après les résultats de Yan et al. On constate un bon accord général de la corrélation avec les données. Il faut tout de même noter des écarts importants lorsque  $h/a = 4$ . Cependant, vu que les deux cas asymptotiques fournissent des facteurs correcteurs quasiment identiques dans ce cas, l'écart fait sur la fonction de raccordement n'aura que peu d'incidence.

La corrélation obtenue avec 3.53 est superposée aux valeurs données par Yan et al sur la Figure 3.17. Les symboles sont les résultats de l'étude de Yan et al, les traits continus correspondent aux corrélations de l'équation 3.53. Les courbes sont obtenues pour différentes valeurs de la distance de la sphère à la paroi  $d/a$ . On note un bon accord entre les valeurs et l'approximation sauf lorsque la sphère est très proche de la paroi.

Cette corrélation est à comparer à celle proposée par les auteurs (Figure 3.18). On constate que la corrélation exposée dans cette section est meilleure que celle proposée par les auteurs. Elle présente, de plus, l'avantage d'être plus simple à mettre en oeuvre.

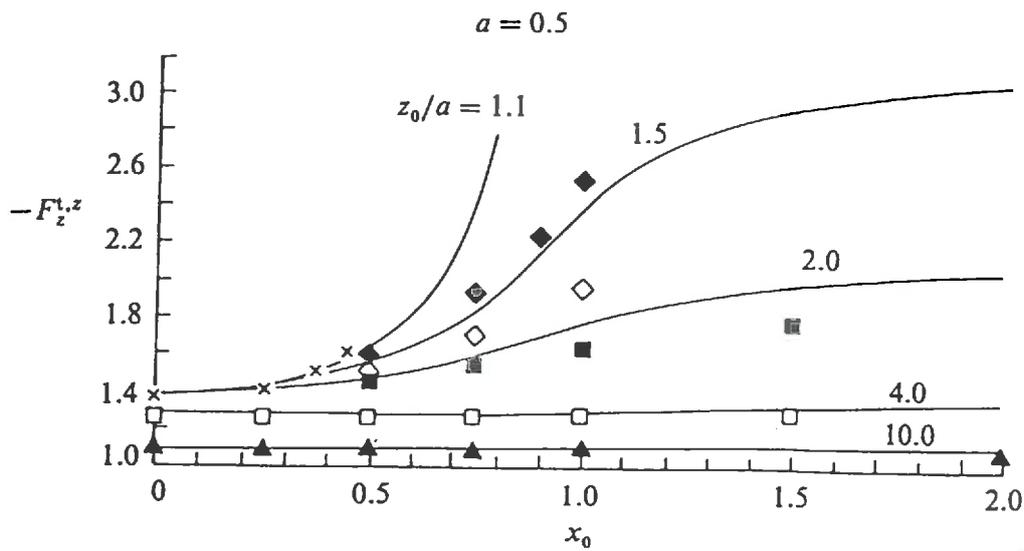


FIGURE 7. The results for  $F_z^{t,z}$ , the three-dimensional cases,  $a = 0.5$ .  $\times$ ,  $z_0/a = 0$ ;  $\triangle$ , 0.5;  $\blacklozenge$ , 1.1;  $\diamond$ , 1.5;  $\blacksquare$ , 2.0;  $\square$ , 4.0;  $\blacktriangle$ , 10.0.

FIG. 3.18 - Corrélations proposées par Yan et al [7] (p58) pour une sphère s'approchant de façon excentrée d'un orifice circulaire

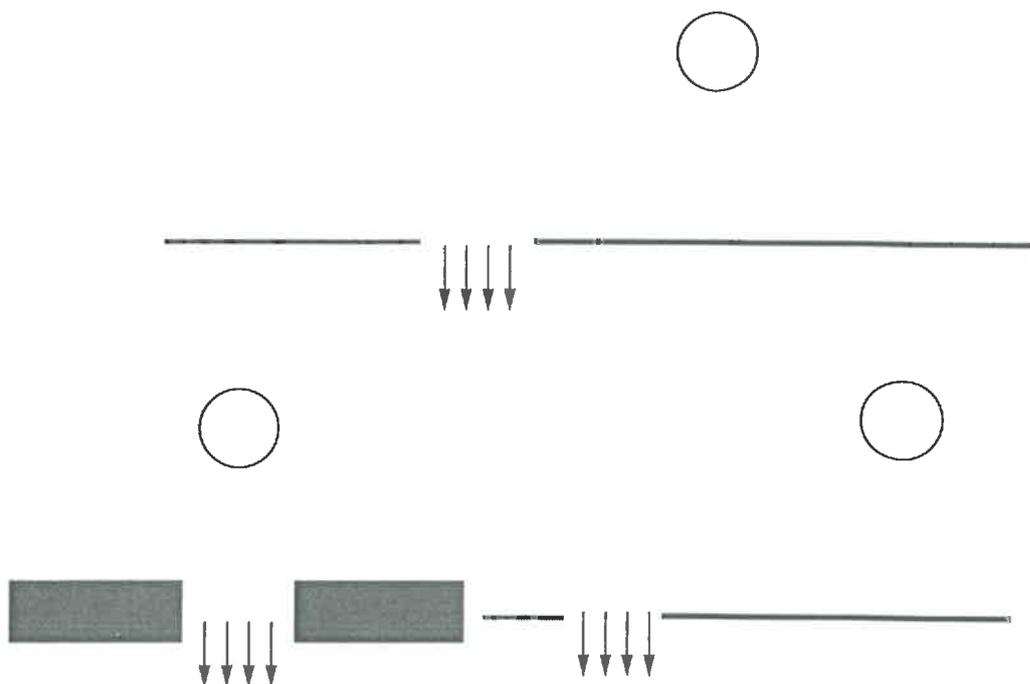


FIG. 3.19 – Cas asymptotiques pour une sphère dans un écoulement de Sampson : cas tridimensionnel

### 3.4.3 Sphère immobile dans un écoulement de Sampson

Yan et al ont également étudié le cas d'une sphère immobile dans un écoulement de Sampson. De façon similaire à la section précédente, l'étude porte sur la modification du facteur de traînée en fonction de l'excentricité de la particule.

Les deux cas asymptotiques sont schématisés sur la Figure 3.19. Le premier cas asymptotique correspond toujours au cas où la sphère est dans l'axe de l'orifice. Il est donné par Dagan. La détermination du deuxième cas asymptotique mérite une attention particulière. Vu que l'écoulement de Sampson ne s'uniformise pas en fonction de l'éloignement, il n'est pas possible de trouver un comportement asymptotique. Cependant, nous choisirons comme valeurs limites les plus grandes que nous possédons, à savoir les valeurs obtenues pour  $x/r = 10$ . Ce choix nous assure une plage assez grande de valeurs pour  $\frac{x}{r}$ .

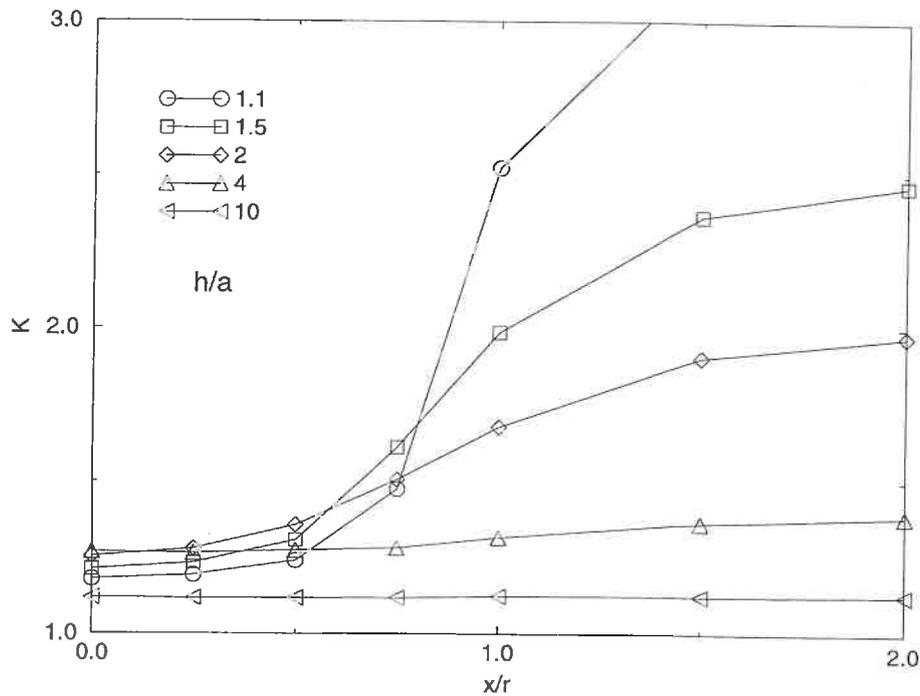
La Table 3.7 et la Figure 3.20 donnent les valeurs du facteur correcteur de traînée en fonction de la distance  $x/r$  de la sphère par rapport à l'axe de l'orifice. Les données correspondent à un rapport  $a/r = 0.5$ .

La méthode de détermination reste la même que précédemment. Comme le montre la Figure 3.21, on retrouve la même allure de courbe pour le facteur correcteur.

Finalement nous proposons la même corrélation pour  $f^*$  :

$d/a$	$x/r = 0$	$x/r = 0.25$	$x/r = 0.5$	$x/r = 1$	$x/r = 1.5$	$x/r = 2$	$x/r = 5$	$x/r = 10$
1.1	1.1797	1.1926	1.2409	2.5227	3.1772	3.3206	3.4327	3.4562
1.5	1.2121	1.2333	1.3078	1.986	2.3649	2.4648	2.5368	2.5511
2	1.2544	1.2789	1.357	1.6773	1.9052	1.9735	2.0226	2.0315
4	1.2693	1.2652	1.2733	1.3159	1.3649	1.3871	1.4056	1.408
10	1.1187	1.1176	1.1173	1.1242	1.124	1.1275	1.1345	1.135

TAB. 3.7 – Facteur correcteur de traînée pour une sphère dans un écoulement de Sampson

FIG. 3.20 – Facteur correcteur de traînée pour une sphère dans un écoulement de Sampson,  $a/r = 0.5$

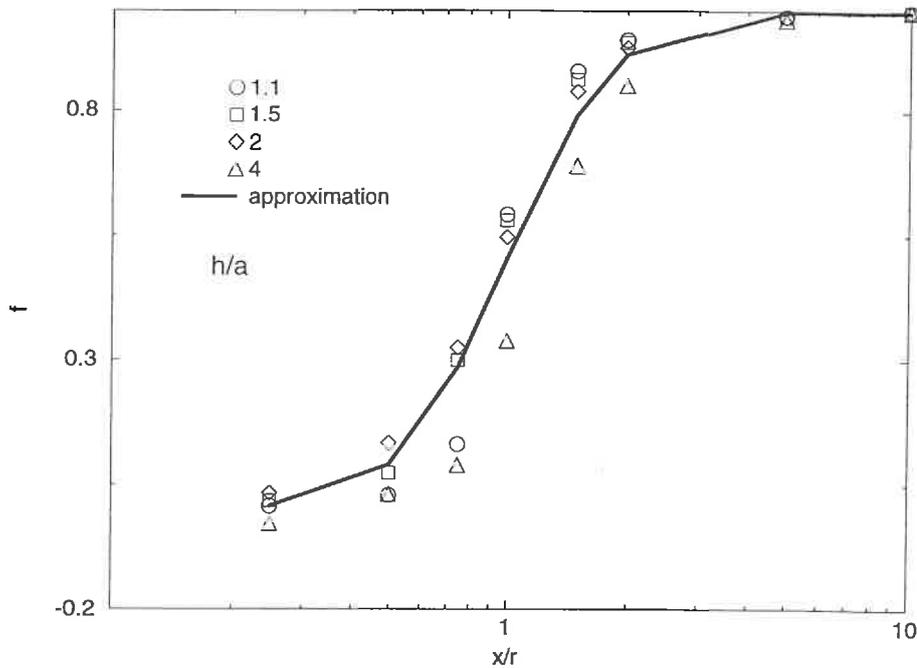


FIG. 3.21 – Facteur d'influence pour une sphère dans un écoulement de Sampson,  $a/r = 0.5$

$$f^* = I \left( \frac{1 - (x/r)^{1.7}}{1 + (x/r)^{1.7}} \right) \quad (3.54)$$

La corrélation ainsi obtenue est superposée aux valeurs données par Yan sur la Figure 3.22. Les écarts sont cette fois plus importants. Lorsque la sphère se rapproche à 1.5 rayon de la paroi, la corrélation est moins bonne. Cependant, ces résultats sont à comparer à la corrélation proposée par Yan et al (Figure 3.23). On note une nouvelle fois un meilleur accord pour notre interpolation.

### 3.5 Conclusion

Le coefficient de traînée sur une sphère s'approchant d'un disque non contraint sur une paroi solide a été calculé analytiquement. L'étude montre que ce coefficient de traînée varie continûment entre les deux cas asymptotiques du problème. L'allure du raccordement semble essentiellement conditionnée par des facteurs géométriques, bien que le type de singularité (orifice ou disque non contraint) modifie la distance de raccordement. De plus, en choisissant comme distance d'éloignement la plus petite distance de la sphère à la surface, on montre que la distance d'influence de la singularité apparaît comme proportionnelle à la taille caractéristique de la singularité.

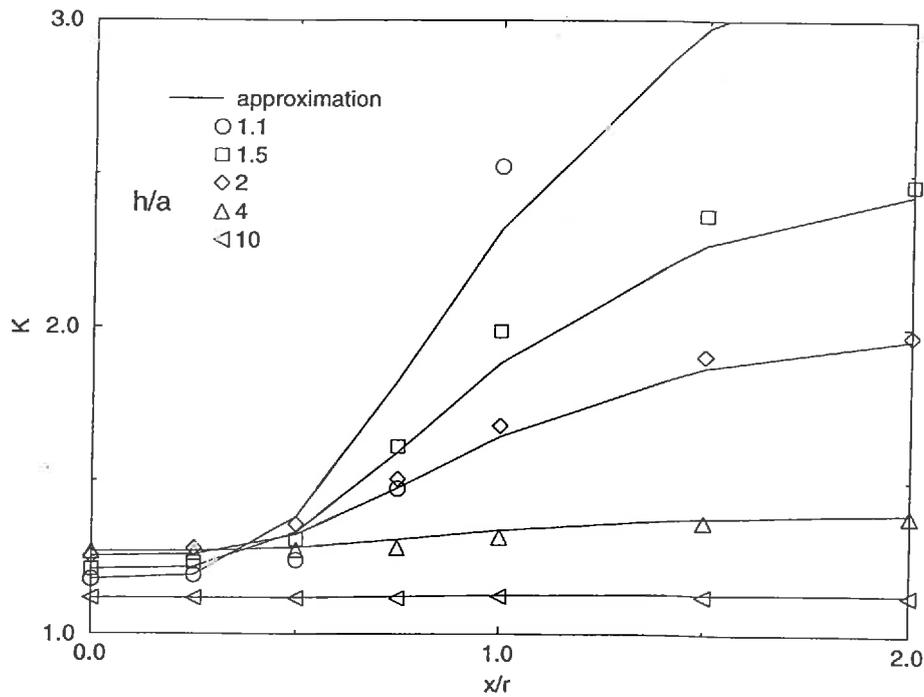


FIG. 3.22 - Corrélation du facteur correcteur pour une sphère dans un écoulement de Sampson,  $a/r = 0.5$

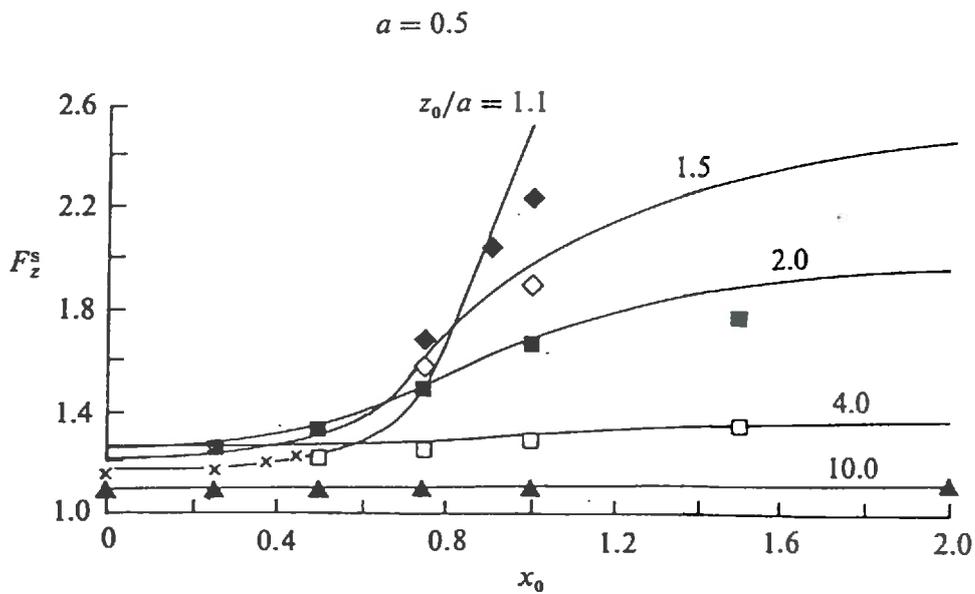


FIGURE 8. The results for  $F_z^s$ , the three-dimensional cases,  $a = 0.5$ . Symbols as figure 7.

FIG. 3.23 - Corrélations proposées par Yan et al [7] (p58) pour une sphère dans un écoulement de Sampson

Par la suite, en reprenant des travaux antérieurs étudiant des sujets dans des configurations géométriques similaires, nous avons montré que la force de traînée appliquée à une sphère, en présence d'une paroi comprenant une singularité circulaire, se comportait de manière similaire par rapport aux cas asymptotiques.

Le raccordement entre les cas asymptotiques peut être approximé, au premier ordre, par une même fonction de raccordement. De plus, cette fonction fait intervenir le premier mode propre de la base de l'ensemble des fonctions solutions des équations de Stokes dans cette géométrie.

Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre suivant pour déterminer les facteurs correcteurs à la force de Stokes dans une situation similaire.

## Liste des Figures du Chapitre 3

3.1	Domaine d'étude et changement de variables . . . . .	72
3.2	Cas asymptotiques dans le cas d'école . . . . .	81
3.3	Paramètre d'influence $f$ pour différentes valeurs de $r/a$ . . . . .	83
3.4	Paramètre d'influence $f$ pour différentes valeurs de $r/a$ . . . . .	84
3.5	Paramètre de singularité $\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}$ et domaine de régression . . . . .	86
3.6	Ordonnées à l'origine des régressions de la Figure 3.5 . . . . .	87
3.7	Reconstruction du facteur correcteur à la force de Stokes en fonction de $\alpha$ .	88
3.8	Reconstruction du facteur correcteur à la force de Stokes en fonction de $h/a$ – cas d'école . . . . .	88
3.9	Facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire – Dagan et al . . . . .	90
3.10	Cas asymptotiques pour une sphère se déplaçant dans l'axe d'un orifice circulaire . . . . .	90
3.11	Paramètre d'influence pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire .	91
3.12	$\left(\frac{\alpha_{nc}}{\alpha_s}\right)^2$ pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire . . . . .	92
3.13	Approximation du facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire . . . . .	92
3.14	Cas asymptotiques pour une sphère se déplaçant orthogonalement à une paroi comportant un orifice circulaire: cas tridimensionnel . . . . .	93
3.15	Facteur correcteur pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire, $a/r = 0.5$ . . . . .	94
3.16	facteur d'influence pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire, $a/r = 0.5$ . . . . .	95
3.17	Corrélation du facteur correcteur pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire, $a/r = 0.5$ . . . . .	96
3.18	Corrélations proposées par Yan et al [7] (p58) pour une sphère s'approchant de façon excentrée d'un orifice circulaire . . . . .	97
3.19	Cas asymptotiques pour une sphère dans un écoulement de Sampson: cas tridimensionnel . . . . .	98
3.20	Facteur correcteur de traînée pour une sphère dans un écoulement de Sampson, $a/r = 0.5$ . . . . .	99
3.21	Facteur d'influence pour une sphère dans un écoulement de Sampson, $a/r = 0.5$ . . . . .	100

- 3.22 Corrélation du facteur correcteur pour une sphère dans un écoulement de Sampson,  $a/r = 0.5$  . . . . . 101
- 3.23 Corrélations proposées par Yan et al [7] (p58) pour une sphère dans un écoulement de Sampson . . . . . 101

## Liste des Tables du Chapitre 3

3.1	Convergence des séries . . . . .	79
3.1	Facteur correcteur $K$ . . . . .	80
3.2	Paramètre d'influence $f$ . . . . .	82
3.5	Valeur de la pente de la droite de régression de la Figure 3.5 . . . . .	86
3.8	Facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant d'un orifice circulaire – Dagan et al . . . . .	89
3.14	Facteur correcteur de traînée pour une sphère s'approchant non axialement d'un orifice circulaire . . . . .	94
3.19	Facteur correcteur de traînée pour une sphère dans un écoulement de Sampson	99

# Bibliographie

- [1] H. Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chem. Eng. Sci.*, 16:242, 1961.
- [2] Wang C.Y. Stokes flow through an array of rectangular fibers. *Int. J. Multiphase Flow*, 22:185–194, 1996.
- [3] Z. Dagan, S. Weinbaum, and R Pfeffer. General theory for the creeping motion of a finite sphere along the axis of a circular orifice. *J. Fluid Mech.*, 117:143–170, 1982.
- [4] J. Happel and H. Brenner. *Low reynolds number hydrodynamics*. Kluwer Academic Press, 5ème édition edition, 1991.
- [5] A. C. Michalopoulos, V.N. Burganos, and A. C. Payatakes. Creeping axisymmetric flow around a solid particle near a permeable obstacle. *AIChE*, 38:1213, 1992.
- [6] M. Stimson and G. B. Jeffery. The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc. Roy. Soc.*, A111:110, 1926.
- [7] Z-Y. Yan, S. Weinbaum, P. Ganatos, and R. Pfeffer. The three-dimensional hydrodynamic interaction of a finite sphere with a circular orifice at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 174:39, 1987.

## Chapitre 4

# Filtration sur membrane

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la formation de la première couche d'un dépôt de particules lors d'une filtration sur membrane. Ce phénomène est responsable de la chute drastique du flux de filtrat qu'on observe systématiquement au début du processus de filtration. La plupart des travaux effectués sur le sujet, qui visent à modéliser le dépôt, ne tiennent pas compte de l'aspect discret de la paroi poreuse lorsqu'on se place à l'échelle du pore mais considèrent la paroi poreuse comme homogène. Kleinstrauer et Chin [10], par exemple, ont étudié l'influence de la croissance de la couche de particules déposées sur la chute du débit filtré en s'appuyant sur un calcul de trajectoires dans un tube présentant une condition limite à la paroi de type aspiration. Hung et Tien [9] avaient fait une étude similaire dans le cas de l'osmose inverse. Belfort [1] a répertorié plusieurs de ces modèles dans sa revue extensive sur la microfiltration tangentielle. Généralement, les modèles considèrent la résistance totale de l'ensemble filtrant, constitué par la membrane et le dépôt de particules en formation, comme la somme de la résistance de la membrane seule et de la résistance du dépôt de particules seul. Si cette hypothèse est valable lorsqu'une couche suffisamment épaisse de particules s'est déposée, l'effet de paroi sur la perméabilité apparente du milieu poreux, que constitue une couche mince de particules déposées, est à prendre en compte. Les travaux engagés sur le sujet par Dufrêche [7] ont déjà permis de caractériser l'écart de la perméabilité apparente par rapport à la perméabilité donnée par le modèle de Darcy en fonction de la disposition des particules sur la paroi poreuse, de la taille relative des particules par rapport au diamètre des pores et de la hauteur de la couche de particules. Cependant, quelques auteurs ont pris en compte explicitement l'aspect discret de la paroi poreuse. Schmitz et al [15], notamment, ont développé un modèle qui simule l'accumulation d'un grand nombre de particules sur une paroi poreuse spatialement périodique. Les interactions hydrodynamiques et physico-chimiques entre particules et paroi, et particules entre elles, étaient prises en compte au moyen de règles simples de déplacement et de capture des particules. Cette étude, volontairement simplifiée d'un point de vue hydrodynamique, a permis d'analyser la morphologie du dépôt en fonction des paramètres du modèle et de simuler qualitativement des dépôts proches de ceux qu'on peut observer expérimentalement. Mais, en raison de son caractère bidimensionnel, elle n'a pas permis de déterminer les propriétés de transport d'un dépôt de particules sur une paroi filtrante. Dans le but de mieux comprendre comment se forme la première couche de particules sur la paroi filtrante, lors d'un processus de filtration, nous déterminons dans ce chapitre la densité de probabilité de capture de particules sphériques en suspension diluée,

s'approchant d'une paroi poreuse modèle spatialement périodique. Plusieurs étapes sont nécessaires pour accéder à cette grandeur :

- détermination de l'écoulement sans particule dans un canal poreux,
- calcul de trajectoire des particules,
- caractérisation de la densité de probabilité de capture.

#### 4.1.1 Ecoulement dans un canal poreux

L'écoulement laminaire d'une suspension de particules faiblement concentrée dans des canaux à parois poreuses se rencontre dans de nombreuses situations industrielles et naturelles :

- dans des réservoirs avec fractures (Saïdi [12]),
- dans des systèmes de refroidissement (Peng et Yuan [11]),
- en filtration tangentielle (Belfort [1]).

Bien qu'il soit difficile de décomposer les différents phénomènes physiques dans ces applications, la détermination de l'écoulement apparaît comme le premier pas nécessaire vers la compréhension et l'optimisation de ces systèmes.

Le problème de l'hydrodynamique peut être envisagé à différentes échelles. A l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle du canal, la paroi poreuse est considérée comme homogène. La solution ne tient pas compte de la géométrie des pores. L'effet de la porosité de la paroi est pris au sens d'une moyenne sur un volume représentatif. Différentes situations peuvent être rencontrées (Chatterjee et Belfort [3]) en fonction de nombreux paramètres comme la répartition de l'injection ou de l'aspiration le long de la paroi, la perméabilité de la paroi, . . . La solution du problème dans le cas d'une aspiration uniforme le long de la paroi poreuse d'un canal plan a été déterminée par Berman [2], dans la plage des nombres de Reynolds d'aspiration conduisant à l'existence de solutions similaires.

Cependant, le comportement des particules en suspension, au voisinage d'une paroi poreuse, est fortement conditionné par la nature discrète de la paroi. Il convient alors de s'intéresser également à l'écoulement à l'échelle du pore. Dans ce cas, la solution doit tenir compte des singularités de la paroi poreuse. Dans ce chapitre, nous nous placerons à cette échelle microscopique.

Schmitz et Prat [14] ont caractérisé l'écoulement au dessus d'une paroi poreuse constituée de pores répartis spatialement de façon périodique. La cellule périodique est constituée d'une surface plane comprenant un pore circulaire de longueur finie. Ils ont montré qu'à proximité de la paroi poreuse, l'écoulement du fluide résulte de la combinaison de deux écoulements :

- un écoulement frontal, dépendant de l'intensité de l'aspiration,
- un écoulement cisailé, dont la vitesse caractéristique dépend de l'écoulement macroscopique loin de la paroi.

Les auteurs ont utilisé une méthode aux éléments finis pour déterminer l'écoulement tridimensionnel dans cette cellule. Cette technique étant coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire, nous allons montrer que le même problème peut être remplacé par une combinaison de deux problèmes indépendants, plus simples et pouvant se résoudre analytiquement :

- un écoulement frontal à travers un écran mince percé d'un trou circulaire (Wang [16]),
- un écoulement cisailé.

La validation du choix de l'écran mince sera faite, d'une part, à partir des travaux antérieurs de Dagan et al [6] obtenus dans le cas d'un pore isolé et, d'autre part, par comparaison des résultats avec ceux des travaux de Schmitz et Prat [14].

### 4.1.2 Trajectoire des particules

La détermination de la force hydrodynamique qui s'applique sur une particule sphérique est nécessaire pour déterminer sa trajectoire au voisinage d'un pore. En reprenant la même approche que celle utilisée dans le chapitre précédent, nous allons déterminer les différents facteurs correcteurs à la force de Stokes qui interviennent dans cette configuration d'écoulement.

Nous décrirons, dans un premier temps, les cas asymptotiques associés au problème considéré, puis proposerons des raccordements entre ces cas asymptotiques pour obtenir la valeur des facteurs correcteurs en tout point du domaine géométrique considéré.

Les corrélations obtenues seront validées à l'aide d'un code aux éléments de frontière développé pour ce travail, qui résout les équations de Stokes dans un domaine tridimensionnel quelconque.

### 4.1.3 Répartition des dépôts sur la membrane

En utilisant une méthode similaire à celle utilisée dans le chapitre 2 sur la filtration en masse, nous déterminerons, à l'aide d'un calcul de trajectoires, la répartition des impacts de particules sur la paroi poreuse. Nous en déduirons la densité de probabilité de capture sur la paroi. Ainsi, nous caractériserons les sites les plus probables d'apparition de la première couche d'un dépôt de particules.

L'influence de la porosité, des effets physico-chimiques, de l'inertie de la particule et de l'intensité du cisaillement sera étudiée.

## 4.2 Modélisation

### 4.2.1 Ecoulement sans particule au voisinage d'un pore

La géométrie du problème est décrite sur la Figure 4.1. Une étude détaillée de l'écoulement laminaire dans un canal plan à paroi poreuse a été effectuée par Schmitz et Prat [14].

Les hypothèses de leur étude sont les suivantes :

- la paroi poreuse est constituée d'un arrangement carré de pores circulaires, spatialement périodique dans les deux directions parallèles à la paroi,
- le nombre de Reynolds de filtration est petit ( $Re_f = w_f H / \nu < 1$ )
- la demi hauteur du canal  $H$  est grande devant la période d'espacement des pores  $2b$

Les auteurs ont montré que, dans ces conditions, le problème pouvait se décomposer en deux problèmes à des échelles différentes :

- l'écoulement à l'intérieur du canal où la paroi poreuse est perçue comme étant homogène,
- l'écoulement tridimensionnel, à l'échelle du pore, fortement conditionné par la présence de l'orifice circulaire, dans une couche d'épaisseur  $\delta$  de l'ordre de la période.

L'écoulement à l'échelle du pore est pris de telle sorte qu'il se raccorde à l'écoulement extérieur macroscopique donné par Berman [2].

Schmitz et Prat ont montré que l'écoulement au voisinage du pore peut être obtenu en imposant, sur une cellule unitaire, des conditions de périodicité dans les deux directions

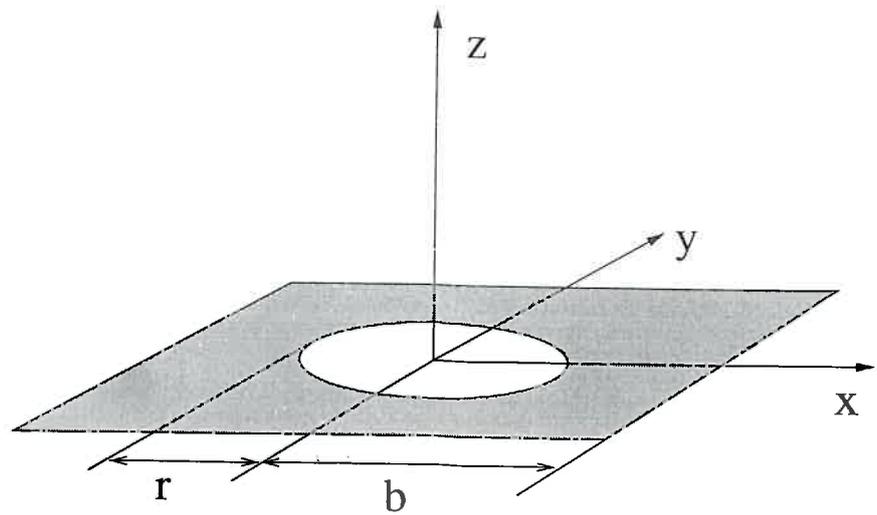
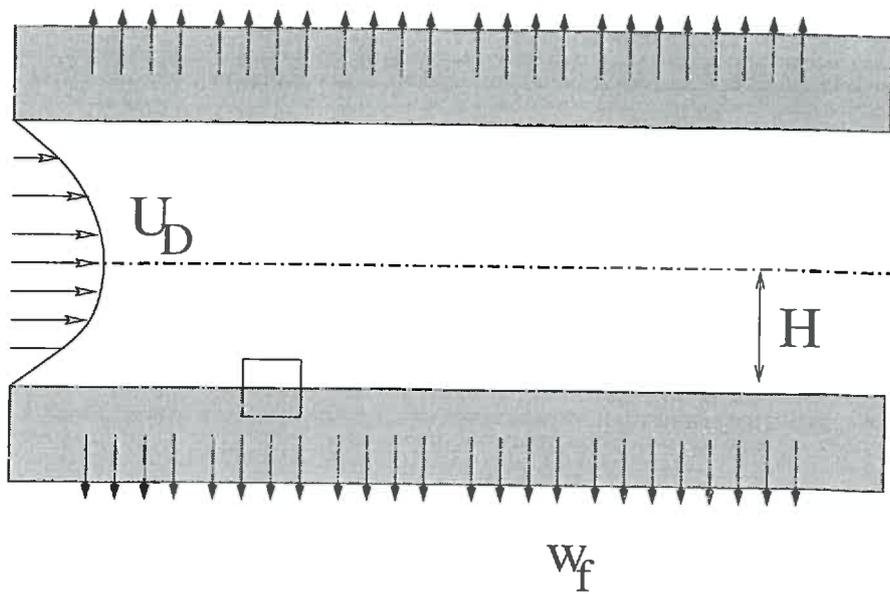


FIG. 4.1 – Géométrie du problème et changement d'échelle

parallèles à la paroi et en raccordant à la solution de Berman à une certaine distance  $\delta$ . L'écoulement parallèle est alors forcé par la vitesse tangentielle à  $z = \delta$  et par le gradient de pression  $F_x$  de la solution extérieure. La solution du problème extérieur donne pour la vitesse et la pression à une distance de la paroi  $\delta$ :

$$u(x, \delta) \approx \left[ U_D - \frac{w_f x}{H} \right] \frac{\delta}{H} (1 + Re_f) \quad (4.1)$$

$$w(x, \delta) \approx w_f \left( 1 - \left( \frac{\delta}{H} \right)^2 \right) \quad (4.2)$$

$$p(x, \delta) = \frac{(-3 + \frac{81}{35} Re_f) \kappa}{H^2} \left[ U_D x - \frac{w_f x^2}{H} \right] - \rho \frac{w_f^2}{2} \left( 1 - 2 \left( \frac{\delta}{H} \right)^2 \right) + 2 \frac{w_f \kappa}{H} \left( 1 - \frac{\delta}{H} \right) + const \quad (4.3)$$

où  $U_D$  est la vitesse moyenne dans la section d'entrée,  $H$  la demi-largeur du canal,  $\kappa$  la viscosité et  $Re_f = \frac{\rho w_f H}{\kappa}$  le nombre de Reynolds de filtration.

Afin de pouvoir déterminer analytiquement les trajectoires de particules dans un tel domaine, nous allons adopter, en la justifiant, l'hypothèse qui consiste à remplacer la paroi constituée de pores de longueur finie par un écran mince percé de trous circulaires.

## Formulation

La géométrie périodique de la membrane permet de réduire le domaine d'étude à une cellule bi-périodique de période  $2b$ .

En supposant que l'écoulement est suffisamment lent pour que l'hypothèse d'écoulement rampant soit vérifiée, les équations qui régissent l'écoulement stationnaire local au voisinage d'un pore sont les équations de Stokes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.4)$$

$$\kappa \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla P \quad (4.5)$$

Les conditions limites associées sont :

– sur la frontière supérieure du domaine :

$$\mathbf{u} = (u_\delta, 0, -w_f) \text{ à } z = \delta \quad (4.6)$$

– sur les frontières périodiques :

$$\mathbf{u}(x = -b) = \mathbf{u}(x = b) \quad (4.7)$$

$$P(x = -b) = P(x = b) + 2bF_x \quad (4.8)$$

$$\mathbf{u}(y = -b) = \mathbf{u}(y = b) \quad (4.9)$$

$$P(y = -b) = P(y = b) \quad (4.10)$$

$$(4.11)$$

– sur l'orifice :

$$u = 0 \quad (4.12)$$

$$v = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

où  $u, v, w$  sont les composantes de la vitesse.

– sur la paroi solide :

$$\mathbf{u} = 0 \quad (4.16)$$

$w_f$  est la vitesse d'aspiration moyenne,  $F_x$  et  $u_\delta$  sont respectivement le gradient de pression macroscopique dans le canal poreux et la vitesse tangentielle à  $z = \delta$ .

Le problème complet est identique à celui étudié par Schmitz et Prat [14] à l'exception de la condition limite choisie sur l'orifice. Le problème qu'ils ont traité incluait dans le domaine de calcul un pore cylindrique de longueur finie. Ainsi, aucune condition n'était imposée à l'entrée du pore mais uniquement en sortie.

L'hypothèse d'écran mince consiste à remplacer la membrane constituée de pores cylindriques de longueur finie par une plaque d'épaisseur nulle percée d'orifices circulaires.

Une condition d'écoulement parallèle est alors imposée sur l'orifice (équation 4.15).

Du fait de la linéarité des équations de Stokes, le problème complet est décomposé en 3 problèmes plus simples :

1. écoulement de Couette dans la direction  $x$  (vitesse  $u_\delta$  à  $z = \delta$ ),

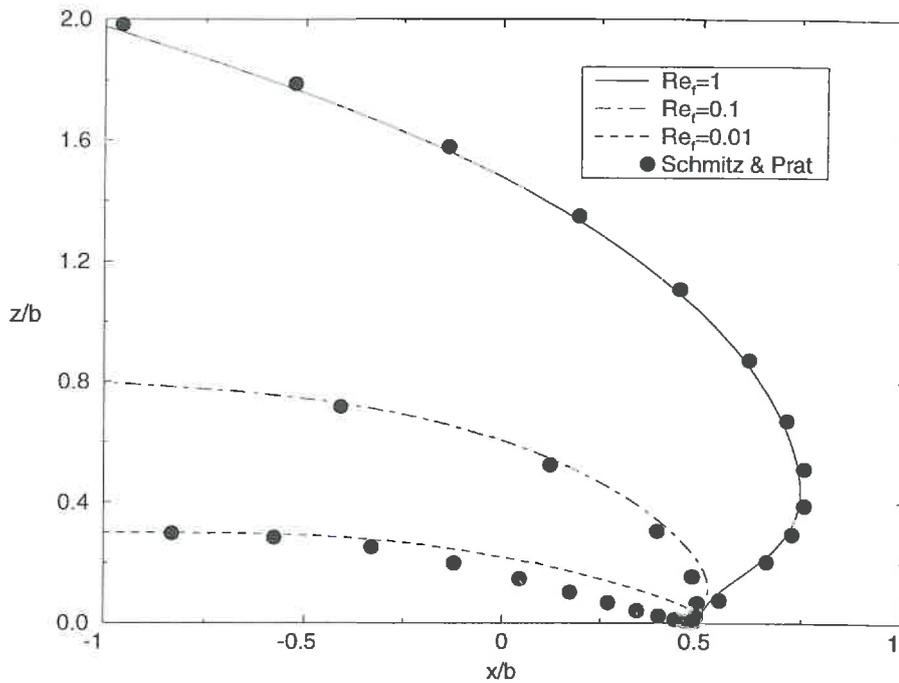


FIG. 4.2 – Ligne de courant aboutissant au bord du pore en fonction du nombre de Reynolds de filtration

2. écoulement frontal uniforme (vitesse uniforme  $w_f$  à  $z = \delta$ ) à travers un écran mince spatialement périodique comprenant des ouvertures circulaires,
3. écoulement de Poiseuille dans la direction  $x$  (gradient de pression  $F_x$ ).

On montre que l'écoulement 3 est négligeable par rapport aux deux autres dans la zone proche de la paroi. En effet, si l'on utilise les expressions des différentes grandeurs données par Berman [2], on obtient :

$$\frac{u_{3max}}{u_{1max}} = \frac{\left(-3 + \frac{81}{35}R_{cf}\right) \delta}{24 H} \quad (4.17)$$

où,  $u_{1max}$  et  $u_{3max}$  sont les vitesses maximales dans la direction de l'écoulement principal correspondant aux problèmes 1 et 3.  $\frac{\delta}{H}$  étant très petit, le problème 3 peut être négligé.

L'écoulement de couette est directement donné par  $u = u_\delta z / \delta$ .

Le cas de l'écoulement frontal au-dessus d'un écran mince a été étudié par Wang [16] à l'aide d'une méthode quasi analytique.

### Justification de l'hypothèse d'écran mince

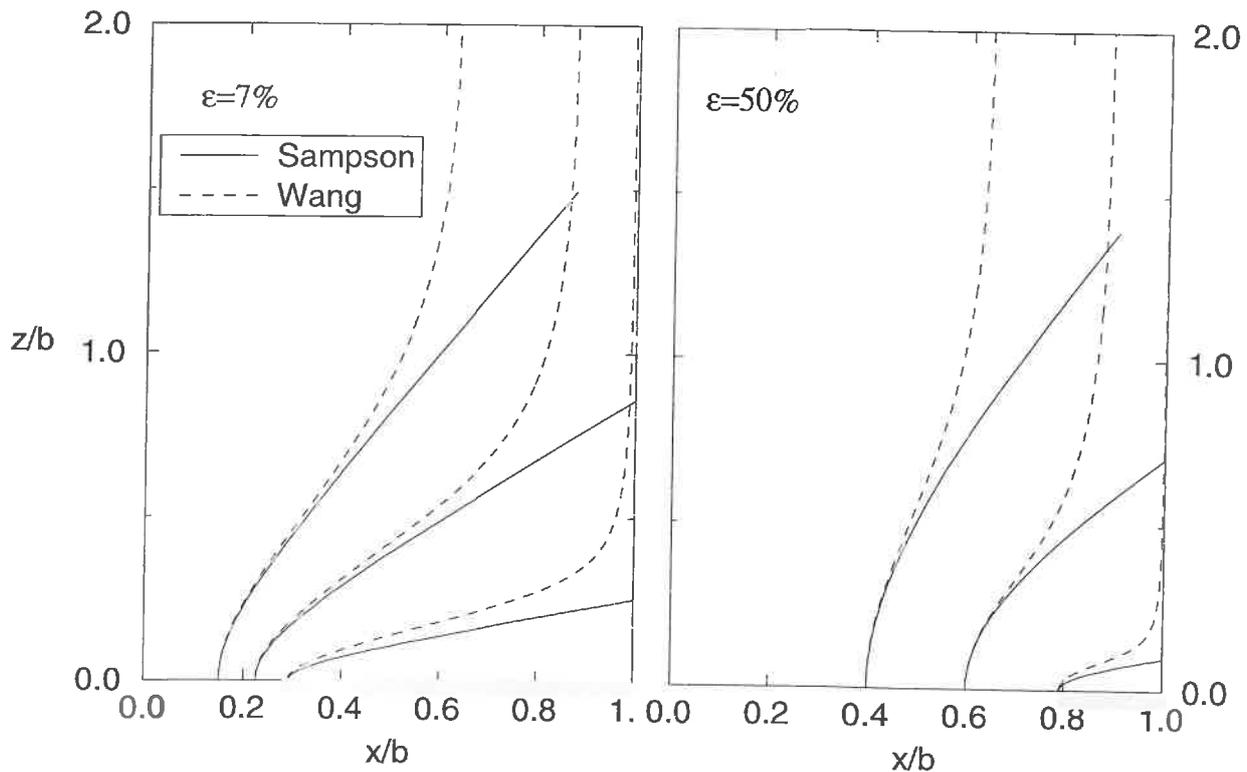


FIG. 4.3 – Raccordement de l'écoulement frontal à l'écoulement de Sampson

**Comparaison avec l'étude de Schmitz et Prat [14]** La Figure 4.2 représente la ligne de courant limite aboutissant au bord aval du pore, calculée pour trois valeurs du nombre de Reynolds de filtration  $R_{cf}$ . Les points correspondent aux résultats obtenus par Schmitz et Prat. Les traits sont les résultats obtenus avec la méthode quasi analytique. On constate le bon accord entre les deux méthodes, excepté pour une zone proche de l'orifice. Les écarts proviennent du traitement géométrique du pore. En effet, l'étude de Schmitz et Prat ne force pas le champ de vitesse dans le pore, autorisant ainsi une recirculation dans la cavité. L'hypothèse d'écran mince, imposant un écoulement parallèle sur l'orifice, interdit cette situation. Les écarts obtenus pour de faibles aspirations peuvent s'expliquer par cette remarque.

**Comparaison avec un écoulement de Sampson** La pertinence de cette hypothèse simplificatrice a déjà été montrée par Dagan et al [6] pour le cas d'un orifice isolé. Les auteurs ont comparé l'écoulement obtenu avec un pore cylindrique de longueur finie à l'écoulement de Sampson [13] (écran mince). Les résultats de leur étude montrent que l'influence de la longueur finie du pore n'est significative que dans une région très proche de l'ouverture et sur une hauteur inférieure de  $0.2r$ .

La Figure 4.3 représente des lignes de courant dans un écoulement de Sampson et dans un écoulement avec une répartition périodique de pores. Nous constatons que dans une zone à proximité du pore les deux écoulements se comportent de façon similaire.

Dans cette zone, l'écoulement n'est pas perturbé par la présence des pores voisins. Nous sommes localement dans la même configuration d'écoulement que celle de Yan et al. La longueur éventuelle du pore ne doit alors pas modifier le champ de vitesse localement, et encore moins loin de l'orifice.

### Adimensionnalisation

Dans la suite du chapitre, pour des raisons de commodité d'écriture, les longueurs sont adimensionnées par la demi-période  $b$  et les vitesses par la vitesse caractéristique de l'écoulement frontal  $w_f$ .

Pour les longueurs :

$$\tilde{x} = x/b ; \tilde{z} = x/b ; \tilde{z} = z/b ; \tilde{r} = r/b ; \tilde{a} = a/b \quad (4.18)$$

Pour les vitesses :

$$\tilde{u} = u/w_f \quad (4.19)$$

$\gamma$  est la grandeur qui caractérise l'écoulement cisailé :

$$\tilde{u} = \gamma \tilde{z} \quad (4.20)$$

où :

$$\gamma = \frac{u_\delta}{w_f} \frac{b}{\delta} \quad (4.21)$$

$\gamma$  représente le rapport d'intensité entre l'écoulement tangentiel et l'écoulement frontal à une distance d'une demi-période de la paroi.

Pour les vitesses de rotation :

$$\tilde{\Omega} = b\Omega/w_f \quad (4.22)$$

Par la suite, les tildes  $\tilde{\cdot}$  seront omises.

$h/a$	Goldman et al		Yan et al $a/r = 0.5$	
	$K^t$ translation	$K^r$ rotation	$K^t$ translation	$K^r$ rotation
10.0	1.06	0.0000	1.05	0.0013
4.0	1.15	0.0090	1.13	0.0086
2.0	1.42	0.0092	1.29	0.0290
1.5	1.63	0.0229	1.39	0.0417
1.1	2.32	0.1270	1.50	0.0510

TAB. 4.1 – Influence relative de la rotation et de la translation d'une sphère sur la traînée

### 4.2.2 Calcul de trajectoire

#### Influence de la rotation

De nombreux auteurs (Goldman et al [8], Yan et al [17]) ont montré que l'effet de la rotation de la particule sur son mouvement de translation était négligeable excepté dans une zone très proche de la paroi.

Goldman et al [8] ont traité le cas d'une sphère se déplaçant à proximité d'une paroi horizontale. Ils ont donné la contribution de la translation de la sphère et de sa rotation sur la composante de la traînée parallèle à la paroi. La table 4.1 permet de comparer l'influence relative de la rotation et de la translation de la sphère sur la force de traînée.

La composante de la force due à la translation  $F_t$  et celle due à la rotation  $F_r$ , s'expriment respectivement comme suit :

$$F_t = 6\pi\kappa a K^t U \quad (4.23)$$

et

$$F_r = 6\pi\kappa a^2 K^r \Omega \quad (4.24)$$

où  $U$  est la vitesse de translation de la sphère,  $\Omega$  sa vitesse angulaire de rotation,  $a$  son rayon et,  $K^t$  et  $K^r$  les facteurs correcteurs donnés par la Table 4.1.

Dans le cas le plus favorable à l'effet de rotation ( $h/a = 1.1$ ), le facteur correcteur de la rotation est 20 fois plus faible que celui de la translation. Il faudrait que  $\Omega$  soit de l'ordre de  $20U/a$  pour que la composante due à la rotation soit du même ordre que la composante due à la translation.

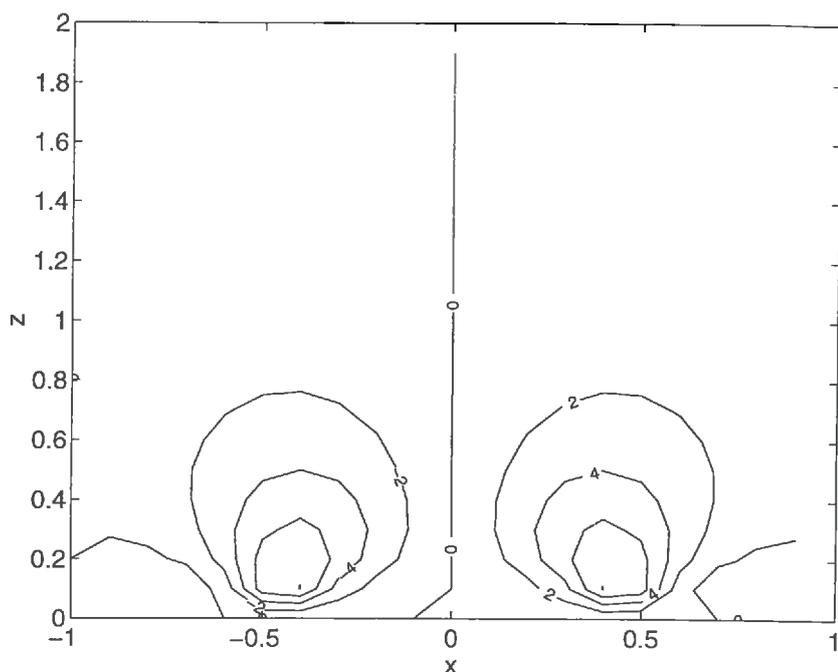


FIG. 4.4 – Champ de vorticité de l'écoulement frontal dans le plan  $y = 0 - r = 0.5$

Dans le cas étudié par Yan et al [17], la sphère est au dessus d'une paroi comportant un pore circulaire isolé. Le rapport entre l'effet dû à la translation par rapport à l'effet dû à la rotation est encore plus en faveur de la translation (voir Table 4.1).

Pour obtenir un ordre de grandeur de la vitesse de rotation de la sphère dans l'écoulement, nous calculons la vorticité, à savoir :

$$\Omega \approx \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{u} \quad (4.25)$$

Le champ de vorticité est représenté sur la Figure 4.4 pour  $r = 0.5$ . Les plus grandes valeurs sont obtenues à proximité du bord du trou. Cependant, dans cette zone, les vitesses sont importantes (Figure 4.5). Afin de comparer l'influence relative de la rotation et de la translation sur la force hydrodynamique, nous représentons les isovaleurs du rapport  $\Omega/\|\mathbf{u}\|$  pour  $r = 0.5$  (Figure 4.6) et pour  $r = 0.2$  (Figure 4.7).

L'influence de la rotation est d'autant plus importante que le trou est petit. La rotation ne peut pas être négligée dans la zone très proche de la paroi. Cependant, lorsque la particule est dans cette région, les forces physico-chimiques sont à prendre en compte. Dans la suite, nous considérerons qu'il existe une distance de capture  $e$  en-deçà de laquelle les forces physico-chimiques sont prépondérantes. Ainsi, dans la zone proche de la paroi ( $z < e + r$ ), nous ne déterminons pas la trajectoire de la particule. Considérons un pore

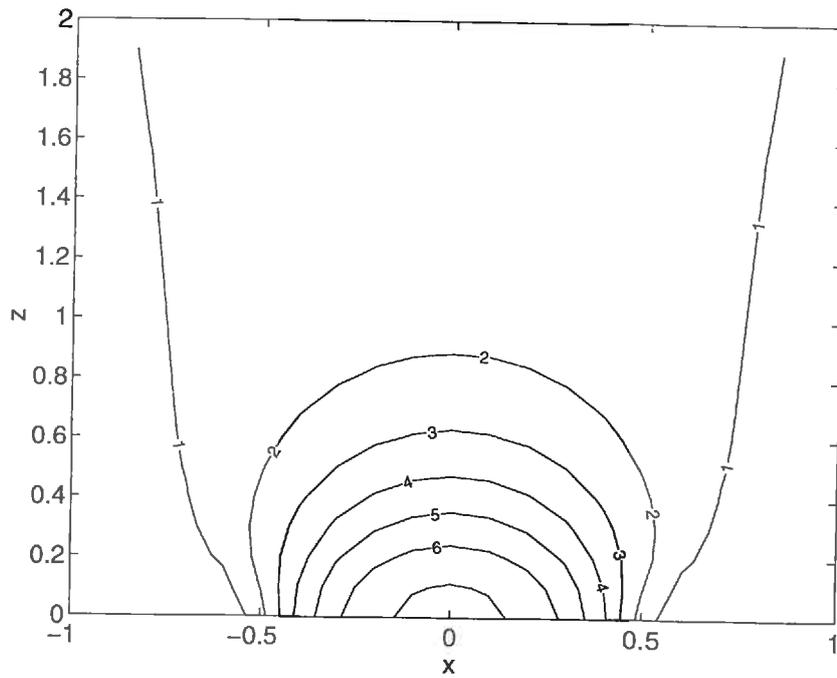


FIG. 4.5 - Isovitesse de l'écoulement frontal dans le plan  $y = 0 - r = 0.5$

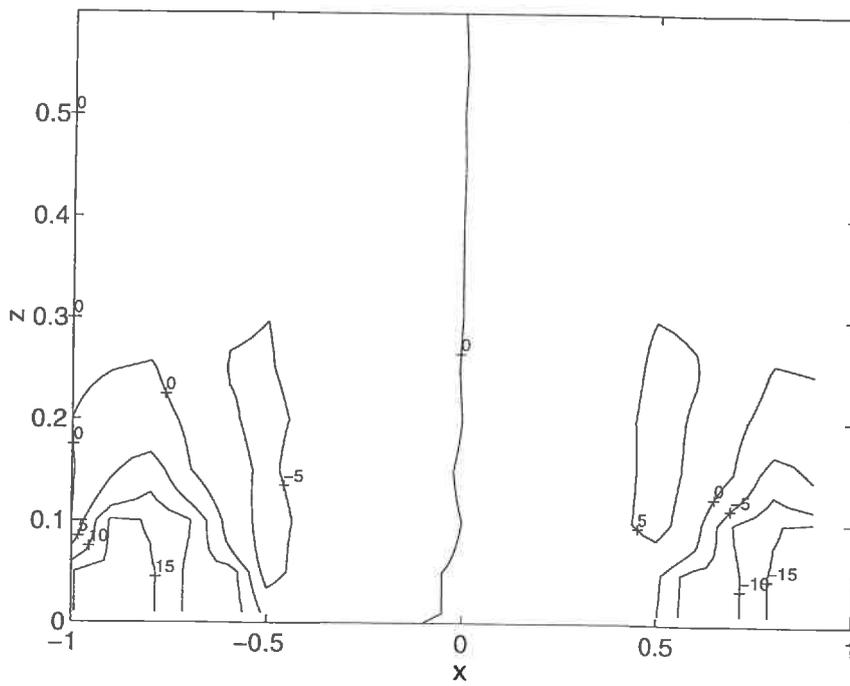


FIG. 4.6 - Isovaleurs du rapport  $\Omega/\|u\|$  dans le plan  $y = 0 - r = 0.5$

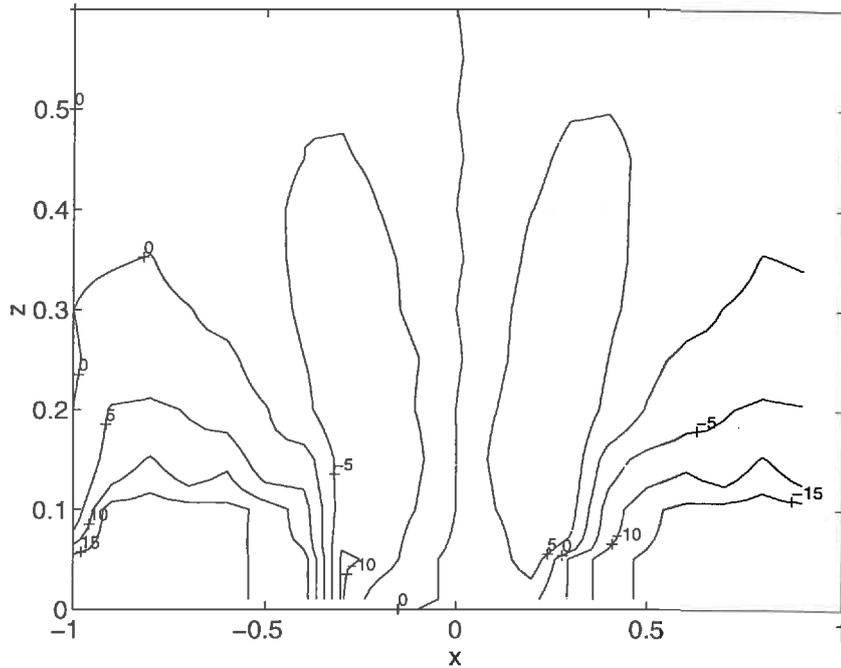


FIG. 4.7 – Isovaleurs du rapport  $\Omega/\|\mathbf{u}\|$  dans le plan  $y = 0$  -  $r = 0.2$

de rayon  $r = 0.2$ , si l'on choisit une distance de capture égale, par exemple, à 50% de la taille de la particule, pour une sphère de rayon égal à la moitié du rayon de l'orifice  $a = \frac{r}{2} = 0.1$ , la plus petite distance à la paroi à considérer est  $z = 0.15$ . Dans ce cas, le rapport entre la force due à la rotation par rapport à celle due à la translation vaut :

$$\frac{F_r}{F_t} = \frac{6\pi\kappa a^2 K_\omega^r \Omega}{6\pi\kappa a K_\omega^{t,\omega} U} \quad (4.26)$$

soit :

$$\frac{F_r}{F_t} = a \frac{K_\omega^r \Omega}{K_\omega^{t,\omega} U} \quad (4.27)$$

D'après la Table 4.1 et la Figure 4.7 on obtient :

$$\frac{F_r}{F_t} \approx 0.1 \frac{0.0229}{1.63} 10 \approx 10^{-2} \quad (4.28)$$

Ainsi, nous ne tiendrons pas compte de la rotation de la particule pour déterminer sa trajectoire.

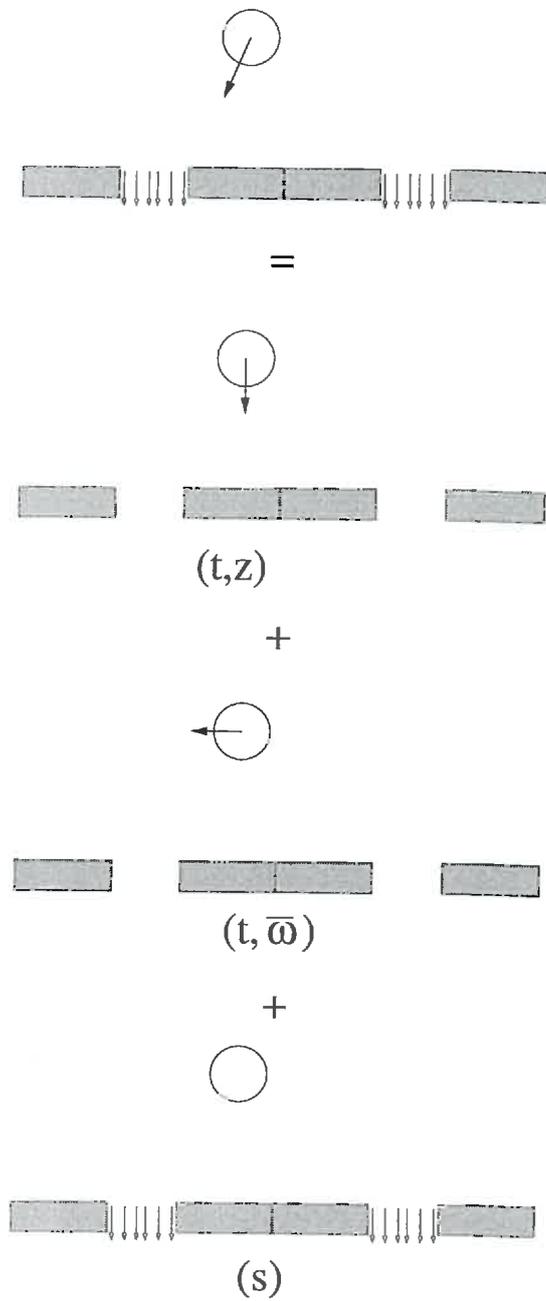


FIG. 4.8 – Décomposition de la traînée qui s'applique sur la sphère

### Décomposition

De part la linéarité des équations de Stokes, le problème complet d'une sphère se déplaçant dans l'écoulement peut se décomposer en trois problèmes plus simples. Nous utiliserons les notations suivantes pour chacun d'eux (Figure 4.8) :

- $(t, z)$  – sphère en translation perpendiculaire à la paroi dans un fluide au repos,
- $(t, \bar{\omega})$  – sphère en translation parallèle à la paroi dans un fluide au repos,
- $(s)$  – sphère immobile dans l'écoulement.

La force qui s'applique sur la sphère est alors la somme des différentes contributions :

$$\begin{cases} F_{\bar{\omega}} = 6\pi\kappa a(U_{\bar{\omega}}K_{\bar{\omega}}^{t,\bar{\omega}} + U_zK_{\bar{\omega}}^{t,z} + U_fK_{\bar{\omega}}^s) \\ F_z = 6\pi\kappa a(U_{\bar{\omega}}K_z^{t,\bar{\omega}} + U_zK_z^{t,z} + W_fK_z^s) \end{cases} \quad (4.29)$$

les facteurs correcteurs introduits correspondent aux différentes contributions :

1. contribution à la force parallèle à la paroi  $F_{\bar{\omega}}$  due à :

- $K_{\bar{\omega}}^{t,z}$  – la translation perpendiculaire à la paroi de vitesse  $U_z$ ,
- $K_{\bar{\omega}}^{t,\bar{\omega}}$  – la translation radiale de vitesse  $U_{\bar{\omega}}$ ,
- $K_{\bar{\omega}}^s$  – la présence de la composante radiale de l'écoulement  $U_f$ .

2. contribution à la force perpendiculaire à la paroi  $F_z$  due à :

- $K_z^{t,z}$  – la translation perpendiculaire à la paroi de vitesse  $U_z$ ,
- $K_z^{t,\bar{\omega}}$  – la translation radiale de vitesse  $U_{\bar{\omega}}$ ,
- $K_z^s$  – la présence de la composante radiale de l'écoulement  $U_f$ .

Les résultats de Yan et al [17] montrent que les contributions croisées,  $K_{\bar{\omega}}^{t,z}$  et  $K_z^{t,\bar{\omega}}$ , sont négligeables dans leur étude. Nous les négligerons également.

Finalement, la force hydrodynamique qui s'applique à la sphère est :

$$\begin{cases} F_{\bar{\omega}} = 6\pi\kappa a(U_{\bar{\omega}}K_{\bar{\omega}}^{t,\bar{\omega}} + U_fK_{\bar{\omega}}^s) \\ F_z = 6\pi\kappa a(U_zK_z^{t,z} + W_fK_z^s) \end{cases} \quad (4.30)$$

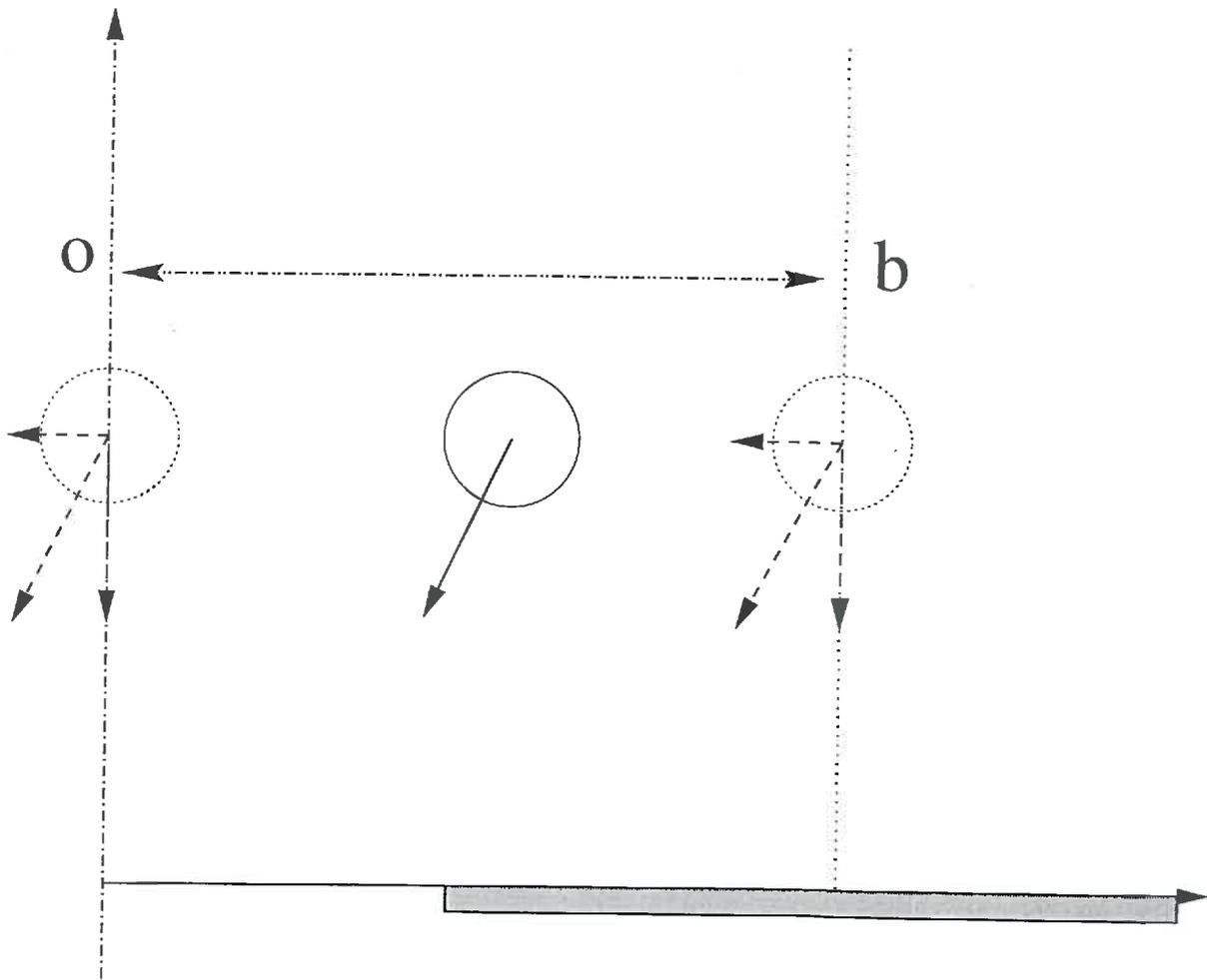


FIG. 4.9 – Description des cas asymptotiques pour une sphère en mouvement dans un fluide au repos

### Détermination des facteurs correcteurs à la force de Stokes

En utilisant une méthode similaire à celle exposée au chapitre 3, nous proposons des expressions pour les facteurs correcteurs. Ces choix seront validés par la suite par un code aux éléments de frontière. Nous allons distinguer le cas de la sphère se déplaçant dans un fluide au repos du cas de la sphère immobile dans un écoulement.

**a–Sphère dans un fluide au repos** Dans les travaux antérieurs, les auteurs ont étudié le cas d'un pore isolé (Dagan et al [4], Yan et al [17]). La paroi étant constituée de pores répartis périodiquement sur la surface, nous ne pouvons utiliser directement leurs résultats.

En revanche, il est raisonnable de penser qu'il existe une zone à proximité de chaque

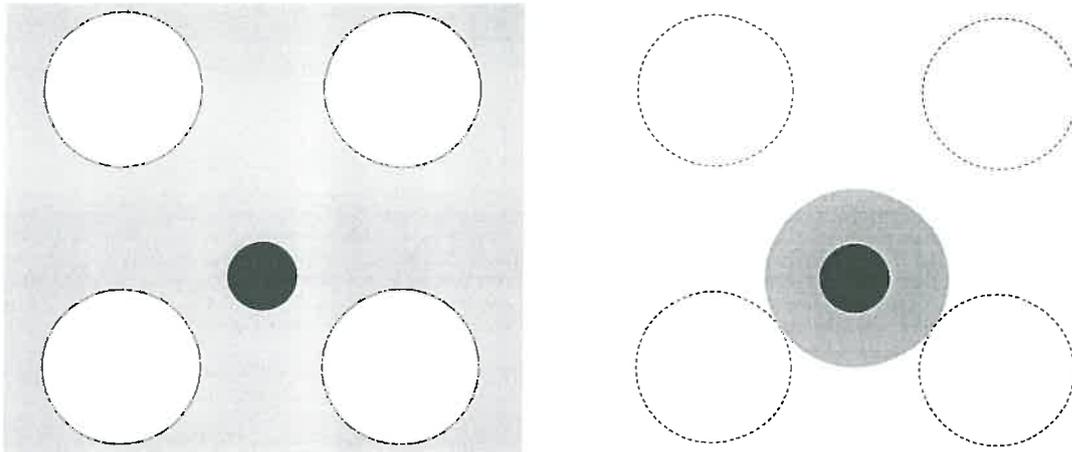


FIG. 4.10 – *Choix du disque lorsque la sphère est à la demi période*

pore où la force qui s'applique sur la sphère est proche de celle que l'on obtient dans le cas d'un orifice isolé.

En utilisant la même approche que celle du chapitre 3, nous allons à chaque fois déterminer les deux cas asymptotiques du problème considéré et effectuer un raccordement entre ces deux cas.

La Figure 4.9 schématise les deux cas asymptotiques associés au problème.

**1<sup>er</sup> cas asymptotique: Sphère dans l'axe du trou** Ce cas correspond à la zone 0 de la Figure 4.9. Le déplacement d'une sphère perpendiculairement à une paroi comportant un pore isolé a été étudié par Dagan et al [5]. Dans le chapitre 3 consacré à l'influence d'une singularité de paroi, nous avons proposé une approximation de leurs résultats. Cette approximation donne le facteur correcteur du premier cas asymptotique du problème de la sphère dans un écoulement au repos. Au chapitre 3, nous avons vu que l'influence de la singularité diminuait relativement vite en fonction de l'éloignement de la sphère à la paroi. Par conséquent, ici, nous négligeons l'influence des pores voisins et ne conservons que l'influence du pore sur lequel la sphère est centrée. Ce qui revient à choisir comme facteur correcteur celui correspondant au cas du pore isolé. Ce facteur correcteur est noté  $K_{\omega 0}^{t,\omega}$ .

Pour des raisons similaires, le facteur correcteur pour la translation est pris identique à celui d'une sphère se déplaçant parallèlement à une paroi comportant un pore isolé, la sphère étant centrée sur le pore. Le facteur correcteur est donné par Yan et al [17]. Ce facteur correcteur est noté  $K_{\omega 0}^{t,\omega}$ .

**2<sup>me</sup> cas asymptotique: Sphère à la demi-période  $x = 1$**  Lorsque le centre de la sphère est placée à la demi-période, la géométrie du système est complexe (zone b de la Figure 4.9). Le facteur correcteur à la force de Stokes lorsque la sphère se déplace perpendiculairement à la paroi est approximé par un cas similaire donné par Dagan et al [4]. Les auteurs ont étudié le déplacement d'une sphère au voisinage d'un disque de longueur finie. Bien que notre problème ne soit pas identique, nous choisissons ce cas qui semble être, parmi la littérature, le plus proche de notre configuration. Le rayon du disque est égal à la plus petite distance latérale de la sphère aux pores les plus proches (Figure 4.10). Yan et al [18] proposent une utilisation similaire d'un disque pour approximer le facteur correcteur d'une sphère excentrée par rapport à l'orifice dans le cas d'un pore isolé. Ce facteur correcteur est noté  $K_{zb}^{t,z}$

Les auteurs n'ayant traité que le cas axisymétrique, nous ne connaissons pas la valeur des facteurs correcteurs pour un déplacement parallèle à la paroi. Nous choisissons pour ce comportement asymptotique le facteur correcteur à appliquer à une sphère se translatant parallèlement à une paroi plane infinie (Goldman et al). Nous négligeons, par cette hypothèse, l'influence des trous sur la composante parallèle de la vitesse. Ce facteur correcteur est noté  $K_{\bar{\omega}b}^{t,\bar{\omega}}$

**Raccordement** Ayant déterminé les différents problèmes asymptotiques, nous utilisons le même raccordement horizontal que celui obtenu dans le chapitre précédent. Nous choisissons finalement :

$$K_{\bar{\omega}}^{t,\bar{\omega}} = K_{\bar{\omega}0}^{t,\bar{\omega}} f^* + K_{\bar{\omega}b}^{t,\bar{\omega}} (1 - f^*) \quad (4.31)$$

et :

$$K_z^{t,z} = K_{z0}^{t,z} f^* + K_{zb}^{t,z} (1 - f^*) \quad (4.32)$$

où :

$$f^* = I \left( \frac{1 - \frac{x-1}{r-1}}{1 - 2x - \frac{x-1}{r-1}} \right) \quad (4.33)$$

La fonction de raccordement respecte les deux cas asymptotiques ( $f^* = 1$  si  $x = 0$ ;  $f^* = 0$  si  $x = 1$ ). De plus, si  $x = r$  alors  $f^* = 0.5$ . Lorsque le centre de la sphère est au niveau du bord du pore, la traînée est influencée dans les mêmes proportions par les deux cas limites.

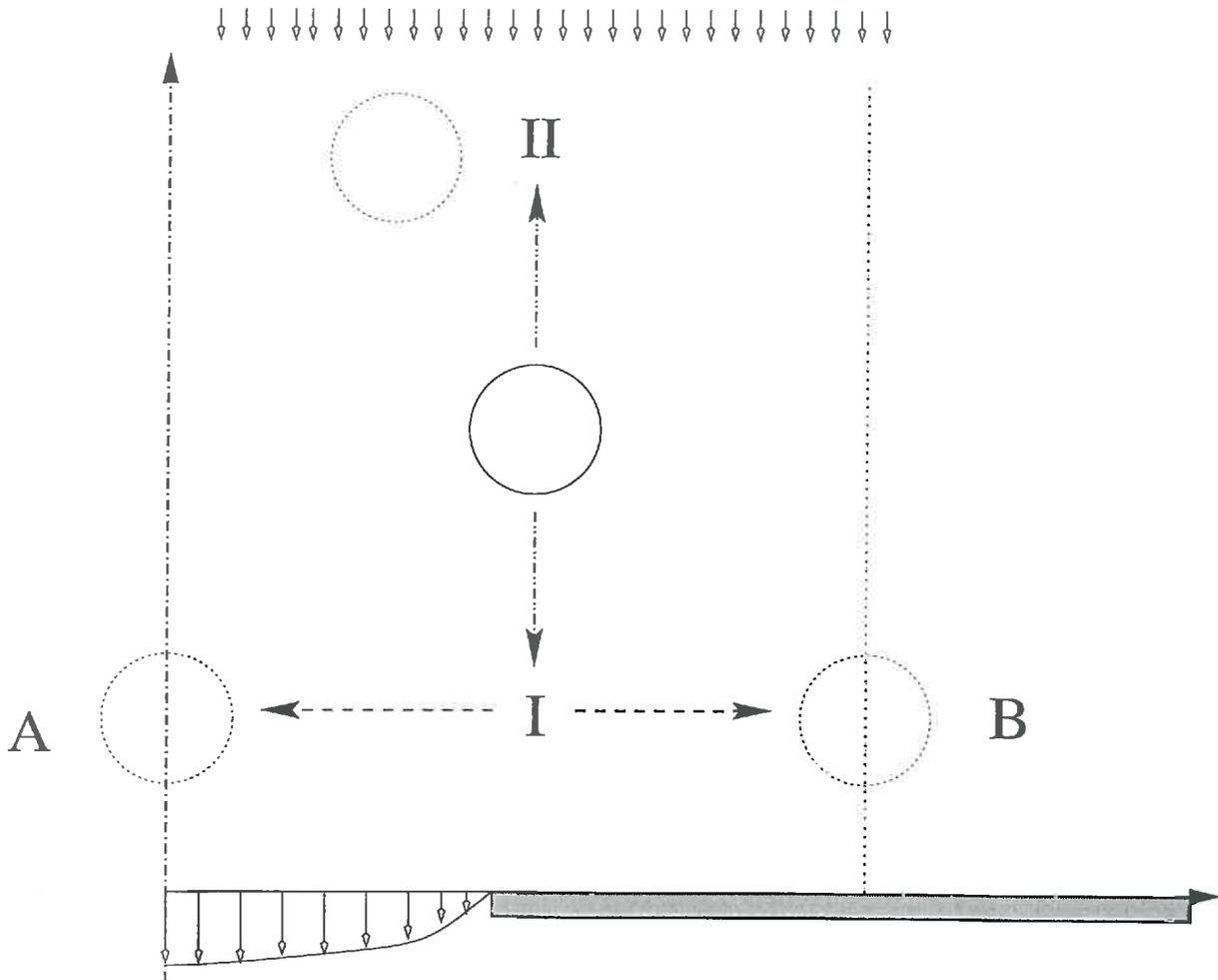


FIG. 4.11 – Description des cas asymptotiques pour une sphère immobile dans un écoulement

**b-Sphère immobile dans l'écoulement** Lorsque la sphère est immobile dans un écoulement, la force de traînée est, en grande partie, due à la forme de l'écoulement.

L'observation de la Figure 4.3 permet de dégager trois zones distinctes (Figure 4.11) :

- zone A - écoulement au voisinage d'un pore,
- zone B - écoulement autour d'une surface plane,
- zone II - écoulement uniforme.

**zone proche de la paroi - zone I** Dans la zone A, nous avons vu que l'écoulement est similaire à celui d'un écoulement de Sampson [13]. La force sur la sphère dans un tel écoulement est connue et donnée par Dagan et al [4]. Le facteur correcteur correspondant est noté  $K_0^s$ . Dès que l'on se rapproche de la demi-période, les lignes de courant s'écartent l'une de l'autre. La présence du pore voisin entraîne un effet de confinement de l'écoulement. La ligne  $x = 1$  est une ligne d'arrêt de l'écoulement.

Dans la zone B, l'écoulement est du même type que celui obtenu avec un écoulement frontal à un disque, donné par Dagan et al [5]. Le facteur correcteur pour cette zone est noté  $K_b^s$ .

Lorsque la sphère est proche de la paroi (zone I), nous utilisons le même raccordement entre les cas limites que celui utilisé dans le paragraphe précédent pour la sphère en mouvement. Dans la zone I :

$$K_I^s = K_0^s f^* + K_b^s (1 - f^*) \quad (4.34)$$

**zone loin de la paroi - zone II** Dans la zone II, loin de la paroi, l'écoulement devient rapidement uniforme. La Figure 4.12 montre le raccordement de l'écoulement frontal à un écoulement uniforme.  $E_{L^2}$  est l'écart quadratique de la vitesse de l'écoulement frontal par rapport à l'écoulement uniforme.

$$E_{L^2} = \int \int_{z=cste} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty\|}{\|\mathbf{u}_\infty\|} dx dy \quad (4.35)$$

avec  $\mathbf{u}_\infty = (0, 0, -1)$ .

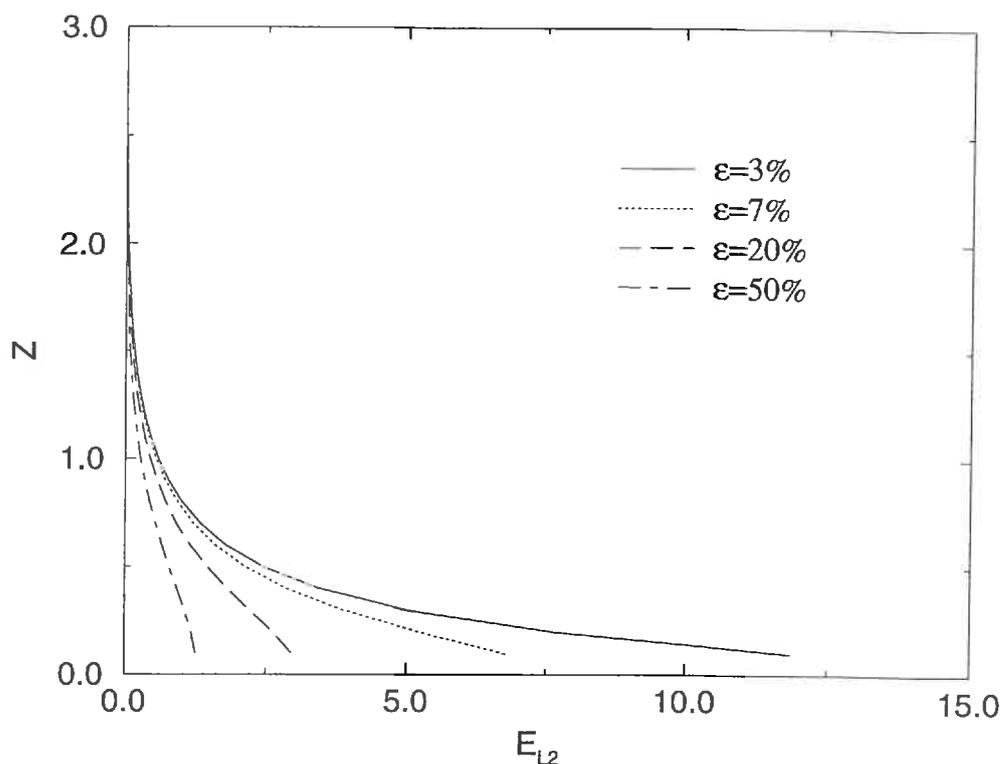


FIG. 4.12 – Raccordement à l'écoulement uniforme

**raccordement transversal à la paroi** Pour obtenir le problème complet, il reste à raccorder le problème I (valide dans la zone proche de la paroi) au problème II (valide dans la zone éloignée). Le raccord se fait selon la direction  $z$ , dans une plage  $[z_1; z_2]$ .

- Lorsque  $z < z_1$ , le facteur correcteur est celui de la zone I.
- Lorsque  $z > z_2$ , le facteur correcteur est égal à 1.
- Lorsque  $z_1 < z < z_2$ , le facteur correcteur est raccordé grâce à la fonction ci-dessous :

$$f^* = I \left( \frac{1 - 3(z - z_2)/(z_1 - z_2)}{1 + (z - z_2)/(z_1 - z_2)} \right) \quad (4.36)$$

En pratique,  $z_2$  correspond à la distance de raccordement de l'écoulement à l'écoulement uniforme. Comme le montre la Figure 4.12, il semble indépendant de la taille de l'orifice. Nous choisissons  $z_2 = 1.5$ .

En revanche, la valeur de  $z_1$  va être conditionnée par la taille du trou. Si l'on compare l'écoulement au voisinage du trou à l'écoulement de Sampson (Figure 4.3), plus le trou est important, plus grande est la zone où les deux écoulements sont comparables.

### Validation des facteurs correcteurs

**Description de la méthode aux éléments de frontière** La validation des facteurs correcteurs s'effectue à l'aide du code aux éléments de frontière décrit en Annexe D, qui permet de résoudre les équations de Stokes. Le calcul de trajectoire s'effectue avec la force et le moment hydrodynamique appliqués à la particule et déterminés à chaque pas de temps par le code aux éléments de frontière.

Cette méthode numérique présente un certain nombre d'avantages pour déterminer des trajectoires de particules dans un domaine tridimensionnel quelconque en régime de Stokes.

Le principe de la méthode est de considérer la formulation intégrale des équations de Stokes. Ainsi, les équations locales sont ramenées à une équation intégrale sur la surface constituant le contour du domaine. Par la suite, les équations sont discrétisées en terme d'éléments finis surfaciques. Ainsi, le maillage décrivant le domaine fluide est un ensemble de surfaces élémentaires. L'intérêt majeur de la méthode réside dans la facilité de remaillage du domaine.

Lors du déplacement de la particule, le domaine fluide évolue. Avec une méthode volumique classique (éléments finis ou volumes finis), le maillage doit être redéfini à chaque pas de temps. En général, pour de faibles déplacements, une déformation du maillage de l'itération précédente suffit. Mais à partir d'un certain nombre d'itérations, les éléments deviennent trop distordus pour que la précision du calcul reste acceptable. Il est alors nécessaire de remailler tout le domaine et d'interpoler les valeurs aux noeuds du nouveau maillage à partir de celles aux noeuds de l'ancien maillage.

Cette étape est délicate à générer de façon automatique ; elle est, de plus, coûteuse en temps de calcul.

Par contre, avec une méthode aux éléments de frontière, à chaque itération, le nouveau maillage est obtenu simplement par translation et rotation en bloc des éléments constituant la surface de la partie mobile.

Cette méthode est cependant limitée à des équations linéaires car, sinon, les équations locales ne peuvent être exprimées de manière intégrale, avec uniquement des intégrales de surface et il faut recourir au maillage volumique du domaine.

Une fois discrétisé, le problème s'écrit :

$$\sum_{i_e=1}^{n_e} u_i^{i_e} \iint_{S^{i_e}} T_{ijk}(x, \xi) n_k - \sum_{i_e=1}^{n_e} f_i^{i_e} \iint_{S^{i_e}} S_{ij}(x, \xi) ds(x) = I_D(\xi) u_i(\xi) \quad (4.37)$$

où  $u_i^{ie}$  et  $f_i^{ie}$  sont les composantes de la vitesses et de la contrainte normale sur l'élément  $ie$ ,  $n_e$  le nombre d'éléments,  $S_{ij}$  et  $T_{ijk}$  les fonctions de Green des équations de Stokes dans un milieu infini.

En chaque point de discrétisation du maillage, il faut donner soit la vitesse soit la contrainte. L'équation 4.37 écrite pour chaque élément du maillage ( $\xi \in S^{ie}$ ) permet de déterminer, après résolution d'un système linéaire, l'autre variable (la contrainte ou la vitesse).

Nous accédons ainsi à la force appliquée à la particule par sommation des contraintes calculées sur chaque élément de la particule, et déterminons son déplacement pour chaque pas de temps.

**Validation des facteurs correcteurs** Les Figures 4.13, 4.14 et 4.15 montrent des résultats obtenus, d'une part, avec le code aux éléments de frontière et, d'autre part, avec la méthode analytique.

Chaque courbe est le résultat d'un calcul de trajectoire d'une particule sphérique lâchée à une position initiale  $(x_0, y_0, z_0)$  dans l'écoulement frontal, à une vitesse égale à la vitesse du fluide  $(0, 0, -1)$ . La sphère et le trou ont le même rayon  $r = a = 0.2$ .

**Méthode aux éléments de frontière** Le code résout le problème dans un domaine correspondant à une cellule périodique. La hauteur du domaine ne pouvant pas être considérée dans sa totalité, elle est imposée à une hauteur finie suffisamment grande ( $z = 5b$ ) pour que l'écoulement soit uniforme (Figure 4.12). Initialement, des conditions limites en vitesse sont imposées sur le contour. Elles correspondent aux valeurs de l'écoulement sans particule obtenu à la section précédente avec l'hypothèse d'écran mince. A la sortie du pore, nous imposons un écoulement de Poiseuille. La longueur du pore est prise suffisamment grande pour permettre à l'écoulement de s'établir. Dagan et al [6] ont montré qu'une distance égale à un rayon de pore était suffisante. Pour nos calculs, la longueur du pore est égale à une période et demie, et donc supérieure à la distance d'établissement.

A chaque itération, nous déterminons la force et le moment qui s'appliquent sur la sphère. Nous en déduisons la nouvelle vitesse ainsi que la vitesse de rotation de la sphère. Ces valeurs sont alors imposées comme conditions limites sur la sphère, les autres conditions restant inchangées sur la partie fixe du domaine.

**Méthode analytique** La trajectoire analytique est obtenue par calcul direct de la force qui s'applique sur la particule en fonction de sa vitesse, de sa position, de la

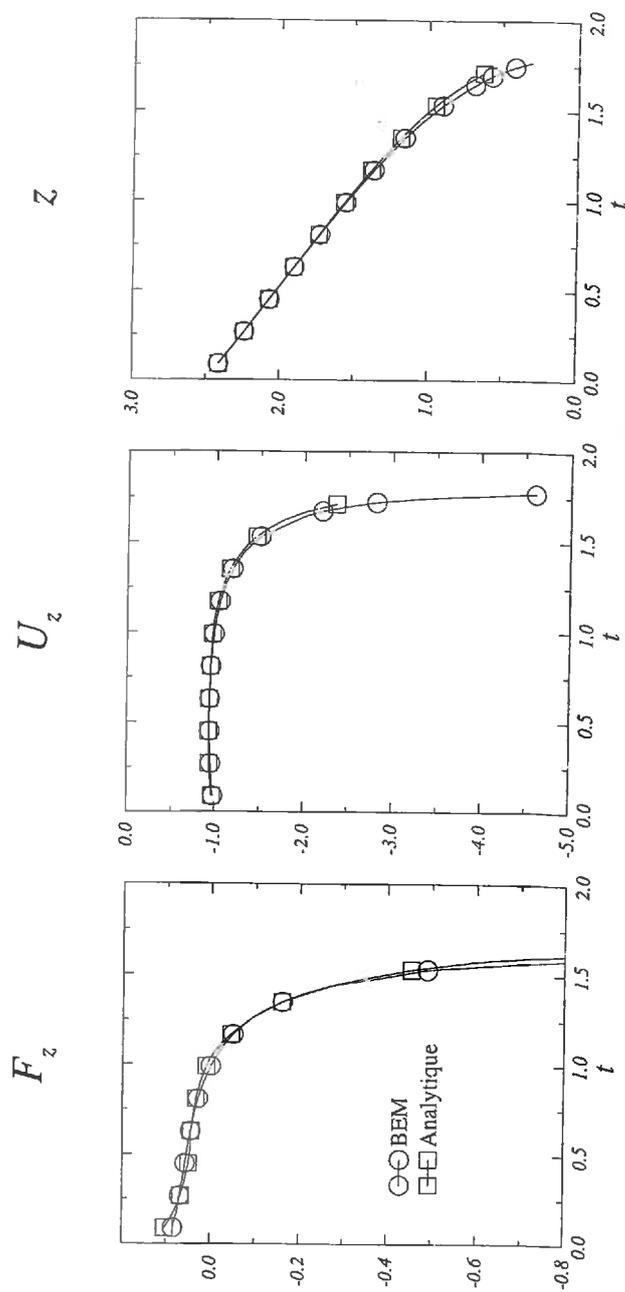


FIG. 4.13 – Comparaison force, vitesse et position obtenues avec les facteurs correcteurs choisis et avec le code aux éléments de frontière -  $x_0 = y_0 = 0$ ;  $\frac{a}{r} = 1$ ;  $r = 0.2$

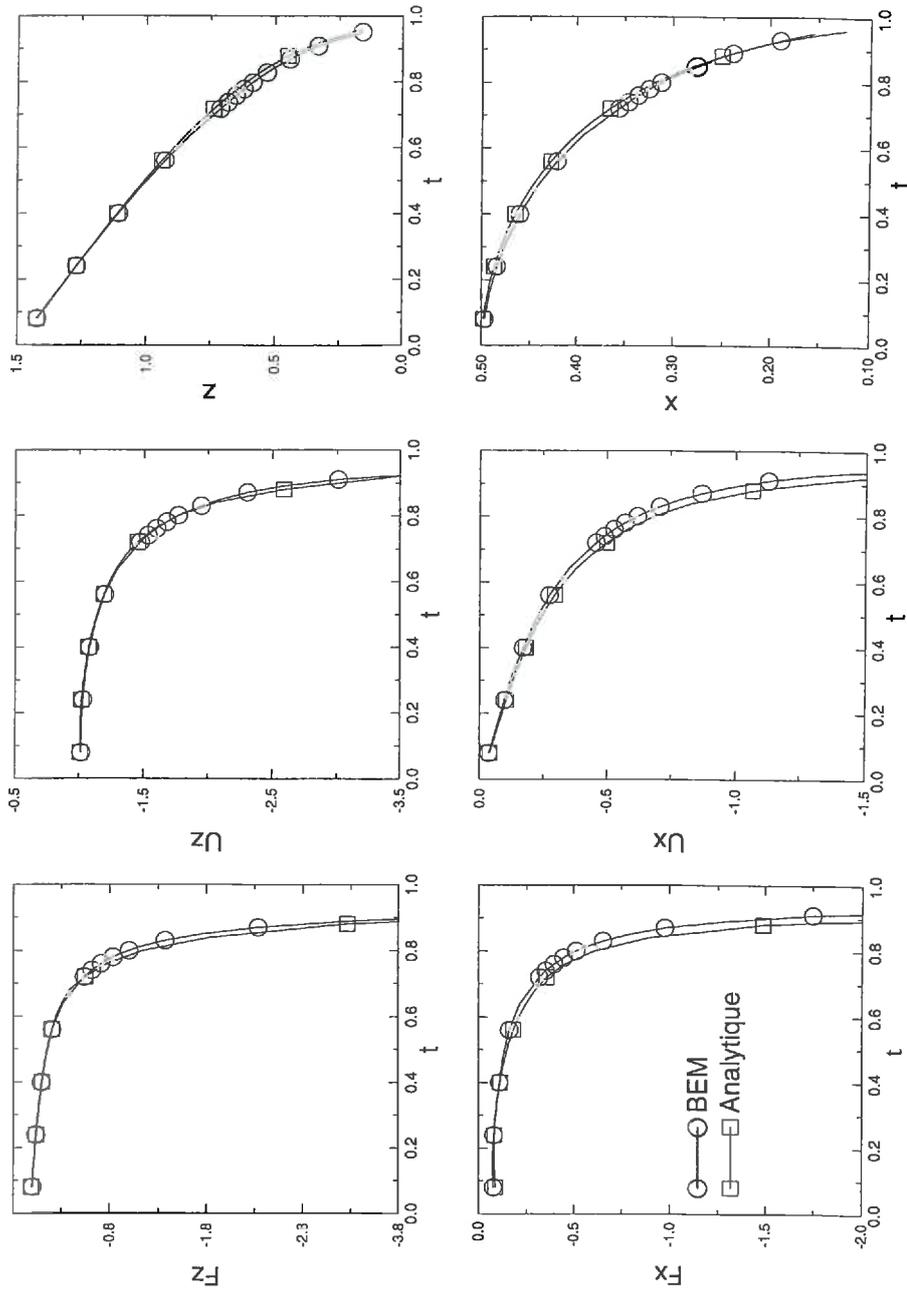


FIG. 4.14 – Comparaison force, vitesse et position obtenues avec les facteurs correcteurs choisis et avec le code aux éléments de frontière –  $x_0 = 0.5; y_0 = 0; \frac{a}{r} = 1; r = 0.2$

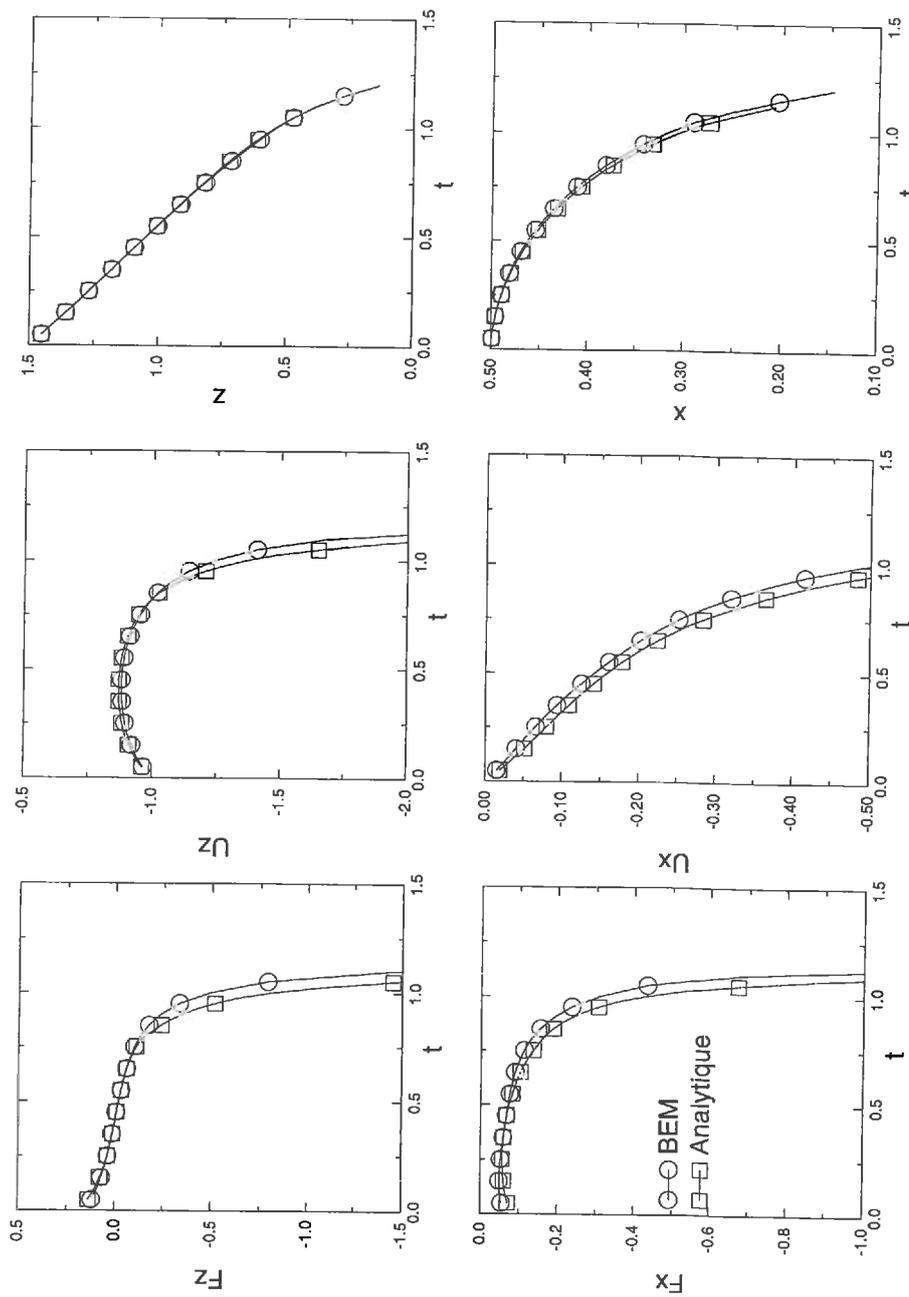


FIG. 4.15 – Comparaison force, vitesse et position obtenues avec les facteurs correcteurs choisis et avec le code aux éléments de frontière  $x_0 = 0.5; y_0 = 0.5; \frac{a}{r} = 1; r = 0.2$

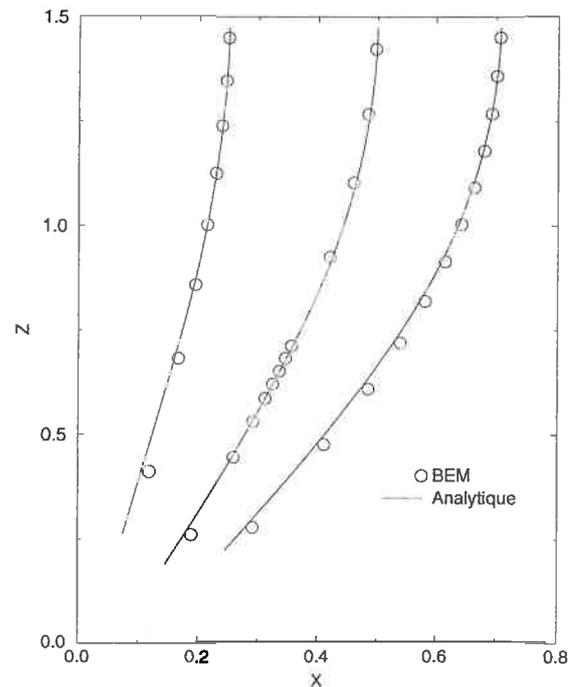


FIG. 4.16 – Trajectoires d'une sphère dans l'écoulement frontal

vitesse du fluide non perturbé et des facteurs correcteurs choisis. L'écoulement est calculé analytiquement avec l'hypothèse d'écran mince.

On constate un bon accord entre les deux méthodes, que se soit dans la direction perpendiculaire ( $z$ ) ou parallèle ( $x$ ) à la paroi.

Cherchant avant tout à déterminer la trajectoire d'une particule sphérique à proximité d'un pore, la Figure 4.16 montre la comparaison des trajectoires obtenues, d'une part, avec le code aux éléments de frontière et, d'autre part, avec le calcul analytique. On constate un bon accord entre les deux résultats. On note tout de même que le modèle analytique a tendance à surestimer le déplacement de la sphère vers le centre du pore.

### 4.2.3 Probabilité de capture

Le calcul de la probabilité de capture s'effectue à partir des points d'impact sur la paroi d'un grand nombre de trajectoires de particules issues d'un carré parallèle à la paroi, dont la longueur du côté est égale la période et de cote  $z = z_0$  (Figure 4.17).

Le calcul de  $n_e$  trajectoires permet de déterminer  $n_e$  points d'impact sur la paroi.

L'approche consiste à déterminer la densité de probabilité de capture sur la paroi en fonction de la répartition des points d'impact.

Soit  $T$  la transformation qui, à un point initial  $X_e$ , fait correspondre un point d'impact

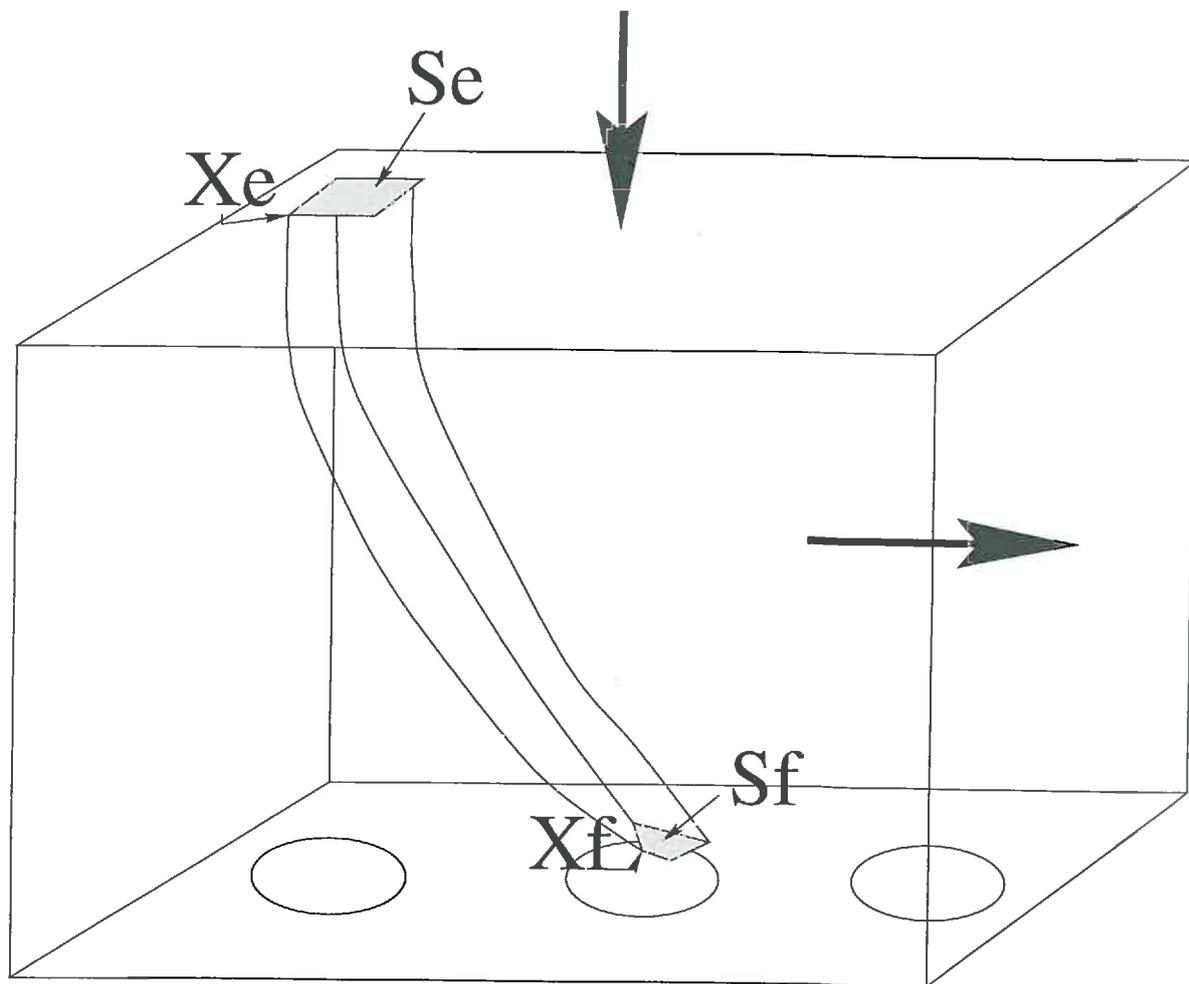


FIG. 4.17 – Détermination de la probabilité de capture

$X_f$ .

$$T(X_e) = X_f \quad (4.38)$$

Soit  $S_e$  une surface au voisinage de  $X_e$ . Nous appelons  $S_f$  l'image de  $S_e$  par  $T$ .

$$T(S_e) = S_f \quad (4.39)$$

En supposant que  $T$  est bijective de  $S_e$  sur  $S_f$ , la probabilité  $P(S_f)$  qu'une particule appartienne à  $S_f$  est la même que la probabilité  $P(S_e)$  qu'une particule appartienne à  $S_e$ .

$$P(S_f) = P(S_e) \quad (4.40)$$

Nous choisissons des particules uniformément réparties dans la section d'entrée. Ainsi la densité de probabilité est constante sur la section d'entrée.

$$\frac{dP}{dS} = \alpha \quad (4.41)$$

par intégration sur la section d'entrée  $S$  on trouve

$$\int_S \frac{dP}{dS} dS = \alpha S \quad (4.42)$$

cette intégrale vaut également 1, puisque la particule appartient à la section d'entrée. Ainsi, sur la section d'entrée :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{S} \quad (4.43)$$

Nous cherchons la densité de probabilité de capture sur la paroi. Nous utilisons une approximation de la densité constante par élément. Si la densité de probabilité est constante sur  $S_f$  et égale à  $\beta$ , et si nous utilisons 4.40 nous obtenons :

$$\int_{S_e} \frac{dP}{dS} dS = \int_{S_f} \frac{dP}{dS} dS \quad (4.44)$$

et donc

$$\beta = \frac{1}{S} \frac{S_e}{S_f} \quad (4.45)$$

La densité de probabilité est directement donnée par le rapport des aires de la surface initiale et de son image par la transformation.

Il faut désormais choisir le type d'éléments pour partitionner la section d'entrée et estimer les surfaces correspondantes sur la paroi en fonction des différents points d'impact.

Soit  $X_e^i$  et  $X_e^j$  deux points dans la section d'entrée et  $X_f^i$  et  $X_f^j$  leur point d'impact correspondants.

Tout point  $X_e$  du segment  $[X_e^i; X_e^j]$  est donné par :

$$X_e = X_e^i + \theta(X_e^j - X_e^i) \quad (4.46)$$

avec  $0 < \theta < 1$ .

L'image  $X_f$  de  $X_e$  est alors :

$$X_f = T(X_e) = T(X_e^i + \theta(X_e^j - X_e^i)) \quad (4.47)$$

En utilisant un développement limité au premier ordre au voisinage de  $X_e^i$ , on trouve :

$$X_f = X_f^i + \frac{\partial T}{\partial X} \theta(X_e^j - X_e^i) + o(X_e^j - X_e^i) \quad (4.48)$$

En approximant le gradient par :

$$\frac{\partial T}{\partial X} \approx \frac{(T(X_e^j) - T(X_e^i))}{(X_e^j - X_e^i)} \quad (4.49)$$

nous obtenons finalement :

$$X_f = X_f^i + \theta(X_f^j - X_f^i) \quad (4.50)$$

Ce résultat est valable au premier ordre en  $\|X_e^j - X_e^i\|$ . Ainsi  $T$  est une affinité localement autour de  $X_e^i$ . C'est-à-dire que localement l'image du milieu de deux points reste le milieu des images des points. Et, par extension, tout point  $X_k$  plus proche d'un point  $X_i$  que d'un point  $X_j$  donne un point  $T(X_k)$  plus proche du point  $T(X_i)$  que du point  $T(X_j)$ .

Nous utilisons ce résultat pour choisir les éléments de la discrétisation. Nous choisissons  $n_e$  points uniformément répartis dans la section d'entrée. A chaque point  $X_e^i$ , nous associons la surface élémentaire  $S_e^i$ , définie comme l'ensemble des points qui sont plus proches de  $X_e^i$  que de n'importe quel autre point de discrétisation.

Connaissant tous les points d'impact, l'image  $S_f^i$  de  $S_e^i$  est l'ensemble des points  $X_f$  plus proches de  $X_f^i$  que de n'importe quel autre point d'impact.

La détermination des surfaces associées aux points d'impact est donc directement donnée par le diagramme de Voronoi. La Figure 4.18 montre un exemple de diagramme

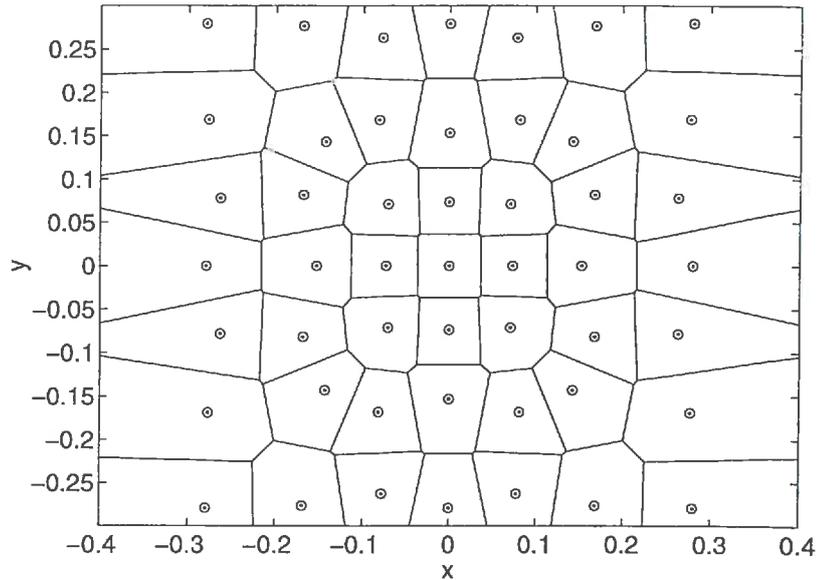


FIG. 4.18 – Exemple de diagramme de Voronoi

de Voronoi obtenu à l'aide de MATLAB. A chaque surface est alors affectée sa valeur de densité de probabilité donnée par 4.45.

La précision du calcul de la densité de probabilité dépend alors directement du nombre de trajectoires calculées. Les Figures 4.19 et 4.20 montrent des profils de densité de probabilité de capture à  $y = 0.2$  et  $y = 0.4$  pour différents nombres de trajectoires. Au-delà de 435 trajectoires, les résultats diffèrent peu.

## 4.3 Résultats

Pour tous les résultats exposés par la suite, la particule est sphérique et de rayon  $a$  égal à la moitié du rayon du pore  $r$  ( $a = \frac{r}{2}$ ).

### 4.3.1 Influence de la porosité

Etudier l'influence de la porosité revient à étudier la taille relative de l'orifice par rapport à la période. Les lignes de courant limites aboutissant au pore pour plusieurs tailles du pore sont représentées sur la Figure 4.21. La distance à la paroi, à partir de laquelle les lignes de courant sont déviées, dépend de la taille de l'orifice. Lorsque le rayon du pore est voisin de la demi-période, les lignes de courant restent perpendiculaires à la

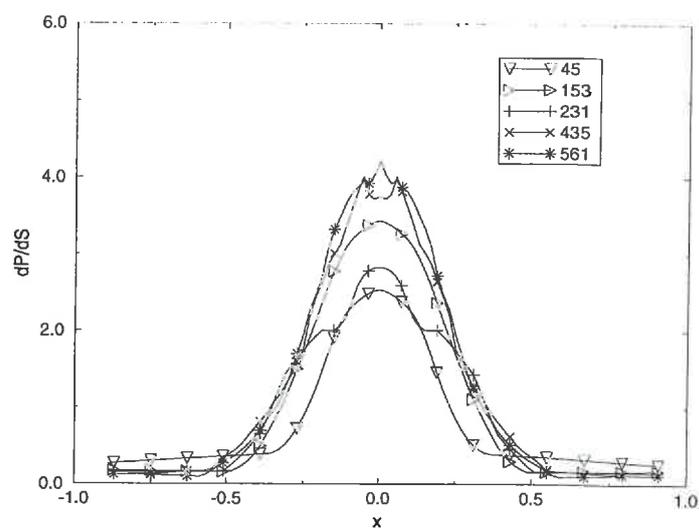


FIG. 4.19 – Convergence de la densité de probabilité en fonction du nombre de trajectoires –  $y = 0.2$

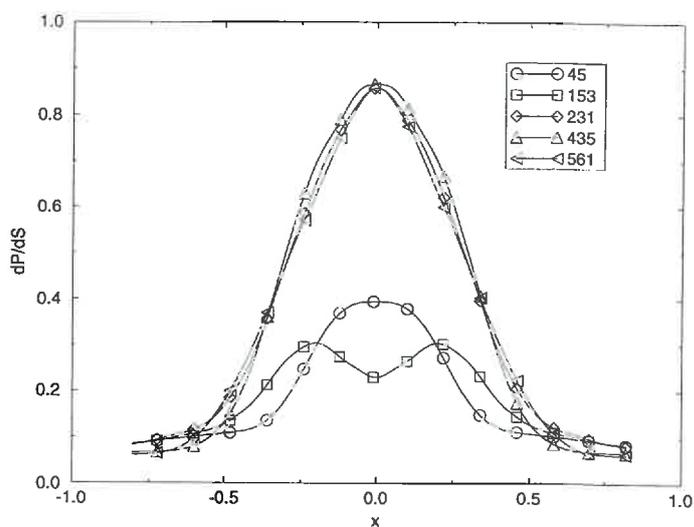


FIG. 4.20 – Convergence de la densité de probabilité en fonction du nombre de trajectoires –  $y = 0.4$

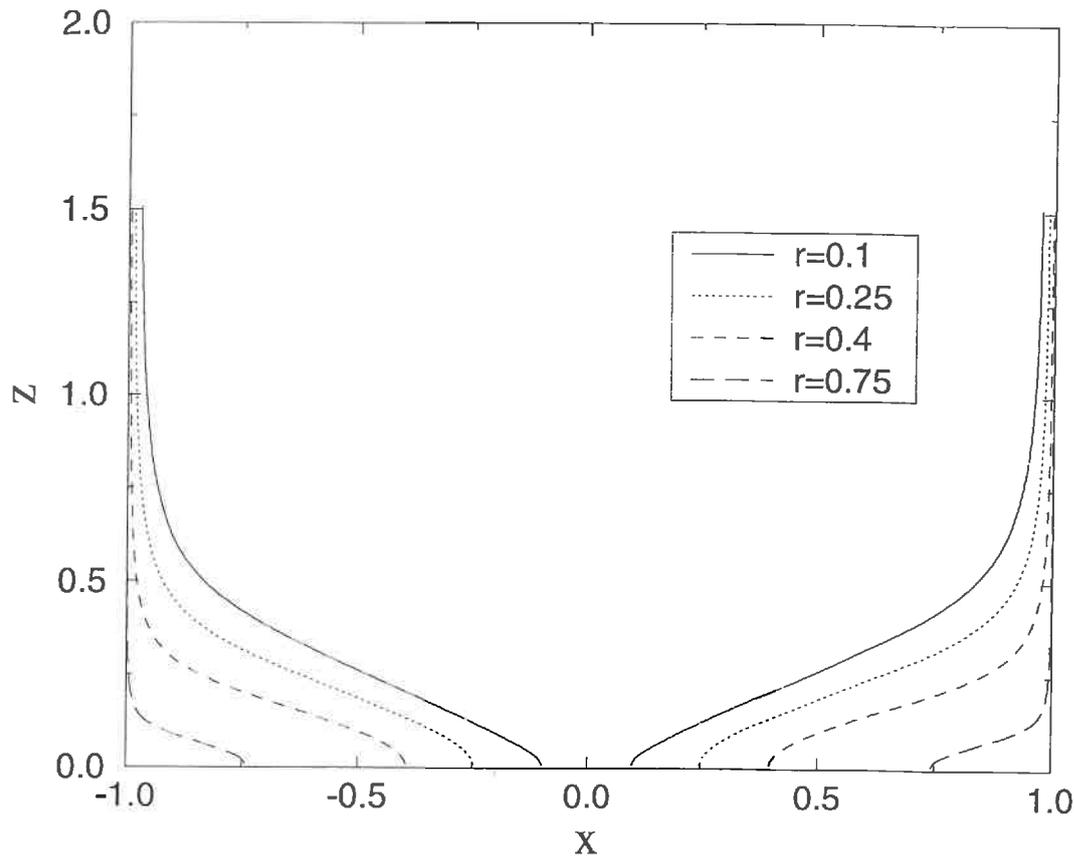


FIG. 4.21 – Lignes de courant aboutissant aux bords du pore

paroi jusque dans une zone proche de celle-ci. La répartition des impacts sur la paroi va donc être modifiée par ce facteur.

La Figure 4.22 montre la répartition, sur une cellule périodique, des points d'impact des particules obtenus avec différentes tailles de l'orifice. Dans tous les cas, le cisaillement est nul, la distance de capture est égale à un demi rayon de sphère  $e = \frac{a}{2}$  et l'inertie de la particule est nulle  $N_{St} = 0$ .

L'augmentation du rayon du pore tend à uniformiser les impacts sur la paroi. Lorsque  $r = 0.1$ , toutes les particules sont attirées vers l'orifice. En revanche, lorsque  $r = 0.75$ , les impacts sont plus espacés les uns des autres.

La répartition des impacts en fonction de la distance  $\omega$  au centre du pore est donnée par la Figure 4.23. Bien que le problème ne soit pas axisymétrique, ce tracé nous donne des indications quantitatives sur l'évolution de la répartition des impacts. La grande majorité

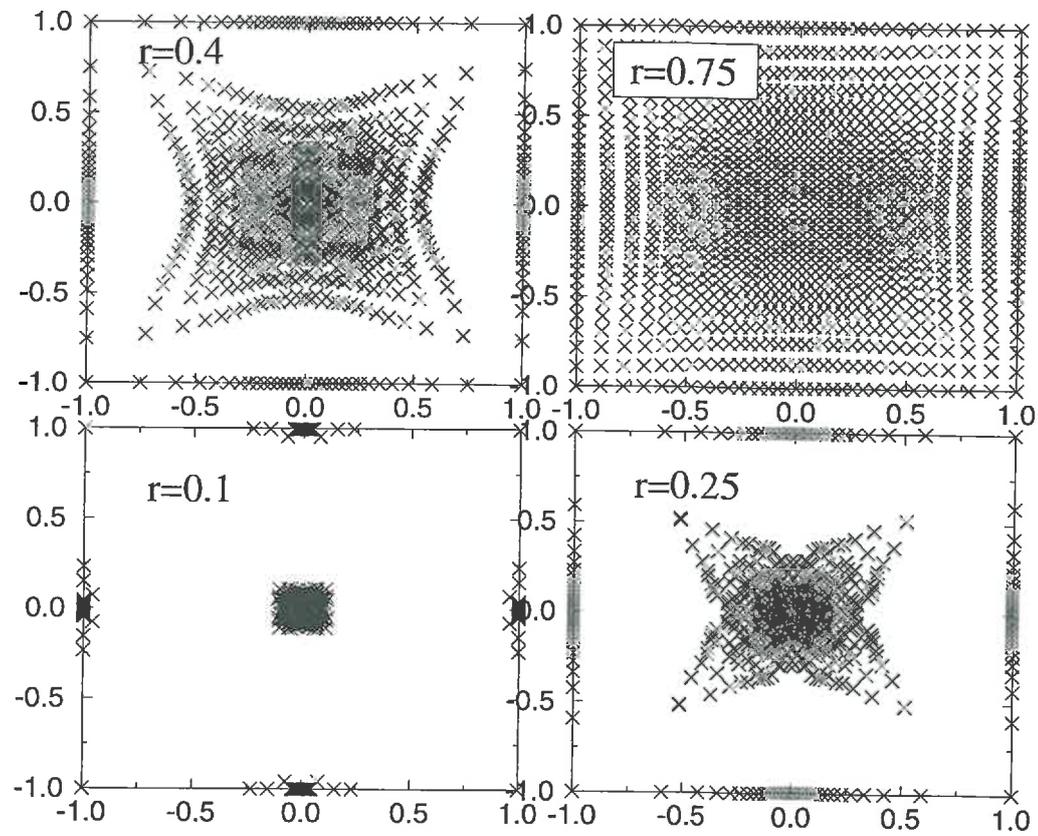


FIG. 4.22 - Répartition des points d'impact en fonction de la taille de l'orifice -  $N_{St} = 0$  ;  
 $e = \frac{a}{2}$  ;  $\gamma = 0$

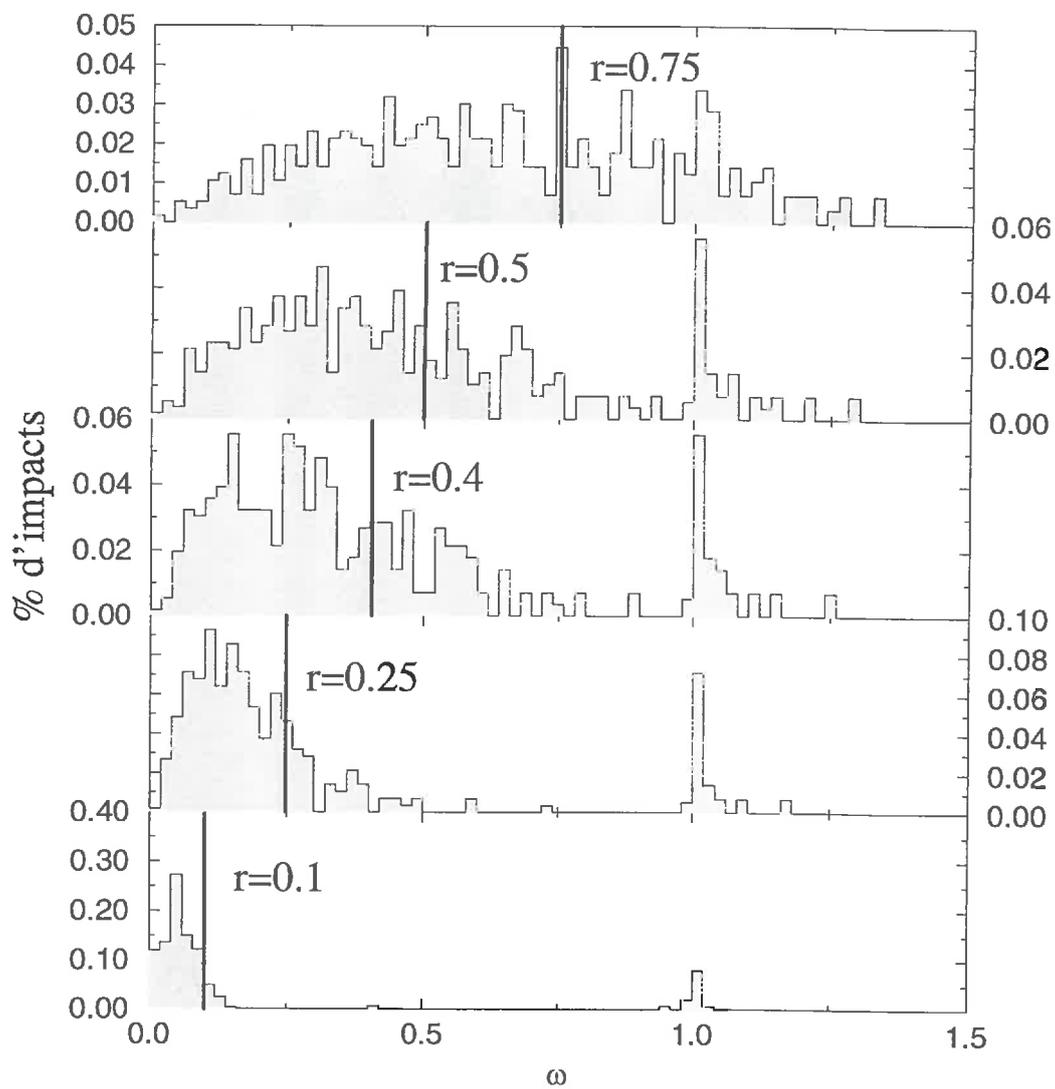


FIG. 4.23 – Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore –  $N_{St} = 0$  ;  
 $e = \frac{\alpha}{2}$  ;  $\gamma = 0$

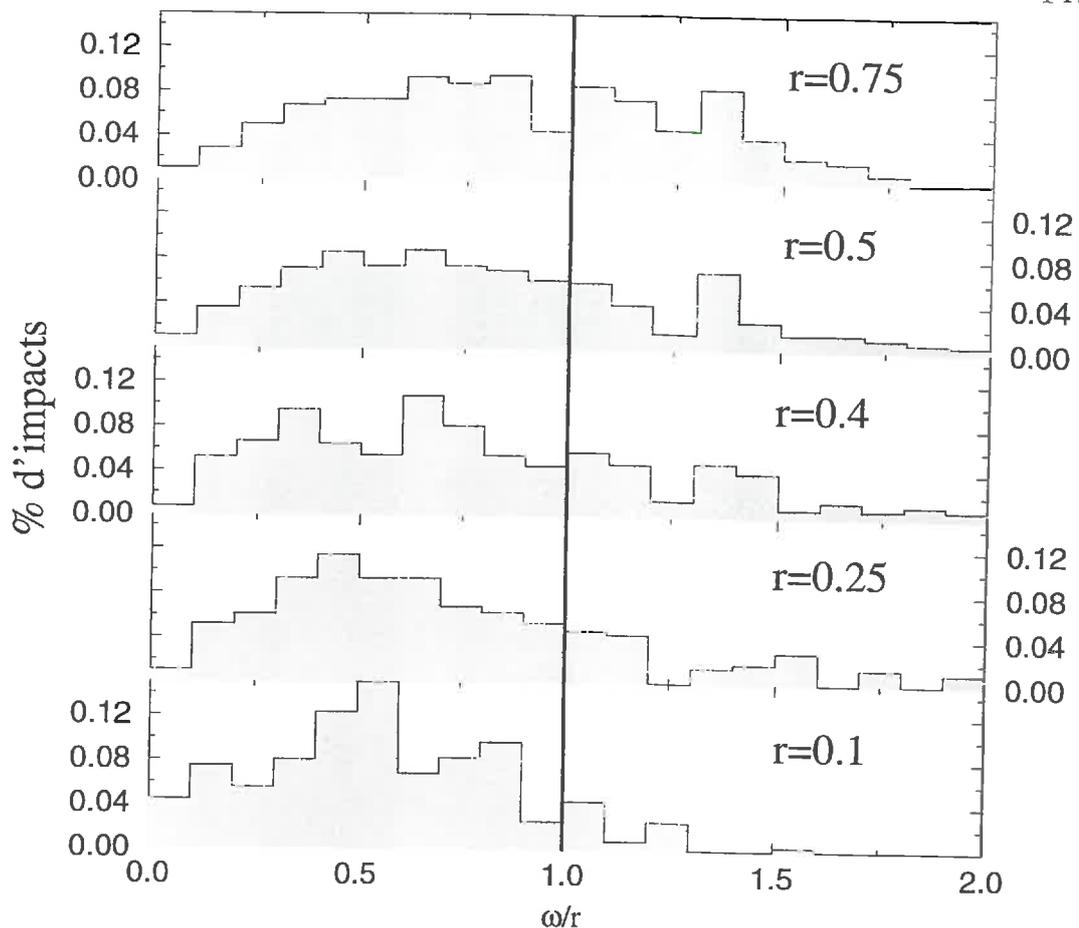


FIG. 4.24 – Répartition des impacts en fonction de la distance relative  $\omega/r$  au centre du pore –  $N_{St} = 0$  ;  $e = \frac{a}{2}$  ;  $\gamma = 0$

des impacts est située sur le pore.

La bosse des tracés située à  $\omega = 1$  correspond aux particules initialement lâchées à la demi-période. Subissant une influence identique des deux pores voisins, elles restent à la demi-période.

La Figure 4.24 montre la même répartition que la Figure 4.23, mais exprimée en rayons de pore  $\omega/r$ . Même une fois rapportée à la distance en terme de rayons de pore, on constate un effet d'uniformisation dû à l'augmentation de la taille de l'orifice.

Sur la Figure 4.25 sont tracées des isovalues de la densité de probabilité de capture. On constate qu'il y a bien, en moyenne, uniformisation des impacts, mais que certaines directions restent plus favorables au dépôt des particules. Les zones entre les pores (par exemple autour de  $x = 1, y = 0$ ) deviennent de plus en plus probables.

Ces résultats montrent, que pour un rapport de taille particule-orifice donné, il est in-

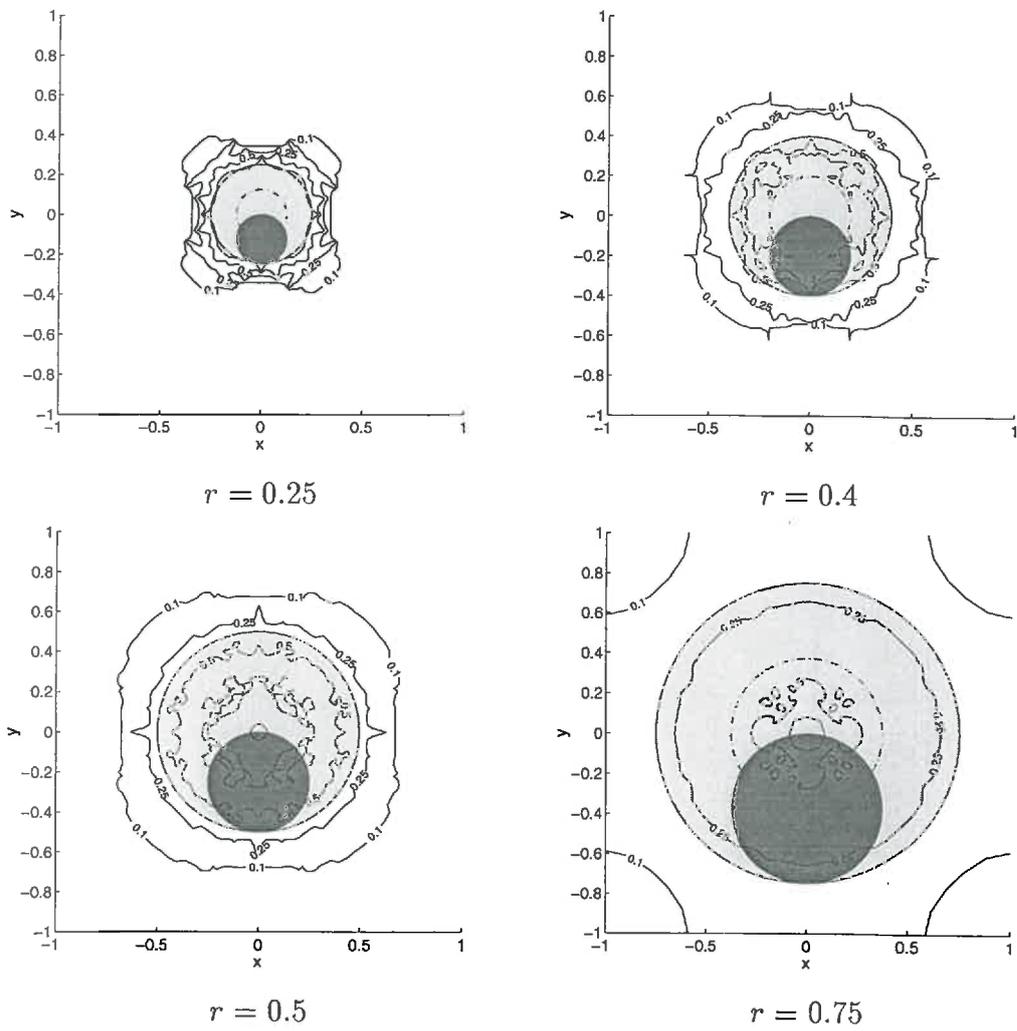


FIG. 4.25 – Isovaleurs de la densité de probabilité de capture en fonction du rayon du trou  
 $= N_{St} = 0$ ;  $e = \frac{a}{2}$ ;  $\gamma = 0$

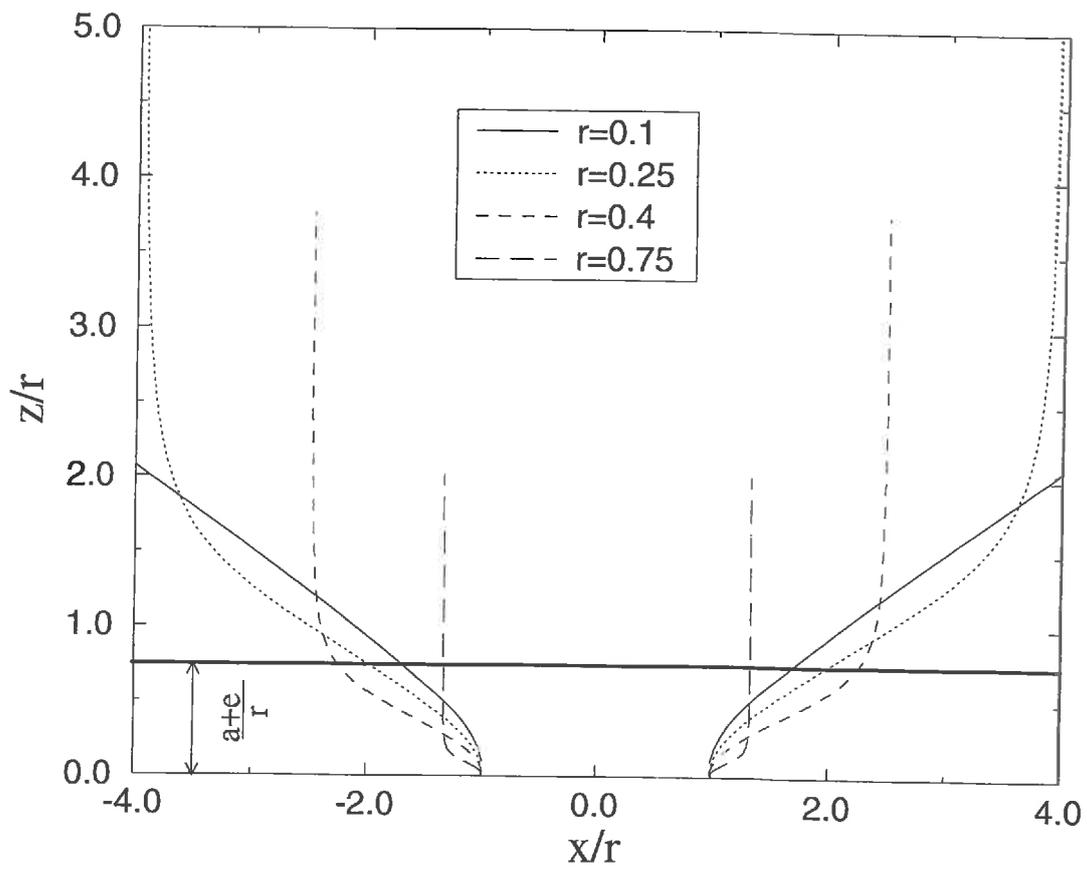


FIG. 4.26 - Lignes de courant aboutissant aux bords du pore représentées en nombre de rayons de pore

téressant de choisir une grande porosité, c'est-à-dire une petite période. L'écoulement qui en résulte est beaucoup plus uniforme et les impacts des particules sont mieux répartis sur la paroi. La Figure 4.26 montre les lignes de courant aboutissant aux bords du pore. Sur la Figure, les longueurs sont représentées par rapport au rayon du pore. L'observation des lignes de courant permet par une approche simplifiée, en considérant que les trajectoires des particules sont proches des lignes de courant, de retrouver ce résultat qualitativement. La ligne horizontale de la Figure, représente la zone d'exclusion en-deçà de laquelle les particules sont capturées. Plus le rayon du pore est grand, plus la ligne de courant, à l'intersection de la ligne de capture, est perpendiculaire à la paroi. Pour un rapport de tailles particule-pore donné, l'influence de l'orifice est d'autant moins perçue par la particule que le rayon du pore est grand. La répartition des impacts sur la paroi reste proche de la répartition initiale, c'est-à-dire uniforme. Ainsi, la chute de perméabilité résultante doit être moins importante. Ce résultat n'est valable que lorsque l'inertie de la particule est faible.

### 4.3.2 Influence de la distance de capture

La Figure 4.27 montre la répartition des points d'impact des particules obtenue avec différentes distances de capture. Dans tous les cas, le cisaillement est nul, le rayon du trou vaut 0.4 et l'inertie de la particule est nulle. La distance de capture est donnée en pourcentage du rayon de la sphère.

Les Figures 4.27 et 4.28 montrent que l'augmentation de la distance de capture uniformise les impacts sur la paroi.

Pour de faibles distances de capture ( $e < a/10$ ), la quasi totalité des particules arrivent sur le pore. Lorsque l'effet physico-chimique est plus important, il masque les effets de l'hydrodynamique. La zone proche de la paroi, dans laquelle les particules sont déviées vers le pore, devient de moins en moins accessible aux particules de par l'effet d'exclusion lié à la distance de capture. Ainsi, pour les particules, l'écoulement devient de plus en plus uniforme. La répartition des impacts sur la paroi tend, de ce fait, à s'uniformiser.

### 4.3.3 Influence de l'inertie

La Figure 4.29 montre la répartition des points d'impact des particules obtenue avec différentes valeurs du nombre de Stokes  $N_{st}$  (obtenus pour des particules plus denses que le fluide). Dans tous les cas, le cisaillement est nul, le rayon du trou vaut 0.4 et la distance

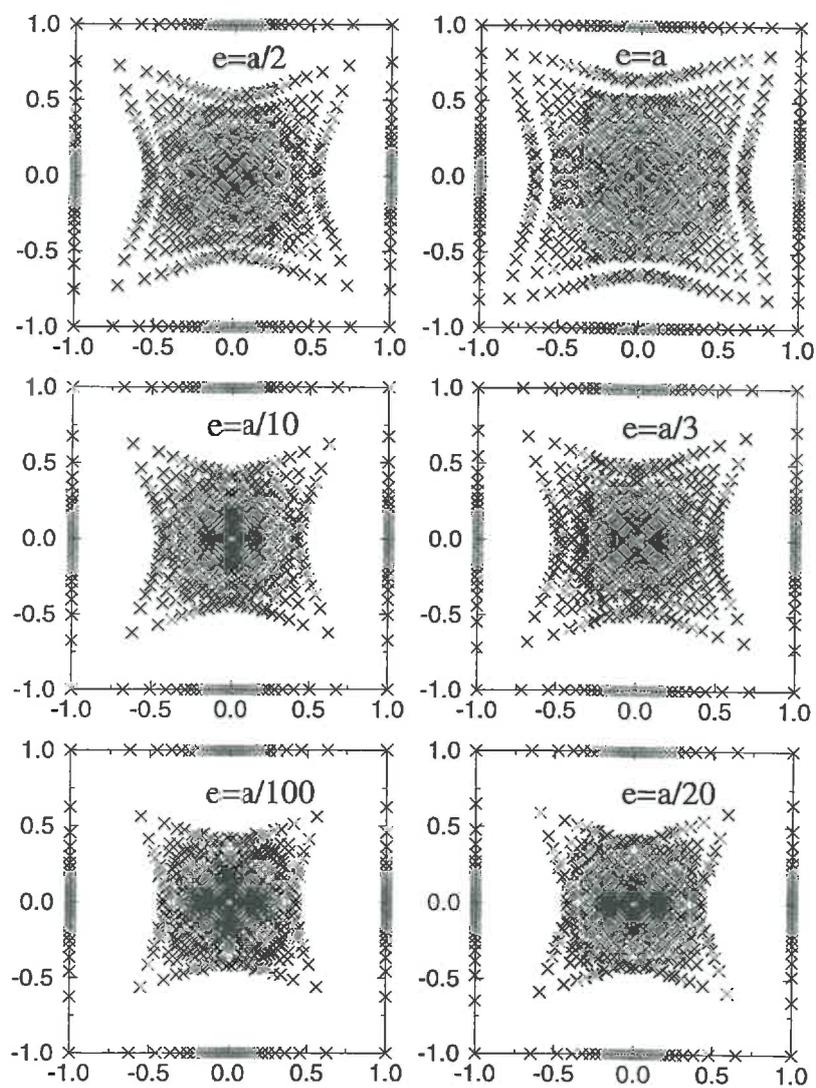


FIG. 4.27 – Répartition des points d'impact en fonction de la distance de capture –  $N_{St} = 0$ ;  $r = 0.4$ ;  $\gamma = 0$

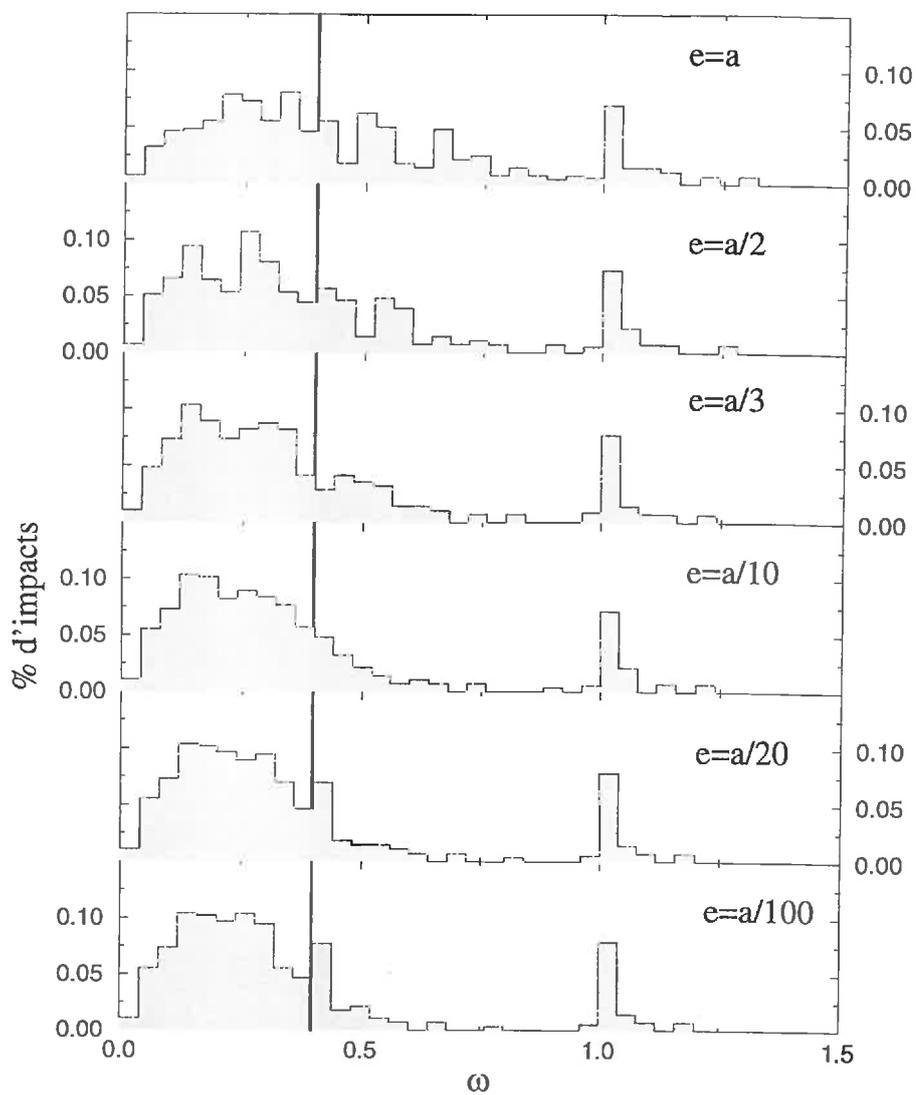


FIG. 4.28 – Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore –  $N_{St} = 0$  ;  $r = 0.4$  ;  $\gamma = 0$

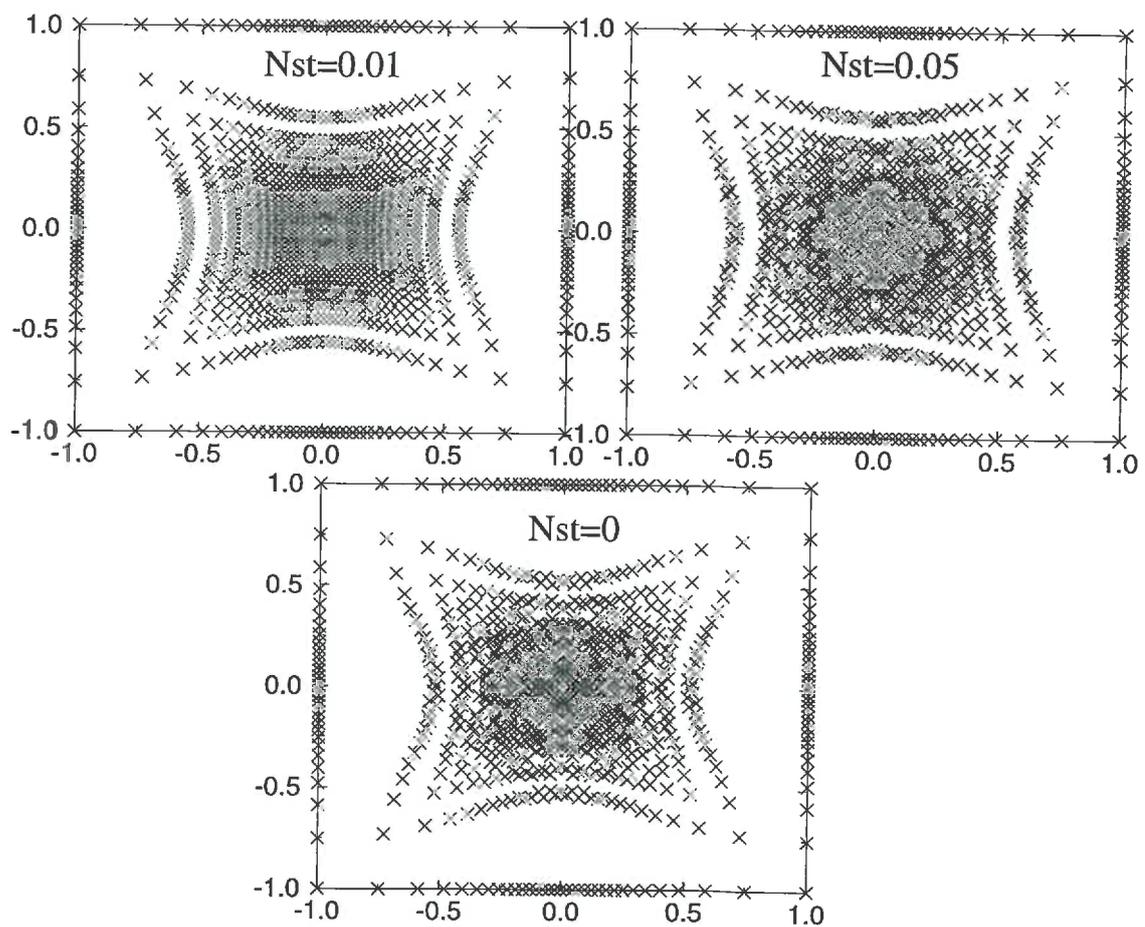


FIG. 4.29 – Répartition des points d'impact en fonction de l'inertie de la particule –  $e = \frac{a}{2}$  ;  
 $r = 0.4$  ;  $\gamma = 0$

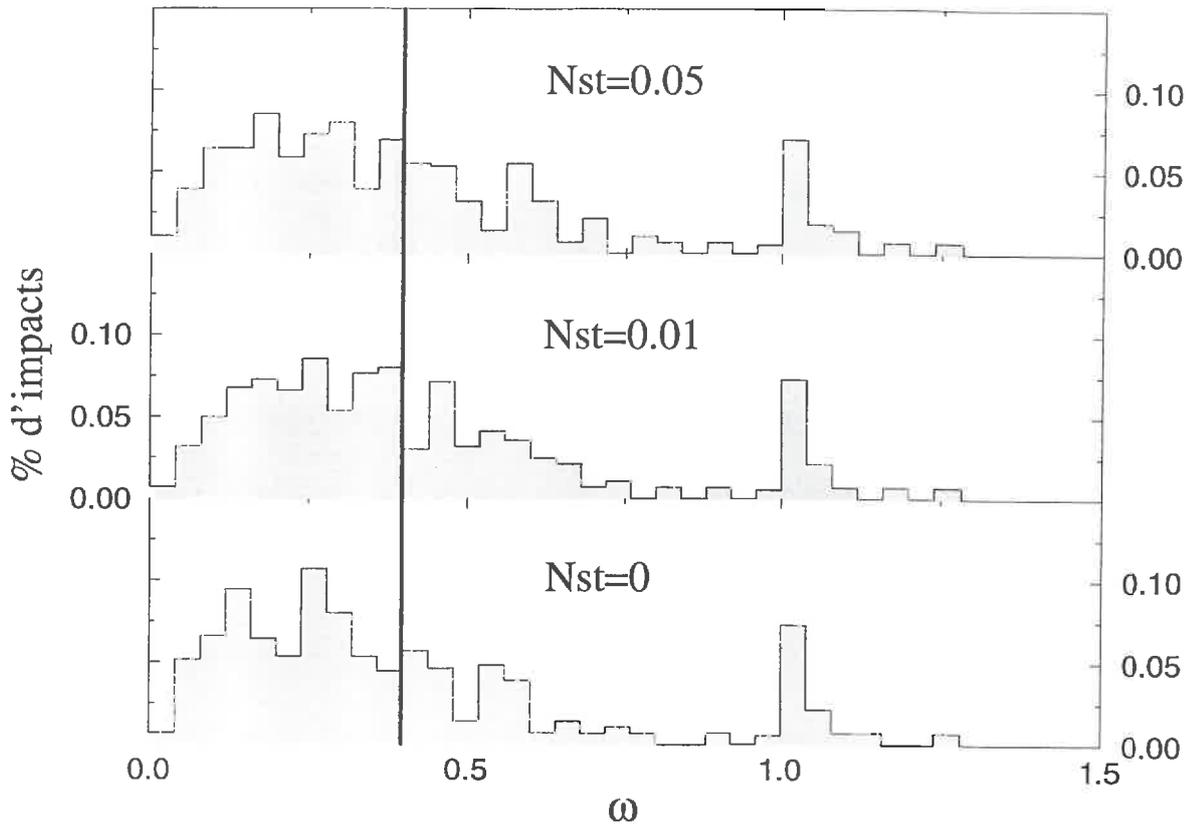


FIG. 4.30 – Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore-  $e = \frac{a}{2}$ ;  $r = 0.4$ ;  $\gamma = 0$

de capture  $e = \frac{a}{2}$ .

Dans la gamme des nombres de Reynolds étudiés ( $Re < 1$ ), l'effet de l'inertie de la particule est faible puisque le nombre de Stokes  $N_{St}$  est proportionnel à  $Re$ .

La faible inertie de la sphère a relativement peu d'influence sur la répartition des impacts comme l'indiquent les Figure 4.29 et 4.30. Pour mettre en évidence cet effet, il faudrait choisir des valeurs plus grandes du nombre de Stokes. Cependant, si tel était le cas, au niveau de la particule, il serait nécessaire de tenir compte de nouvelles forces liées à l'inertie du fluide. On note cependant sur la Figure 4.30 un léger décalage qui éloigne les particules du pore.

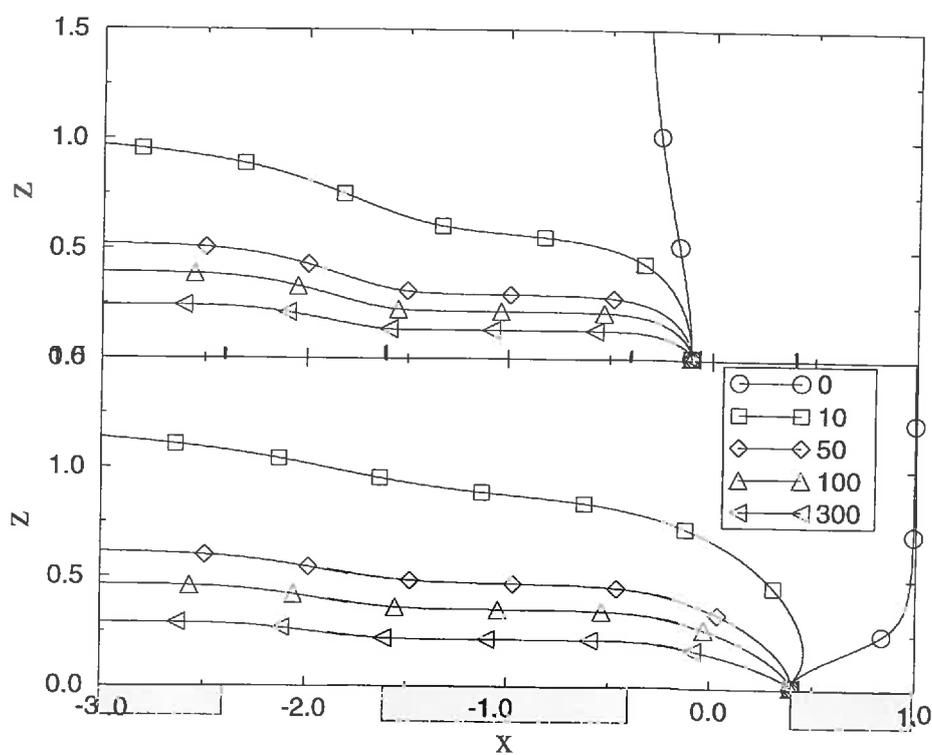


FIG. 4.31 – Lignes de courant aboutissant à un pore en fonction de l'intensité du cisaillement – haut : lignes de courant aboutissant à  $x = -0.25r$  ; bas : lignes de courant aboutissant à  $x = r - \epsilon$

#### 4.3.4 Influence du cisaillement

La présence d'un cisaillement va modifier l'écoulement au niveau du pore. La Figure 4.31 indique l'allure de lignes de courant pour plusieurs valeurs du cisaillement ( $\gamma = 0; 10; 50; 100; 300$ ). Le rayon du pore est 0.4. Les lignes de courant sur le graphe du haut aboutisse à  $x = 0.99r$  et sur le graphe du bas à  $x = -0.25r$ .

Dans le cas de particules de tailles très inférieures à celle du pore, leur trajectoire est proche des lignes de courant. Pour un pore donné, il est possible de déterminer la région de l'écoulement qui va être aspirée par ce pore. Ce volume est appelé tube de capture. Schmitz et Prat [14] ont caractérisé la forme du tube de capture dans une géométrie identique à la notre pour différents rapports entre le cisaillement et l'intensité de l'aspiration. Ils ont montré que pour de fortes aspirations, des particules en aval du pore peuvent être aspirées par le pore. De manière plus générale, ils montrent que l'extension latérale du tube de capture est plus large que le pore, tout en étant limitée à la période. Lorsque l'aspiration est plus faible, l'extension latérale du tube de capture diminue jusqu'à devenir voisine de la largeur du pore et sa hauteur diminue jusqu'à devenir très petite.

Pour des particules de tailles plus importantes, la trajectoire des particules diffère des lignes de courant, mais nous nous attendons à retrouver les mêmes tendances.

La Figure 4.32 montre la répartition, sur une cellule périodique, des points d'impact des particules obtenus avec différentes valeurs du cisaillement  $\gamma$ . Dans tous les cas, la distance de capture est égale à un demi-rayon de sphère, l'inertie de la particule est nulle et le rayon du trou vaut 0.4.

L'effet majeur du cisaillement est d'amener les particules sur une bande d'orientation parallèle à la direction de l'écoulement cisailé, de largeur voisine du diamètre des pores et centrée sur l'axe des pores.

Cet effet est bien illustré par la Figure 4.33 qui donne la répartition des impacts selon des bandes perpendiculaires à la direction de l'écoulement cisailé (à gauche de la Figure) ou selon des bandes parallèle (à droite). La répartition en fonction de  $y$  est modifiée rapidement (de  $\gamma = 0$  à  $\gamma = 10$ ). Par la suite, l'augmentation du cisaillement modifie peu la répartition. Le cisaillement a pour effet, dans cette direction, de rapprocher les particules vers la ligne de centre des pores  $y = 0$ .

La répartition selon  $x$  est beaucoup plus sensible au cisaillement. Les impacts ont tendance à se répartir sur toute la longueur offerte. Pour de faibles cisaillements, le maximum de la courbe de répartition se décale vers l'aval de l'écoulement. Dans le même temps, la courbe tend à s'uniformiser. Pour un fort cisaillement,  $\gamma = 300$ , la répartition est presque

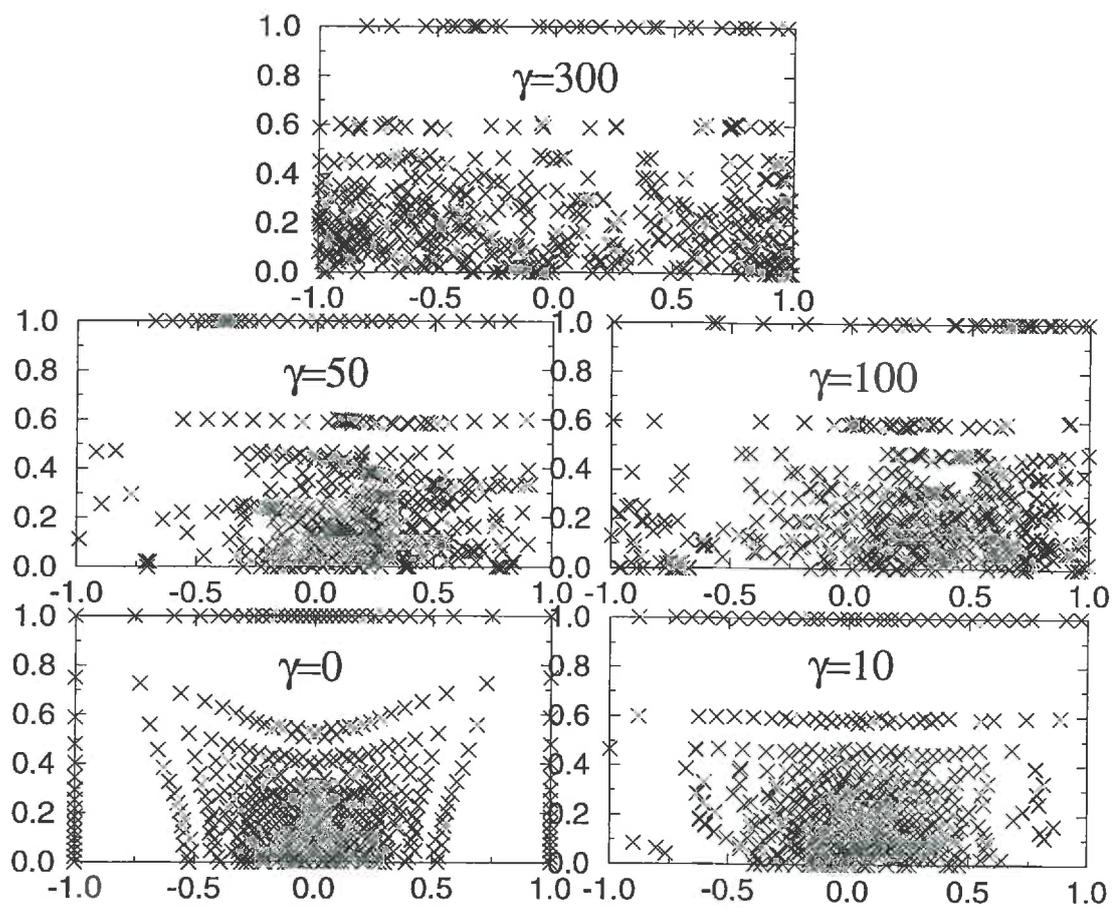


FIG. 4.32 – Répartition des points d'impact en fonction du cisaillement –  $e = \frac{a}{2}$ ;  $r = 0.4$ ;  $N_{St} = 0$

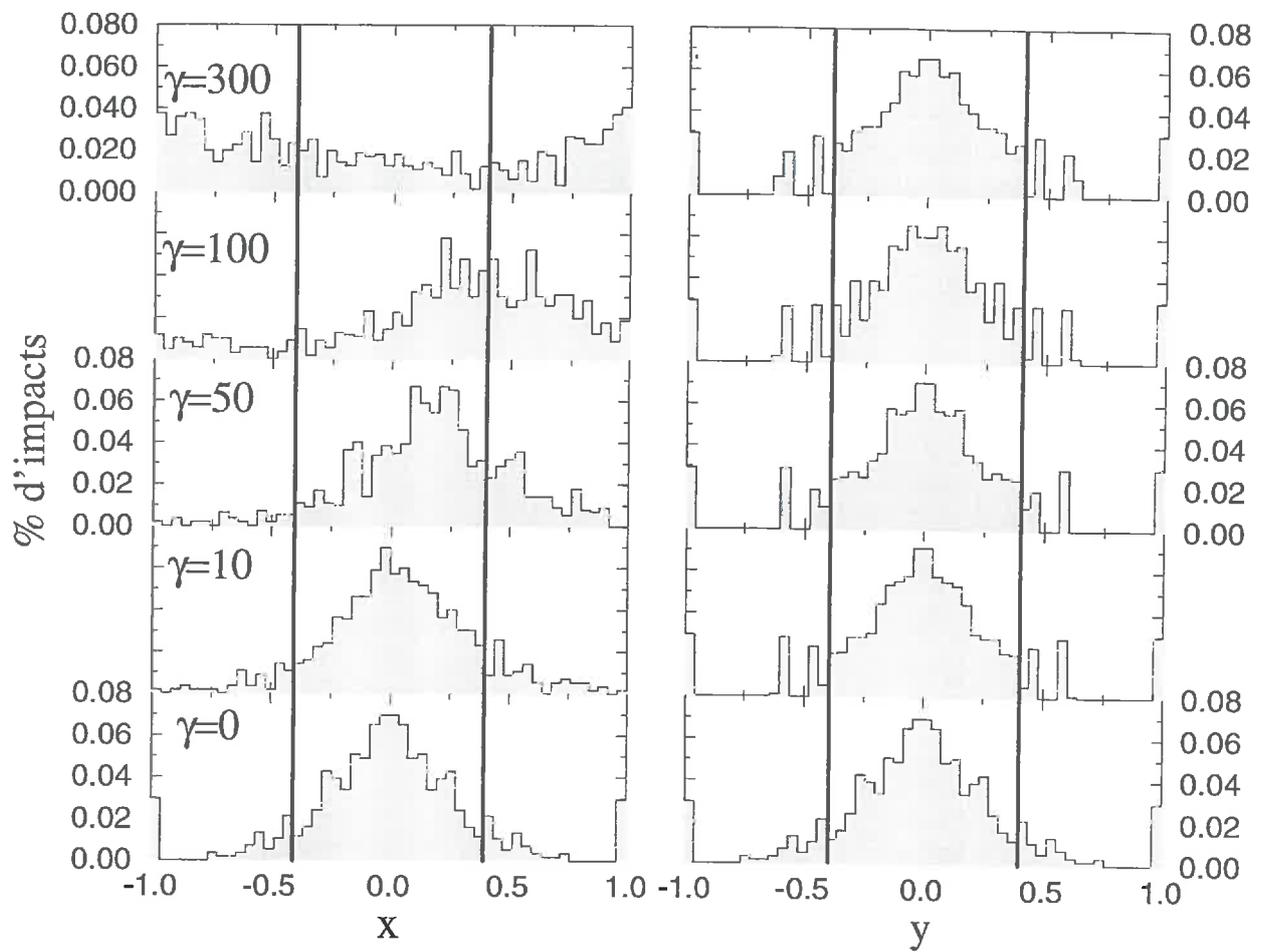


FIG. 4.33 – Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore –  $e = \frac{a}{2}$  ;  
 $r = 0.4$  ;  $N_{St} = 0$

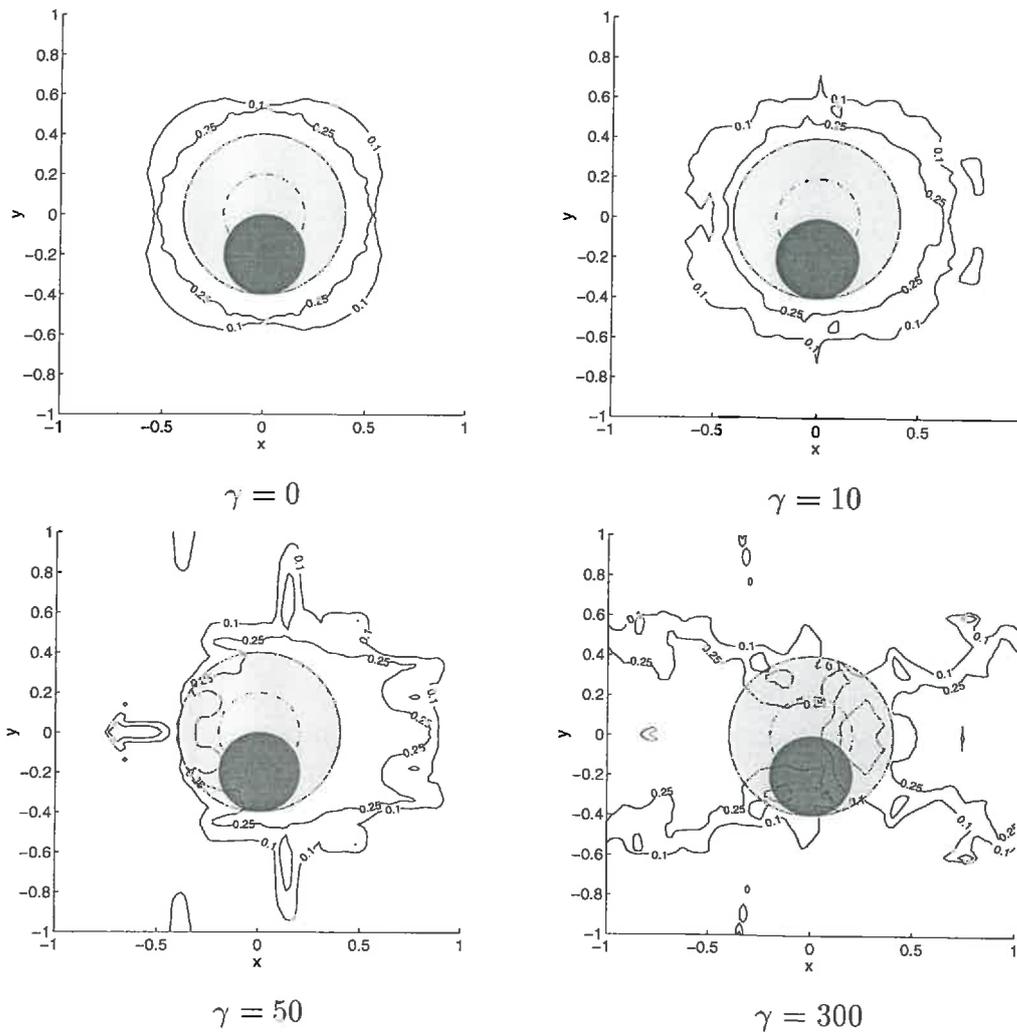


FIG. 4.34 – Isovaleurs de la densité de probabilité de capture en fonction du cisaillement –  $e = \frac{a}{2}$ ;  $r = 0.4$ ;  $N_{St} = 0$

uniforme. L'observation des lignes de courant (Figure 4.31) laissait prévoir un tel résultat. L'augmentation du cisaillement a pour effet de rendre parallèles à la paroi les lignes de courant entre les pores. Un petit décalage initial entre deux particules peut donner deux impacts relativement espacés.

Ces deux effets combinés (tassement dans la direction des  $y$  et uniformisation dans la direction des  $x$ ) sont illustrés par la Figure 4.34 où sont tracées des isovaleurs de la densité de probabilité de capture. Le contour correspondant à l'isovaleur 0.25 entoure, pour de faibles cisaillements, le pore. Sa forme quasi circulaire est essentiellement due à la forme du pore. Dès que le cisaillement augmente, on note une perte de symétrie. Le contour se déforme et devient proche d'une ellipse décalée vers l'aval (droite de la Figure). Le

contour s'aplatit dans la direction des  $y$  et s'élargit dans la direction des  $x$ . Finalement, à fort cisaillement, les contours prennent la forme de lignes parallèles à l'axe des  $x$ .

L'effet majeur du cisaillement est de répartir uniformément les impacts sur une bande parallèle à l'axe des pores. Les particules ont donc autant de chance d'arriver sur la paroi solide que sur le pore. Ce résultat est intéressant pour une application liée à des problèmes de filtration. La chute de perméabilité due à la présence de particules sur la paroi est moins importante si les particules n'obstruent pas le pore.

On voit apparaître un avantage supplémentaire de la filtration tangentielle.

## 4.4 Etude de trajectoires

Le modèle analytique ne rend pas compte de certains aspects du déplacement de la sphère au voisinage du pore. Nous allons montrer et discuter dans cette section des résultats de calculs de trajectoires obtenus à l'aide du code aux éléments de frontière, qui intègre la géométrie complète du domaine ainsi que les effets de la rotation de la particule.

### 4.4.1 Rotation de la sphère

La Figure 4.35 est une visualisation d'un résultat de calcul du code aux éléments de frontière. La particule est lâchée de la position  $(0.5, 0, 1.5)$  à une vitesse initiale égale à la vitesse du fluide en ce point dans l'écoulement sans particule. La visualisation est réalisée à l'aide du logiciel MATLAB. Le zébrage sur la sphère permet de mettre en évidence sa rotation. Dans un premier temps, la sphère s'approche de la paroi en suivant une trajectoire rectiligne. Par la suite, la particule dévie vers l'orifice. Dans cette phase du mouvement, la rotation de la sphère est faible. A proximité du pore, la vitesse de la sphère, aspirée par le pore, augmente et la particule entame un mouvement de rotation. Cependant, nous avons vu dans les sections précédentes que la rotation de la sphère ne modifie pas sa trajectoire.

Le code ne gérant pas les contacts solides, lorsque la sphère touche la paroi le calcul se termine. Dans le cas présenté, il est difficile de prédire le comportement de la particule après l'impact. La particule peut, soit rester fixée dans sa position, soit être ré-entraînée par l'écoulement. L'évolution va dépendre de l'intensité des forces physico-chimiques.

Les résultats des sections précédentes montrent que la majorité des particules arrive à proximité du pore, et se retrouve dans une configuration similaire à celle de la Figure 4.35. Du fait de la position de la sphère par rapport au bord du pore, l'évaluation des

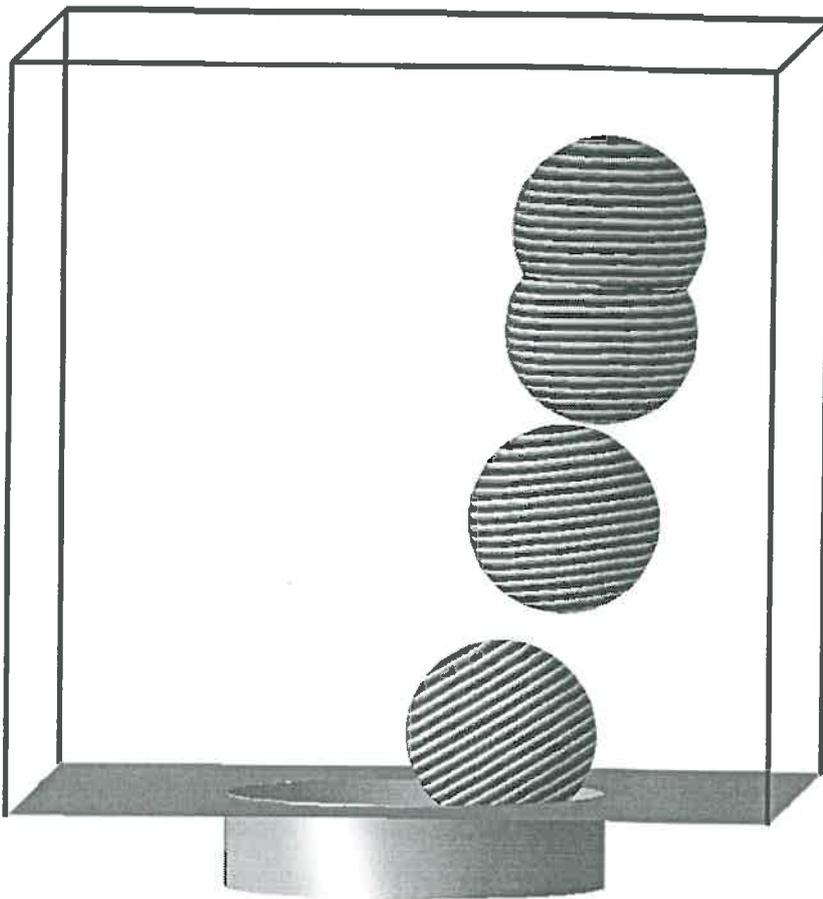


FIG. 4.35 – Trajectoire d'une sphère calculée à l'aide du code aux éléments de frontière-  
 $r = 0.5 ; a = 0.25 ; x_0 = 0.5 ; y_0 = 0 ; z_0 = 1.5$

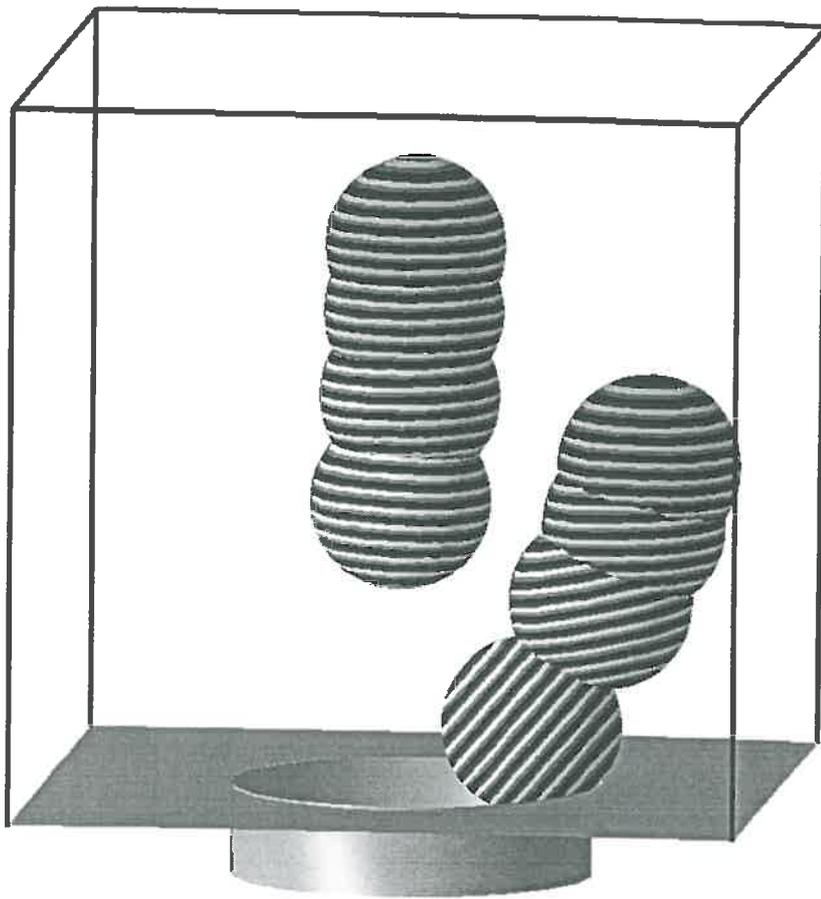


FIG. 4.36 – Trajectoires de deux sphères calculées à l'aide du code aux éléments de frontière –  $r = 0.5$  ;  $a = 0.25$  ;  $x_0^1 = 0$  ;  $y_0^1 = 0$  ;  $z_0^1 = 1.5$  ;  $x_0^2 = 0.65$  ;  $y_0^2 = 0$  ;  $z_0^2 = 1.0$

efforts hydrodynamiques par rapport à ceux physico-chimiques, devra être quantifiée en terme de moments des forces par rapport au point de contact. Dans ce cas, il faudra tenir compte de la rotation de la sphère au moment de l'impact.

#### 4.4.2 Influence d'une deuxième sphère dans l'écoulement

Lorsque deux sphères sont, au même instant, au voisinage du pore, elles modifient mutuellement leur trajectoire. L'influence d'une sphère sur une autre n'est pas prise en compte dans le modèle analytique. Le calcul d'une telle configuration est illustré sur la Figure 4.36 qui montre l'évolution simultanée de deux sphères initialement lâchées à des positions proches de l'orifice. La première a une position initiale centrée sur le pore ( $x_0^1 = 0$  ;  $y_0^1 = 0$  ;  $z_0^1 = 1.5$ ). La deuxième est excentrée ( $x_0^2 = 0.65$  ;  $y_0^2 = 0$  ;  $z_0^2 = 1$ ).

La première particule, seule dans l'écoulement, aurait une trajectoire rectiligne ame-

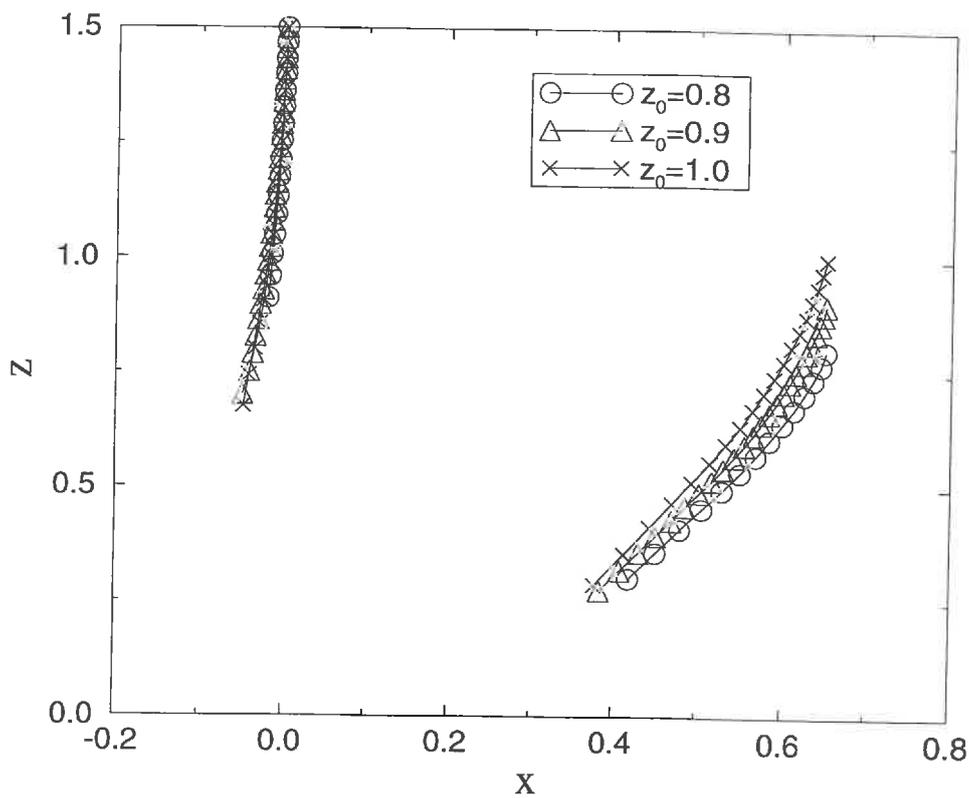


FIG. 4.37 – Influence relative de deux sphères

nant la particule directement dans le pore.

La présence de la deuxième sphère, au départ plus proche de la paroi, va perturber la trajectoire de la particule. La première sphère a tendance à s'écarter de l'axe du pore.

La Figure 4.37 donne les coordonnées des centres des deux sphères pour différentes positions initiales de la sphère excentrée. On observe le décalage opéré par la sphère initialement centrée sur le pore.

Les Figures 4.38 et 4.39 montrent l'influence de la sphère centrale sur la sphère excentrée en fonction de leur position initiale relative. Nous représentons sur les mêmes Figures la trajectoire qu'aurait la sphère excentrée si elle était seule dans l'écoulement.

Le comportement de la sphère excentrée dépend fortement de sa position par rapport à la sphère dans l'axe du pore. Lorsque les deux particules sont à même hauteur (Figure 4.38), les deux sphères commencent par se rapprocher, à vitesse similaire, de la paroi. Par la suite, lorsque l'influence du pore devient plus importante, la sphère dans l'axe se trouve dans une zone où le fluide possède une vitesse plus grande. Cette particule devient

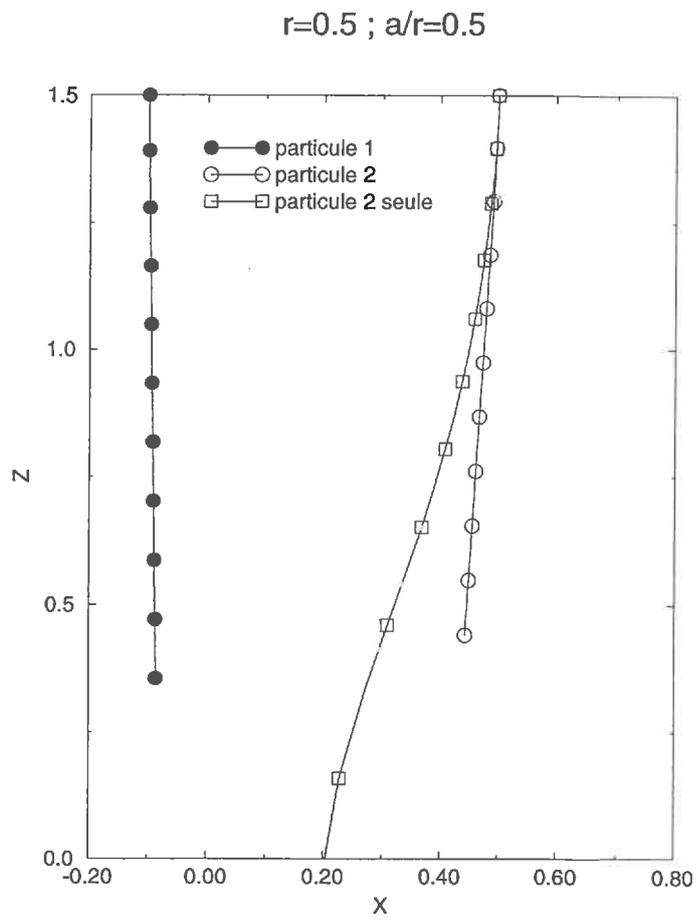


FIG. 4.38 – Influence de la sphère centrée sur la sphère excentrée

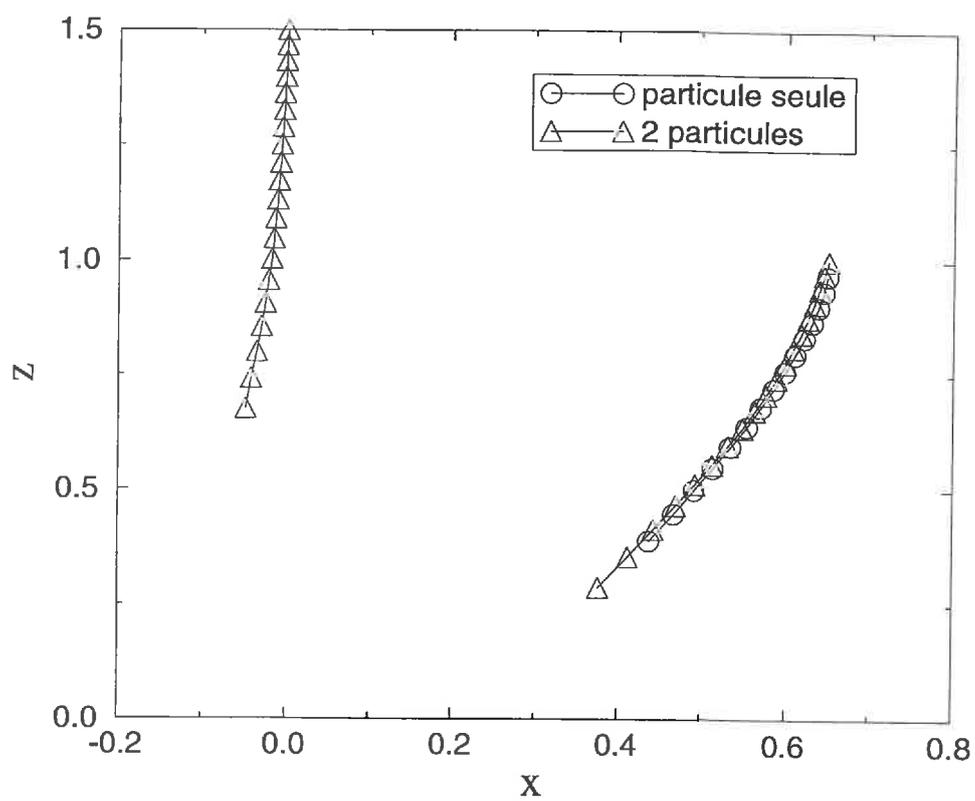


FIG. 4.39 – Influence de la sphère centrée sur la sphère excentrée

“prioritaire” sur l’autre, et l’empêche de se rapprocher de l’axe du pore. Ce phénomène a tendance à favoriser le dépôt de particules sur la paroi.

Dans la configuration de la Figure 4.39, la sphère excentrée part d’une position plus proche du pore. Dans ce cas, sa trajectoire est similaire à celle qu’elle aurait si elle était seule. Elle est alors “prioritaire” sur la sphère dans l’axe du pore, et impose une modification, de par sa présence, de la trajectoire de l’autre sphère.

Nous n’avons pas mis en évidence le cas où aucune des particules n’est “prioritaire” par rapport à l’autre. Si ce cas existe, il est alors probable que les deux sphères arrivent en même temps sur le pore et se bloquent mécaniquement par pontage.

## 4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié les phénomènes de capture de particules par une paroi poreuse. L’étude a été réalisée à l’échelle du pore pour mettre en évidence l’influence de l’hétérogénéité de la paroi sur le dépôt éventuel des particules. Lorsque une particule se trouve à proximité d’une paroi poreuse, dont la taille caractéristique des pores est de l’ordre de la taille de la particule, la paroi ne peut plus être considérée comme homogène. En effet, la trajectoire de la particule dépend, en grande partie, de sa position relative par rapport au pore.

Afin de déterminer les trajectoires, nous avons, dans un premier temps, simplifié le calcul de l’écoulement sans particule au-dessus de la paroi poreuse. Nous avons montré que la paroi constituée de pores de longueur finie pouvait être remplacée par un écran mince percé d’orifices circulaires. L’écoulement peut alors être calculé de manière quasi-analytique.

Par la suite, nous avons proposé des approximations pour évaluer les facteurs correcteurs à la force de Stokes qui agit sur une sphère dans un tel écoulement. Les approximations ont été obtenues en utilisant une méthode de raccordement similaire à celle exposée dans le chapitre précédent. Les cas asymptotiques nécessaires à la méthode ont été tirés de la littérature.

Ainsi, à partir du calcul de trajectoires, nous avons déterminé la densité de probabilité de capture des particules sur la paroi poreuse. Nous avons caractérisé l’influence de la porosité, des forces physico-chimiques, de la faible inertie des particules et enfin, de l’intensité du cisaillement. Parmi les effets observés, la porosité et le cisaillement semblent jouer un rôle important.

L'augmentation de la porosité tend à uniformiser l'écoulement au-dessus de la paroi poreuse. L'influence des pores est ainsi plus faible sur les trajectoires des particules qui ont alors tendance à se répartir de façon équiprobable sur la surface de la paroi.

Le cisaillement a un double effet sur la répartition des particules sur la paroi. D'une part, un resserrement des impacts de particules dans la direction orthogonale à l'écoulement cisailé et, d'autre part, une uniformisation de la densité de probabilité de capture des particules dans la direction de cet écoulement.

Nous avons, enfin, évoqué qualitativement les effets réciproques de deux sphères placées simultanément à proximité d'un pore.

Cette étude était limitée par les problèmes liés à la gestion des contacts solides particule-paroi, les résultats se limitant au cas où aucune des deux sphères n'entrait en contact avec la paroi. Il est envisageable de poursuivre cette étude au-delà du premier contact. Dans ce cas, il deviendra nécessaire de déterminer le comportement d'une particule au contact qui sera à la fois soumise à des forces d'adhésion et à des forces hydrodynamiques. De par la position des sphères sur la paroi et de leur rotation au moment des impacts, nous avons vu que ces efforts devraient surtout être évalués en termes de moments de forces par rapport au point de contact.

## Liste des Figures du Chapitre 4

4.1	Géométrie du problème et changement d'échelle . . . . .	115
4.2	Ligne de courant aboutissant au bord du pore en fonction du nombre de Reynolds de filtration . . . . .	118
4.3	Raccordement de l'écoulement frontal à l'écoulement de Sampson . . . . .	119
4.4	Champ de vorticité de l'écoulement frontal dans le plan $y = 0 - r = 0.5$ . . . . .	122
4.5	Isovitesses de l'écoulement frontal dans le plan $y = 0 - r = 0.5$ . . . . .	123
4.6	Isovaleurs du rapport $\Omega/\ \mathbf{u}\ $ dans le plan $y = 0 - r = 0.5$ . . . . .	123
4.7	Isovaleurs du rapport $\Omega/\ \mathbf{u}\ $ dans le plan $y = 0 - r = 0.2$ . . . . .	124
4.8	Décomposition de la traînée qui s'applique sur la sphère . . . . .	125
4.9	Description des cas asymptotiques pour une sphère en mouvement dans un fluide au repos . . . . .	127
4.10	Choix du disque lorsque la sphère est à la demi période . . . . .	128
4.11	Description des cas asymptotiques pour une sphère immobile dans un écoulement . . . . .	130
4.12	Raccordement à l'écoulement uniforme . . . . .	132
4.13	Comparaison force, vitesse et position obtenues avec les facteurs correcteurs choisis et avec le code aux éléments de frontière - $x_0 = y_0 = 0$ ; $\frac{a}{r} = 1$ ; $r = 0.2$ . . . . .	135
4.14	Comparaison force, vitesse et position obtenues avec les facteurs correcteurs choisis et avec le code aux éléments de frontière - $x_0 = 0.5; y_0 = 0$ ; $\frac{a}{r} = 1$ ; $r = 0.2$ . . . . .	136
4.15	Comparaison force, vitesse et position obtenues avec les facteurs correcteurs choisis et avec le code aux éléments de frontière - $x_0 = 0.5; y_0 = 0.5$ ; $\frac{a}{r} = 1$ ; $r = 0.2$ . . . . .	137
4.16	Trajectoires d'une sphère dans l'écoulement frontal . . . . .	138
4.17	Détermination de la probabilité de capture . . . . .	139
4.18	Exemple de diagramme de Voronoi . . . . .	142
4.19	Convergence de la densité de probabilité en fonction du nombre de trajectoires - $y = 0.2$ . . . . .	143
4.20	Convergence de la densité de probabilité en fonction du nombre de trajectoires - $y = 0.4$ . . . . .	143
4.21	Lignes de courant aboutissant aux bords du pore . . . . .	144

4.22 Répartition des points d'impact en fonction de la taille de l'orifice – $N_{St} = 0$ ; $e = \frac{a}{2}$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	145
4.23 Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore – $N_{St} = 0$ ; $e = \frac{a}{2}$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	146
4.24 Répartition des impacts en fonction de la distance relative $\omega/r$ au centre du pore – $N_{St} = 0$ ; $e = \frac{a}{2}$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	147
4.25 Isovaleurs de la densité de probabilité de capture en fonction du rayon du trou – $N_{St} = 0$ ; $e = \frac{a}{2}$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	148
4.26 Lignes de courant aboutissant aux bords du pore représentées en nombre de rayons de pore . . . . .	149
4.27 Répartition des points d'impact en fonction de la distance de capture – $N_{St} = 0$ ; $r = 0.4$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	151
4.28 Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore – $N_{St} = 0$ ; $r = 0.4$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	152
4.29 Répartition des points d'impact en fonction de l'inertie de la particule – $e = \frac{a}{2}$ ; $r = 0.4$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	153
4.30 Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore – $e = \frac{a}{2}$ ; $r = 0.4$ ; $\gamma = 0$ . . . . .	154
4.31 Lignes de courant aboutissant à un pore en fonction de l'intensité du cisaillement – haut : lignes de courant aboutissant à $x = -0.25r$ ; bas : lignes de courant aboutissant à $x = r - \epsilon$ . . . . .	155
4.32 Répartition des points d'impact en fonction du cisaillement – $e = \frac{a}{2}$ ; $r = 0.4$ ; $N_{St} = 0$ . . . . .	157
4.33 Répartition des impacts en fonction de la distance au centre du pore – $e = \frac{a}{2}$ ; $r = 0.4$ ; $N_{St} = 0$ . . . . .	158
4.34 Isovaleurs de la densité de probabilité de capture en fonction du cisaillement – $e = \frac{a}{2}$ ; $r = 0.4$ ; $N_{St} = 0$ . . . . .	159
4.35 Trajectoire d'une sphère calculée à l'aide du code aux éléments de frontière – $r = 0.5$ ; $a = 0.25$ ; $x_0 = 0.5$ ; $y_0 = 0$ ; $z_0 = 1.5$ . . . . .	161
4.36 Trajectoires de deux sphères calculées à l'aide du code aux éléments de frontière – $r = 0.5$ ; $a = 0.25$ ; $x_0^1 = 0$ ; $y_0^1 = 0$ ; $z_0^1 = 1.5$ ; $x_0^2 = 0.65$ ; $y_0^2 = 0$ ; $z_0^2 = 1.0$ . . . . .	162
4.37 Influence relative de deux sphères . . . . .	163
4.38 Influence de la sphère centrée sur la sphère excentrée . . . . .	164

4.39 Influence de la sphère centrée sur la sphère excentrée . . . . . 165

## Liste des Tables du Chapitre 4

- 4.3 Influence relative de la rotation et de la translation d'une sphère sur la traînée 121

# Bibliographie

- [1] G. Belfort, R.H. Davis, and A.L. Zydney. Review: The behavior of suspensions and macromolecular solutions in crossflow microfiltration. *J. Memb. Sci.*, 96:1–58, 1994.
- [2] A.S. Berman. Laminar flow in channels with porous walls. *J. of Appl. Phys.*, 24:1232, 1953.
- [3] S.G. Chatterjee and G. Belfort. Fluid flow in an idealized spiral wound membrane module. *J. Memb. Sci.*, 28:191–208, 1986.
- [4] Z. Dagan, R Pfeffer, and S. Weinbaum. Axisymmetric stagnation flow of a spherical particle near a finite planar surface at zero reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 122:273–294, 1982.
- [5] Z. Dagan, S. Weinbaum, and R Pfeffer. General theory for the creeping motion of a finite sphere along the axis of a circular orifice. *J. Fluid Mech.*, 117:143–170, 1982.
- [6] Z. Dagan, S. Weinbaum, and R Pfeffer. An infinite-series solution for the creeping motion through an orifice of finite length. *J. Fluid Mech.*, 115:505, 1982.
- [7] J. Dufrêche. Thèse en cours, INPT, à paraître.
- [8] A. Goldman, R. Cox, and H. Brenner. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall – ii. couette flow. *Chem. Eng. Sci.*, 22:653–660, 1967.
- [9] C.C. Hung and C. Tien. Effect of particle deposition on the reduction of water flux in reverse osmosis. *Desalinisation*, 18:173–187, 1976.
- [10] C. Kleinstrauer and T.P. Chin. Analysis of multiple particle trajectories and deposition layer growth in porous conduits. *Chem. Eng. Commun.*, 28:193–211, 1984.
- [11] Y. Peng and S.W. Yuan. Laminar pipe flow with mass transfert cooling. *Trans ASME J. Heat Transfert*, 5:252–258, 1965.

- [12] A.M. Saïdi. *Reservoir engineering of fractured reservoirs (Fundamental and practical aspects)*. Total, Edition Press, 1987.
- [13] R.A. Sampson. On stoke's current function. *Phil. Trans. R. Soc. London Ser., A* 182:449, 1891.
- [14] P. Schmitz and M. Prat. 3-d laminar stationary flow over a porous surface with suction : description at pore level. *AIChE*, 41:2212, 1995.
- [15] P. Schmitz, B. Wandelt, and M. Hildenbrand. Particle aggregation at the membrane surface in crossflow microfiltration. *J. of Membrane Scie.*, 84:171–183, 1993.
- [16] C.Y. Wang. Stokes flow through a thin screen with patterned holes. *AIChE*, 40:419, 1994.
- [17] Z-Y. Yan, S. Weinbaum, P. Ganatos, and R. Pfeffer. The three-dimensional hydrodynamic interaction of a finite sphere with a circular orifice at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 174:39, 1987.
- [18] Z-Y. Yan, S. Weinbaum, and R. Pfeffer. On the fine structure of osmosis including three-dimensional pore entrance and exit behaviour. *J. Fluid Mech.*, 162:415–438, 1986.

## Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était d'étudier les interactions hydrodynamiques lorsqu'une particule en suspension diluée s'approche d'une paroi afin de caractériser le dépôt de la première couche de particules sur cette paroi.

Nous avons, dans un premier temps, étudié le transport de particules dans un milieu poreux modèle constitué d'un ensemble de canaux interconnectés. Dans ce cas, les grains du micro-modèle constituent un obstacle au libre déplacement des particules. Lors de leur cheminement à travers le milieu, transportées par l'écoulement du fluide porteur, certaines particules se trouvent à une distance suffisamment faible des parois pour que les forces d'attractions physico-chimiques particule-paroi entraînent une capture des particules par la matrice solide du milieu poreux. Cette étude correspond à un processus de filtration en masse.

En nous plaçant à l'échelle du pore, nous avons déterminé les trajectoires de particules sphériques sur une cellule élémentaire représentative du milieu poreux modèle. Nous avons pu mettre en évidence les paramètres hydrodynamiques et géométriques qui déterminent la formation de dépôts de particules sur les grains. Plus précisément, nous avons montré qu'il existe, dans cette situation, deux mécanismes distincts de capture qui aboutissent à deux types de dépôt.

L'apparition du premier type de dépôt est conditionnée par le rapport des débits dans les canaux aboutissant au pore. Lorsque ce rapport est inférieur à un certain rapport de débits critique, les particules s'accumulent sur le coin des grains du micro-modèle. Le dépôt croît alors vers l'amont de l'écoulement et tend à envahir le pore. Nous avons appelé ces dépôts : "dépôts d'invasion de pore".

Le deuxième type de dépôt apparaît lorsque le rapport des vitesses débitantes dans les canaux est supérieur à un rapport critique. Dans ce cas, les mécanismes de croissance des dépôts diffèrent du cas précédent. Les particules se déposent sur les parois des canaux situés à l'amont du pore. Par la suite, l'obstacle ainsi constitué tend à obstruer le canal situé à l'aval du pore. Nous avons appelé ces dépôts : "dépôts d'invasion de canal".

Pour chacun de ces mécanismes de capture, nous avons quantifié l'intensité du dépôt à l'aide du calcul de l'efficacité de capture. Nous avons fourni des abaques donnant les valeurs de l'efficacité en fonction des paramètres hydrodynamiques de l'écoulement à l'échelle du pore. Nous avons également effectué une étude qualitative de la forme des dépôts. Ces résultats ont été comparés à une étude expérimentale et ont permis d'interpréter certains phénomènes observés.

Ces résultats fournissent des lois de capture à l'échelle du pore. Par la suite, il est

envisagé de les intégrer à un modèle de réseau. Un tel modèle permettra, à une échelle plus importante, de déterminer la répartition spatiale de l'accumulation de particules dans un milieu poreux. Il sera alors possible de déterminer les effets du colmatage de certaines parties du milieu poreux sur la cinétique de colmatage du milieu poreux entier. Cependant, les résultats obtenus fournissent des renseignements sur la masse déposée et sur sa répartition à l'intérieur du pore. Avant de les intégrer dans un modèle de réseau, il sera nécessaire de déterminer la perte de charge générée par la présence des dépôts.

La deuxième configuration que nous avons étudiée est celle rencontrée au cours d'un processus de filtration par membrane. Lors du passage d'une solution chargée en particules au travers d'une paroi poreuse de faible épaisseur, certaines particules sont capturées par le filtre que constitue la paroi. Afin de montrer l'influence des singularités de paroi que constituent les pores, nous avons étudié le comportement des particules d'une solution diluée au voisinage des pores de la paroi. Bien que la paroi comprenne un grand nombre de pores, nous nous sommes tout d'abord intéressés à une particule sphérique à proximité d'un pore isolé. A partir d'un cas d'école ne reflétant pas une situation physique existante, mais présentant l'avantage de combiner deux cas simples et bien connus, nous avons caractérisé l'influence d'une singularité de paroi circulaire sur la force de traînée appliquée à une particule sphérique se déplaçant à proximité de la paroi. Nous avons montré que le facteur correcteur à la force de Stokes variait continuellement entre deux valeurs asymptotiques correspondant aux valeurs qu'il aurait si chacune des conditions limites était appliquée sur l'ensemble de la paroi. Nous avons défini la fonction de raccordement entre les deux cas asymptotiques. Par la suite, cette fonction a été utilisée afin de proposer des corrélations simples pour des géométries similaires, correspondant à des situations physiques proches de notre étude. La bonne adéquation des résultats dans les différents cas est sûrement due au fait que la fonction de raccordement proposée fait intervenir le premier mode propre des solutions des équations de Stokes formulées dans des coordonnées en accord avec la géométrie des problèmes. Par la suite, nous avons généralisé cette démarche afin de déterminer les facteurs correcteurs à la force de Stokes pour une particule au voisinage d'une paroi comportant plusieurs pores.

Dans le but de modéliser le transport de particules sphériques au-dessus d'une paroi poreuse comportant des pores de longueur finie, nous avons montré que la paroi poreuse pouvait être remplacée par un écran mince, d'épaisseur nulle, percé d'orifices circulaires. L'écoulement obtenu, calculé de façon analytique, possède les mêmes propriétés que celui obtenu avec des pores de longueur finie excepté dans la zone proche du pore.

L'utilisation d'une technique similaire à celle utilisée pour la filtration en masse a permis de déterminer la manière dont les particules se déposent sur la paroi filtrante. Les deux effets majeurs observés sont relatifs, d'une part, à la porosité de la paroi qui tend, lorsqu'elle augmente, à uniformiser les dépôts sur toute la surface et, d'autre part, à l'intensité du cisaillement qui tend à confiner et uniformiser le dépôt sur une bande parallèle à l'écoulement cisailé et de largeur égale au diamètre des pores. Nous avons également étudié, de façon qualitative, l'influence mutuelle qu'exercent l'une sur l'autre deux sphères s'approchant simultanément d'un pore.

La présence d'une deuxième particule modifie, dans certains cas, le comportement de la première. Il serait intéressant, dans l'avenir, d'approfondir l'étude en introduisant un plus grand nombre de particules dans l'écoulement. Dans le cas de solutions plus concentrées, de nouveaux effets, liés au blocage mécanique par pontage des particules sur le pore, doivent apparaître.

Que ce soit pour l'étude sur la filtration en masse ou pour l'étude de la filtration par membrane, nous nous sommes limité à l'étude de la formation de la première couche de particules sur l'obstacle. Cependant, une fois cette couche constituée, les propriétés de la surface de l'obstacle se trouvent modifiées, d'une part, par la modification de la nature physico-chimique de la surface et, d'autre part, par l'existence d'une zone perméable à la paroi. L'interaction d'une telle couche avec les particules en suspension constitue également un axe de recherche envisagé.

## Annexes

## Annexe A

Corrections typographiques de l'article  
Wang

$$\begin{aligned}\Psi_I &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Q_n(x) + B_n R_n(x)] \sin \alpha_n y \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} C_n S_n(y) \cos \beta_n y + C_0 (y - y^3) + \frac{1}{2} (3y - y^3)\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

où  $\alpha_n = n\pi$ ,  $\beta_n = n\pi/a$  et

$$Q_n(x) = e^{\alpha_n(x-a)} + e^{-\alpha_n(x+a)}, \quad (\text{A.2})$$

$$R_n(x) = x(e^{\alpha_n(x-a)} - e^{-\alpha_n(x+a)}), \quad (\text{A.3})$$

$$S_n(y) = e^{\beta_n(y-1)} - e^{-\beta_n(y+1)} - \left(\frac{1 - e^{-2\beta_n}}{1 + e^{-2\beta_n}}\right) y e^{\beta_n(y-1)} - e^{-\beta_n(y+1)} \quad (\text{A.4})$$

$$C_0 = \frac{1}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left\{ A_m (1 - e^{-2a\alpha_m}) + B_m \left[ \left(a + \frac{1}{m\pi}\right) e^{-2a\alpha_m} - \frac{1}{m\pi} + a \right] \right\}, \quad (\text{A.5})$$

$$C_n = -\frac{2\pi}{aS'_n(1)} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m Q_{1mn} + B_m R_{1mn}) m (-1)^m, \quad (\text{A.6})$$

où

$$Q_{1mn} = \int_0^a Q_m \cos \beta_n x dx = \frac{(-1)^n m a^2}{\pi(a^2 m^2 + n^2)} (1 - e^{-2am\pi}) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}R_{1mn} &= \int_0^a R_m \cos \beta_n x dx \\ &= \frac{(-1)^n a^2}{\pi^2(a^2 m^2 + n^2)^2} (a^2 m^2 - n^2 + a^3 m^3 \pi + amn^2 \pi) (e^{-2am\pi} - 1)\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

$$\Psi_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} [D_n T_n(x) + E_n U_n(x)] \sin \gamma_n y + y/b \quad (\text{A.9})$$

où  $\gamma_n = n\pi/b$  et

$$T_n(x) = e^{\gamma_n(x-c)} + e^{-\gamma_n(x+c)}, \quad (\text{A.10})$$

$$U_n(x) = x(e^{\gamma_n(x-c)} - e^{-\gamma_n(x+c)}), \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} [D_n (1 + e^{-2c\gamma_n}) + cE_n (1 - e^{-2c\gamma_n})] = \\ \sum_{m=1}^{\infty} [A_m Q_m(a) + B_m R_m(a)] I_{mn} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} C_m (-1)^m J_{mn} \\ - 2C_0 [3\gamma_n \cos \gamma_n + (\gamma_n^2 - 3) \sin \gamma_n] / \gamma_n^4 \\ + 3(\sin \gamma_n - \gamma_n \cos \gamma_n) / \gamma_n^4 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} D_n \gamma_n (e^{-2c\gamma_n} - 1) + \\ \frac{b}{2} E_n [e^{-2c\gamma_n} - 1 - c\gamma_n (1 + e^{-2c\gamma_n})] = \\ \sum_{m=1}^{\infty} [A_m Q'_m(a) + B_m R'_m(a)] I_{mn} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \gamma_m^2 (1 + e^{-2c\gamma_m}) I_{mn} + \\ \sum_{m=1}^{\infty} E_m [2\gamma_m (1 + e^{-2c\gamma_m}) + c\gamma_m^2 (1 - e^{-2c\gamma_m})] I_{mn} = \\ \frac{1}{2} [A_n Q''_n(a) + B_n R''_n(a)] - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \beta_m^2 (-1)^m K_{mn} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \gamma_m^3 (e^{-2c\gamma_m} - 1) I_{mn} + \\ \sum_{m=1}^{\infty} E_m [\gamma_m (e^{-2c\gamma_m} - 1) - c\gamma_m^3 (1 + e^{-2c\gamma_m})] I_{mn} = \\ \frac{1}{2} [A_n Q'''_n(a) + B_n R'''_n(a)] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$I_{nm} = \begin{cases} \frac{b^2 m (-1)^m \sin \gamma_n}{\pi (n^2 - b^2 m^2)} & n \neq bm \\ \frac{1}{2} & n = bm \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$J_{mn} = \frac{L_{mn}}{(1 + e^{-2\beta_m})(a^2n^2 + b^2m^2)^2 \pi^2} \quad (\text{A.17})$$

where,

$$L_{mn} = -2a^3b^3mn(1 - e^{-2\beta_m})^2 \cos\gamma_n + ab^2 \sin\gamma_n [a(a^2n^2 - b^2m^2)(e^{-4\beta_m} - 1) + 4m\pi(a^2n^2 + b^2m^2)e^{-4\beta_m}] \quad (\text{A.18})$$

$$K_{mn} = \frac{-2a^3mn(1 + e^{-2\beta_m})^2(-1)^n}{(1 + e^{-2\beta_m})(a^2n^2 + m^2)^2 \pi^2} \quad (\text{A.19})$$

## Annexe B

Expression des coefficients reliant  $a_n$ ,  $b_n$   
et  $c_n$  à  $d_n$

On a les relations suivantes :

$$a_1(n) = -\frac{(n - \frac{1}{2})sh(n + \frac{3}{2})\alpha ch(n - \frac{1}{2})\alpha - (n + \frac{3}{2})ch(n + \frac{3}{2})\alpha sh(n - \frac{1}{2})\alpha}{(n - \frac{1}{2})(1 - ch(n + \frac{3}{2})\alpha ch(n - \frac{1}{2})\alpha) + (n + \frac{3}{2})sh(n + \frac{3}{2})\alpha sh(n - \frac{1}{2})\alpha} \quad (\text{B.1})$$

$$b_1(n) = -a_1(n) \frac{ch(n - \frac{1}{2})\alpha + ch(n + \frac{3}{2})\alpha}{sh(n - \frac{1}{2})\alpha} - \frac{sh(n + \frac{3}{2})\alpha}{sh(n - \frac{1}{2})\alpha} \quad (\text{B.2})$$

$$c_1(n) = -a_1(n) \quad (\text{B.3})$$

$$A = 2 \left( e^{-(n-\frac{1}{2})\alpha} - e^{-(n+\frac{3}{2})\alpha} \right) sh(n - \frac{1}{2})\alpha \quad (\text{B.4})$$

$$B = (n - \frac{1}{2})\alpha \left( e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})\alpha}{2n-1}} - e^{-\frac{(n+\frac{3}{2})\alpha}{2n+3}} \right) ch(n - \frac{1}{2})\alpha \quad (\text{B.5})$$

$$a_2(n) = \frac{n(n+1)sh^2\alpha}{\sqrt{2}} \frac{A+B}{(n - \frac{1}{2})(1 - ch(n + \frac{3}{2})\alpha ch(n - \frac{1}{2})\alpha) + (n + \frac{3}{2})sh(n + \frac{3}{2})\alpha sh(n - \frac{1}{2})\alpha} \quad (\text{B.6})$$

$$b_2(n) = a_2(n) \frac{ch(n - \frac{1}{2})\alpha - ch(n + \frac{3}{2})\alpha}{sh(n - \frac{1}{2})\alpha} + \frac{sh^2\alpha n(n+1) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-\frac{(n-\frac{1}{2})\alpha}{2n-1}} - e^{-\frac{(n+\frac{3}{2})\alpha}{2n+3}} \right)}{sh(n - \frac{1}{2})\alpha} \quad (\text{B.7})$$

$$c_2(n) = -a_2(n) \quad (\text{B.8})$$

## Annexe C

Facteurs correcteurs des cas  
asymptotiques du chapitre 4

$h/a$	$K_{z0}^{t,z}$	$K_{zb}^{t,z}$	$K_{\omega 0}^{t,\bar{\omega}}$	$K_{\omega b}^{t,\bar{\omega}}$	$K_0^s$	$K_b^s$
1.1	1.3777	11.559	1.50	2.32	1.1797	3.7436
1.5	1.3882	3.2952	1.39	1.63	1.2121	2.6614
2.0	1.3919	2.1798	1.29	1.42	1.2544	2.0418
4.0	1.3019	1.3272	1.13	1.15	1.2693	1.3239
10.0	1.1240	1.0563	1.05	1.06	1.1187	1.0570
$\infty$	1.0000	1.0000	1.00	1.00	1.0000	1.0000

TAB. C.1 – *Facteur correcteur de traînée pour une sphère dans les différents cas asymptotiques –  $a/r = 0.5$*

## Annexe D

### Description du code aux éléments de frontière

## D.1 Introduction

La résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, dans des géométries complexes tridimensionnelles, nécessite de grandes ressources informatiques. Lorsque le problème étudié présente une frontière mobile, la génération d'un maillage évolutif est une source supplémentaire de difficulté. La méthode numérique présentée ici permet, dans le cas d'équations linéaires, de régler en partie certaines difficultés. La méthode des éléments de frontière consiste à calculer les valeurs de variables uniquement sur la frontière du domaine. Le problème initialement volumique est ramené à un problème surfacique. Ainsi, la dimension du problème à résoudre se trouve diminuée d'une unité.

Cette méthode est utile dans des problèmes où les frontières sont mobiles. Lors d'un calcul d'écoulement diphasique, l'interface constitue une partie de la frontière que l'on veut suivre dans son mouvement. La méthode des éléments de frontière (BEM, Boundary Element Method) est particulièrement adaptée aux calculs de trajectoires de particules. Dans ce cas, les composantes de la contrainte sur la surface sont les grandeurs qui définissent l'évolution de la particule. Il est alors souhaitable de résoudre les équations de Stokes formulées en vitesse et contraintes.

## D.2 Résolution des équations de Stokes par la méthode des éléments de frontière

### D.2.1 Mise en équations

On appelle :

- $D$  le domaine volumique (dimension = dimension de l'espace)
- $\Gamma$  la frontière de ce domaine (dimension = dimension de l'espace - 1)

Les écoulements à très faible nombre de Reynolds ou écoulements rampants sont régis par les équations de Stokes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \Phi_i \quad (\text{D.2})$$

où  $u_i$  est le vecteur vitesse,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes et  $\Phi_i$  un terme source. Dans le cas d'un fluide newtonien, il existe une relation rhéologique entre vitesse et contraintes :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \kappa \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{D.3})$$

A ces équations, il faut ajouter des conditions limites sur  $\Gamma$ . Les équations D.1 et D.2 sont des équations locales. Elles peuvent se ramener à des équations intégrales surfaciques.

Soit  $v_i$  une fonction quelconque de  $D$  dans  $R^n$  (avec  $n$  la dimension de l'espace physique), on a :

$$\iiint_D v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \iiint_D v_i \Phi_i dV \quad (\text{D.4})$$

Après intégration par parties et utilisation du théorème de la divergence, on trouve :

$$\iint_{\Gamma} v_i \sigma_{ij} n_j ds - \iiint_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \iiint_D v_i \Phi_i dV \quad (\text{D.5})$$

En remarquant que, par permutation des indices muets de sommation, on a :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ji} \quad (\text{D.6})$$

et puisque  $\sigma_{ij}$  est symétrique :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} \quad (\text{D.7})$$

on obtient finalement :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ij} \quad (\text{D.8})$$

On reporte D.8 dans la deuxième intégrale de D.5 :

$$\iiint_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = - \iiint_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} P \delta_{ij} dV + \iiint_D \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \quad (\text{D.9})$$

Si on choisit  $v_i$  à divergence nulle, la première intégrale du second membre disparaît. Dès lors, l'intégrale du premier membre de (D.9) est symétrique en  $u$  et  $v$  puisque le second membre l'est.

Soit  $(\tilde{u}_i; \tilde{\sigma}_{ij})$  une solution d'un problème de Stokes différent, on ré-écrit D.5, pour ce nouveau champ :

$$\iint_{\Gamma} u_i \tilde{\sigma}_{ij} n_j ds - \iiint_D \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_{ij} dV = \iiint_D u_i \tilde{\Phi}_i dV \quad (\text{D.10})$$

mais, on a également :

$$\iint_{\Gamma} \tilde{u}_i \sigma_{ij} n_j ds - \iiint_D \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \iiint_D \tilde{u}_i \Phi_i dV \quad (\text{D.11})$$

Or, les deuxièmes intégrales des équations D.10 et D.11 sont symétriques en  $u_i$  et  $\tilde{u}_i$ , elles sont donc égales, comme nous l'avons montré à l'aide de (D.9). Par soustraction, il vient :

$$\iint_{\Gamma} [u_i \tilde{\sigma}_{ij} n_j - \tilde{u}_i \sigma_{ij} n_j] ds = \iiint_D [u_i \tilde{\Phi}_i - \tilde{u}_i \Phi_i] dV \quad (\text{D.12})$$

Soit encore, en posant  $f_i = \sigma_{ij} n_j$  la contrainte normale qui s'exerce sur le contour, on trouve :

$$\iint_{\Gamma} [u_i \tilde{f}_i - \tilde{u}_i f_i] ds = \iiint_D [u_i \tilde{\Phi}_i - \tilde{u}_i \Phi_i] dV \quad (\text{D.13})$$

Dans notre problème, le terme source est nul. On en déduit donc la relation intégrale suivante :

$$\iint_{\Gamma} [u_i \tilde{f}_i - \tilde{u}_i f_i] ds = \iiint_D u_i \tilde{\Phi}_i dV \quad (\text{D.14})$$

### D.2.2 Problème singulier

Le principe de la méthode est de ramener des intégrales volumiques à des intégrales surfaciques. Or, il reste dans l'équation D.14, une intégrale volumique. Cependant, les variables "tildes" restent à notre convenance. Elles seront, par la suite, appelées fonctions tests ou fonctions de référence.

Il est possible de choisir le terme source de telle sorte que l'intégrale disparaisse. Choisir  $\tilde{\Phi}_i$  nul ne présente pas d'intérêt. Par contre, on peut prendre le terme source égal à une masse de Dirac appliquée au point  $\xi$  et de direction  $g_j$  :

$$\tilde{\Phi}_i = \delta_{ij} \delta(x - \xi) g_j \quad (\text{D.15})$$

L'écoulement "tilde" est alors l'écoulement dans un milieu infini, généré par un point de force placé en  $\xi$ .

Ainsi, l'équation D.14 devient :

$$\iint_{\Gamma} [u_i(x)\tilde{f}_i(x, \xi) - \tilde{u}_i(x, \xi)f_i(x)] ds(x) = I_D(\xi)u_i(\xi) \quad (\text{D.16})$$

où  $I_d$  est l'indicatrice du domaine :

- $I_d = 1$  si le point appartient à  $D$ ,
- $I_d = 0$  si le point n'appartient pas à  $D$ ,
- $I_d = \frac{1}{2}$  si le point appartient à  $\Gamma$ .

Pour résoudre le champ "tilde", nous sommes amenés à connaître le problème de Stokes singulier.

On démontre que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_i(x, \xi) &= S_{ij}(x - \xi)g_j \\ \tilde{\sigma}_{ik}(x, \xi) &= T_{ijk}(x - \xi)g_j \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

où  $S_{ij}$  et  $T_{ijk}$  sont les fonctions de Green associées au problème de Stokes singulier, dans un domaine infini. Dans le cas tridimensionnel, leur expression est la suivante :

$$S_{ij}(x - \xi) = -\frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^3} \right] \quad (\text{D.18})$$

et

$$T_{ijk}(x - \xi) = -\frac{6}{8\pi} \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k)}{r^5} \quad (\text{D.19})$$

où  $r = \|x - \xi\|$ .

L'équation D.16 étant vraie quel que soit  $g_j$ , on obtient finalement :

$$\iint_{\Gamma} [u_i(x)T_{ijk}(x, \xi)n_k - S_{ij}(x, \xi)f_i(x)] ds(x) = I_D(\xi)u_i(\xi) \quad (\text{D.20})$$

### D.2.3 Discrétisation

L'équation D.20 est une équation intégrale comportant deux inconnues (la vitesse  $u_i$  et la contrainte normale  $f_i$ ). Nous allons discrétiser cette équation afin de nous ramener à la résolution d'un système linéaire. On ne cherchera pas, de ce fait, à déterminer les inconnues de façon continue mais de façon discrète. Les nouvelles inconnues du problème seront un ensemble de valeurs en des points particuliers de la surface. Pour cela, nous décomposons la surface  $\Gamma$  du domaine en éléments de frontière :

$$\Gamma = \bigcup_{i_e=1}^{n_e} \Gamma^{i_e} \quad (\text{D.21})$$

où  $n_e$  est le nombre total d'éléments. Dans le cas tridimensionnel, nous choisissons comme élément de surface  $\Gamma^{i_e}$ , un triangle.

L'équation D.20 devient :

$$\sum_{i_e=1}^{n_e} \iint_{\Gamma^{i_e}} [u_i(x)T_{ijk}(x, \xi)n_k - S_{ij}(x, \xi)f_i(x)] ds(x) = I_D(\xi)u_i(\xi) \quad (\text{D.22})$$

Nous choisissons une interpolation constante par élément. De ce fait, la valeur d'une grandeur, sur tout l'élément, est la valeur de la grandeur au barycentre  $\xi^{i_e}$  de l'élément. On a alors :

$$\begin{cases} u_i(x) = u_i^{i_e} \\ f_i(x) = f_i^{i_e} \end{cases} \text{ pour } x \in \Gamma^{i_e} \quad (\text{D.23})$$

Les variables étant constantes sur un élément, elles sortent des sommations. On obtient :

$$\sum_{i_e=1}^{n_e} u_i^{i_e} \iint_{\Gamma^{i_e}} T_{ijk}(x, \xi)n_k ds(x) - \sum_{i_e=1}^{n_e} f_i^{i_e} \iint_{\Gamma^{i_e}} S_{ij}(x, \xi) ds(x) = I_D(\xi)u_i(\xi) \quad (\text{D.24})$$

On voit donc apparaître  $n_e$  inconnues en vitesse et  $n_e$  inconnues en contraintes.  $n_e$  inconnues sont données par les conditions limites. En effet, en chaque noeud, on impose soit la vitesse, soit la contrainte. Les  $n_e$  équations manquantes nécessaires à la résolution sont obtenues en choisissant successivement, dans D.24,  $n_e$  points d'application  $\xi^p$  pour le problème singulier. En faisant correspondre chaque  $\xi^p$  avec le barycentre d'un élément, nous obtenons le système linéaire suivant :

$$A_{i,j}^{i_e,p} \cdot u_i^{i_e} - B_{i,j}^{i_e,p} \cdot f_i^{i_e} = I_D(\xi^p)u_j^p \quad (\text{D.25})$$

dans lequel :

$$A_{i,j}^{i_e,p} = \iint_{\Gamma^{i_e}} T_{ijk}(x, \xi^p)n_k ds(x) \quad (\text{D.26})$$

et :

$$B_{i,j}^{i_e,p} = \iint_{\Gamma^{i_e}} S_{ij}(x, \xi^p) ds(x) \quad (\text{D.27})$$

Nous nous sommes donc ramenés à la résolution d'un système linéaire. Pour simplifier l'écriture, les inconnues peuvent être numérotées avec un seul indice  $n = n(i_e, i)$ , qui tient compte de la position et de la composante vectorielle. Le système linéaire s'écrit :

$$A_{mn} \cdot u_n - B_{mn} \cdot f_n = \frac{1}{2}u_m \quad (\text{D.28})$$

Dans chaque vecteur, on découple les inconnues des valeurs fixées par la condition limite comme suit :

$$u_n = \hat{u}_n + \tilde{u}_n \quad (\text{D.29})$$

$$f_n = \hat{f}_n + \tilde{f}_n \quad (\text{D.30})$$

où :

- $\hat{u}_n = 0$  et  $\tilde{f}_n = 0$  si la condition limite est en contrainte,
- $\tilde{u}_n = 0$  et  $\hat{f}_n = 0$  si la condition limite est en vitesse.

Les variables "tildes" sont les inconnues et les variables "chapeaux" sont les données. En remplaçant dans le système linéaire, il vient :

$$(A_{mn} - \frac{1}{2}I_{nm}) \cdot (\hat{u}_n + \tilde{u}_n) - B_{mn} \cdot (\hat{f}_n + \tilde{f}_n) = 0 \quad (\text{D.31})$$

et en séparant les inconnues des données :

$$(A_{mn} - \frac{1}{2}I_{nm}) \cdot \tilde{u}_n - B_{mn} \cdot \tilde{f}_n = B_{mn}\hat{f}_n - (A_{mn} - \frac{1}{2}I_{nm})\hat{u}_n \quad (\text{D.32})$$

Or, comme les inconnues sont complémentaires en  $u_n$  et  $f_n$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_{mn} - \frac{1}{2}I_{nm}) \\ B_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{mn} \\ (A_{mn} - \frac{1}{2}I_{nm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_n \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} \quad (\text{D.33})$$

Le terme de droite de l'équation est connu. La matrice correspondante est une matrice pleine. Son inversion se fait par une méthode directe, après avoir effectué une factorisation LU.

### D.2.4 Traitement des intégrales singulières

Les blocs diagonaux  $A_{i,j}^{i_e,i_e}$  et  $B_{i,j}^{i_e,i_e}$  des matrices font intervenir des intégrales singulières. Ils correspondent au cas où le point singulier  $\xi^p$  appartient à l'élément  $\Gamma^{i_e}$ . Les tenseurs  $S_{ij}(x, \xi)$  et  $T_{ijk}(x, \xi)$  sont singuliers en  $x = \xi$ . Cependant, l'ordre de la singularité n'est pas le même pour les deux tenseurs. En effet :

$$S_{ij} \approx \frac{1}{r} \quad (\text{D.34})$$

et :

$$T_{ijk} \approx \frac{1}{r^2} \quad (\text{D.35})$$

On en déduit donc que l'intégrale de  $S_{ij}$  sur une surface converge.

$$\iint_{\Gamma^{i_e}} S_{ij}(x, \xi) ds(x) \approx \iint_{\Gamma^{i_e}} \frac{1}{r} ds(x) \quad (\text{D.36})$$

Pour estimer numériquement l'intégrale, nous utilisons les coordonnées polaires centrées sur  $\xi$ . Ainsi, l'intégrale devient :

$$\iint_{\Gamma^{i_e}} S_{ij}(x, \xi) r dr d\theta \approx \iint_{\Gamma^{i_e}} 1 dr d\theta \quad (\text{D.37})$$

La fonction à intégrer n'est plus singulière. Elle est évaluée à l'aide d'une double quadrature de Gauss en  $r$  puis en  $\theta$ .

Cependant, cette technique n'est pas suffisante pour évaluer les intégrales faisant intervenir  $T_{ijk}$ . Les blocs diagonaux  $A_{i,j}^{i_e,i_e}$  sont évalués indirectement. Si une condition limite en vitesse est imposée sur tout le domaine et si la vitesse imposée est la même ( $u_j^0$ ), alors l'écoulement solution est l'écoulement uniforme  $u_j = u_j^0$ . Dans ce cas, la contrainte normale est nulle partout, à une constante près de pression. Nous utilisons cette propriété pour évaluer les blocs diagonaux.

$$\text{si } \forall i_e : u_j^{i_e} = u_j^0 \text{ alors } f_j^{i_e} = 0 \quad (\text{D.38})$$

alors d'après D.25 :

$$\left[ A_{i,j}^{i_e,p} - \frac{1}{2} I_{i,j}^{i_e,p} \right] \cdot u_i^{i_e} = 0 \quad (\text{D.39})$$

et puisque la condition limite est constante :

$$\left( \sum_{i_e} \left[ A_{i,j}^{i_e,p} - \frac{1}{2} I_{i,j}^{i_e,p} \right] \right) \cdot u_i^0 = 0 \quad (\text{D.40})$$

Cette relation est vraie quelle que soit la condition limite  $u_i^0$  et donc :

$$\sum_{i_e} \left[ A_{i,j}^{i_e,p} - \frac{1}{2} I_{i,j}^{i_e,p} \right] = 0 \quad (\text{D.41})$$

Le bloc diagonal s'obtient directement, à partir des termes extra diagonaux ne faisant intervenir que des intégrales régulières :

$$A_{i,j}^{i_e,i_e} - \frac{1}{2} I_{i,j}^{i_e,i_e} = \sum_{p \neq i_e} \left[ A_{i,j}^{i_e,p} - \frac{1}{2} I_{i,j}^{i_e,p} \right] \quad (\text{D.42})$$

## D.2.5 Optimisation du temps de calcul

Les temps de calcul étant importants, il convient de les réduire, à partir d'une bonne organisation de la matrice du système linéaire.

Chaque bloc matriciel,  $A_{i,j}^{i_e,p}$  ou  $B_{i,j}^{i_e,p}$ , traduit l'influence d'un point singulier placé en  $\xi^p$  sur un élément  $\Gamma^{i_e}$ . Cette influence ne dépend que de la position relative du point singulier par rapport à l'élément.

Dans le cas de l'étude de la trajectoire d'une particule, la surface du domaine  $\Gamma$  peut être décomposée en deux parties :

$$\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_p \quad (\text{D.43})$$

où  $\Gamma_f$  est la surface de la partie fixe du domaine et  $\Gamma_m$  la surface de la particule.

Dans ce cas, la matrice  $A$  peut être décomposée comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{ff} & A_{fm} \\ A_{mf} & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{D.44})$$

où,

- $A_{ff}$  traduit l'influence d'un point singulier appartenant à la partie fixe sur un élément de la partie fixe,
- $A_{fm}$  traduit l'influence d'un point singulier appartenant à la partie fixe sur un élément de la particule,

- $A_{mf}$  traduit l'influence d'un point singulier appartenant à la particule sur un élément de la partie fixe,
- $A_{mm}$  traduit l'influence d'un point singulier appartenant à la particule sur un élément de la particule,

A chaque déplacement de la particule solide, le domaine évolue et il faut à nouveau déterminer la matrice  $A$ . Cependant, les blocs  $A_{ff}$  et  $A_{mm}$  restent inchangés puisque la position relative des éléments appartenant à une même partie ne varie pas.

Ainsi, à chaque déplacement, il suffit de recalculer les blocs  $A_{fm}$  et  $A_{mf}$ .

## D.3 Validation du code

La validation du code s'effectue en déterminant la force de traînée appliquée à une sphère dans différentes configurations géométriques. Après calcul, le code fournit sur chaque élément de la sphère les composantes de la contrainte normale. La force hydrodynamique appliquée à la particule est obtenue par intégration sur la surface de la sphère. On déduit, par la suite, le facteur correcteur  $K$  à la force de Stokes défini par :

$$F = -6\pi\kappa aKU \quad (\text{D.45})$$

où  $\kappa$  est la viscosité du fluide,  $a$  le rayon de la sphère et  $U$  la vitesse du fluide.

### D.3.1 Sphères concentriques

En reprenant les travaux de Happel et Brenner [2], nous avons étudié la force hydrodynamique qui s'exerce sur une particule sphérique, de rayon  $a$ , immobile dans un container sphérique de rayon  $r$ .

On impose une vitesse uniforme  $U$  sur le container. Cette étude est uniquement théorique. Il est illusoire de l'obtenir de façon expérimentale. Elle a cependant l'avantage de présenter une solution analytique.

Les résultats obtenus avec le code aux éléments de frontière sont comparés aux résultats de Happel et Brenner sur la Table D.1. On constate que les résultats sont corrects, mais que la précision diminue lorsque le rapport de forme ( $\frac{a}{r}$ ) croît. Dans ce cas, les parois deviennent proches l'une de l'autre. L'intégrale des termes correspondant à l'influence d'un élément sur un autre proche exhibe une singularité qui rend le calcul d'autant moins précis que les éléments sont proches.

$\frac{a}{r}$	Happel-Brenner	Code BEM
0.1	1.286	1.291
0.2	1.756	1.823
0.3	2.573	2.593
0.4	4.106	4.234
0.5	7.294	7.492
0.6	14.948	15.132
0.7	37.830	38.145

TAB. D.1 – Facteur correcteur à la force de Stokes pour des sphères concentriques

$\frac{a}{r}$	Haberman et Sayre	Code
0.0	1.000	1.000
0.1	1.255	1.254
0.2	1.635	1.630
0.3	2.231	2.204
0.4	3.218	3.192
0.5	5.004	4.896

TAB. D.2 – Facteur correcteur pour une sphère immobile dans un écoulement de Poiseuille

### D.3.2 Sphère dans l'axe d'un tube cylindrique

Nous allons, ici, étudier le cas d'une particule sphérique de rayon  $a$  dans un tube cylindrique de rayon  $r$ .

L'écoulement, à l'infini, est imposé et correspond à un écoulement de Poiseuille.

Haberman et Sayre [1] ont déterminé analytiquement l'écoulement, en identifiant les constantes provenant, d'une part, d'une analyse en coordonnées cylindriques et, d'autre part, d'une analyse en coordonnées sphériques.

Les résultats du code aux éléments de frontière sont comparés sur la Table D.2 aux résultats de Haberman et Sayre. On constate une nouvelle fois que le code est moins précis lorsque le rapport de forme augmente.

La précision du résultat dépend en grande partie de la finesse du maillage. Sur la Figure D.1, sont reportées les valeurs du facteur correcteur à la force de Stokes obtenus pour différents maillages. Sur la Figure,  $n_e$  est le nombre d'éléments constituant la sphère. La Figure montre qu'il est nécessaire de prendre au moins 120 éléments pour mailler la

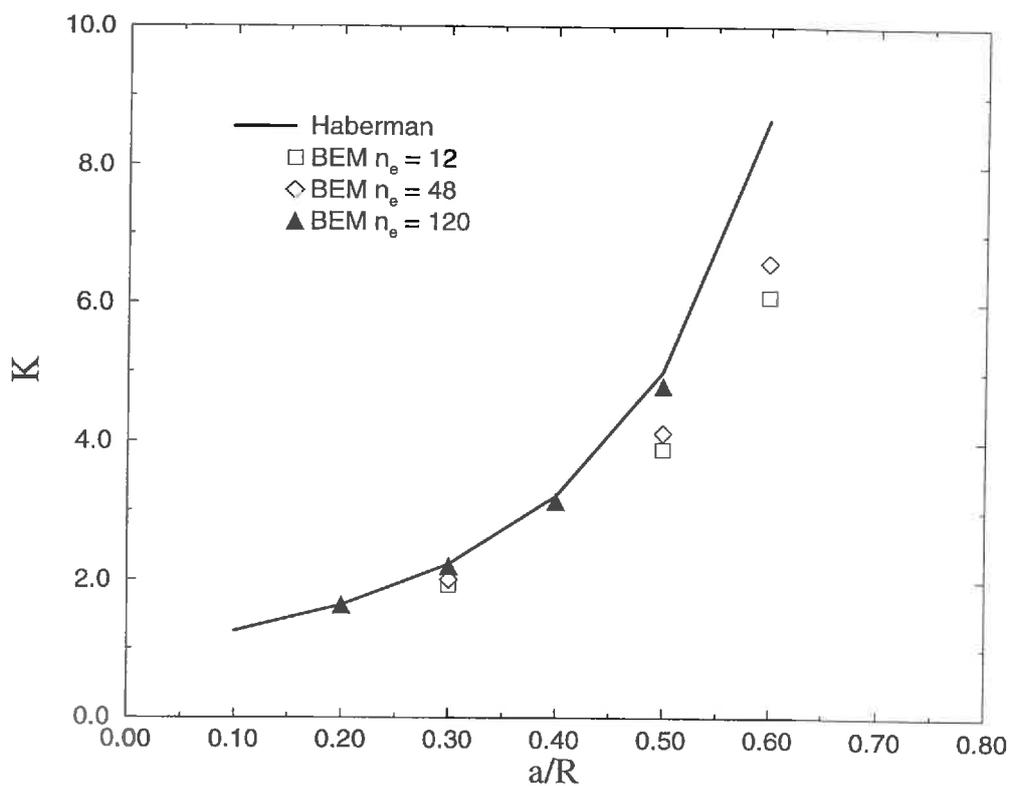


FIG. D.1 – Facteur correcteur à la force de Stokes pour une sphère dans un tube cylindrique

sphère afin d'obtenir une précision convenable. Le maillage de la sphère ainsi obtenu peut être observé sur la Figure D.3.

Dans les problèmes traités numériquement, les sphères sont maillées avec  $n_e = 120$  éléments. Les éléments qui maillent la partie fixe ont une taille similaire à celle des éléments de la sphère. Le maillage de la partie fixe est réalisé à l'aide du logiciel SIMAIL. Un exemple de maillage est montré sur la Figure D.2.

La Figure D.3 montre une visualisation d'un résultat de calcul du code aux éléments de frontières. Une partie du domaine fixe a été coupée pour faciliter la visualisation. La sphère est décomposée en éléments triangulaires. La couleur de chaque triangle représente la valeur de la vitesse radiale sur l'élément. Cette vitesse est plus importante au sommet de la sphère que sur le bas, puisque à proximité du pore, la sphère possède un mouvement de rotation.

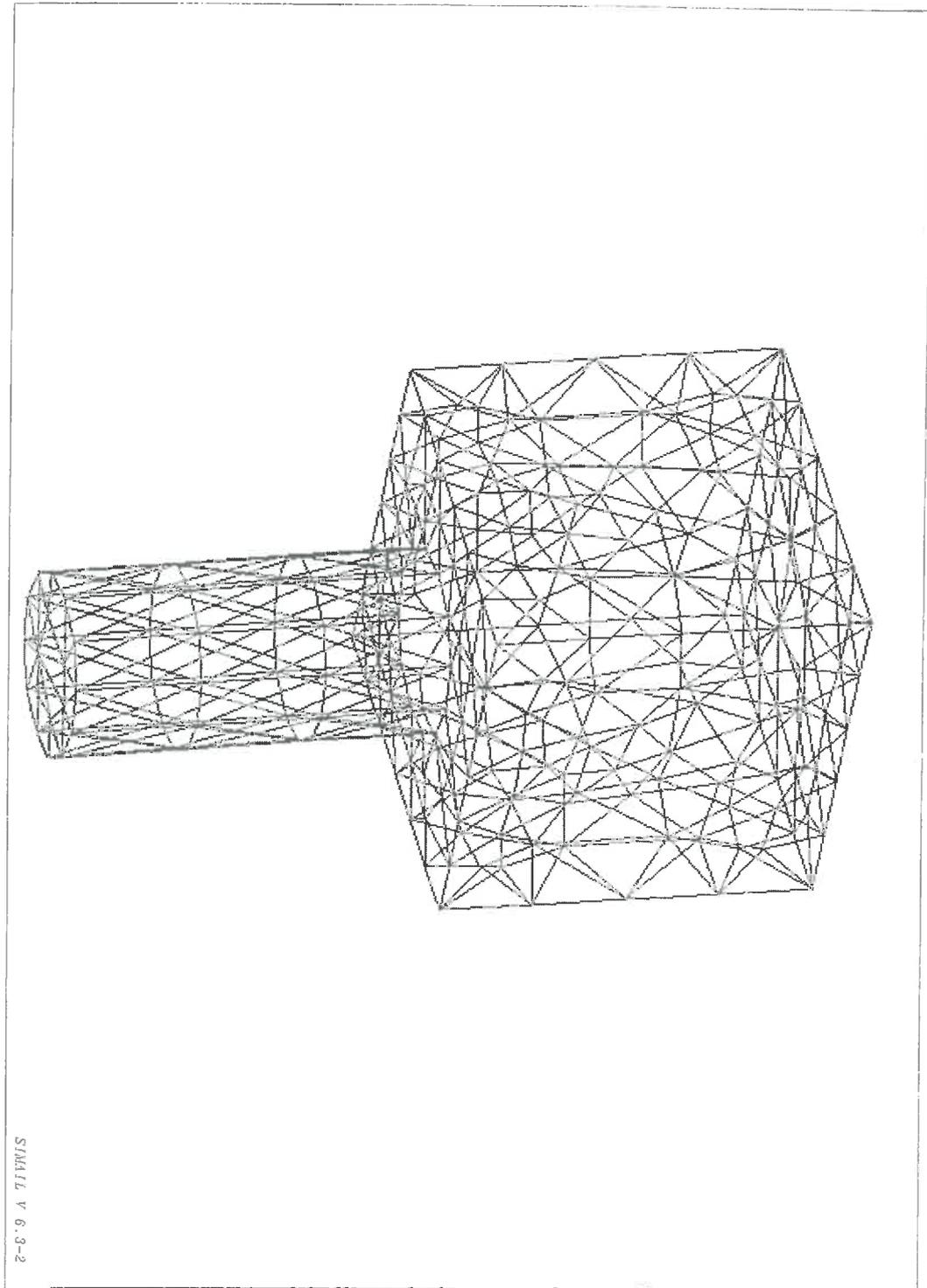


FIG. D.2 – *Maillage de la partie fixe du domaine*

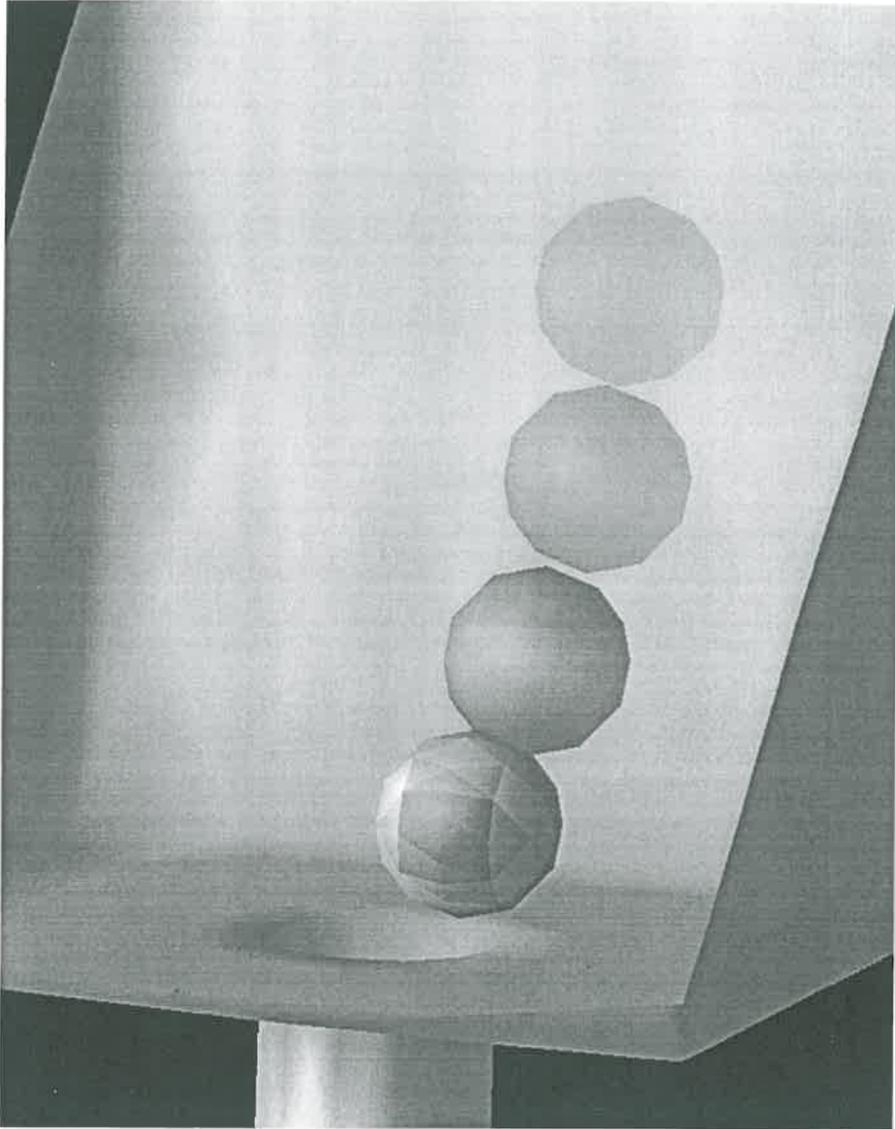


FIG. D.3 – Visualisation d'un résultat de calcul du code aux éléments de frontière

## Liste des Figures du Chapitre D

D.1	Facteur correcteur à la force de Stokes pour une sphère dans un tube cylindrique . . . . .	207
D.2	Maillage de la partie fixe du domaine . . . . .	209
D.3	Visualisation d'un résultat de calcul du code aux éléments de frontière . . .	210

## Liste des Tables du Chapitre D

- D.0 Facteur correcteur à la force de Stokes pour des sphères concentriques . . . 206
- D.0 Facteur correcteur pour une sphère immobile dans un écoulement de Poiseuille 206

# Bibliographie

- [1] W. Haberman and R. M. Sayre. Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes. Technical Report 1143, US Navy Department, Washinton D.C., 1958.
- [2] J. Happel and H. Brenner. *Low reynolds number hydrodynamics*. Kluwer Academic Press, 5ème édition edition, 1991.