

TH - HB 33

THESE

présentée par

Didier MARCHAND

Ingénieur E.N.S.H.G.
(I.N.P.Grenoble)

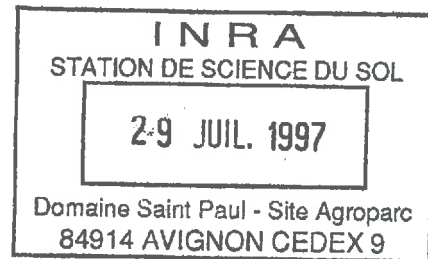
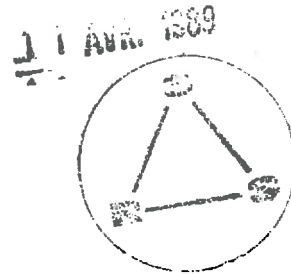
pour obtenir le titre de

DOCTEUR
de l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(Arrêté ministériel du 5 Juillet 1984)

Spécialité : MECANIQUE

S U J E T



MODELISATION FONCTIONNELLE DU BILAN HYDRIQUE SUR SOL CULTIVE : APPROCHE DETERMINISTE OU STOCHASTIQUE ?

Soutenue le 26 Octobre 1988 devant le Jury :

M. P. BOIS

Président

M. C. CARNEIRO da SILVA

Rapporteurs

M. G. VACHAUD

M. F. REYNIERS

Examineurs

M. M. VAUCLIN

AVANT-PROPOS

Les recherches faisant l'objet de ce mémoire ont été effectuées à l'Institut de Mécanique de Grenoble, au sein de l'équipe Milieux Poreux du groupe Hydrologie. Elles n'auraient pas pu prendre corps, d'une part sans l'appui du CNRS-PIREN qui m'a attribué une bourse Bdl, ni d'autre part, sans la collaboration de l'Institut de Recherches Agronomiques Tropicales, IRAT, et plus particulièrement de la sous-direction "Ressources Naturelles" par l'intermédiaire de laquelle j'ai eu accès aux mesures in-situ nécessaires à mon travail ainsi qu'aux fondements du modèle fonctionnel de base.

Monsieur Philippe BOIS, professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury. Il m'a conseillé à la fin de ma scolarité à l'ENSHG, et n'est pas étranger à l'évolution de mon proche avenir, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur Clemente CARNEIRO DA SILVA, professeur à l'Université Fédérale de Pernambuco, Brésil, pour sa participation au jury en tant que rapporteur.

Monsieur François-Noël REYNIERS, agrophysiologiste à l'IRAT, a également accepté de faire partie de ce jury. En suscitant une mission de trois mois à Bamako, Mali, il m'a, en outre, permis de découvrir l'Afrique, ... et les problèmes importants que l'on peut rencontrer sur le terrain. Qu'il soit remercié de son intérêt pour le travail présenté ci-après et de l'expérience qu'il m'a permis d'acquérir.

Monsieur Georges VACHAUD, directeur de recherches au CNRS et responsable du groupe Hydrologie, m'a amicalement suivi tout au long de ces trois années et m'a fait l'honneur de participer à ce jury comme rapporteur. Je veux ici reprendre une expression déjà usitée et le remercier tout particulièrement pour son soutien compréhensif pendant les phases "down" des mes "ups and downs".

Monsieur Michel VAUCLIN, directeur de recherches au CNRS et responsable scientifique de ce travail, en a suivi avec attention tous les développements. Sa disponibilité et ses qualités pédagogiques m'ont grandement aidé, qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je veux encore remercier Jean-Paul GAUDET et Robert LATY pour leur chaleureux soutien et les nombreux transferts de savoir informatique qu'ils ont assurés à mon égard.

Je tiens également à associer à ce travail Jean-François BOULIER et José-Francisco MUNOZ-PARDO auprès de qui je me suis initié à la variabilité spatiale.

Enfin, je remercie Jean-Louis THONY, Charles OBLED, Jean-Dominique CREUTIN et Isabelle BRAUD de s'être, à divers titres, intéressés quelques instants à mes problèmes parfois proches de leurs préoccupations présentes ou passées.

Que ne soient oubliés ceux qui ont également assuré le confort et la convivialité de la vie quotidienne, Sylviane FABRY, Jean-François DAÏAN, Randel HAVERKAMP, Pierre ROUGER, Guy DELRIEU, Yves RODRIGUEZ, et les autres...

TABLE DES MATIERES

liste des figures	P 7
liste des symboles	P 11
INTRODUCTION	P 15
 <u>CHAPITRE 1</u> <u>PHILOSOPHIE DE LA CLASSIFICATION DES MODELES</u>	
I : INTRODUCTION	P 19
I-A : Modèles Déterministes - Modèles Stochastiques	P 20
I-B : Modèles Conceptuels - Modèles Fonctionnels	P 20
I-C : Classification des Modèles	P 21
II : LES MODELES DETERMINISTES	P 22
II-A : Les Modèles Déterministes-Conceptuels	P 22
II-A-1 : Equations de base	p 22
II-A-2 : Les modèles déterministes-conceptuels-numériques	p 25
II-A-2.1 : Méthodes numériques de résolution de l'équation de base	p 25
II-A-2.2 : Conditions initiales et aux limites	p 27
II-A-2.3 : Modélisation du puits d'extraction racinaire	p 29
II-A-2.4 : Méthodes d'estimation des propriétés hydrodynamiques du sol	p 29
II-A-3 : Conclusion sur les modèles déterministes-conceptuels-numériques	p 31
II-B : Les Modèles Déterministes-Fonctionnels	P 31
II-B-1 : Présentation	p 31
II-B-2 : Description des modèles déterministes-fonctionnels	p 33
II-B-2.1 : Réserve en eau utile	p 33
II-B-2.2 : Conditions initiales et aux limites	p 35
II-B-2.3 : Modélisation de la consommation en eau par les plantes	p 36
II-B-2 : Conclusion sur les modèles déterministes-fonctionnels	p 37
III : LES MODELES STOCHASTIQUES	P 39
III-A : Position du Problème	P 39
III-B : Estimation des Deux Premiers Moments	P 41
III-C : Estimation de la Fonction de Densité de Probabilité	P 42
III-C-1 : Les méthodes analytiques	p 42
III-C-2 : Les méthodes de Monte Carlo	p 43
III-D : Conclusion sur les Modèles Stochastiques	P 43

CHAPITRE 2

MODELISATION DETERMINISTE DE TYPE FONCTIONNEL

I : PRESENTATION DU MODELE DETERMINISTE	P 47
I-A : Principes de Base du Modèle	P 47
I-A-1 : Description de la tranche de sol	p 48
I-A-2 : Application de l'équation de conservation de la masse	p 49
I-A-3 : Calcul de l'évapotranspiration réelle	p 51
I-A-4 : Calcul de la progression des fronts	p 52
I-A-5 : Mise en oeuvre du modèle	p 53
I-B : Etude Détaillée de la Fonction d'Eagleman	P 54
I-B-1 : Présentation de la fonction	p 55
I-B-2 : Analyse de la sensibilité de la fonction d'Eagleman	p 58
 II : VALIDATION DETERMINISTE	 P 63
II-A : Simulation Déterministe sur le Site de Thyssé-Kaymor	P 64
II-A-1 : Présentation générale de l'étude	p 64
II-A-2 : Estimation des paramètres des simulations déterministes	p 65
II-A-3 : Résultats des simulations déterministes	p 67
II-B : Simulation Déterministe sur le Site de Bouaké	P 70
II-B-1 : Description du cadre général de l'étude	p 70
II-B-2 : Description de l'essai réalisé en 1986	p 71
II-B-3 : Modélisation déterministe	p 73
II-C : Conclusion sur les Simulations Déterministes	P 78

CHAPITRE 3

MODELISATION STOCHASTIQUE : ASPECTS GENERAUX

I : INTRODUCTION TERMINOLOGIQUE	P 81
 II : ASPECTS STATISTIQUES	 P 84
II-A : Génération de Données	P 84
II-A-1 : Tirage dans une loi normale	p 85
II-A-2 : Tirage dans une loi log-normale	p 87
II-A-3 : Traitement des valeurs extrêmes	p 90
II-A-4 : Choix d'une réalisation optimale	p 91
II-B : Traitement Statistique d'une Distribution Asymétrique	P 93
II-B-1 : Estimation des paramètres caractéristiques	p 93
II-B-2 : Estimation de \bar{Y}_m et de Y_M	p 95

III : ASPECTS GEOSTATISTIQUES	P 99
III-A : Définitions et Terminologie	P 99
III-A-1 : Définitions et hypothèses de base	p 100
III-A-2 : Définition du variogramme expérimental	p 102
III-A-3 : Calcul et ajustement du variogramme expérimental	p 103
III-B : Génération d'un Champ Aléatoire	P 105
III-B-1 : Présentation des différentes méthodes utilisées dans la littérature	p 106
III-B-2 : Méthode de Mantoglou et Wilson	p 107
III-B-2.1 : Présentation générale	p 107
III-B-2.2 : Relation entre les fonctions de covariance	p 110
III-B-2.3 : Relation entre les fonctions de densité spectrale	p 113
III-B-2.4 : Génération de la F.A. bidimensionnelle	p 115
III-C : Choix d'une Réalisation Optimale Moyenne	P 118
III-C-1 : Méthodologie	p 118
III-C-2 : Exemple d'application	p 120
III-D : Variogramme Expérimental d'une Distribution Asymétrique	P 127
III-D-1 : Méthodologie	p 127
III-D-2 : Exemple d'application	p 127
III-E : Conclusion Partielle	P 132

CHAPITRE 4

RESULTATS DES SIMULATIONS STOCHASTIQUES

I : RAPPEL SUR LES RESULTATS DETERMINISTES	P 136
II : SIMULATIONS DE MONTE CARLO SUR LA RESERVE UTILE	P 140
II-A : Présentation des Résultats	P 140
II-B : Résultats des Simulations	P 145
II-C : Comparaison avec les Résultats d'une Simulation Optimale	P 150
II-D : Influence du Nombre de Points	P 152
III : SIMULATIONS AVEC UNE REALISATION OPTIMALE SUR LA RU	P 155
III-A : Réalisation de Référence	P 155
III-B : Influence de la Distribution	P 168
III-C : Influence de la Valeur Moyenne	P 176
III-D : Influence de l'Ecart-Type	P 182
III-E : Influence du Spectre de Pluie	P 185
III-F : Structure Spatiale des Sorties	P 194

III-G : Evolution des Courbes d'Ecart-Réduits de ETR et de D en Fonction de l'Ecart-Réduit de RU	P 203
IV : SIMULATIONS SUR LES VARIABLES CARACTERISANT LA PLANTE : CJ - K_c	P 212
IV-A : Simulations sur CJ	P 212
IV-A-1 : Simulation de Monte Carlo sur CJ	p 212
IV-A-2 : Explication de la plus faible sensibilité à la variabilité de CJ	p 215
IV-B : Simulations sur K_c	P 218
IV-B-1 : Simulation de Monte Carlo sur K_c	p 218
IV-B-2 : Explication de la plus faible sensibilité à la variabilité de K_c	p 219
IV-C : Conclusion sur les simulations sur CJ et K_c	P 223
V : CONCLUSION PARTIELLE	P 227
<hr/>	
CONCLUSION	P 231
BIBLIOGRAPHIE	P 237

LISTE DES FIGURES

- figure 2-1 : $ETR = f(HR)$ à différents niveaux de ETM
- figure 2-2 : $ETR = f(ETM)$ à différents niveaux de HR
- figure 2-3 : Erreur relative sur ETR en fonction de HR avec
ETM = 6.mm/j et $ER(RU) = \pm 20.$ et $\pm 40.\%$
- figure 2-4 : Erreur relative sur ETR en fonction de HR avec
 $ER(RU) = \pm 30.\%$ et ETM = 4. et 8. mm/j
- figure 2-5 : Erreur relative sur ETR en fonction de ETM avec
HR = .6 et $ER(K_c) = \pm 10.$ et $\pm 20.\%$
- figure 2-6 : Erreur relative sur ETR en fonction de ETM avec
 $ER(K_c) = \pm 20.\%$ et HR = .4 et .8
- figure 2-7 : Bilans hydriques par période Tube T1 : ARACHIDE
- figure 2-8 : Bilans hydriques par période Tube T7 : MIL
- figure 2-9 : Schéma du dispositif expérimental.
(cf. CHOPART et VAUCLIN, 1988)
- figure 2-10 : Coefficients cultureux en fonction du stade phénologique
(rapport AIEA 1985 - M. VAUCLIN)
- figure 3-1 : Représentation schématique du domaine d'étude et de la
ligne tournante 1
- figure 3-2 : Repère orthomormé (x, i, j) , cercle unité et projection de h
- figure 3-3-a : Histogramme et courbe de Gauss de la réalisation de $Y(x)$
- figure 3-3-b : Test graphique de normalité de la réalisation de $Y(x)$
- figure 3-4 : Variogrammes théorique, expérimentaux et calés sur les
réalisations non-tronquée (Y) et tronquée (Y') de $Y(x)$
- figure 3-5-a : Histogramme et courbe de Gauss de la réalisation tronquée
- figure 3-5-b : Test graphique de normalité de la réalisation tronquée
- figure 3-6 : Histogramme des valeurs brutes : Y
- figure 3-7-a : Histogramme des valeurs transformées : $Z = \log(Y_M - Y)$
- figure 3-7-b : Test graphique de normalité sur les valeurs transformées :
 $Z = \log(Y_M - Y)$

- figure 3-8-a : Variogramme expérimental normé des valeurs brutes : Y
 figure 3-8-b : Variogramme expérimental normé des valeurs transformées :
 $Z = \log(Y_M - Y)$
- figure 4-1 : Spectre pluviométrique de référence : S_0
- figure 4-2 : Valeurs moyennes par décade d'ETM, d'ETR et de D en mm/j
- figure 4-3 : Variogrammes exponentiels théoriques considérés
- figure 4-4-a : Histogramme de la réalisation optimale : RO
 figure 4-4-b : Test graphique de normalité sur la réalisation optimale :
 RO
 figure 4-4-c : Histogramme de la réalisation optimale tronquée: RO_T
 figure 4-4-d : Test graphique de normalité sur la réalisation optimale
 tronquée : RO_T
 figure 4-4-e : Histogramme de la réalisation de la RU associée
- figure 4-5-a₁ : Histogramme de la réalisation d' ETR_c
 figure 4-5-a₂ : Histogramme de la réalisation de D_c
 figure 4-5-b₁ : Histogramme de la réalisation transformée : $\log(ETR_{cM} - ETR_c)$
 figure 4-5-b₂ : Histogramme de la réalisation transformée : $\log(D_c - D_{cm})$
- figure 4-6 : Erreur relative sur $ETR_c(*)$ et sur $D_c(o)$ en fonction de
 l'erreur relative sur la RU
- figure 4-7-a : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et
 supérieurs de l'ETR, en mm/j
 figure 4-7-b : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et
 supérieurs de D , en mm/j
- figure 4-8-a : Histogramme de la réalisation L_2S_{2a} de la RU
 figure 4-8-b : Histogramme de la réalisation L_2S_2 de la RU
- figure 4-9-a₁ : Histogramme de l' ETR_c pour la réalisation M_2S_2 de la RU
 figure 4-9-a₂ : Histogramme de l' ETR_c pour la réalisation L_2S_{2a} de la RU
 figure 4-9-a₃ : Histogramme de l' ETR_c pour la réalisation L_2S_2 de la RU
 figure 4-9-b₁ : Histogramme de D_c pour la réalisation M_2S_2 de la RU
 figure 4-9-b₂ : Histogramme de D_c pour la réalisation L_2S_{2a} de la RU
 figure 4-9-b₃ : Histogramme de D_c pour la réalisation L_2S_2 de la RU
- figure 4-10-a : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des
 quartiles inférieur et supérieur de l' ETR_c pour les
 réalisations M_1S_2 , M_2S_2 et M_3S_2
 figure 4-10-b : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des
 quartiles inférieur et supérieur du D_c pour les
 réalisations M_1S_2 , M_2S_2 et M_3S_2
- figure 4-11-a₁ : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et
 supérieurs de l'ETR pour la simulation M_1S_2

- figure 4-11-a₂: Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la simulation M_3S_2
- figure 4-11-b₁: Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de D pour la simulation M_1S_2
- figure 4-11-b₂: Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de D pour la simulation M_3S_2
- figure 4-12-a : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles inférieur et supérieur de l'ETR_c pour les réalisations M_2S_1 , M_2S_2 et M_2S_3
- figure 4-12-b : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles inférieur et supérieur du D_c pour les réalisations M_2S_1 , M_2S_2 et M_2S_3
- figure 4-13-a : Situation climatique de référence : S_0
- figure 4-13-b : Situation climatique : S_3
- figure 4-13-c : Situation climatique : S_4
- figure 4-14-a : Médianes et inter-quartiles de l'ETR_c pour les cinq situations pluviométriques
- figure 4-14-b : Médianes et inter-quartiles de D_c pour les cinq situations pluviométriques
- figure 4-15-a : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S_1
- figure 4-15-b : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S_2
- figure 4-15-c : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S_0
- figure 4-15-d : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S_3
- figure 4-15-e : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S_4
- figure 4-16-a : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{cm}-ETR_c)$ et $\log(D_c-D_{cm})$ pour $a_{RU}=10.m$
- figure 4-16-b : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{cm}-ETR_c)$ et $\log(D_c-D_{cm})$ pour $a_{RU}=30.m$
- figure 4-16-c : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{cm}-ETR_c)$ et $\log(D_c-D_{cm})$ pour $a_{RU}=50.m$
- figure 4-17 : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale des ETR moyennes par décade pour les décades 5 à 8, avec $a_{RU}=30.m$
- figure 4-18 : Erreur relative sur ETR_c(*) et sur D_c(o) en fonction de l'erreur relative sur la RU, pour la réalisation RU30

- figure 4-19-a : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la sixième décade
- figure 4-19-b : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la septième décade
- figure 4-19-c : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la huitième décade
- figure 4-19-d : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la onzième décade
-
- figure 4-20-a : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la cinquième décade
- figure 4-20-b : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la sixième décade
- figure 4-20-c : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la septième décade
- figure 4-20-d : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la huitième décade
-
- figure 4-21-a : Histogramme de l' IS_c pour la réalisation M_2S_1 de la RU
- figure 4-21-b : Histogramme de l' IS_c pour la réalisation CJ_{21} de la CJ
- figure 4-21-c : Histogramme de l' IS_c pour la réalisation Kc_{21} du K_c
-
- figure 4-22-a : Erreur relative sur IS_c en fonction de l'erreur relative sur la RU (o) et sur la CJ (+)
- figure 4-22-b : Erreur relative sur IS_c en fonction de l'erreur relative sur la RU (o) et sur le K_c (*)

LISTE DES SYMBOLES

a, a_T	: Valeur de la portée du phénomène	(L)
ae	: Valeur de la longueur d'autocorrélation du phénomène	(L)
C_0	: Valeur de la pépité du variogramme	
C_1	: Valeur de la différence entre le palier et la pépité du variogramme	
C_2	: Valeur du palier du variogramme	
$C(h)$: Fonction de Covariance	
$C^*(h)$: Covariance expérimentale	
$C_1(B)$: Fonction de Covariance du processus monodimensionnel	
$C(h, z)$: Capacité Capillaire	(L ⁻¹)
CJ	: Croissance racinaire Journalière	(L)
CV_Z	: Coefficient de Variation d'une réalisation de la V.A. Z	
$D(\theta, z)$: Diffusivité Capillaire	(L ² T ⁻¹)
$D(J)$: Pertes en eau par le réservoir racinaire au jour J	(LT ⁻¹)
D_c	: Pertes en eau par le réservoir cumulées sur l'ensemble du cycle	(L)
$DR(J)$: Pertes en eau par le réservoir par drainage et/ou ruissellement au jour J	(LT ⁻¹)
$E[X]$: Espérance mathématique de la variable aléatoire X	(L)
$ER(\dots)$: Erreur Relative sur ..	
$ETP(J)$: Evapotranspiration Potentielle au jour J	(LT ⁻¹)
$ETM(J)$: Evapotranspiration Maximale au jour J	(LT ⁻¹)
ETM_c	: Evapotranspiration Maximale Cumulée sur l'ensemble du cycle	(L)
$ETR(J)$: Evapotranspiration Réelle au jour J	(LT ⁻¹)
ETR_c	: Evapotranspiration Réelle Cumulée sur l'ensemble du cycle	(L)
EQM	: Ecart Quadratique Moyen	
$FH(J)$: Front d'Humectation au jour J	(L)
$FR(J)$: Front Racinaire au jour J	(L)
g_{12}	: Coefficient de symétrie non-biaisé d'une réalisation de la V.A. Z	
g_{22}	: Coefficient d'aplatissement non-biaisé d'une réalisation de la V.A. Z	
H	: Charge Hydraulique	(L)
$h, h(\theta)$: Pression Effective de l'eau dans le sol	(L)
$HH(J)$: Taux de remplissage du réservoir humide au jour J	
$HR(J)$: Taux de remplissage du réservoir racinaire au jour J	
$I(J)$: Irrigation au jour J	(L)
IQ_Z	: Inter-Quartile d'une réalisation de la V.A. Z	
IS_c	: Indice de satisfaction sur l'ensemble du cycle cultural	
IS_p	: Indice de satisfaction par période	
J	: Echelle intégrale du phénomène	(L)
JAS	: Jour Après Semis	(T)
JP	: Jour de la Pluie	(T)
$K(\theta), K(h)$: Conductivité Hydraulique du sol fonction de θ et de h	(LT ⁻¹)
K_c	: Vecteur des coefficients culturaux	
$K_c(J)$: Coefficient cultural au jour J	
$K_p(J)$: Coefficient d'évaporation sol nu au jour J	
L	: Nombre de lignes tournantes	
LN_3	: Loi Log-Normale à 3 paramètres	
LNI_3	: Loi Log-Normale Inverse à 3 paramètres	
\log	: Logarithme népérien	
L_s	: Longueur caractéristique de la parcelle agronomique fictive	(L)
LS	: Durée en jour de la croissance racinaire	(T)
M	: Nombre d'harmoniques considérées dans la discrétisation du spectre	
Me_Z	: Médiane expérimentale d'une réalisation de la V.A. Z	
m_X	: moyenne expérimentale d'une réalisation de la variable aléatoire X	
$N(\mu_Z, \sigma_Z)$: Loi Normale de moyenne μ_Z et d'écart-type σ_Z	

$N(\mu_Z, \sigma_Z, a_Z)$: Loi Normale de moyenne μ_Z , d'écart-type σ_Z et de portée a_Z	
$N'(h)$: Nombre de couples pour la distance h dans le calcul du variogramme	
NB	: Nombre de lignes tournantes	
NJ_c	: Nombre de jours sur l'ensemble du cycle cultural	
NJ_p	: Nombre de jours par période	
NP	: Nombre de Périodes sur le cycle	
N_p	: Nombre de points du variogramme expérimental	
NR	: Nombre de réalisations	
$P(J)$: Pluie Journalière au jour J	(L)
$P_X(x)$: fonction densité de probabilité de la fonction aléatoire X	(LT ⁻¹)
q	: Flux d'eau à travers une unité de surface	(LT ⁻¹)
Qi_Z	: Quartile Inférieur d'une réalisation de la V.A. Z	
Qs_Z	: Quartile Supérieur d'une réalisation de la V.A. Z	
$R(J)$: Ruissellement de surface au jour J	(LT ⁻¹)
$RP(J)$: Reliquat de la dernière pluie au jour J	(L)
RU	: Réserve en eau Utile	
$S(\omega)$: Densité spectrale bidimensionnelle	
$S_1(\omega)$: Densité spectrale monodimensionnelle	
s_x	: Ecart-Type expérimentale d'une réalisation de la variable aléatoire X	
$S(z, t)$: Terme d'extraction racinaire	(T ⁻¹)
$SR(J)$: Stock en eau utile dans le réservoir racinaire au jour J	(L)
$SR_{max}(J)$: Stock maximal en eau utile dans le réservoir racinaire au jour J	(L)
STM	: Stock maximal en eau utile dans le réservoir fixe	(L)
$ST(J)$: Stock en eau utile dans le réservoir humide au jour J	(L)
$ST_{max}(J)$: Stock maximal en eau utile dans le réservoir humide au jour J	(L)
t	: Temps	(T)
u_1	: Vecteur unitaire sur la ligne l	
$Var(X)$: Variance théorique de la variable aléatoire X	
X_{det}	: Valeur associée à une simulation déterministe	
X, Y, Z	: Variables Aléatoires	
Y_m	: Borne inférieure d'une loi log-normale à 3 paramètres	
Y_H	: Borne supérieure d'une loi log-normale inverse à 3 paramètres	
$Z(x)$: Fonction Aléatoire	
$Z(x_0)$: Variable Aléatoire en x_0 associée à la F.A. Z (x)	
$z(x)$: Valeur du phénomène en x_0	
$Z_1(x)$: Processus monodimensionnel associé	
$z_{1l}(\beta)$: Valeur du processus monodimensionnel en β sur la ligne l	
z	: Cote	(L)
z_D	: Cote de Drainage	(L)
z_{max}	: Cote maximum du profil	(L)
β_{p1}	: Projection orthogonale de x_p sur la ligne l	
$\gamma(h)$: Semi-variogramme	
$\gamma_R(h)$: Semi-variogramme régional	
$\gamma^*(h)$: Semi-variogramme expérimental	
Δ	: Mesure du critère de ressemblance aux statistiques d'ensemble	
$\Delta\beta$: Largeur des bandes tournantes	
Δx	: Pas d'espace sur la parcelle agronomique fictive	
μ_Z	: Moyenne Théorique de la Variable Aléatoire Z	
σ_Z	: Ecart-Type Théorique de la Variable Aléatoire Z	
φ_Z	: Mode Théorique de la Variable Aléatoire Z	
ψ_Z	: Médiane Théorique de la Variable Aléatoire Z	
θ_1	: Angle de la ligne l par rapport à l'axe horizontal	
θ	: Teneur en eau volumique	
θ_{sat}	: Teneur en eau volumique à saturation	
Ω	: Fréquence de coupure	
ω_k, ω	: Fréquence	
ϕ_k	: Angles tirés dans une loi uniforme entre 0 et 2π	

<...> : Moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations
sig(...) : Ecart-Type d'ensemble sur un grand nombre de réalisations

INTRODUCTION

La modélisation numérique du bilan hydrique sur sol, cultivé ou non, connaît encore un développement considérable, Belmans et al.,1983, Forest et al.,1985, Carneiro da Silva et al.,1986, Arora et al.,1987, El Kadi,1987, Chopart et al.,1988. Elle présente un grand intérêt, notamment en zones tropicales sèches où le niveau de consommation en eau par la culture est un élément important dans la détermination des rendements et où les problèmes liés à des expérimentations in-situ sont souvent exacerbés. Ces modèles, validés ou non par comparaison à des mesures réalisées en station, sont ensuite utilisés pour simuler le comportement de la culture dans d'autres conditions agropédoclimatiques. Deux des préoccupations principales des agronomes travaillant dans ces régions sont alors l'estimation des niveaux de consommation de la culture d'une part, et la politique à suivre en vue de leur amélioration d'autre part.

Ces préoccupations étant fixées, l'utilisateur a à faire face au problème de la représentativité des mesures in-situ tout autant que des résultats de simulations. En effet, de nombreuses études expérimentales effectuées au cours des dernières années ont montré la grande variabilité spatiale des propriétés physico-chimiques des sols ainsi que des rendements, et ce, même à l'échelle de la parcelle agronomique, Russo et al.,1981, Vauclin,1983 et Ruelle et al.,1986.

En outre, le caractère non-aléatoire de ces variations nécessite bien souvent la prise en compte des structures spatiales dans le traitement statistique des observations et dans l'élaboration des simulations.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, la présentation de quelques modèles détaillés dans la littérature nous permettra d'introduire différentes approches adoptées par les auteurs : approches conceptuelle et fonctionnelle d'une part, déterministe et stochastique d'autre part. La comparaison de ces modèles au niveau de leurs besoins en variables et paramètres d'entrée, et donc de leur facilité de divulgation et d'adaptation à des problèmes rencontrés par d'autres utilisateurs

potentiels, nous conduira à constater qu'une approche fonctionnelle semble préférable.

Aussi, présenterons-nous, dans le deuxième chapitre, un tel modèle dont les bases ont été établies par Franquin et Forest, 1977 et dont différentes versions sont largement utilisées à l'Institut de Recherches Agronomiques Tropicales comme outil numérique d'aide aux décisions agricoles, notamment dans les zones semi-arides.

Ce modèle, utilisé à l'heure actuelle dans un contexte déterministe sera confronté à des résultats expérimentaux pour trois cultures, (Mil, Arachide, Riz Pluvial), sur deux sites, Thyssé-Kaymor au Sénégal et Bouaké en Côte d'Ivoire.

Compte-tenu des problèmes de variabilité spatiale introduits précédemment, nous nous attacherons par la suite, en supposant l'environnement climatique uniforme à l'échelle de la parcelle, à étudier l'influence que peut avoir cette variabilité sur les résultats de simulations.

Cette approche nous permettra de répondre aux questions suivantes :

- i) Une simulation stochastique est-elle nécessaire ?
- ii) Faut-il prendre en compte la structure spatiale des variables d'entrée ?
- iii) Une modélisation déterministe peut-elle suffire ?
 - si oui, sous quelles contraintes ?
 - si non, quel(s) paramètre(s) est (sont) prépondérant(s) ?

Cette dernière question, (iii), est à replacer dans le débat actuel sur le concept de milieu équivalent dont l'existence est souvent mise en doute dans la littérature, Vauclin et al., 1983, El Kadi, 1987.

Pour mener à bien cette démarche, nous présenterons dans le troisième chapitre les notions théoriques nécessaires à la compréhension des résultats présentés ultérieurement. Dans ce chapitre, nous développerons deux générateurs suivant que l'on considérera la structure spatiale des phénomènes ou non. Dans chacun des cas, la variable d'entrée considérée sera assimilée à une fonction aléatoire bidimensionnelle isotrope stationnaire d'ordre 2. Dans le cas d'une structure spatiale, la

fonction de covariance théorique sera de type exponentiel. L'utilisation de la méthode de Monte Carlo nous permettra alors, dans chacun des cas, de quantifier l'influence de la variabilité sur les sorties du modèle en termes de consommation en eau par la plante et de pertes en eau par le sol, cumulées sur l'ensemble du cycle cultural ou par période. Compte-tenu de ces résultats, nous nous autoriserons, dans la suite, à travailler sur des réalisations optimales dont nous détaillerons la méthode de génération.

Le quatrième chapitre présentera enfin les résultats de ces simulations. Pour répondre aux questions posées ci-dessus, nous envisagerons de nombreuses situations correspondant à différents cas de structure spatiale, de degrés de variabilité et d'environnement climatique. A la lumière de ces résultats, nous serons à même d'apporter une réponse aux questions précédentes et de replacer celles-ci dans le débat sur l'importance de l'approche stochastique et le bien-fondé de la notion de milieu équivalent.

CHAPITRE 1

PHILOSOPHIE DE LA CLASSIFICATION DES MODELES

C1-1) INTRODUCTION

La consommation en eau par les plantes est un facteur important, et reconnu, dans leur développement et leur rendement. De nombreux modèles de production sont fondés sur des corrélations entre une variable de production et une variable de consommation en eau, cumulée sur l'ensemble du cycle cultural ou, de manière plus précise, par période.

Dans ce cadre, et pour une meilleure compréhension des phénomènes, ces dernières années ont vu naître de nombreux modèles de transferts d'eau et de solutés dans les sols, que ce soit en colonne de laboratoire ou en conditions naturelles, sur sol nu ou cultivé.

Les approches utilisées dans ces modélisations des relations Eau-Sol-Plante sont très variables et dépendent des objectifs poursuivis ainsi que des préoccupations, de la formation et de l'environnement du concepteur de ces modèles. Elles diffèrent notamment par le plus ou moins grand nombre de données requises en entrée, compte-tenu des difficultés de mesures et de l'aspect local de ces mesures.

De bonnes synthèses des différents modèles proposés dans la littérature ont été effectuées ces dernières années par De Jong, 1981 et, dans le domaine des transferts couplés eau/soluté, par Addiscott et al., 1985. Elles soulignent toutes deux l'importance des objectifs fixés dans le choix de l'approche.

C1-I-A) Modèles déterministes - Modèles stochastiques

Une première grande distinction apparaît entre les modèles de type déterministe et les modèles de type stochastique.

Un modèle déterministe est un modèle où toutes les variables et paramètres d'entrée, et par conséquent toutes les variables de sortie, sont considérés comme libres de toute fluctuation aléatoire.

Ainsi, un modèle déterministe n'associera t'il, à une entrée donnée, qu'une sortie unique. Ce résultat sera plus ou moins intéressant suivant l'aptitude du modèle à représenter le processus mis en jeu, mais également suivant le degré et la nature de la variabilité du milieu dans lequel le processus physique a lieu.

Il est donc apparu nécessaire d'élaborer des modèles stochastiques qui prennent en compte la variabilité inhérente aux variables et paramètres d'entrée et qui fournissent des sorties en termes probabilistes.

Notons ici, l'utilisation du mot *stochastique* préféré à *statistique* pour marquer la possible auto-corrélation spatiale des variables.

C1-I-B) Modèles conceptuels - Modèles fonctionnels

La classification suivante revient à séparer les modèles en deux grands groupes qui se distinguent par les objectifs poursuivis par le concepteur.

Si le concepteur a des objectifs de type fondamental comme la simulation précise du processus physique considéré tel qu'il est connu à l'heure de l'élaboration du modèle ou comme la validation d'hypothèses faites sur la nature de tel ou tel phénomène, le modèle utilisé sera de type conceptuel, ou encore mécaniste.

Si le concepteur a pour objectif, peut-être plus pratique, de fournir des outils d'aide à l'agriculture ou de gestion des ressources en eau à une échelle plus large, le modèle utilisé sera de type fonctionnel. Il pourra comprendre quelques fonctions ou équations empiriques.

- Les modèles conceptuels s'appuient sur des équations suggérées par la compréhension que l'on a des processus physiques reliant les variables d'entrée aux variables de sortie. Les variables du modèle sont exprimées en termes de flux : intensité de la pluie ou de l'évaporation en mm/h par exemple, flux d'eau à travers telle profondeur de sol...

- Les modèles fonctionnels traitent de manière simplifiée, souvent à partir de fonctions empiriques, des bilans en eau ou soluté. Ces modèles sont également appelés modèles capacitifs en ce sens qu'ils ne traitent plus des flux instantanés mais des quantités souvent journalières : pluie ou évaporation du jour par exemple.

L'échelle du pas de temps est donc une distinction fondamentale entre ces deux types de modélisation.

Les modèles fonctionnels, de part leur caractère simplifié, nécessitent moins de données d'entrée. Ils sont, d'un point de vue informatique plus faciles à mettre en oeuvre et nécessitent moins de temps de calcul.

C1-I-C) Classification des Modèles

Nous nous proposons maintenant, afin de situer notre travail dans un cadre plus général et de dégager son originalité, de présenter quelques uns des modèles détaillés dans la littérature, de les placer dans la classification précédemment établie et de déterminer leurs aptitudes et contraintes respectives.

D'après les remarques précédentes, on classera les modèles selon les quatre groupes suivants :

- Déterministe-Conceptuel
- Déterministe-Fonctionnel
- Stochastique-Conceptuel
- Stochastique-Fonctionnel

C1-II) LES MODELES DETERMINISTES

C1-II-A) Les Modèles Déterministes-Conceptuels

C1-II-A-1) Equations de base

Ces modèles décrivent les transferts isothermes d'eau dans un milieu poreux rigide et non-saturé. Ils reposent sur l'équation de continuité couplée à la loi de Darcy généralisée.

* La loi de Darcy exprime que le flux d'eau à travers une unité de surface est proportionnel au gradient de charge hydraulique. Elle s'écrit :

$$q = - K \cdot \text{grad}(H) \quad (1-1)$$

où :

- H est la charge hydraulique exprimée en hauteur de colonne de liquide (L). H, somme d'un potentiel matriciel et d'un potentiel gravitationnel, s'écrit :

$$H = h - z \quad (1-2)$$

où h est la pression effective de l'eau, en hauteur de colonne de liquide (L), à la cote z (L). La pression effective de l'eau est liée à l'humidité

volumique par la courbe de pression capillaire en supposant l'hystérésis négligeable. Dans cette formulation, l'origine de l'axe Oz est prise à la surface du sol ; l'axe est orienté positivement vers le bas.

- Dans l'équation (1-1), K est la conductivité hydraulique (LT^{-1}). C'est une fonction de l'humidité, donc de la pression effective.

* L'équation de continuité exprime que la variation d'humidité par unité de volume, pendant un temps ∂t (T) est égale à la divergence du flux de liquide, soit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \text{div}(q) \quad (1-3)$$

* Ces deux équations, combinées dans le cas d'un écoulement monodimensionnel vertical, conduisent à l'équation suivante qui décrit les transferts d'eau dans un sol nu :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h,z) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right) \quad (1-4)$$

Cette équation est en fait incomplète lorsque l'on s'attache à la modélisation des transferts d'eau sous sol cultivé.

Il faut, dans ce cas, tenir compte du terme d'extraction racinaire que l'on peut écrire dans un premier temps : $S(z,t)$.

L'équation (1-4) devient alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h,z) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right) - S(z,t) \quad (1-5)$$

Par introduction :

- d'une part de la capacité capillaire $C(h,z)$ (L^{-1}), définie par :

$$C(h,z) = \frac{d\theta}{dh}$$

- d'autre part de la diffusivité capillaire $D(\theta,z)$ (L^2T^{-1}), définie par :

$$D(\theta,z) = \frac{K(\theta,z)}{C(\theta,z)}$$

l'équation (1-5) peut-être réécrite :

$$C(h,z) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(K(h,z) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right) - S(z,t) \quad (1-6)$$

ou

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(D(\theta,z) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta,z)}{\partial z} - S(z,t) \quad (1-7)$$

L'une ou l'autre de ces formulations est utilisée dans les modèles déterministes-conceptuels suivant le type de problème traité. Ainsi, dans le cas où une partie du profil est saturée, on utilisera l'équation (1-6) puisque h , contrairement à θ , variera de manière continue au passage de la zone non-saturée à la zone saturée. Ces mêmes propriétés (continuité de h et non-continuité de θ) s'appliquent également, dans le cas d'un sol stratifié, au passage d'une couche de sol à l'autre.

Les équations (1-6) et (1-7) sont très fortement non-linéaires et leur résolution nécessite souvent le recours à des méthodes numériques : Ce sont des modèles déterministes-conceptuels-numériques. Par contre, dans des cas spécifiques de conditions aux limites et initiales, ces deux équations admettent des solutions analytiques. Dans de tels cas, les modèles seront déterministes-conceptuels-analytiques.

On comprendra qu'en conditions naturelles, les conditions initiales et aux limites soient souvent trop complexes pour autoriser un

développement important de modèles déterministes-conceptuels-analytiques. Aussi, même s'ils ont permis de valider, sur colonne de laboratoire, les concepts liés aux équations (1-6) et (1-7) et s'ils ont parfois été utilisés dans la simulation déterministe du bilan hydrique, Cordova et Bras, 1981, nous ne les développerons pas ici.

C1-II-A-2) Les modèles déterministes-conceptuels-numériques

Ils ont été largement développés dans la littérature.

Les différences entre deux modèles peuvent se situer au niveau des quatre points suivants :

- la méthode numérique de résolution de l'équation de base
- les conditions initiales et aux limites applicables
- la modélisation du puits d'extraction racinaire
- la méthode d'estimation des propriétés hydrodynamiques du sol

Notons que la plupart des modèles ont utilisé l'équation de base (1-6), préférée à l'équation (1-7), même si les concepts sont, encore une fois équivalents.

C1-II-A-2.1) Les méthodes numériques de résolution de l'équation de base

La résolution numérique de ces équations par différences finies a souvent été préférée à la résolution par éléments finis.

Ces dernières méthodes ont pourtant connu un développement important ces dernières années : Neuman et al., 1975, Yoon et Yeh, 1975, Gureghian, 1981. Si elles sont plus complexes à mettre en oeuvre, elles sont mieux à même de modéliser les anisotropies et les hétérogénéités que l'on rencontre fréquemment en science du sol, notamment lorsque l'on travaille sur des domaines bi- ou tri-dimensionnels.

Nous détaillerons cependant principalement les méthodes résolution par différences finies dans le cas monodimensionnel.

D'une manière générale, le profil de sol est discrétisé en un certain nombre de noeuds, selon un pas d'espace Δz , fixe ou variable suivant le modèle.

On calcule les flux sur un pas de temps Δt entre deux noeuds du maillage en appliquant la loi de Darcy entre ces deux noeuds et en supposant l'écoulement permanent entre les noeuds pendant le pas de temps considéré, soit :

$$q = - K(\theta) \cdot \frac{\Delta H}{\Delta z}$$

où :

- q est le flux à travers la surface séparant z_1 et z_2
- $\overline{K(\theta)}$ est une conductivité moyenne représentative de l'épaisseur de la couche $z_2 - z_1$
- $\Delta z = z_2 - z_1$ est le pas d'espace
- $\Delta H = H_2 - H_1$ est la différence de charge hydraulique entre z_2 et z_1 où θ_2 et θ_1 sont les humidités volumiques.

Le choix du pas d'espace et du pas de temps est fonction de multiples critères.

Le pas de temps est, en fait, dépendant du pas d'espace et de l'état hydrique du profil de sol :

- un pas de temps trop grand donnera une mauvaise estimation des transferts et pourra même rendre le modèle numériquement instable
- un pas de temps trop petit entraînera une augmentation néfaste du temps de calcul et introduira des erreurs d'arrondis dommageables pour la précision des résultats.

Au niveau méthodologique, on distingue :

- les *méthodes explicites*, Staple, 1966 où, au noeud z_i , l'équation est résolue directement au temps t
- les *méthodes implicites*, Molz et Remson, 1971 où l'on a à résoudre, à chaque pas de temps, un système linéaire

- les méthodes de Crank-Nicholson, Pikul et al., 1974, intermédiaires entre ces deux approches.

Des problèmes de linéarisation dans le temps (linéarisation explicite, linéarisation implicite) des coefficients $C(h,z)$ et $K(h,z)$, ainsi que des problèmes de pondération dans l'espace de $K(h,z)$ se posent également.

Haverkamp et al., 1977, ont montré que, dans le cas d'une infiltration dans un sol sableux, les méthodes implicites sont de 5 à 10 fois plus rapides que les méthodes explicites.

Les valeurs, liées, des pas de temps et d'espace dépendent fortement des conditions d'utilisation du modèle :

- En colonne de laboratoire, pour une simulation précise, Δz et Δt peuvent être de l'ordre de quelques centimètres et quelques secondes respectivement: Hanks et Bowers, 1962, Staple, 1966, Haverkamp et al., 1981.

- En conditions naturelles, lorsqu'il s'agit de simuler l'évolution du profil hydrique au cours du cycle cultural, Δz et Δt peuvent être respectivement de l'ordre de quelques dizaines de centimètres et de quelques dizaines de minutes, voire quelques heures : Nimah et Hanks, 1973, Feddes et al., 1976, De Jong et Cameron, 1979.

On se reportera, pour une étude plus détaillée de tous ces problèmes numériques, à l'étude faite par Vauclin et al., 1979 sur la résolution numérique d'une équation de diffusion non-linéaire.

C1-II-A-2.2) les conditions initiales et aux limites

Au laboratoire, les conditions initiales et les conditions aux limites sont imposées par l'opérateur. L'application de ces conditions, au niveau du modèle de simulation, ne pose pas de problèmes.

En conditions naturelles, les conditions initiales sont souvent données par un profil hydrique ou un profil de pression. Elles ne sont pas très contraignantes lorsque l'on utilise ce type de modèle pour la simulation de l'évolution du profil hydrique sur l'ensemble du cycle cultural.

a) conditions à la limite supérieure :

Les conditions aux limites à la surface du sol sont de deux types :

- Au niveau de la pluviométrie, la pluie du jour, qui est la valeur la plus souvent disponible, est répartie uniformément sur toute la durée du jour ou simplement sur une partie de la journée. Cette répartition pose un problème notamment dans les régions où les précipitations sont brèves et intenses.

- Au niveau de l'évaporation, les modèles distinguent deux phases :

- * une phase où, le sol étant à un degré d'humidité suffisant, c'est la demande évaporative climatique, ou évaporation potentielle, qui régit l'évaporation.

- * une deuxième phase où, le sol étant à un degré moindre d'humidité, il ne peut plus fournir la demande évaporative. C'est alors le sol, qui par son état hydrique et ses propriétés hydrodynamiques régit l'évaporation.

Sur ces bases, les modèles diffèrent encore par la plus ou moins grande prise en compte de données micro-météorologiques telles que la vitesse du vent, la température, l'humidité, la pression relative de l'air ou la valeur du rayonnement net. Le choix de ces différentes variables est imposé par la formule choisie pour le calcul de l'évapotranspiration potentielle : Penman, 1948, Monteith, 1965 et Rijtema, 1965, Priestley et Taylor, 1972.

b) conditions à la limite inférieure :

Les conditions aux limites au bas du profil varient suivant les conditions physiques rencontrées in-situ, Belmans et al., 1983.

Les modèles peuvent prendre en compte :

- une couche imperméable : flux nul à la cote z_{\max} : $q_{z\max} = 0$
- un drainage gravitaire : $q_{z\max} = K(\theta, z_{\max})$
- une nappe phréatique : $\theta_{z\max} = \theta_{\text{sat}}$, ou $h_{z\max} = 0$
où θ_{sat} est la teneur en eau à saturation

Cl-II-A-2.3) la modélisation des puits d'extraction racinaire

On retiendra trois types de modèles :

* *les modèles microscopiques* : Gardner, 1960, Molz et al., 1968, où l'on considère l'écoulement radial d'eau vers une seule racine cylindrique.

* *les modèles macroscopiques* : Gardner, 1964, Molz et Remson, 1971, Feddes et Rijtema, 1972, où la consommation en eau dans la zone racinaire est envisagée de manière globale, sans considération explicite des effets de racines individuelles.

* *les modèles hybrides* : Nimah et Hanks, 1973, Hillel et al., 1976, Federer, 1979, où par utilisation de paramètres interactifs temporels caractérisant la plante et le sol, on simule l'évolution de la transpiration compte-tenu des conditions initiales, du climat, de la plante et du sol.

D'une manière générale, les processus physiques complexes liés à l'extraction racinaire sont encore mal compris, et les paramètres intervenant dans ces différentes modélisations, (activité racinaire,...), sont souvent dénués de sens physique.

Cl-II-A-2.4) la méthode d'estimation des propriétés hydrodynamiques du sol

Toutes les méthodes de résolution précédemment décrites nécessitent la connaissance de la conductivité hydraulique K et de la

pression effective h en fonction de la teneur en eau volumique θ : courbes $K(\theta)$ (ou $K(h)$) et $h(\theta)$.

Or, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèles conceptuels permettant d'obtenir ces deux courbes pour un sol donné.

Souvent, quelques points de ces courbes sont obtenus par des expérimentations relativement difficiles et longues à mettre en oeuvre. Des modèles empiriques de lissage sont ensuite utilisés, Brooks et Corey, 1964, Van Genuchten, 1980.

Une autre démarche consiste à prédire les courbes de conductivité hydraulique et de pression capillaire en fonction de la teneur en eau à partir de la courbe granulométrique, plus facile à obtenir, du sol considéré, Campbell, 1974, Haverkamp, 1986. Cette méthode fournit de bons résultats pour des sols à texture grossière, Mualem, 1976, Dane, 1980 mais semble moins efficace pour des sols à texture plus fine ou gonflants.

En l'état des choses, plusieurs points négatifs subsistent encore :

- l'hystérésis sur la courbe $h(\theta)$ est souvent négligée.
- l'extrapolation des courbes $K(\theta)$ et $h(\theta)$ au-delà du domaine de mesure, pour les faibles valeurs de θ , pose un problème.
- la représentativité spatiale de ces courbes est souvent faible.
- enfin, les méthodes de lissage ou de prédiction précédentes ne prennent pas en compte les hétérogénéités du sol liées à la vie animale ou végétale. Hétérogénéités qui peuvent avoir un effet perturbateur.

Les difficultés d'obtention de ces courbes et ces derniers problèmes empêchent une large utilisation des modèles déterministes-conceptuels-numériques dans le cas d'applications pratiques autres que de recherches.

C1-II-A-3) Conclusion sur les modèles déterministes-conceptuels numériques

Cette description des principaux aspects des modèles déterministes-conceptuels-numériques nous conduit à conclure sur la difficulté que l'on a, d'une part à mettre en oeuvre un tel modèle et d'autre part à faire en sorte que ce modèle soit largement diffusé.

Ces modèles fondés sur des concepts théoriques précis sont de bons outils de recherche mais, compte-tenu de la forte variabilité au niveau d'une parcelle de leurs paramètres d'entrée, on peut s'interroger sur leur représentativité spatiale.

Cet inconvénient majeur peut justifier l'introduction, dans un premier temps, des modèles déterministes-fonctionnels beaucoup plus simples dans la modélisation des processus de transferts. Ces derniers modèles nécessitent des entrées en nombre réduit et, à l'échelle d'une parcelle, sur l'ensemble du cycle cultural, il n'est pas établi que leur résultats soient moins performants que ceux issus d'une simulation fondée sur un modèle déterministe-conceptuel-numérique.

C1-II-B) Les Modèles Déterministes-Fonctionnels

C1-II-B-1) Présentation

Rappelons que ces modèles sont liés à des objectifs pratiques, souvent d'aide à l'agriculture et qu'ils sont, de ce fait utilisés en conditions naturelles.

Les modèles déterministes-conceptuels précédemment étudiés sont fondés sur les mêmes concepts physiques et se différencient principalement par la méthode de résolution de l'équation conceptuelle. Les modèles-déterministes-fonctionnels diffèrent, quant à eux, principalement au niveau de la philosophie simplificatrice.

Pourtant, au niveau des modèles de bilan hydrique, beaucoup adoptent les mêmes principes de base :

- Le bilan hydrique est établi au pas de temps journalier à partir de données météorologiques standards. Ces données sont souvent disponibles pour de nombreuses stations et sur plusieurs années.

- Partant d'un volume d'eau initial contenu dans le profil, considéré comme un réservoir, on additionne la pluie éventuelle ou l'irrigation du jour et l'on retranche l'évapotranspiration et les pertes par drainage et/ou ruissellement pour obtenir le volume d'eau présent dans le profil le jour suivant.

Dans ce type de simulation, deux notions, sur lesquelles nous reviendrons, permettent de définir la *Réserve en eau utile* ou volume d'eau utilisable par la plante : la *Capacité au champ* et le *point de flétrissement permanent*.

Dans ce cadre :

- Si l'état hydrique du sol est proche de la capacité au champ, l'évapotranspiration est supposée égale à l'évapotranspiration maximale.
- Si le sol est plus sec, l'évapotranspiration est fortement limitée en fonction:

- * des conditions météorologiques
- * de la végétation
- * du type de sol et de son état hydrique.

Les fonctions permettant d'estimer l'évapotranspiration sont généralement empiriques, on peut citer la fonction d'Eagleman, 1971 que nous détaillerons dans la deuxième partie de ce mémoire.

Parmi ces modèles, on peut distinguer :

- les modèles pour lesquels le sol est considéré comme un seul réservoir et qui ne prennent pas en compte le développement de la zone racinaire, Fitzpatrick et Nix, 1969, Franquin et Forest, 1977.

- les modèles qui séparent le profil de sol en plusieurs couches et/ou qui prennent en compte le développement racinaire. Des études (e.g. Holmes, 1961, Shaw, 1964, Freteaud et al., 1987, Chopart et Vauclin, 1988) ont montré que les modèles de ce dernier type sont beaucoup plus performants.

C1-II-B-2) Description générale des modèles déterministes-fonctionnels

Nous allons maintenant développer les principales notions utilisées dans les modèles fonctionnels.

C1-II-B-2.1) la réserve en eau utile

Notion commune à tous les modèles fonctionnels de ce type, la réserve en eau utile est définie par tranche de sol comme le volume d'eau utilisable par la plante, i.e. le volume d'eau qui peut-être évapotranspiré.

Ce volume est représenté par la différence entre le volume d'eau à la capacité au champ et le volume d'eau au point de flétrissement permanent.

L'introduction de ces deux dernières notions nécessite quelques développements.

a) La capacité au champ :

Initialement, la capacité au champ a été considérée comme une propriété physique caractéristique d'un sol donné. Elle était définie par le volume d'eau dans la tranche de sol lorsque la redistribution de l'eau présente dans le profil cesse.

Au cours des années, et suite à l'amélioration de la connaissance des processus physiques et des techniques de mesure, la notion a évolué vers la quantité d'eau présente dans le sol lorsqu'après saturation, le drainage gravitaire devient négligeable.

On admet que lors de la redistribution, on obtient deux cinétiques, une cinétique rapide où les forces de gravité sont prépondérantes et une cinétique lente où les forces capillaires deviennent importantes.

La capacité au champ également appelée, dans ce cas, *capacité de rétention* est alors la quantité d'eau soumise à une cinétique lente de redistribution.

Dans son analyse des modèles de bilan hydrique De Jong, 1981 insiste, sur différents points qu'il ne faut pas négliger lors de l'utilisation du concept de capacité au champ :

- d'une part, ce n'est pas une propriété intrinsèque du sol : sa valeur dépend de la méthode de mesure
- d'autre part, si cette notion peut s'appliquer à des sols de texture grossière où la conductivité hydraulique diminue fortement quand la pression effective diminue, son application à des sols de texture plus fine est plus hasardeuse. En effet, sur ces sols, le processus de redistribution est plus long, Miller et Aarstad, 1974, même si la présence de fissures peut modifier le comportement de la courbe $K(h)$.
- en outre, si la capacité de rétention d'une tranche de sol dépend de ses propriétés physiques, elle dépend également des propriétés physiques des couches situées au-dessus et au-dessous de celle-ci. Donc, dans la mesure, interviennent outre le facteur temps, la composition texturale des couches voisines et leur position respective.
- enfin, il faut noter que l'estimation de la capacité de rétention est sans doute meilleure lorsqu'elle est réalisée au champ que lorsqu'elle est réalisée au laboratoire, par mesure statique de teneur en eau à différents niveaux de pF , (avec $pF = \log_{10}(|h|)$ et h en cm), ou par des relations empiriques entre l'humidité pondérale et une composante texturale. Ce dernier point se justifie par la remarque précédente sur l'interaction des couches et par le caractère dynamique, au sens d'évolution temporelle, de la notion de capacité de rétention.

b) Le point de flétrissement permanent :

Historiquement le point de flétrissement permanent a été défini comme la teneur en eau à laquelle le tournesol flétrit de manière

définitive même s'il est ensuite placé dans une atmosphère idéale, sombre et humide. Cette notion a été ensuite appliquée à d'autres plantes.

Les auteurs admettent généralement que la teneur en eau au pF 4.2, i.e. -15 atmosphère, fournit une bonne estimation du point de flétrissement permanent.

Il faut cependant remarquer que cette notion ne dépend pas que du sol mais dépend plutôt de la combinaison sol-plante-conditions climatiques, ce qui est très important d'un point de vue agronomique.

Malgré ces remarques, les notions de capacité au champ et de point de flétrissement sont très utiles et leur prise en compte, dans la définition de la réserve utile, largement répandue.

Parfois, en zone tropicale sèche notamment, et en l'absence de mesures de la capacité au champ et du point de flétrissement, on sera amené à estimer la réserve en eau utile par une différence, sur une profondeur de référence, entre le stock maximal et le stock minimal obtenus sur une période recouvrant une saison sèche et une saison des pluies.

C1-II-B-2.2) les conditions initiales et aux limites

- Les *conditions initiales* sont, pour ce type de modèles, le volume d'eau par unité de surface présent dans le profil et, selon le degré de sophistication, des valeurs initiales de variables telles que la profondeur de la zone racinaire, du front d'humectation.

- Les *conditions à la limite supérieure* sont imposées par les variables climatiques suivantes :

- pluie journalière (mm)
- évapotranspiration potentielle journalière (mm)

Il y a ainsi une complète adéquation entre le pas de temps d'acquisition des variables d'entrée et le pas de temps de calcul du modèle. Des hypothèses sur l'intensité de la pluie, la forme diurne des taux d'évaporation ne sont donc pas nécessaires.

L'évaporation sur sol nu est calculée en multipliant l'évapotranspiration potentielle par un coefficient empirique réducteur, fonction de l'humidité du sol.

- Les conditions à la limite inférieure sont généralement décrites de façon assez grossière. Après une forte pluie, un terme de drainage pendant un pas de temps, ramène le volume d'eau dans le profil à la capacité au champ. Il n'y a plus, ensuite, de mouvements d'eau, ni à travers la frontière inférieure, ni dans le profil de sol.

Deux remarques peuvent être faites :

* Assimiler ce terme au drainage est abusif. Il représente plus physiquement une quantité d'eau qui échappe au profil par drainage et ruissellement éventuel, sans que l'on sache dissocier, autrement que par introduction d'une nouvelle fonction empirique, le premier du second.

* Des essais d'amélioration de ces conditions aux limites inférieures ont été effectuées, Stuff et Dale, 1978, De Jong et Shaykewich, 1981, Arora et al., 1987, mais ces améliorations nécessitent une connaissance accrue des propriétés hydrodynamiques du sol, ce que prétend éviter ce type de modélisation.

C1-II-B-2.3) La modélisation de la consommation en eau par les plantes

La consommation en eau par les plantes est reliée, par une fonction empirique, à la demande évaporative, à l'état hydrique de la profondeur de sol colonisée par les racines et à la phase physiologique de la culture par un facteur plante.

Ce dernier peut être une fonction de densité racinaire, De Jong et Shaykewich, 1981 ou un coefficient cultural variant dans le temps, Aase et al., 1973, Forest et Kalms, 1984, Chopart et Vauclin, 1988.

Le facteur plante est très empirique. Son estimation, pour une culture donnée, dans des conditions agroclimatiques données pose un premier problème. En effet, il dépend du climat mais également des pratiques culturales : travail du sol, densité de semis et niveaux d'apports en engrais et/ou matière organique notamment.

Cette estimation étant obtenue, son transfert à d'autres sols et conditions climatiques pose un second problème.

Il est, dans la pratique, obtenu soit par des mesures de terrain et calage, Vauclin, 1985, soit par utilisation de méthodes empiriques, Référentiel FAO, 1975, soit par extrapolation.

L'estimation de la profondeur de sol colonisée par les racines est en général issue de résultats expérimentaux souvent obtenus sous d'autres conditions climatiques et dans d'autres conditions pédologiques et de travail du sol. Le problème lié à cette estimation vient donc s'ajouter aux précédents car l'on sait que la variabilité des développements racinaires est très forte, même à l'échelle d'une parcelle agronomique.

C1-II-B-3) Conclusion sur les modèles déterministes-fonctionnels

Nous reviendrons, dans le deuxième chapitre de ce mémoire, sur l'étude plus détaillée et la validation d'un modèle de ce type, Chopart et Siband, 1988. Mais on peut déjà souligner quelques problèmes liés à l'utilisation des modèles déterministes-fonctionnels :

- Les relations considérées sont souvent empiriques. Un modèle validé sous certaines conditions agroclimatiques peut être beaucoup moins performant sous d'autres conditions
- Le drainage et le ruissellement sont assez grossièrement modélisés
- La redistribution n'est pas prise en compte, ce qui pose un problème si la pluviométrie est suffisamment faible pour que l'on soit, sur de longues périodes, en-deçà de la capacité au champ
- Ces deux derniers points seront d'autant plus sensibles que le concepteur s'intéresse à des transferts de soluté.

Malgré ces remarques, les modèles déterministes-fonctionnels sont largement développés en raison de leur simplicité et du peu de données nécessaires à leur mise en oeuvre. Ils fournissent de bonnes estimations sous quelques précautions d'utilisation.

En outre, il est intéressant de noter que ces modèles sont beaucoup moins non-linéaires que les modèles conceptuels car leurs paramètres sont des paramètres capacitifs, intégrales de paramètres de flux. Pour ces mêmes raisons, on peut penser, à priori, qu'ils seront moins sensibles à la variabilité spatiale que les modèles conceptuels.

Notons encore que les deux types de modèles déterministes présentés ici, conceptuels d'une part, fonctionnels d'autre part forment en quelque sorte deux pôles : chaque approche ayant ses avantages, ses inconvénients et ses objectifs propres.

Certains auteurs ont essayé de réaliser des ponts entre ces pôles en simplifiant des modèles conceptuels ou en compliquant des modèles fonctionnels. Dans une telle démarche, il faut, par souci de cohérence globale, définir les objectifs à atteindre. Dans le cas d'une amélioration d'un modèle fonctionnel par exemple, il ne faut introduire, à notre avis, une modification que si elle améliore le comportement du modèle sans remettre en cause les avantages liés à son utilisation.

Citons enfin deux études comparatives entre des modèles conceptuels et fonctionnels : De Jong et Hayhoe, 1984 ; Carneiro da Silva et De Jong, 1986. Elles concluent au bon accord entre les deux approches au niveau des termes du bilan hydrique sur l'ensemble du cycle cultural et par période de 30 jours.

C1-III) LES MODELES STOCHASTIQUES

C1-III-A) Position du Problème

L'utilisation des modèles déterministes précédemment décrits dans des conditions naturelles in-situ pose plusieurs problèmes :

- Un sol n'est jamais uniforme et homogène : ses propriétés varient d'un point à un autre. Cela impose donc une description statistique de ses propriétés.
- L'aspect statistique n'implique pas nécessairement que les paramètres et variables d'entrée soient aléatoirement distribués dans l'espace. Ils peuvent présenter une structure spatiale horizontale et/ou verticale. Cela impose une description stochastique.
- Le caractère aléatoire des conditions aux limites naturelles (pluie, évaporation) renforce cet aspect stochastique.

Ainsi, plusieurs études, El Kadi et Brutsaert, 1985, Vauclin et al., 1983, ont montré que l'approche déterministe est souvent inadéquate pour modéliser les transferts hydriques in-situ. En effet, Vauclin et al., 1983, montrent que la moyenne spatiale des solutions est différente de la solution moyenne qui serait obtenue en considérant des paramètres moyens. Ces résultats sont en plein accord avec ceux de El Kadi, 1987.

Dans ce cadre, et pour une parcelle donnée, l'incertitude sur les termes du bilan hydrique est issue de trois types d'incertitudes :

- une première incertitude au niveau de la connaissance que l'on a du système étudié. Cette dernière peut être améliorée par un accroissement du nombre de mesures.
- une deuxième incertitude, liée à la variabilité intrinsèque de la parcelle qui est une propriété incontournable du système étudié.

- une troisième incertitude liée à l'utilisation du modèle et à son aptitude à modéliser les processus physiques mis en jeu.

Si, pour appréhender la variabilité intrinsèque de la parcelle, il est nécessaire d'effectuer des observations, une augmentation de leur nombre affinera notre connaissance certes, mais ne réduira en rien la variabilité.

Dans ce contexte, quelques modèles stochastiques ont été développés. La démarche utilisée par les auteurs est souvent la suivante : à partir d'une approche déterministe, l'auteur introduit la notion de variabilité au niveau des paramètres et/ou des variables d'entrée. Il en déduit des informations statistiques sur les variables de sortie.

Ces modèles stochastiques permettent :

- de représenter de façon plus réaliste le comportement de la parcelle
- de quantifier les erreurs que l'on fait lorsque l'on néglige la variabilité
- d'étudier la sensibilité du modèle et de définir ainsi les paramètres les plus influents dans la simulation
- de tester la pertinence du concept de milieu poreux uniforme équivalent par comparaison de la moyenne spatiale des solutions avec une solution déterministe "moyenne".

Les méthodes employées pour analyser la variabilité dépendent du problème considéré, ainsi que des objectifs de l'étude. Elles se différencient également par l'implication informatique nécessaire à leur utilisation. On peut considérer qu'elles se dissocient en deux principaux groupes :

- les méthodes qui estiment les deux premiers moments
- les méthodes qui estiment la fonction densité de probabilité

Dans ces deux approches, les paramètres de la modélisation sont considérés comme des variables aléatoires auxquelles sont associées, en chaque point du domaine d'étude, une fonction densité de probabilité. La dépendance spatiale entre valeurs voisines peut être prise en compte par une fonction d'autocorrélation définie sur le domaine. La résolution stochastique du modèle permet d'appréhender les variables de sortie en termes statistiques.

C1-III-B) Estimation des Deux Premiers Moments

La première approche permet une estimation de la moyenne et de la variance des variables d'intérêt. Elle sous-entend que moyenne et variance définissent de manière suffisante la distribution : ce qui est le cas notamment pour une loi normale.

Parmi ces méthodes, on peut citer :

- la méthode des perturbations, Dagan, 1982, qui donne des équations analytiques pour la moyenne et la variance des composantes aléatoires.
- la méthode des développements en série de Taylor autour de la valeur moyenne, Dettinger et Wilson, 1981.

Ces méthodes voisines ne demandent pas des développements informatiques trop importants. Mais elles ne sont applicables que si la variance des paramètres d'entrée est assez faible. En outre, elles ne permettent pas de vérifier l'hypothèse que les deux premiers moments suffisent à définir la loi de distribution.

C1-III-C) Estimation de la Fonction Densité de Probabilité

La seconde approche a pour but l'estimation de la fonction de densité de probabilité. On utilise alors la connaissance complète des fonctions de distribution des paramètres d'entrée pour définir complètement la fonction de densité de probabilité des sorties. Dans cette approche, on distingue les méthodes analytiques des méthodes de Monte Carlo.

C1-III-C-1) Les méthodes analytiques

Les méthodes de distribution dérivée donnent une expression analytique explicite de la fonction de distribution des variables d'intérêt, Wood,1976, Eagleson,1978, Cordova et Bras,1981, Maller et Sharma,1981.

Ces méthodes sont applicables sur des systèmes simples dans le cas de lois probabilistes simples. Leur degré de complexité augmente fortement si d'autres cas d'utilisation sont envisagés, ce qui réduit considérablement le développement de ces méthodes.

Des méthodes utilisant l'analyse spectrale ont également été développées, Gutjahr et al.,1978, Gutjahr et Gelhar,1981, Yeh et al.,1985,a,b,c.

Elles s'appliquent dans le cas de milieux infinis, représentent le domaine de manière continue et ne demandent en général pas de temps de calcul trop longs. Mais, elles font appel à la méthode des perturbations et, de ce fait, ne sont pas applicables dans les cas où la variance est forte. En outre, les domaines d'étude rencontrés en hydrologie et sciences du sol sont, bien évidemment, finis, Gutjahr et Gelhar,1981, en particulier dans leur extension verticale.

C1-III-C-2) Les méthodes de Monte Carlo

Ces méthodes sont applicables sur des domaines finis dans des cas où les variances peuvent être élevées et où la formulation analytique peut être compliquée. Mais ce sont des méthodes très lourdes à mettre en oeuvre d'un point de vue informatique.

Dans une approche de Monte Carlo, le problème traité est résolu de manière répétitive sur le domaine étudié. Ce domaine est discrétisé en un certain nombre de blocs de taille égale.

En chaque bloc, une valeur du paramètre aléatoire est tirée dans la loi de distribution représentant la variabilité. L'ensemble de ces valeurs, définies sur chaque bloc, forme une réalisation du champ aléatoire considéré comme entrée du modèle. Celui-ci est ensuite utilisé, de manière déterministe, sur chacun des blocs. Les variables de sortie sont analysées spatialement sur une réalisation. Leurs statistiques d'ensemble sont définies par une analyse sur un grand nombre de réalisations. On obtient ainsi une estimation des propriétés statistiques des variables de sortie.

Cette approche a été largement développée dans le domaine de l'hydrologie et des sciences du sol sur des simulations mono-dimensionnelles, Smith et Freeze,1979,a, Freeze,1980, Luxmoore et Sharma,1980, El Kadi,1987, bi-dimensionnelles, Smith et Freeze,1979,b, ou tri-dimensionnelles, Sharma et al.,1987.

C1-III-D) Conclusion sur les Modèles Stochastiques

A ce stade de notre exposé, et compte-tenu de la classification des modèles telle que nous l'avons considérée précédemment, il faut remarquer que, dans la littérature, on trouve peu d'exemples de modèles stochastiques-conceptuels tels que nous les avons définis. On peut, malgré tout citer El Kadi,1987 et Sharma et al.,1987 qui résolvent numériquement l'équation de Richards, (1-4), dans un contexte stochastique. Cette approche a l'avantage, nous l'avons vu, de limiter les hypothèses de base

de la simulation ainsi que de fournir les profils hydriques et leur variabilité plutôt que des volumes (eau infiltrée, eau évaporée) et leur variabilité. Mais, elle est difficile à mettre en oeuvre. De plus, il n'existe pas, à notre connaissance, de modèle de ce type incorporant un terme d'extraction racinaire.

La plupart des références citées dans le texte utilisent, en fait, comme fondements de la modélisation stochastique, des modèles déterministes-conceptuels-analytiques ou quasi-analytiques, Vauclin et al.,1983, Maller et Sharma,1981, Cordova et Bras,1981, ou encore des modèles de type intermédiaire, Luxmoore et Sharma,1980, Clapp et al.,1983. Cela s'explique par le désir de simplifier le modèle déterministe de base lorsqu'on l'utilise dans un contexte stochastique car la prise en compte de la variabilité spatiale introduit un degré de difficulté supplémentaire. De plus, si la variabilité spatiale est prise en compte, les écoulements latéraux et les interactions au niveau des transferts entre deux blocs voisins sont rarement considérés.

Enfin, beaucoup de ces modèles caractérisent la variabilité du domaine d'étude par la mise en échelle des propriétés hydrodynamiques du sol, Vauclin et al.,1983, Luxmoore et Sharma,1980, Sharma et al.,1987. La variable aléatoire utilisée comme entrée du modèle stochastique est alors le facteur d'échelle.

Notons encore qu'Addiscott, Addiscott et al.,1985, dans sa synthèse sur les modèles de transferts d'eau et de solutés dans les sols, cite les travaux de Wagenet et Rao,1983 qui trouvent que la présence des racines de la culture tend à limiter, au niveau des transferts de solutés, l'impact de la variabilité des propriétés hydrodynamiques du sol. L'auteur conclut sur l'importance du résultat, s'il était confirmé. Pour notre part, nous nous intéresserons uniquement à la variabilité des sorties de notre modèle, en termes de transferts d'eau (consommations, pertes), comparée à la variabilité des entrées en présence d'une culture.

En conclusion, nous pouvons noter qu'il n'existe pratiquement pas, dans la littérature, de modèles stochastiques-fonctionnels décrivant les bilans en eau ou solutés. On peut malgré tout citer Jury et al., 1982 qui ne traite pas des bilans hydriques sous culture mais des transferts couplés eau/soluté en conditions naturelles sur sol nu, par utilisation d'une fonction de transfert. L'approche menée dans ce mémoire est donc originale en ce sens qu'elle développe un modèle stochastique-fonctionnel de bilan hydrique.

Nos objectifs seront :

- l'étude de la sensibilité du modèle déterministe à la variabilité de paramètres d'entrée tels que la réserve en eau utile, la vitesse de croissance journalière et le vecteur des coefficients culturaux pentadaires
- la comparaison, au niveau d'une parcelle agronomique, des résultats d'une simulation déterministe et des résultats d'une simulation stochastique représentant de façon plus réaliste le comportement de cette parcelle.

A l'issue de cette étude, nous serons à même de répondre aux questions suivantes :

- une simulation stochastique du bilan hydrique est-elle nécessaire pour modéliser les principales composantes du bilan à l'échelle d'une parcelle ?
- la prise en compte de la structure spatiale des variables d'entrée est-elle souhaitable ?
- une simulation déterministe fonctionnelle peut-elle suffire ?
 - * si oui, sous quelles précautions et dans quelles conditions de variabilité ?
 - * si non, quel est, ou quels sont, le(s) paramètre(s) à considérer comme variables à l'échelle de la parcelle pour améliorer l'aptitude du modèle à représenter la réalité ?

CHAPITRE 2

MODELISATION DETERMINISTE DE TYPE FONCTIONNEL

Nous nous proposons maintenant d'étudier de manière plus approfondie le modèle déterministe fonctionnel que nous avons utilisé comme base de notre étude.

Dans un premier temps, nous rappellerons son principe de fonctionnement, ses besoins, ses contraintes d'utilisation et le type d'informations qu'il fournit.

Dans un second temps, nous présenterons son application sur deux sites, Bouaké, COTE D'IVOIRE, et Thyssé-Kaymor, SENEGAL. Ces deux exemples d'utilisation nous permettront de confirmer, par comparaison avec des observations, la pertinence du modèle déterministe et de présenter le contexte dans lequel notre analyse stochastique sera développée.

C2-1) PRESENTATION DU MODELE DETERMINISTE

Nous avons utilisé, comme modèle de base, un modèle déterministe-fonctionnel, initialement développé à l'IRAT, par Franquin et Forest, 1977 et modifié par Chopart pour prendre en compte l'évolution du système racinaire.

Nous nous sommes plus directement inspirés d'une version du modèle, incorporée dans le logiciel PROBE, développé par Chopart et Siband, 1988. Ce modèle et certaines de ses différentes versions dérivées sont utilisés à l'IRAT pour la prédiction des consommations en eau des cultures et le zonage agro-climatique.

C2-I-A) Principes de Base du Modèle

C2-I-A-1) Description de la tranche de sol

Dans ce modèle, une tranche verticale de sol est assimilée à trois réservoirs, schéma 2-1 :

- un premier réservoir, variable dans le temps, attaché à la zone racinaire, défini par le *front racinaire*, $FR(J)$ (cm), et la *Réserve en eau utile*, lame maximum d'eau utilisable par la plante par unité de profondeur du sol, RU (mm/cm).

Sa capacité maximale au jour J est :

$$SR_{max}(J) = FR(J) * RU$$

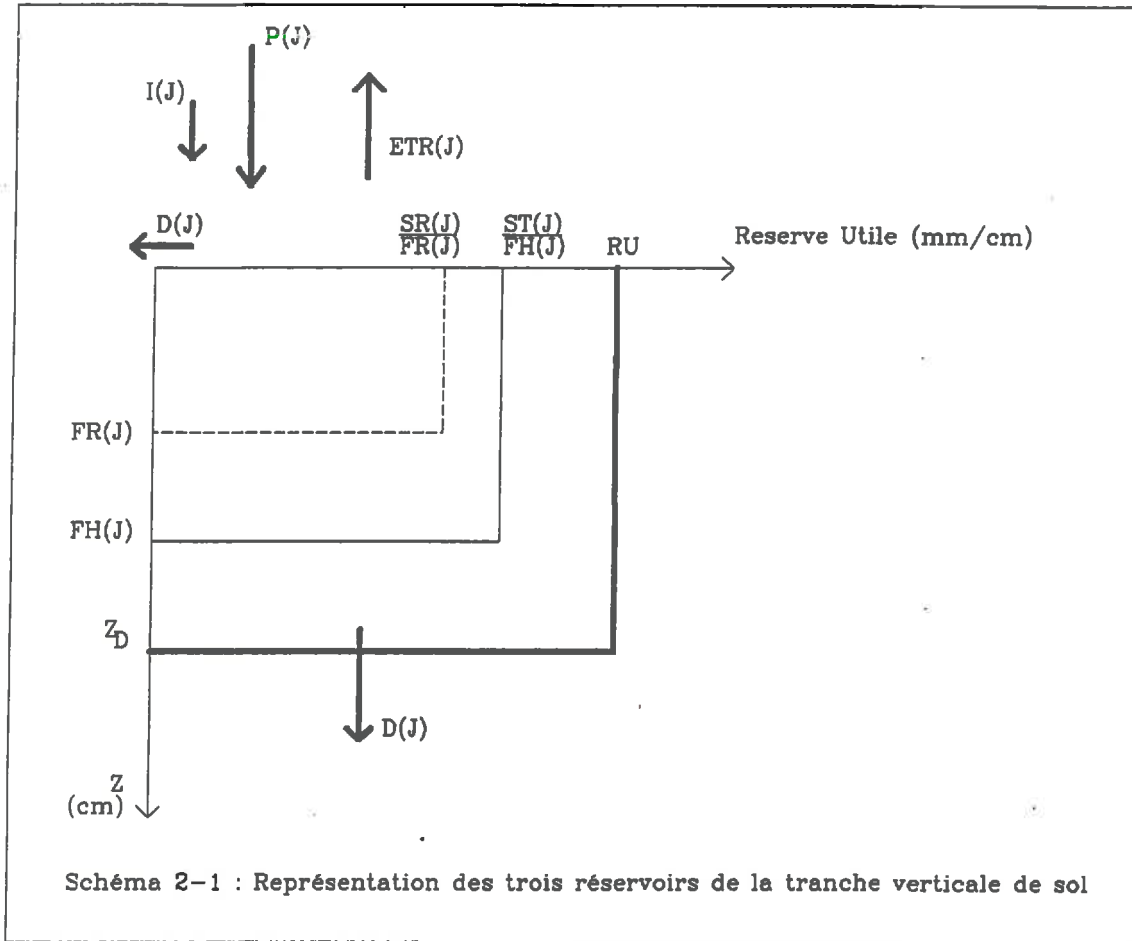
- un deuxième réservoir, variable dans le temps, attaché à la zone humide, défini par le *front d'humectation*, $FH(J)$ (cm), et dont la capacité maximale au jour J est :

$$ST_{max}(J) = FH(J) * RU$$

- un troisième réservoir fixe, défini par la *Cote de drainage*, z_D (cm), qui est la limite inférieure de la tranche de sol.

Le *stock maximum*, STM (mm), de ce réservoir est donc :

$$STM = z_D * RU$$



C2-I-A-2) Application de l'équation de conservation de la masse

Dans le cadre des hypothèses liées à l'utilisation de ce type de modèle : écoulement isotherme et vertical d'eau pure, supposée incompressible, dans une matrice poreuse, rigide et indéformable, l'équation de conservation de la masse, pour le jour J, entre la surface du sol et les profondeurs FR(J) et FH(J) s'écrit respectivement :

$$SR(J+1) = SR(J) + P(J) + I(J) + [HH(J) * (FR(J+1) - FR(J))] - DR(J) - ETR(J) \quad (2-1)$$

et

$$ST(J+1) = ST(J) + P(J) + I(J) - D(J) - ETR(J) \quad (2-2)$$

où :

- $SR(J)$ et $ST(J)$ sont les stocks en eau utilisable contenus, en début de jour J , dans la zone racinaire et dans l'ensemble du profil humecté.

Ils sont respectivement tels que :

$$SR(J) < SR_{\max}(J) \text{ et } ST(J) < ST_{\max}(J)$$

- $SR(J+1)$ et $ST(J+1)$ sont les stocks en fin de jour J et donc en début de jour $J+1$

- $DR(J)$ et $D(J)$ sont les lames d'eau perdues par les réservoirs :

* lames ruisselées en surface

* lames écoulées, durant le jour J , à travers les sections $FR(J)$ et $FH(J)$ respectivement.

Elles sont estimées par :

$$DR(J) = \text{Max} (0. ; SR(J)+P(J)+I(J)-SR_{\max}(J)) \quad (2-3)$$

et

$$D(J) = \text{Max} (0. ; ST(J)+P(J)+I(J)-ST_{\max}(J)) \quad (2-4)$$

Notons que, dans la réalité, les lames d'eau, $DR(J)$ et $D(J)$, peuvent être des grandeurs négatives dans le cas de remontées capillaires. La méthode de calcul utilisée ici en interdit la modélisation.

- $P(J)$ et $I(J)$ sont la pluie et l'irrigation du jour J

- $ETR(J)$ est l'évapotranspiration réelle du jour J

- $HH(J)*(FR(J+1)-FR(J))$ est la quantité d'eau gagnée par la progression du front racinaire.

- $HH(J) = \frac{ST(J)}{FH(J)}$ est le taux de remplissage en eau du réservoir humide.

C2-I-A-3) Calcul de l'évapotranspiration réelle : ETR

L'évapotranspiration réelle, qui est la force motrice des transferts, est modélisée selon l'approche empirique d'Eagleman, 1971, modifiée par Forest, Forest et Reyniers, 1985, 1986, afin de relier l'ETR à l'évapotranspiration maximale de la culture sans contrainte hydrique, ETM, et à un taux d'humectation HR qui représente le niveau d'humidité du réservoir racinaire.

Soit :

$$ETR(J) = f (ETM(J) , HR(J)) \quad (2-5)$$

- HR(J) est défini par :

$$HR(J) = \frac{SR(J) + P(J) + I(J) - DR(J)}{SR_{max}(J)} \quad (2-6)$$

on constate que : $0. < HR(J) < 1.$

- ETM(J) est définie par :

$$ETM(J) = \text{Max}[K_c(J); K_p(J)] * ETP(J) \quad (2-7)$$

où :

* $K_c(J)$ est le coefficient cultural du jour J, introduit en première partie.

* $K_p(J)$ est un coefficient prenant en compte l'évaporation du sol nu. Empiriquement, il est égal à 1 le jour de la pluie et décroît ensuite pour devenir nul après quelques jours afin de tenir compte de l'effet d'assèchement du sol.

L'introduction du coefficient $K_p(J)$ permet donc de mieux modéliser l'évaporation sol nu en début de cycle, quand $K_c(J)$ est faible. Ce coefficient n'est considéré que si le reliquat de la dernière pluie, RP(J), est suffisamment important, i.e. :

$$RP(J) > K_p(J) * ETP(J)$$

C'est à dire si le sol est suffisamment humide en surface.

RP(J) est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{RP(J)} &= \text{P(J)} + \text{I(J)} : \text{le jour de la pluie et/ou de l'irrigation} \\ \text{RP(J)} &= \text{RP(J-1)} - \text{ETR(J-1)} : \text{sinon} \end{aligned} \quad (2-8)$$

Dans l'équation (2-7), ETP(J) est l'évapotranspiration potentielle qui caractérise la demande climatique. Dans la pratique, ETP est soit l'ETP Penman, soit l'EV_{bac}. A chacun de ces référentiels est associé, pour une culture et une situation agroclimatique données, un vecteur temporel de coefficients culturaux, K_c, estimés, en général, par pentade.

Nous reviendrons, C2-I-B, sur l'étude plus détaillée de la fonction d'Eagleman.

C2-I-A-4) Calcul de la progression des fronts

i) Le front d'humectation en fin de jour J, FH(J+1), est calculé de la façon suivante :

$$\text{FH(J+1)} = [\text{ST(J)} + \text{P(J)} + \text{I(J)}] / \text{RU} \quad (2-9)$$

- si FH(J+1) < FH(J) alors FH(J+1) = FH(J)

- si FH(J+1) > z_D alors :

$$\text{D(J)} = [\text{FH(J+1)} - \text{z}_D] * \text{RU} \quad (2-10)$$

et

$$\text{FH(J+1)} = \text{z}_D$$

On constate que ce front ne peut ni remonter, ni descendre sous la cote de drainage z_D. Si FH(J+1), calculé par (2-9), est supérieur à z_D, on fixe FH(J+1) à z_D, l'excès d'eau est considéré comme perdu par le réservoir sol. C'est le terme de ruissellement, et/ou drainage à travers la cote z_D.

ii) Le front racinaire en fin de jour J, FR(J+1), progresse de la croissance racinaire journalière, CJ, si la durée de croissance n'est pas achevée. On impose, en outre, que FR(J) soit inférieur ou égal à FH(J) pour tout J.

Soit :

$$FR(J+1) = FR(J) + CJ \quad (2-11)$$

et :

- si $FR(J+1) > FH(J+1)$ alors $FR(J+1) = FH(J+1)$

- si $J > LS$ alors $FR(J+1) = FR(J)$

C2-I-A-5) Mise en oeuvre du modèle

Pour modéliser le bilan hydrique sur l'ensemble du cycle cultural, l'utilisateur doit définir :

- les caractéristiques du milieu :

- * réserve en eau utile du sol : RU (mm/cm)
- * cote de drainage : z_D (cm)
- * fonction empirique des coefficients d'évaporation sol nu

- les caractéristiques de la culture :

- * vitesse de croissance racinaire journalière : CJ (cm/j)
 - * durée de la croissance racinaire : LS (j)
 - * coefficients culturaux : K_C (JAS)
- K_C est exprimé en fonction du nombre de Jours Après Semis (JAS)

- les conditions initiales :

- * front d'humectation : $FH(1)$ (cm)
- * front racinaire : $FR(1)$ (cm)
- * stock d'eau présent dans le sol : $ST(1)$ (mm)

d'où l'on déduit le stock racinaire initial : $SR(1) = ST(1) * \frac{FR(1)}{FH(1)}$

Le calcul est ensuite itératif, pour définir les variables au jour J , on prend en compte :

- la situation en fin de jour $J-1$
- les caractéristiques du milieu et de la culture applicables au jour J

- les conditions à la limite supérieure : $P(J), I(J), ETP(J)$

On admet alors que les événements se succèdent dans l'ordre suivant :

- Pluie et éventuellement Drainage
- Evapotranspiration
- Croissance racinaire

Dans l'algorithme, on calcule successivement :

- le front d'humectation en fin de jour J : $FH(J+1)$, (2-9)
- le terme de drainage éventuel à travers la cote z_D : $D(J)$, (2-10)
- la lame d'eau éventuelle à travers $FR(J)$: $DR(J)$, (2-3)
- le taux d'humectation du réservoir racinaire : $HR(J)$, (2-6)
- l'ETM du jour : $ETM(J)$, (2-7)
- l'ETR du jour : $ETR(J)$, (2-5)
- le front racinaire en fin de jour J : $FR(J+1)$, (2-11)
- les stocks en eau disponible en fin de jour J : $SR(J+1)$ et $ST(J+1)$,
(2-1), (2-2)

C2-I-B) Etude Détaillée de la Fonction d'Eagleman

On a vu, C2-I-A-3, que la modélisation de l'évapotranspiration réelle, force motrice des transferts en eau, est effectuée par l'utilisation de la fonction modifiée d'Eagleman, 1971.

Le rôle joué par cette formulation dans le modèle rend nécessaire une étude détaillée de cette fonction.

C2-I-B-1) Présentation et étude de la fonction d'Eagleman

Par l'intermédiaire de cette fonction, l'ETR est donc reliée :

- à l'ETM, évapotranspiration maximum de la culture sous les conditions climatiques considérées et dans le cas où l'eau n'est pas un facteur limitant
- à HR, taux d'humectation du réservoir racinaire ($0 < HR < 1$.)

soit :

$$ETR = f(ETM, HR) \quad (2-12)$$

ETR est, dans cette formulation, un polynôme du troisième degré en HR et du deuxième degré en ETM :

- en regroupant les termes en HR, l'équation (2-12) s'écrit :

$$ETR = A(ETM) + B(ETM)*HR + C(ETM)*HR^2 + D(ETM)*HR^3 \quad (2-13)$$

- en regroupant les termes en ETM, l'équation (2-12) s'écrit :

$$ETR = A'(HR) + B'(HR)*ETM + C'(HR)*ETM^2 \quad (2-14)$$

avec :

$$\begin{aligned} A(ETM) &= .732 - .05*ETM \\ B(ETM) &= 4.97*ETM - .661*ETM^2 \\ C(ETM) &= - [8.57*ETM - 1.56*ETM^2] \\ D(ETM) &= 4.35*ETM - .88*ETM^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} A'(HR) &= .732 \\ B'(HR) &= -.05 + 4.97*HR - 8.57*HR^2 + 4.35*HR^3 \\ C'(HR) &= -.661*HR + 1.56*HR^2 - .88*HR^3 \end{aligned}$$

Les coefficients de ce polynôme ont été obtenus par Eagleman en effectuant différentes régressions entre les variables d'intérêt :

$$\begin{array}{ll} \text{ETR/ETM} = f_1(\text{HR}) & \text{d'une part} \\ \text{et} & \\ V = f_2(\text{ETM}) & \text{d'autre part} \end{array}$$

où : V est égal à A(ETM), B(ETM), C(ETM) et D(ETM) successivement.

Ces régressions ont été effectuées en réunissant plusieurs jeux de données expérimentales issues de la littérature. Ils correspondaient à des mesures climatiques et hydriques, en conditions naturelles, sur différentes cultures et sous différents climats : une prairie dans l'Ohio, de la luzerne en Arizona, du maïs et du soja.

Au niveau expérimental, l'ETM était comprise entre 2. et 9. mm/j, l'utilisation de la fonction d'Eagleman en dehors de cette fourchette correspond donc à une extrapolation de la fonction obtenue empiriquement, mais cela ne semble pas poser de problèmes dans des conditions normales d'utilisation.

En fait, dans le modèle, la fonction utilisée est la fonction d'Eagleman tronquée.

En effet, la réalité physique impose que :

$$0. < \text{ETR} = f(\text{ETM}, \text{HR}) < \text{ETM}$$

On trouvera, figure 2-1 et figure 2-2, les courbes $\text{ETR} = f(\text{HR})$ et $\text{ETR} = f(\text{ETM})$ à différents niveaux d'ETM et de HR respectivement.

Ces figures appellent quelques commentaires :

- lorsque $\text{HR} = 1.$, l'ETR est toujours très proche de l'ETM. L'eau n'est pas un facteur limitant, la différence entre la courbe pour $\text{HR} = 1.$ et la première bissectrice n'est pas importante, figure 2-2

- lorsque $\text{HR} < .5$, et pour des ETM forts, l'ETR est une fonction décroissante de l'ETM, figure 2-2. Ceci s'explique par l'apparition, à la surface du sol, d'une couche sèche qui limite l'évapotranspiration dans le cas d'une forte demande évaporative

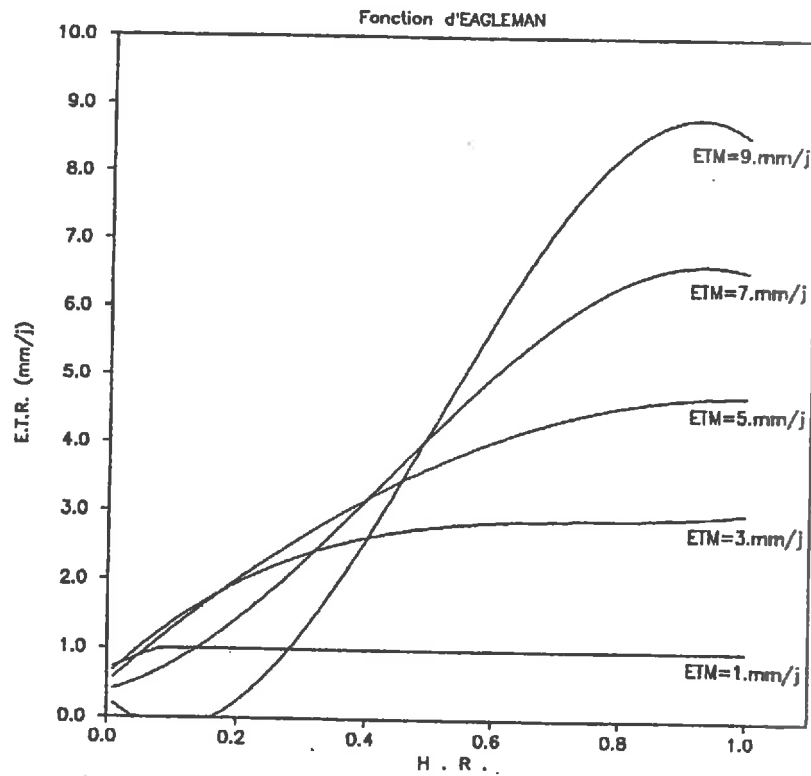


figure 2-1 : $ETR = f(HR)$ à différents niveaux de ETM

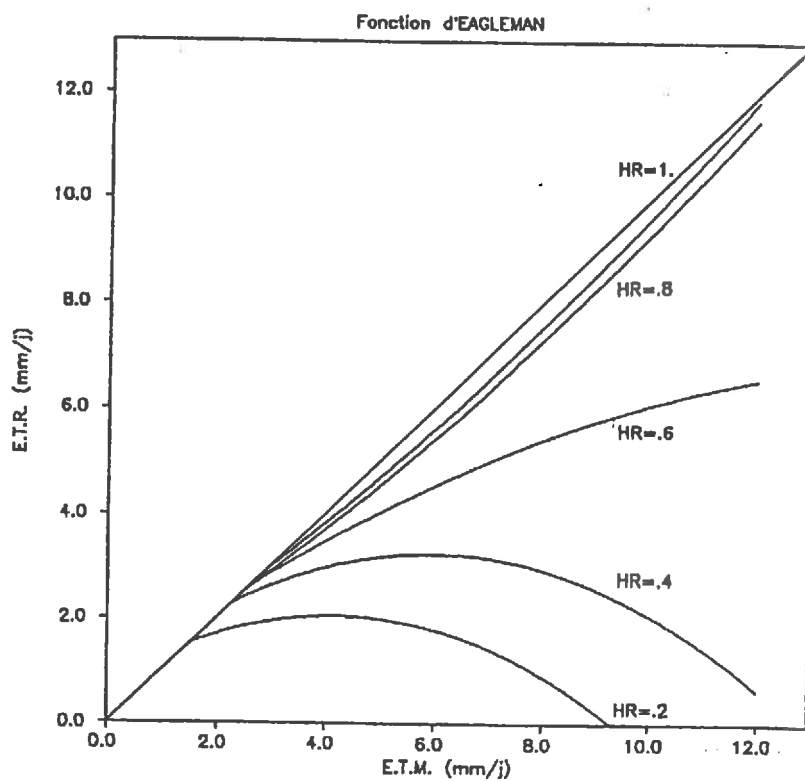


figure 2-2 : $ETR = f(ETM)$ à différents niveaux de HR

- enfin, les ruptures de pente sur ces différentes courbes font apparaître l'influence des contraintes physiques imposées à la fonction d'Eagleman, figure 2-1 et figure 2-2.

C2-I-B-2) Analyse de sensibilité de la fonction d'Eagleman

Il nous semble important, compte-tenu des objectifs de ce travail, de développer ici une analyse de sensibilité de la fonction d'Eagleman.

Ces objectifs sont, entre autres rappelons-le, l'étude du comportement du modèle, sur le cycle et par période, dans le cas d'entrées aléatoires au niveau des propriétés du sol et de la végétation. Ces entrées aléatoires peuvent être interprétées, nous le savons, comme une représentation de la variabilité à l'échelle de la parcelle mais également comme une incertitude sur la valeur d'un paramètre ou d'une variable d'entrée du modèle.

L'analyse ci-dessous nous permettra de mieux appréhender la sensibilité de la fonction d'Eagleman et fournira des éléments indicateurs pour l'explication des résultats des simulations stochastiques. Elle permettra de plus de déterminer les paramètres et variables les plus importants au niveau de l'incertitude créée sur l'ETR par une incertitude sur ces entrées.

Nous présenterons nos résultats en traçant les courbes des erreurs relatives sur l'ETR en fonction des erreurs relatives sur la RU, ou sur le K_C , à différents niveaux de HR, ou d'ETM respectivement.

- Par définition on a :

$$ETM = K_C * ETP$$

donc, en supposant ETP constant :

$$ER(ETM) = ER(K_C) * ETP$$

où les erreurs relatives sur ETM et sur K_C sont définies par :

$$ER(ETM) = \frac{ETM_1 - ETM_0}{ETM_0} \quad \text{et} \quad ER(K_c) = \frac{K_{c1} - K_{c0}}{K_{c0}}$$

- de plus :

$$HR = ALPHA * RU^{-1}$$

où ALPHA est donné par l'équation(2-6)

on en déduit :

$$ER(HR) = - \frac{1}{1 + ER(RU)} * ER(RU)$$

où les erreurs relatives sur HR et sur RU sont définies par :

$$ER(HR) = \frac{HR_1 - HR_0}{HR_0} \quad \text{et} \quad ER(RU) = \frac{RU_1 - RU_0}{RU_0}$$

- La figure 2-3 donne, pour un niveau d'ETM de 6. mm/j et pour des erreurs relatives sur RU de $\pm 20\%$ et $\pm 40\%$, l'évolution de l'erreur relative sur l'ETR en fonction du niveau d'humidité HR :

soit :

$$ER(ETR) = g(ETM_0, HR, ER(RU))$$

où :

$$ER(ETR) = \frac{ETR_1 - ETR_0}{ETR_0}$$

avec : $ETR_0 = f(ETM_0, HR_0)$ et $ETR_1 = f(ETM_0, HR_1)$

Les courbes se lisent de la manière suivante :

Au point A, RU_0 est tel que $HR_0 = .4$. Si, toute chose étant égale par ailleurs, l'erreur relative sur RU est de -20% , l'erreur relative sur ETR sera d'environ $+20\%$. Les relations introduites précédemment donnent une erreur relative associée sur HR de $+25\%$.

- La figure 2-4 donne l'évolution de l'erreur relative sur ETR pour différents niveaux d'ETM et pour une erreur relative sur la RU de $\pm 30\%$.

- Les figures 2-5 et 2-6 correspondent à l'étude sur l'influence des erreurs relatives sur le K_c :

soit les courbes :

$$ER(ETR) = h(ETM, HR, ER(K_c))$$

Notons que cette analyse est effectuée sur la fonction d'Eagleman tronquée par les seuils physiques, i.e. : $0. < ETR=f(ETM, HR) < ETM$

L'étude des figures 2-3 à 2-6 appelle les commentaires suivants :

- De part la non-linéarité de la fonction, plus ou moins forte selon l'état hydrique du réservoir racinaire et la demande évaporative, on constate qu'une surestimation ou une sous-estimation des paramètres RU ou K_c n'ont pas les mêmes effets.

- Contrairement à l'étude de la variance au premier ordre, où la méthode utilisée force la symétrie et la linéarité entre le coefficient de variation de l'ETR et le coefficient de variation de la RU, ou celui du K_c , on constate ici qu'il n'y a pas proportionnalité. Toute chose étant égale par ailleurs, si l'erreur relative sur la RU ou le K_c est double, l'erreur relative sur l'ETR ne sera en général pas double. Elle sera plus ou moins grande suivant l'état hydrique et la demande évaporative, figure 2-3 et figure 2-5.

- En outre, et de toute évidence, on remarque que la fonction d'Eagleman est plus sensible à la variable HR, qu'à la variable ETM. Notons que l'étude sur la variable sol HR a ici été effectuée sur le paramètre RU, mais qu'une étude similaire aurait pu être menée sur le paramètre de vitesse de croissance journalière CJ ou sur la variable FR du front racinaire. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4 sur les résultats des simulations stochastiques.

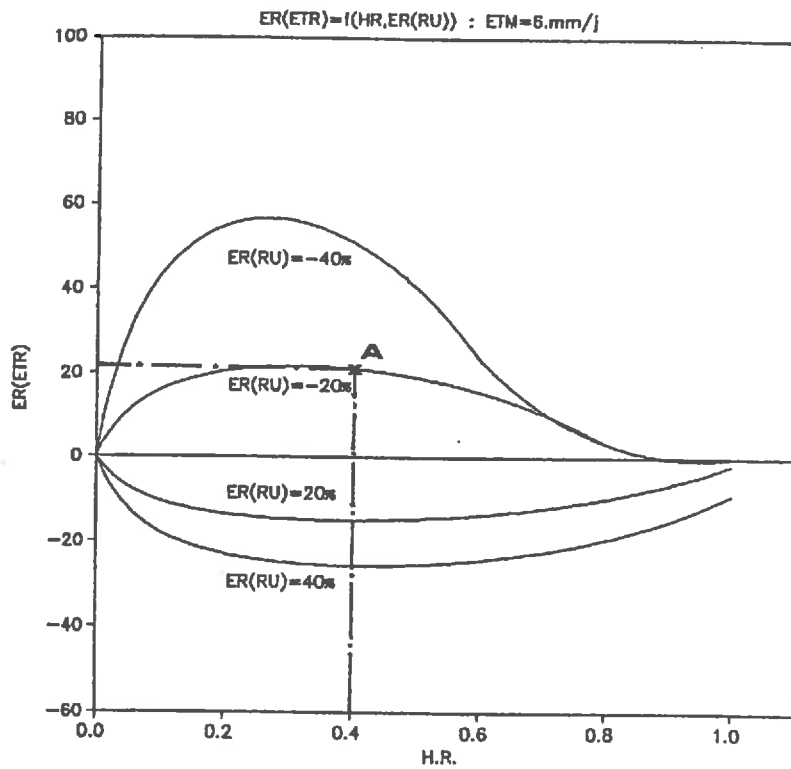


figure 2-3 : Erreur relative sur ETR en fonction de HR avec
 $ETM = 6. mm/j$ et $ER(RU) = \pm 20.$ et $\pm 40. \%$

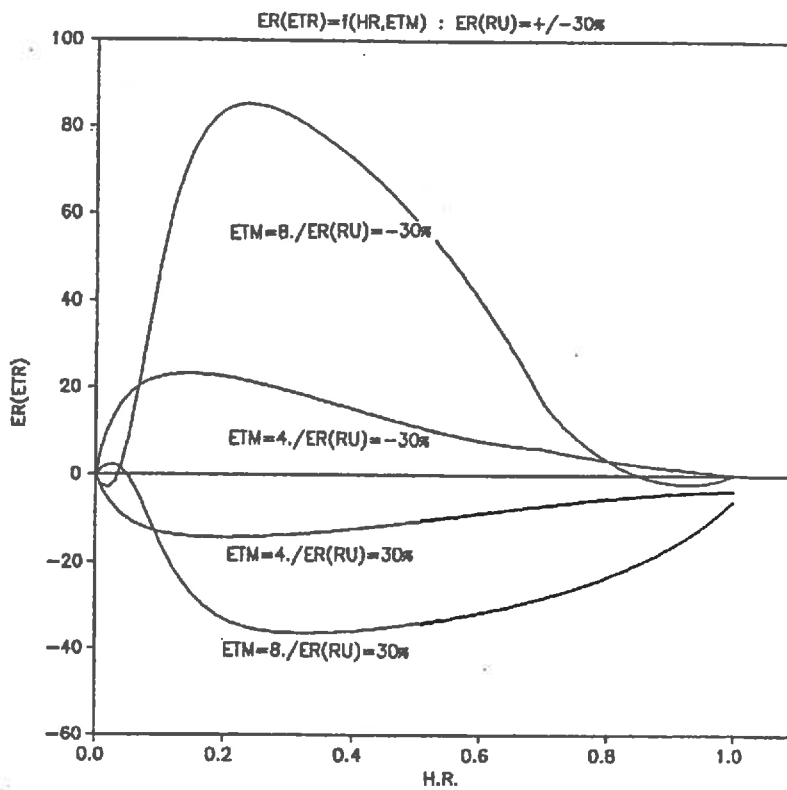


figure 2-4 : Erreur relative sur ETR en fonction de HR avec
 $ER(RU) = \pm 30. \%$ et $ETM = 4.$ et $8. mm/j$

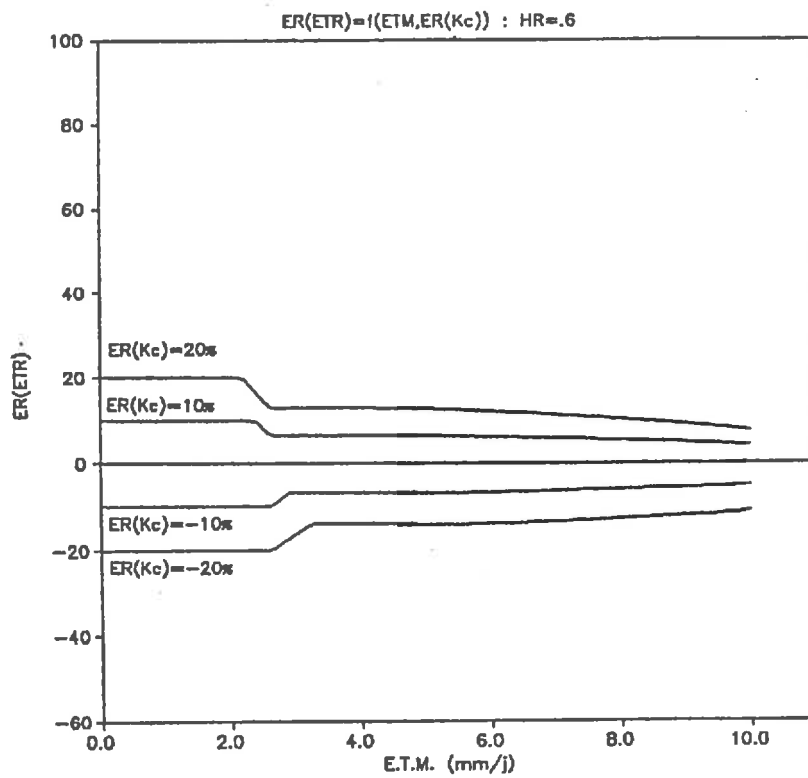


figure 2-5 : Erreur relative sur ETR en fonction de ETM avec
 $HR = .6$ et $ER(K_c) = \pm 10\%$ et $\pm 20\%$

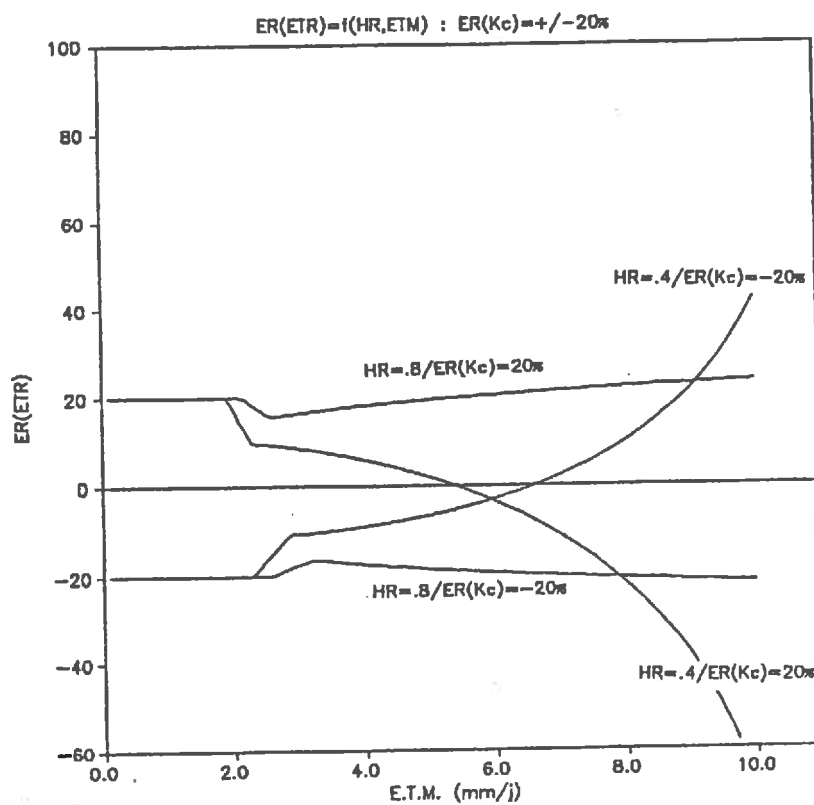


figure 2-6 : Erreur relative sur ETR en fonction de ETM avec
 $ER(K_c) = \pm 20\%$ et $HR = .4$ et $.8$

- Enfin, il faut constater que les remarques précédentes sont plus ou moins pondérées suivant la demande évaporative et l'état hydrique du réservoir racinaire.

Cette étude serait incomplète sans une remarque sur son caractère statique. Si les résultats obtenus ici sont indicateurs du comportement de la fonction d'Eagleman, ils sont incomplets. En effet, l'évolution et l'interaction dynamiques, dans le temps, au cours du cycle cultural, entre les différentes variables viennent pondérer les commentaires issus de cette étude comme nous le montrerons dans le quatrième chapitre.

C2-II) VALIDATION DETERMINISTE

Nous nous proposons maintenant d'apprécier la validité du modèle déterministe pour deux sites expérimentaux, Bouaké en COTE D'IVOIRE et Thyssé-Kaymor au SENEGAL.

Nous avons, sur ces deux sites, utilisé des mesures de terrain pour simuler le bilan hydrique de différentes cultures, puis nous avons comparé les résultats des simulations aux consommations expérimentales.

Les simulations sur le site de Bouaké nous serviront de contexte réel pour les simulations stochastiques que nous présenterons dans le quatrième chapitre.

C2-II-A) Simulation Déterministe sur le Site de Thyssé-Kaymor

C2-II-A-1) Description du cadre général de l'étude

Dans le cadre d'une Action Thématique Programmée, (ATP), mise en place par le CNRS-PIREN, l'ORSTOM, l'INRA et le CIRAD, et portant sur "l'influence des couvertures pédologiques et végétales sur les bilans hydriques et minéraux du sol", une action de recherche présentée par l'IRAT a été lancée depuis 1986 sur la communauté rurale de Thyssé-Kaymor, dans le centre-sud du Sénégal.

Cette action se poursuit en relations avec l'ISRA, Institut Sénégalais de Recherches Agricoles et l'IMG, Institut de Mécanique de Grenoble.

Les objectifs de l'étude sont :

- d'une part, au niveau méthodologique : l'évaluation d'une méthode expérimentale d'estimation du bilan hydrique en cas de ruissellement et la faisabilité des modèles de simulation du bilan hydrique pour étendre les résultats locaux

- d'autre part, au niveau pratique : l'acquisition de données pour analyser la gestion de l'eau sur le bassin versant en vue de l'aménagement des sites étudiés.

Pour de plus amples détails, on pourra consulter les différents rapports de P. Ruelle responsable de l'ATP, (e.g. Ruelle et al., 1988), sur l'état d'avancement des actions de recherche.

Les études sont encore en cours, mais la présentation succincte des objectifs de l'étude nous permet de souligner qu'ils correspondent tout à fait, de part leurs aspects pratiques, au cadre d'application des modèles fonctionnels.

De plus, l'étude fine des problèmes liés au ruissellement permettra de mieux appréhender ce phénomène, et peut-être, d'améliorer sa simulation dans le modèle.

Enfin, l'étude de faisabilité des modèles de simulation du bilan hydrique pour étendre les résultats locaux est une application pratique directe de l'analyse stochastique de ce mémoire.

C2-II-A-2) Estimation des paramètres des simulations déterministes

Nous avons pu obtenir une première série de mesures in-situ que nous avons utilisées pour les comparer aux résultats issus de nos simulations.

La saison des pluies, (hivernage), en 87 a été marquée, à Thyssé-Kaymor, par un démarrage précoce, 8 Juin, et par des précipitations régulières ensuite. Ces dernières n'ont, en effet, dépassé 40. mm/j qu'une fois en Août. Il en est résulté une bonne disponibilité en eau pour les cultures, l'absence de percolation en profondeur pour les sols profonds et un ruissellement modéré sur les versants.

Nous allons présenter les résultats de nos simulations sur quatre tubes équipés de ruissellomètres, tubes T1, T5, T4 et T7, Ruelle et al., 1988. Ces tubes sont implantés sur bas glacis en sol profond.

On trouvera, tableau suivant, les caractéristiques des cultures associées à chacun de ces tubes.

N°Tube	Culture	Variété	Dur.Cyc.	Semis	Récolte
T1	Arachide	73 33	105 j	22/06	19/10
T5	Arachide	73 33	105 j	22/06	19/10
T4	Arachide	73 206	120 j	26/06	03/11
T7	Mil	Souna III	90 j	17/06	28/09

Tableau 2-1 : Caractéristiques Culturelles

- Pour la simulation du bilan hydrique, nous avons utilisé les données météorologiques, Pluie et EV_{bac} de la station proche du site. En

l'absence d'irrigation, les entrées journalières en pluie seront donc la pluie du jour diminuée de la valeur du ruissellement mesurée autour du tube, soit : $P(J) - R(J)$.

En général, on ne connaît pas la valeur du ruissellement, mais sa mesure ici nous permet d'introduire dans le modèle la quantité d'eau effectivement infiltrée au droit du tube neutronique.

- Les coefficients cultureux, pour les deux variétés d'arachide et la variété de mil, ont été relevés dans la littérature et appliqués tel quel, Dancette, 1983.

- Les résultats de Chopart, 1980, nous ont permis de prendre en compte l'évolution de la profondeur racinaire par les équations suivantes :

* Arachide :

$$FR(J) = 2.04 J + 12. \quad \text{pour } 7 < J < 65 \text{ JAS}$$

* Mil :

$$FR(J) = 2.67 J \quad \text{pour } J < 45 \text{ JAS}$$

$$FR(J) = 1.22 J + 66.9 \quad \text{pour } 46 < J < 90 \text{ JAS}$$

Ces valeurs ont été confirmées sur le mil en 1987.

- La réserve en eau utilisable par la plante a été estimée, pour chaque tube et en l'absence d'autres informations, par la différence, sur le premier mètre de sol, entre le stock maximal et le stock minimal en eau obtenus au cours de la saison.

- La cote de drainage est égale, pour chaque tube, à la profondeur de celui-ci.

Ces valeurs ainsi que les valeurs initiales du stock en eau disponible et du front d'humectation sont données tableau 2-2.

N°Tube	RU (mm/cm)	z _D (cm)	ST _{ini} (mm)	FH _{ini} (mm)
T1	.982	260	74.0	100
T5	1.20	210	77.2	100
T4	.888	230	60.8	100
T7	1.22	270	66.1	100

Tableau 2-2 : Paramètres des simulations

C2-II-A-3) Résultats des simulations déterministes

Les résultats des simulations sur ces quatre tubes, ETM_{cs} et ETR_{cs} , ainsi que les valeurs expérimentales d'ETR cumulées sur l'ensemble du cycle, ETR_{cm} , et les écarts relatifs entre ETR_C mesurée et ETR_C calculée par le modèle sont donnés tableau suivant.

N°Tube	Durée (j)	ETM_{cs} (mm)	ETR_{cm} (mm)	ETR_{cs} (mm)	ER (%)
T1	118	570	516	517	.20
T5	118	570	509	518	1.77
T4	130	552	515	512	-.58
T7	103	502	427	442	3.51

Tableau 2-3 : Résultats sur le cycle

où :

$$ER = \frac{ETR_{cs} - ETR_{cm}}{ETR_{cm}} * 100$$

On constate le très bon accord, sur l'ensemble du cycle, entre les valeurs mesurées expérimentalement et les valeurs simulées.

Il est de plus important de souligner ici deux points :

- d'une part, les résultats expérimentaux sont eux-mêmes entachés d'erreurs liées à l'utilisation de l'humidimètre neutronique. Il semble

illusoire de vouloir mesurer les termes du bilan hydrique in-situ avec une erreur relative inférieure à $\pm 10\%$.

- d'autre part, les simulations ont été effectuées sans aucun calage préalable au niveau des coefficients culturaux et de la vitesse de croissance journalière.

Pour chaque simulation, le réservoir fixe étant très profond, $z_D > 2\text{ m}$, il n'y a pas eu de drainage à travers la cote z_D . Ce résultat est en parfait accord avec les observations de terrain.

Les données dont nous avons disposé étant présentées sous formes de consommations par période, nous n'avons pas pu comparer les résultats de nos simulations aux valeurs expérimentales en termes de position du front d'humectation ou de flux à travers des cotes intermédiaires.

Si nous ne tenons pas compte de l'information supplémentaire que nous avons dans ce cas, à savoir la mesure du ruissellement, et que nous entrons comme valeur de la pluie, la pluie effectivement tombée à la station, les résultats des simulations ne sont pas très différents au niveau des consommations cumulées et sont tout à fait identiques, compte-tenu de la valeur de z_D , en termes de drainage et/ou ruissellement. Des différences apparaissent cependant au niveau de la position des fronts d'humectation, mais le manque de données expérimentales ne nous permet pas de conclure.

Si le bon accord entre les consommations expérimentales et simulées est évident sur l'ensemble du cycle, on constate, figure 2-7 et figure 2-8, qu'il n'en est pas de même lorsque l'on compare les résultats par période. On observe notamment que les valeurs simulées fluctuent de manière moins brutale que les valeurs mesurées et que le modèle ne simule pas les faibles valeurs d'ETR que l'on observe sur les 4^{ième} et 5^{ième} décades du tube T1, ainsi que sur les 3^{ième} et 4^{ième} décades du tube T7. De même, sur la fin du cycle, l'ETR mesurée, ETR_m , est supérieure à ETM_s , ce qui semble indiquer une sous-estimation des coefficients culturaux sur cette période.

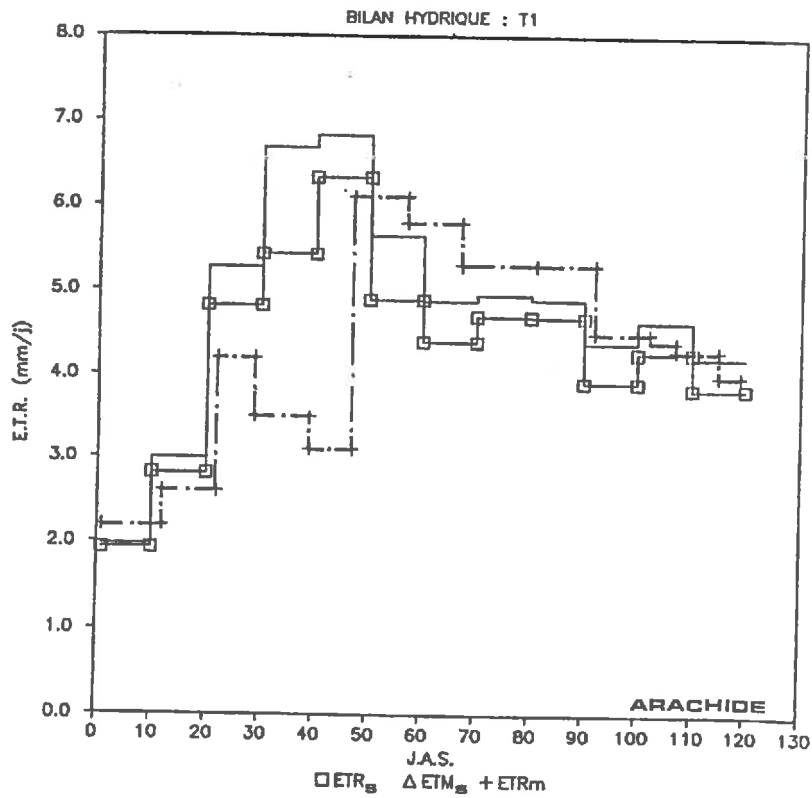


figure 2-7 : Bilans hydriques par période Tube T1 : ARACHIDE

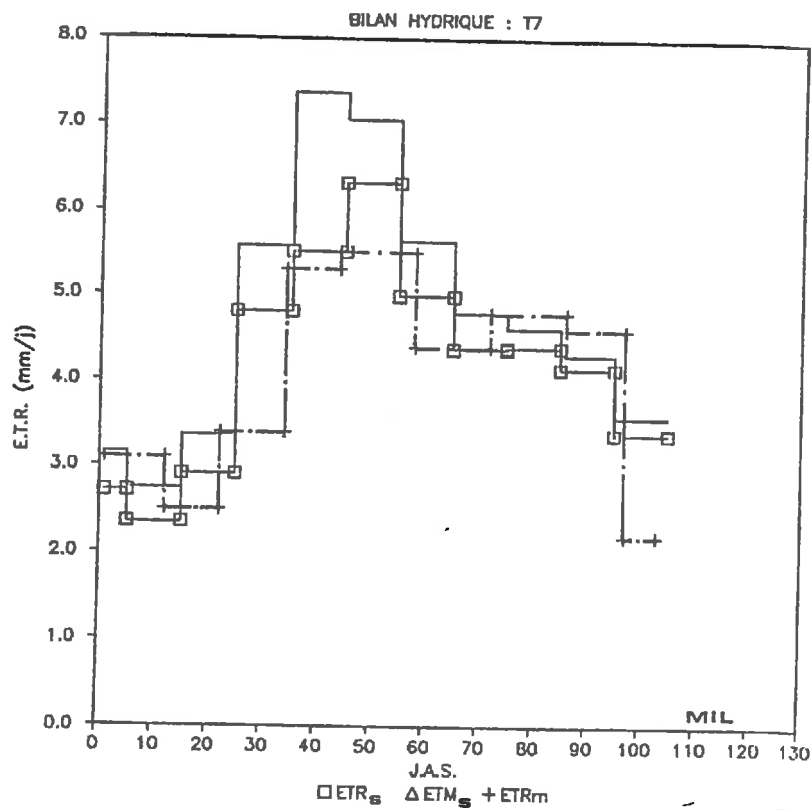


figure 2-8 : Bilans hydriques par période Tube T7 : MIL

Cependant, ces résultats justifient globalement l'utilisation de notre modèle pour estimer la consommation en eau d'une culture sur l'ensemble du cycle, mais une interprétation des résultats de la simulation par période semble plus difficile. Nous reviendrons plus longuement sur ce point dans la suite de ce mémoire.

C2-II-B) Simulation Déterministe sur le Site de Bouaké

C2-II-B-1) Description du cadre général de l'étude

Depuis 1983, à Bouaké/COTE D'IVOIRE, un projet intitulé "Optimisation des techniques culturales du riz pluvial" a été développé par J.L. Chopart à l'Institut des Savanes (IDESSA), Département des cultures vivrières.

L'AIEA, Agence Internationale de l'Energie Atomique, participe financièrement et matériellement à ce projet qui a un caractère pluridisciplinaire puisque des thèmes de recherches associés à la physique et à la chimie des sols, la bioclimatologie et la physiologie végétale y sont développés.

Les objectifs de ce programme sont l'étude de l'influence de la densité et de la géométrie de semis d'un riz pluvial sur les relations plante-milieu d'une part, sur l'installation du couvert et du système racinaire d'autre part, en vue de définir et analyser le comportement de la culture notamment sous contraintes hydriques .

Dans le cadre de ces objectifs, différents protocoles expérimentaux ont été mis en place depuis 1983. On pourra se reporter aux rapports de Vauclin, 1984, 1985, 1987 ainsi qu'aux articles de valorisation des résultats soumis à l'Agronomie Tropicale, Chopart et al., 1988, et à Soil Science Society of America Journal, Chopart et Vauclin, 1988.

Dans ce mémoire, nous allons uniquement et brièvement présenter le protocole expérimental de la saison 1986 ainsi que les résultats de

simulations sur cette année. Puis, compte-tenu de ces données climatiques et des ordres de grandeur des paramètres nécessaires à la simulation, nous testerons et commenterons dans le quatrième chapitre le comportement du modèle dans un environnement stochastique.

C2-II-B-2) Description de l'essai réalisé en 1986

Suite à l'analyse des résultats des essais 83 et 85, une nouvelle expérimentation a été mise en place en 86, figure 2-9, prise dans Chopart et Vauclin, 1988.

Brièvement, on notera que :

- la variété de riz utilisée est la variété IRAT 144, cycle de 120 jours
- trois densités de semis ont été réalisées :
 - * T_1 : 15 x 7.5 cm : 89 plants/m²
 - * T_2 : 30 x 15 cm : 22 plants/m²
 - * T_3 : 50 x 25 cm : 8 plants/m²
- seize répétitions ont été suivies : blocs I à XVI
- tous les traitements sur tous les blocs ont reçu le même apport minéral.

Le riz a été semé le 05/08 sur les blocs I à VIII et le 12/08 sur les blocs IX à XVI. Il a été récolté le 24/11 sur les blocs correspondant à la première date de semis (S_1) et le 02/12 sur ceux relatifs à la deuxième date de semis (S_2).

Quatre blocs, VII à X, ont reçu des irrigations complémentaires à partir de 90 JAS.

L'implantation de l'essai sur le sol de la station agrométéorologique a permis un suivi régulier au niveau agroclimatique. Nous ne retiendrons simplement que les mesures directement liées au cadre restreint de notre application :

Dispositif Expérimental de l'Essai AIEA 1986

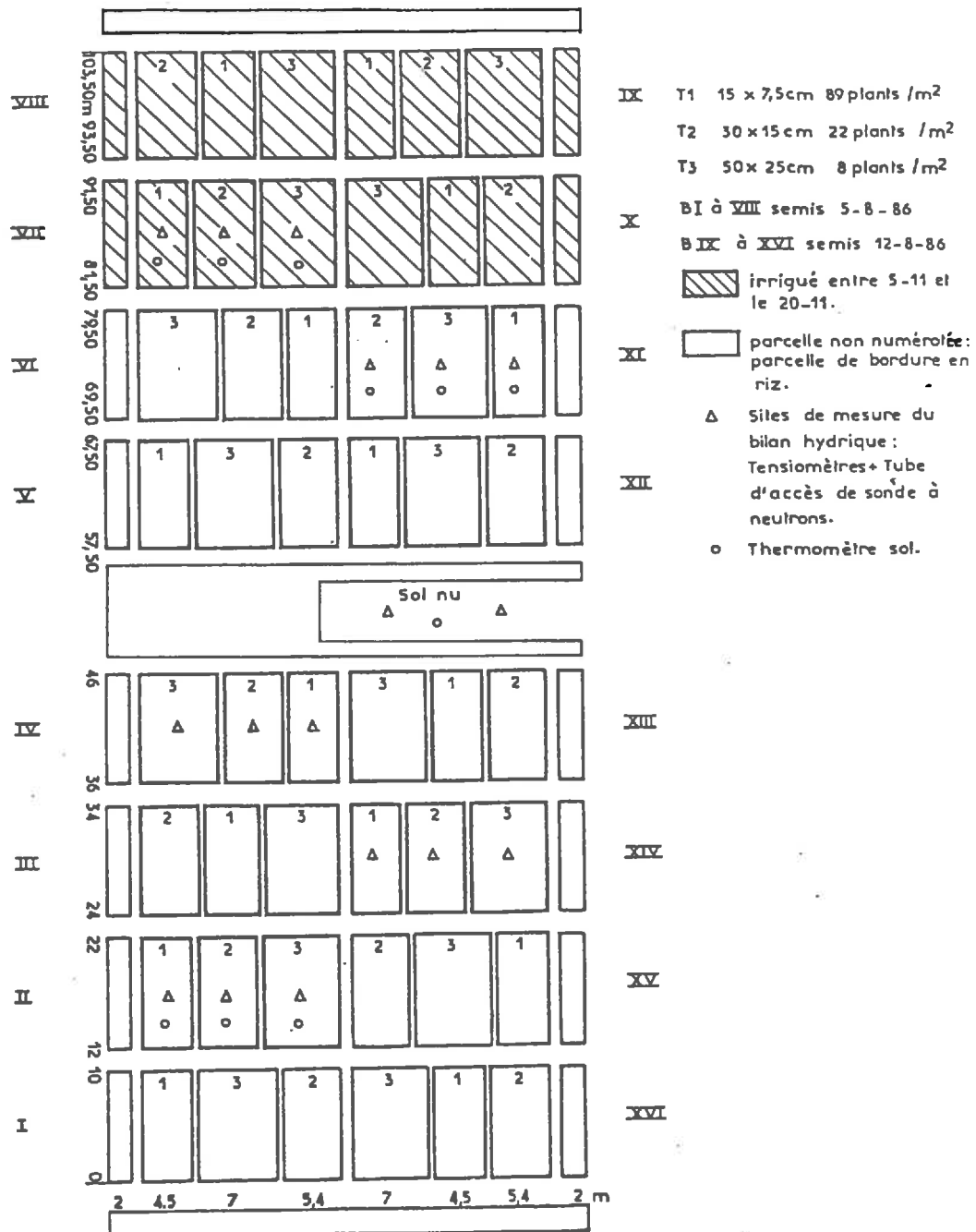


figure 2-9 : Schéma du dispositif expérimental

Echelle 1/500^e

- le suivi hydrique, par mesures neutroniques a été effectué tout au long du cycle sur 15 tubes, 5 par traitement
- les profils de charge hydraulique au droit des tubes neutroniques ont été relevés quasi-quotidiennement
- la relation conductivité hydraulique-teneur en eau, à la profondeur $z_D = 90$ cm, a été obtenue, par un essai de drainage interne effectué après la récolte, en chacun des sites de mesures du bilan hydrique
- la pluviométrie (pluies naturelles et irrigations complémentaires) a été relevée au voisinage immédiat de chaque site de mesures du bilan hydrique à l'aide de pluviomètres
- les valeurs journalières d'ETP Penman étaient également disponibles.

De plus, deux lysimètres drainant (70 cm de profondeur), semés en riz (densité T_2) et maintenus à l'évapotranspiration maximale ETM par irrigations complémentaires étaient suivis.

Ces observations ont permis le calcul expérimental des bilans hydriques pour les quinze sites de mesures par estimation du drainage, à la cote $z_D = 90$ cm par la loi de Darcy et ajustement de la lame d'eau éventuellement ruissellée.

On trouvera, Tableau 2-4, les valeurs expérimentales, en mm, des ETR et D mesurés cumulés sur l'ensemble du cycle, ETR_{cm} et D_{cm} .

C2-II-B-3) Modélisation déterministe

Pour mettre en oeuvre le modèle de bilan hydrique précédemment décrit, il est nécessaire d'estimer les paramètres du sol et de la végétation.

- La réserve maximale en eau utile, RU, a été obtenue pour chaque site par différence entre les stocks d'eau maximum et minimum sur $[0, 90]$ cm déterminés à partir des relevés neutroniques. On prendra donc $z_D = 90$ cm.
- Sur les quinze sites de mesures, cela conduit à une valeur moyenne de 0.57 ± 0.05 mm d'eau/cm de sol, soit un coefficient de variation de 9.6 %.

- L'évaporation sol nu a été prise en compte de manière empirique en posant, si JP est le jour de la pluie :

$$\begin{aligned} K_p(JP) &= 1. \\ K_p(JP+1) &= .5 \\ K_p(JP+2) &= .2 \\ K_p(JP+3) &= .1 \\ K_p(JP+4) &= .05 \end{aligned}$$

- La loi d'enracinement, supposée identique pour tous les sites et traitements, a été relevée dans la littérature, Chopart, 1980 :

$$FR(J) = 12.5 + 0.9 * J \quad \text{pour } J < 75 \text{ JAS}$$

- Enfin, les coefficients culturaux utilisés sont ceux calés durant l'essai 85 sur chaque densité de semis, à l'aide du bilan hydrique Darcy, sur des périodes sans ruissellement et en conditions hydriques non-limitantes.

Dans ces conditions, l'équation de conservation de la masse, (2-2), donne :

$$ETR(J) = P(J) + I(J) - D(J) - R(J) - [ST(J+1) - ST(J)]$$

où :

- * $ST(J+1)$, $ST(J)$ et $P(J) + I(J)$ sont mesurés
- * $D(J)$ est estimé par application de la loi de Darcy
- * $R(J)$, ruissellement de surface est observé nul
- * $ETR(J) = ETM(J) = K_c(J) * ETP(J)$ puisque l'eau n'est pas limitante

Cette équation fournit donc la valeur de $ETR(J)$. $ETP(J)$ étant mesuré par ailleurs, on obtient la valeur recherchée de $K_c(J)$.

Notons que ces résultats, Vauclin, 1985, montrent la dépendance du K_c à la densité de semis. On trouvera, figure 2-10, les courbes respectives de K_c prises dans Vauclin, 1985.

Ces paramètres étant estimés, les valeurs cumulées d'ETR et des pertes en eau D pour l'ensemble du cycle végétatif, ETR_{cs} et D_{cs} , sont fournies Tableau 2-4.

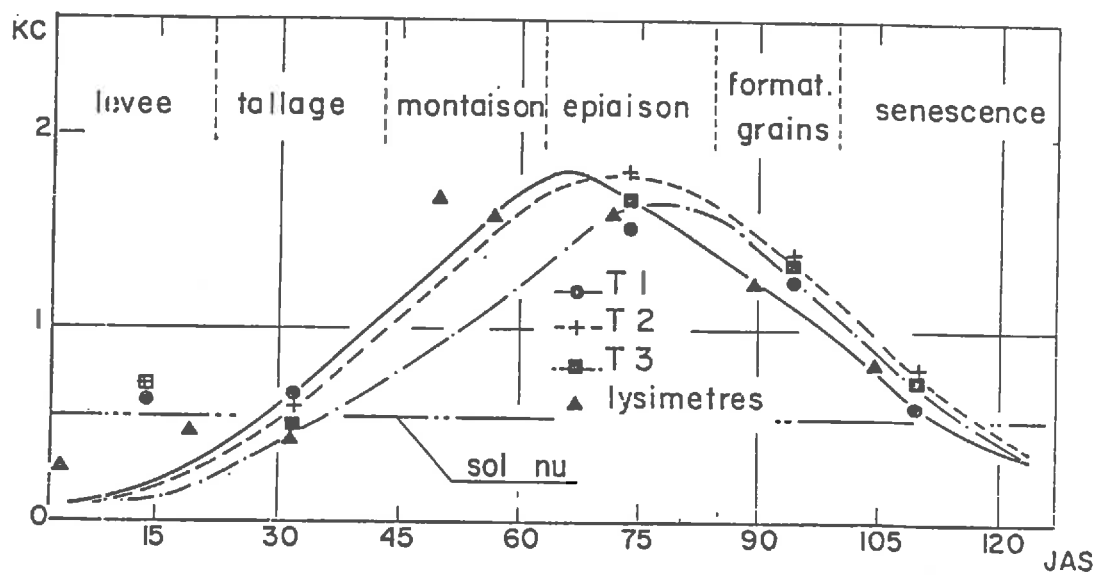


figure 2-10 : Coefficients culturaux en fonction du stade phéno-
logique (rapport AIEA 1985 - M. VAUCLIN)

On trouvera également dans ce tableau les valeurs cumulées de l'ETM sur le cycle ainsi que les valeurs, en pour-cent, des écarts-relatifs :

$$ER = \frac{ETR_{Cs} - ETR_{Cm}}{ETR_{Cm}} * 100$$

pour l'ETR par exemple.

N°Site	ETM _{Cs} (mm)	ETR _{Cm} (mm)	ETR _{Cs} (mm)	ER(ETR _C) (%)	D _{Cm} (mm)	D _{Cs} (mm)	ER(D _C) (%)
B ₂ T ₁	439	275	290	5.45	161	136	-15.53
B ₄ T ₁	439	280	317	13.21	192	166	-13.54
B ₇ T ₁	441	343	364	6.12	232	211	-9.05
B ₁₁ T ₁	442	238	288	21.01	240	177	-26.25
B ₁₄ T ₁	442	230	279	21.30	251	203	-19.12
B ₂ T ₂	445	263	291	10.65	178	151	-15.17
B ₄ T ₂	445	278	313	12.59	211	167	-20.85
B ₇ T ₂	446	308	359	16.56	256	217	-15.23
B ₁₁ T ₂	448	242	270	11.57	224	190	-15.18
B ₁₄ T ₂	448	243	287	18.11	240	205	-14.58
B ₂ T ₃	403	238	282	18.49	254	217	-14.57
B ₄ T ₃	403	240	282	17.50	235	187	-20.43
B ₇ T ₃	404	263	323	22.81	278	228	-17.99
B ₁₁ T ₃	406	227	255	12.33	222	193	-13.06
B ₁₄ T ₃	406	217	251	15.67	238	200	-15.97

Tableau 2-4: ETR_C et D_C mesurés et simulés

La comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs simulées du Tableau 2-4 suggère les commentaires suivants :

- D'une part, les remarques faites au sujet de la simulation sur le site de Thyssé-Kaymor sont encore valables, à savoir :

- * que, pour nous placer dans des conditions pratiques d'utilisation, aucun ajustement du modèle aux valeurs expérimentales n'a été tenté

* que les valeurs expérimentales sont entachées d'erreurs liées à l'utilisation de l'humidimètre neutronique et aux incertitudes sur l'estimation des relations $K(\theta)$.

- D'autre part, on constate un moins bon accord que sur le site de Thyssé-Kaymor. En effet, le modèle surestime systématiquement l' ETR_c et sous-estime le D_c .

L'analyse des écarts-relatifs, tableau 2-4, montre qu'ils suivent approximativement des lois normales de moyenne 15% et -16% et d'écart-types 5% et 4% pour l' ETR_c et le D_c respectivement.

Chopart et Vauclin, 1988 présentent les corrélations entre les valeurs d'ETR (D) simulées et expérimentales, cumulées par pentade et ce tous sites confondus. Nous ne disposons pas de ces valeurs expérimentales cumulées par pentade, aussi présentons nous les conclusions de M. Vauclin, même si ses résultats sont légèrement différents des nôtres car le modèle fonctionnel du logiciel Probe est légèrement différent de celui utilisé dans ce mémoire. Les mêmes remarques sont cependant applicables.

Il trouve les corrélations suivantes :

$$ETR_s = .965 ETR_m + .284 \quad ; \quad R = .856 \quad \text{pour 296 couples}$$

$$D_s = .950 D_m - .153 \quad ; \quad R = .885 \quad \text{pour 296 couples}$$

où ETR_s , ETR_m , D_s et D_m sont exprimés en mm/j.

Les tests statistiques conduisent à assimiler, au seuil de 5%, les deux droites de régression à la première bissectrice.

Compte-tenu des incertitudes sur les courbes $K(\theta)$ et donc sur les lames d'eau drainées à travers la cote $z_D = 90$ cm, un test supplémentaire a été effectué indépendamment en simulant le bilan hydrique des lysimètres. On trouve un bon accord par période entre les valeurs expérimentales et simulées, tant pour l'ETR que pour le D, Chopart et Vauclin, 1988.

C2-II-C) Conclusion sur les Simulations Déterministes

L'application du modèle déterministe-fonctionnel sur les sites de Thyssé-Kaymor et de Bouaké nous a permis de confirmer son aptitude à simuler correctement les bilans hydriques, notamment en termes de valeurs cumulées sur l'ensemble du cycle à Thyssé-Kaymor et, par pentade tous sites confondus ainsi que sur lysimètres à Bouaké.

On notera que ces résultats renforcent ceux obtenus dans des études similaires relatives à d'autres conditions agropédoclimatiques, voir Chopart et Doffangui, 1984 pour une succession maïs-cotonnier à Bouaké, Fréteaud et al., 1987 pour le maïs au Togo.

Il faut encore rappeler, qu'en aucun cas, la démarche présentée ici n'a consisté à essayer de caler les résultats des simulations sur les valeurs expérimentales. Nous nous sommes placés dans les conditions d'utilisation pratique du modèle et nous avons comparé les résultats de simulations aux valeurs déjà intégrées sous forme de bilans par période ou sur le cycle dont nous disposions.

Sur le site de Bouaké par exemple, un calage des paramètres nous aurait permis de réduire l'écart systématique entre valeurs mesurées et expérimentales.

En outre, en termes de bilans hydriques, l'erreur de mesure reste toujours importantes : nous rappelons qu'il semble illusoire de vouloir mesurer les termes du bilan hydrique in-situ avec une erreur relative inférieure à $\pm 10\%$.

En conclusion, ces résultats positifs et la facilité de mise en oeuvre de ce type de modèles d'une part, la difficulté d'utilisation des modèles déterministes-conceptuels et les incertitudes inhérentes au calcul des flux par la loi de Darcy d'autre part conduisent à développer l'utilisation des modèles fonctionnels dès lors que l'on est confronté à des études de bilan hydrique, à des fins pratiques, en milieu paysan.

En l'état actuel des choses, deux démarches peuvent alors être envisagées :

- Premièrement, on peut chercher à améliorer le comportement déterministe du modèle :

- * en simulant des phénomènes qui, pour l'instant, ne sont pas pris en compte :
 - + redistribution de l'eau dans le profil, même si l'on est en-deçà de la capacité au champ
 - + remontées capillaires
 - + séparation dans la lame d'eau perdue par le réservoir sol entre la lame d'eau ruissellée et la lame d'eau effectivement drainée
- * en optimisant l'estimation des paramètres sol ou plante, RU, +, CJ
- * en affinant :
 - + la description du réservoir sol par la prise en compte de couches pédologiques
 - + la description de la croissance aérienne et racinaire de la plante

Cette liste n'est pas exhaustive, mais il faudra garder en mémoire les objectifs d'ordre pratique de ce type de modèles afin de ne pas tomber dans les travers d'une modélisation déterministe-conceptuelle.

- Deuxièmement, on peut mener une étude de sensibilité à une incertitude et/ou à la variabilité spatiale des différents paramètres du modèle.

Rappelons que ce type d'études peut avoir plusieurs objectifs :

- * représenter de façon plus réaliste le comportement de la parcelle
- * quantifier les erreurs que l'on fait lorsque l'on néglige la variabilité
- * définir les paramètres les plus influents dans la simulation.

Ces deux démarches peuvent, bien évidemment, être menées de front. Ainsi, la reconnaissance du, ou des paramètres les plus influents, nous guidera dans la détermination des efforts à fournir en vue de l'amélioration du comportement du modèle déterministe. Pourtant, dans ce mémoire, nous suivrons uniquement la deuxième démarche qui, à notre connaissance, n'a pas été appliquée à ce type de modèles alors que différentes versions du modèle déterministe-fonctionnel de base sont utilisées suivant les contraintes locales et les objectifs des utilisateurs.

CHAPITRE 3

MODELISATION STOCHASTIQUE : ASPECTS GENERAUX

C3-1) INTRODUCTION TERMINOLOGIQUE

Dans le premier chapitre, nous avons répertorié de façon succincte les différentes méthodes utilisées dans les modélisations stochastiques :

- Méthodes d'estimation des deux premiers moments :
 - * Méthode des perturbations
 - * Méthode des développements en série de Taylor
- Méthodes d'estimation de la fonction densité de probabilité :
 - * Méthode analytique
 - * Méthode de Monte Carlo.

Nous allons maintenant détailler la méthode de Monte Carlo et introduire les principales notions nécessaires à son utilisation, Smith et Freeze, 1979.

Dans une simulation de Monte Carlo, les entrées sont considérées comme des variables aléatoires avec une fonction densité de probabilité en chaque point du domaine d'étude, D. La dépendance spatiale entre valeurs voisines peut être définie, comme nous le verrons dans la troisième partie de ce chapitre, par la fonction d'autocorrélation spatiale.

Dans une telle simulation, le domaine est discrétisé en un nombre fini de blocs égaux. Sous l'hypothèse que la fonction densité de probabilité de l'entrée est la même en chaque point du domaine, on associe à chaque bloc une valeur de l'entrée par tirage aléatoire dans la loi de

distribution. Ces valeurs fournissent alors une *réalisation* du processus aléatoire.

Le problème, compte-tenu des entrées définies ci-dessus, est ensuite résolu successivement en chacun des blocs. L'analyse des sorties sur l'ensemble des blocs définit les statistiques spatiales pour la réalisation considérée.

Mais celle-ci n'est qu'une représentation particulière du domaine hétérogène étudié. Pour affiner notre connaissance, il est nécessaire de reproduire l'étape précédente un certain nombre de fois : chaque réalisation du processus stochastique étant une représentation équiprobable du domaine hétérogène. L'analyse des sorties sur l'ensemble des réalisations fournit ce que l'on appelle les statistiques d'ensemble de la simulation.

L'utilisation répétée du modèle déterministe permet donc d'estimer les lois de distribution des variables de sortie qui caractérisent le degré d'incertitude dû à l'hétérogénéité du domaine étudié D.

Notons ici que :

i) les concepts de réalisation et d'ensemble jouent le même rôle dans la théorie des processus stochastiques que les concepts d'échantillon et de population dans la théorie statistique. Cette analogie nous permettra par la suite quelques abus de langage.

ii) un processus stochastique sera dit ergodique si les moments du premier et du second ordre, calculés d'une part par moyenne d'ensemble (nombre de réalisations $\rightarrow \infty$) et d'autre part par moyenne spatiale ($D \rightarrow \infty$) à partir d'une réalisation, sont égaux.

Dans une simulation de Monte Carlo, les étapes successives de la démarche sont donc, Freeze, 1980 :

1) Définir le domaine d'étude et le discrétiser en un nombre fini de blocs égaux

- 2) Pour la, ou les entrées étudiées, définir les statistiques d'ensemble (loi de distribution, moyenne, variance, autocorrélation,...)
- 3) Générer, en chaque bloc du domaine discrétisé, une valeur de l'entrée considérée, ce qui fournit les statistiques spatiales de la réalisation. Chacune de ces valeurs est tirée aléatoirement dans la loi de distribution définie par les statistiques d'ensemble de l'entrée
- 4) Résoudre successivement, pour tous les blocs, le problème déterministe
- 5) Etablir les statistiques spatiales, pour cette réalisation, des variables de sortie
- 6) Recommencer cette procédure à l'étape 3) afin d'obtenir un grand nombre de réalisations et ainsi une estimation des statistiques d'ensemble des variables de sortie.

Nous nous attacherons, pour notre part, à la modélisation stochastique du bilan hydrique à l'échelle d'une parcelle agronomique. Notre domaine, fini, d'étude sera supposé être une parcelle carrée de $100 \times 100 \text{ m}^2$. Il sera, sauf cas explicite, discrétisé en $20 \times 20 = 400$ blocs égaux.

Les variables climatiques seront supposées déterministes, c'est-à-dire que nous supposerons que la pluie et l'ETP (Penman ou Evbac) journalières ne seront pas variables à l'échelle de la parcelle.

Les paramètres d'entrée qui seront considérés sous l'aspect stochastique sont :

- la réserve en eau utile : RU
- la vitesse de croissance racinaire journalière : CJ
- le vecteur des coefficients cultureux : K_c .

L'étude des différentes étapes à suivre dans une simulation de Monte Carlo souligne les problèmes soulevés par une telle démarche.

Il faut :

- dans un premier temps, générer à partir d'une loi de distribution fixée au préalable des valeurs en un certain nombre de points
- et dans un second temps, analyser et traiter d'un point de vue statistique les valeurs des sorties du modèle.

Nous allons aborder ces problèmes dans la deuxième partie de ce chapitre. Puis, dans la troisième partie, nous verrons les modifications à apporter aux concepts précédents pour introduire la notion de dépendance spatiale et traiter la simulation de Monte Carlo sur le plan géostatistique, au sens de Matheron, 1965.

C3-II) ASPECTS STATISTIQUES

C3-II-A) Génération de Données

Pour des raisons de facilité d'une part et parce que les phénomènes rencontrés en hydrologie et dans les sciences du sol suivent souvent des lois de ce type, les valeurs générées en chaque point du domaine discrétisé sont en général tirées dans des lois Normales, N, Freeze, 1980, Warrick et Gardner, 1983 ou Log-normales, LN, Warrick et al., 1977, Vauclin et al., 1983, EL Kadi, 1987 et Sharma et al., 1987.

Nous allons voir qu'en fait, pour tous les cas, le problème peut se ramener au tirage de N valeurs dans la loi normale centrée réduite.

C3-II-A-1) Tirage dans une loi normale

Soit, Z , une variable aléatoire dont la loi de distribution est une loi normale de moyenne μ_Z et d'écart-type σ_Z , soit :

$$Z = N(\mu_Z, \sigma_Z)$$

On sait que Z peut s'écrire :

$$Z = \mu_Z + \sigma_Z \cdot Z_0 \quad (3-1)$$

où : $Z_0 = N(0,1)$ est la loi normale centrée réduite, de moyenne nulle et d'écart-type 1.

Nous avons vu, dans la première partie de ce chapitre, que l'utilisateur de la méthode de Monte Carlo doit, étape n°2, définir les statistiques d'ensemble de l'entrée aléatoire.

Ce serait ici :

- loi normale
- moyenne : μ_Z
- écart-type : σ_Z

Pour obtenir une réalisation du champ aléatoire, il faut donc tirer N valeurs, z_i , dans la loi $N(\mu_Z, \sigma_Z)$ ou, ce qui revient au même, tirer N valeurs, z_{0i} , dans la loi $N(0,1)$ et écrire, pour tout i de 1 à N :

$$z_i = \mu_Z + \sigma_Z \cdot z_{0i} \quad (3-2)$$

Pour générer les z_{0i} , nous avons utilisé l'algorithme de tirage pseudo-aléatoire dans une loi uniforme entre 0 et 1, incorporé dans notre micro-ordinateur Olivetti M24 SP par la fonction RND.

Par cette fonction, on génère p fois N valeurs $x_{k,l}$ avec $k = 1$ à p et $l = 1$ à N . Chaque variable aléatoire X_k est issue d'une loi uniforme entre 0 et 1, ($p_{Xk} = \text{cste} = 1$), et X_{k0} et X_{k1} sont deux variables indépendantes si et seulement si $k_0 \neq k_1$.

Par application du théorème central limite, $X = \sum_k^p X_k$ est une variable normale.

De plus :

$$E[X] = \mu_X = p \cdot E[X_h] = 1/2 \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = p \cdot \text{Var}(X_h) = 1/12 \cdot p$$

où $E[X]$ et $\text{Var}(X)$ sont respectivement l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X , et X_h l'un quelconque des X_k .

En effet, si $p_{X_h}(x)$ est la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire X_h , on a :

$$p_{X_h}(x) = 1. \text{ si } x \in [0 ; 1]$$

$$p_{X_h}(x) = 0. \text{ sinon}$$

d'où :

$$E[X_h] = \int_0^1 x \cdot p_{X_h}(x) \cdot dx = 1/2$$

$$E[X_h^2] = \int_0^1 x^2 \cdot p_{X_h}(x) \cdot dx = 1/3$$

$$\text{Var}(X_h) = E[X_h^2] - (E[X_h])^2$$

La pratique montre que $p = 12$ est une valeur suffisante. Le système d'équations précédent devient alors :

$$E[X] = 6.$$

$$\text{Var}(X) = 1.$$

X est donc une variable normale d'espérance mathématique 6 et de variance 1.

On a alors :

$$Z_0 = X - 6.$$

Dans la pratique, à une valeur de N fixée et à chaque tirage des $x_{12,1}$ correspondent, pour la réalisation considérée, des estimations de $E[X]$ et $\text{Var}(X)$, m_X et s_X^2 respectivement. Ces estimations seront d'autant plus proches des valeurs théoriques $E[X]$ et $\text{Var}(X)$ que, p étant fixé égal à 12, N sera grand.

Les x_i étant générés, pour $i=1$ à N , on passe facilement aux z_i par :

$$z_i = \mu_Z + \sigma_Z \cdot (x_i - 6.) \quad (3-4)$$

Ces valeurs générées z_i fourniront une réalisation du processus stochastique Z . Les moyenne et écart-type, m_Z et s_Z , calculés à partir des z_i par les formules suivantes sont des estimateurs des moyenne et écart-type théoriques, μ_Z et σ_Z :

$$m_Z = 1/N \cdot \sum_{i=1}^N z_i \quad (3-5)$$

$$s_Z^2 = 1/(N-1) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i - m_Z)^2 \quad (3-6)$$

C3-II-A-2) Tirage dans une loi log-normale

Une variable aléatoire, Y , suit une loi log-normale, LN, si la variable transformée $Z = \log(Y)$, où \log est le logarithme népérien, suit une loi normale.

Nous allons ici, car nous en aurons besoin dans la suite de ce mémoire, élargir le cadre de définition en introduisant la notion de loi log-normale à trois paramètres, LN₃, Sangal et Biswas, 1970 et de loi log-normale inverse à trois paramètres, LNI₃, Journal et Huijbregts, 1978.

Le rappel du nombre de paramètres précise que, pour définir complètement de telles lois, il faut connaître trois paramètres, contrairement aux lois normales et log-normales où moyenne et variance suffisent à déterminer la fonction de distribution.

Ainsi, une variable aléatoire, Y , suit une loi log-normale à trois paramètres si la variable transformée $Z = \log(Y - Y_m)$ suit une loi normale.

De même, une variable aléatoire, Y , suit une loi log-normale inverse à trois paramètres si la variable transformée $Z = \log(Y_M - Y)$ suit une loi normale.

Le problème se pose alors de l'estimation, pour la loi de distribution des Y , de la borne inférieure Y_m dans le premier cas et de la

borne supérieure Y_M dans le second. Nous y reviendrons ultérieurement car, pour l'instant, Y_m et Y_M sont fixés par l'utilisateur du générateur.

Dans les trois cas, la méthode de génération consiste à calculer les deux premiers moments de la variable aléatoire associée Z , compte-tenu de la connaissance des deux premiers moments de la variable aléatoire Y et de Y_m (Y_M) éventuellement. On est ensuite ramené au problème précédent, c'est-à-dire au tirage d'un échantillon de N valeurs dans une loi normale dont on s'est donné la moyenne et la variance.

Une fois les z_i générés, on obtient les y_i par :

$$y_i = \exp(z_i)$$

$$y_i = Y_m + \exp(z_i)$$

$$y_i = Y_M - \exp(z_i)$$

suivant le cas.

L'étape initiale de la génération de valeurs tirées dans une loi log-normale, au sens large, Y , est donc le calcul des deux premiers moments de la loi normale associée, Z .

1) Si $Y = LN(\mu_Y, \sigma_Y)$ et si Z est la variable aléatoire associée, $Z = N(\mu_Z, \sigma_Z)$, les équations reliant les deux premiers moments de Y et de Z sont, Meija et Rodriguez, 1974 :

$$\mu_Y = \exp(\mu_Z + 1/2 \cdot \sigma_Z^2) \quad (3-7)$$

$$\sigma_Y^2 = \exp(2\sigma_Z^2 + 2\mu_Z) - \exp(\sigma_Z^2 + 2\mu_Z) \quad (3-8)$$

De plus, le mode, \mathcal{C}_Y , et la médiane, \mathcal{J}_Y , de Y s'expriment comme suit en fonction de la moyenne et de la variance de Z , Sangal et Biswas, 1970 :

$$\mathcal{C}_Y = \exp(\mu_Z - \sigma_Z^2)$$

$$\mathcal{J}_Y = \exp(\mu_Z)$$

avec : $\mathcal{C}_Y < \mathcal{J}_Y < \mu_Y$ et $g_{1Y} > 0$.

2) Si $Y = LN_3(\mu_Y, \sigma_Y, Y_M)$ les équations précédentes deviennent :

$$\mu_Y = Y_M + \exp(\mu_Z + 1/2 \cdot \sigma_Z^2) \quad (3-9)$$

$$\sigma_Y^2 = \exp(2\sigma_Z^2 + 2\mu_Z) - \exp(\sigma_Z^2 + 2\mu_Z) \quad (3-10)$$

$$\mathcal{Z}_Y = Y_M + \exp(\mu_Z - \sigma_Z^2)$$

$$\mathcal{Y}_Y = Y_M + \exp(\mu_Z)$$

avec : $\mathcal{Z}_Y < \mathcal{Y}_Y < \mu_Y$ et $g_{1Y} > 0$.

3) Enfin, si $Y = LNI_3(\mu_Y, \sigma_Y, Y_M)$ on obtient :

$$\mu_Y = Y_M - \exp(\mu_Z + 1/2 \cdot \sigma_Z^2) \quad (3-11)$$

$$\sigma_Y^2 = \exp(2\sigma_Z^2 + 2\mu_Z) - \exp(\sigma_Z^2 + 2\mu_Z) \quad (3-12)$$

$$\mathcal{Z}_Y = Y_M - \exp(\mu_Z - \sigma_Z^2)$$

$$\mathcal{Y}_Y = Y_M - \exp(\mu_Z)$$

avec : $\mathcal{Z}_Y > \mathcal{Y}_Y > \mu_Y$ et $g_{1Y} < 0$.

Toutes ces équations sont obtenues à partir des équations théoriques donnant moyenne, variance, mode et médiane d'une loi de distribution continue.

Soit :

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x) \cdot dx$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\mathcal{Z}_X \text{ tel que : } dp_X(x)/dx = 0 \text{ et } d^2p_X(x)/dx^2 < 0$$

$$\mathcal{Y}_X \text{ telle que : } \int_{-\infty}^{\mathcal{Y}_X} p_X(x) \cdot dx = 0.5$$

où $p_X(x)$ est la fonction densité de probabilité de la variable aléatoire X qui, dans le cas d'une loi normale s'exprime par, Haan, 1977 :

$$p_X(x) = (2\pi \cdot \sigma_X^2)^{-1/2} \cdot \exp(-1/2 \cdot ([x - \mu_X] / \sigma_X)^2)$$

et dans le cas d'une loi log-normale, avec $Y = \log(X)$, Haan, 1977 :

$$p_X(x) = (2\pi \cdot x^2 \cdot \sigma_Y^2)^{-1/2} \cdot \exp(-1/2 \cdot ([\log(x) - \mu_Y] / \sigma_Y)^2)$$

Pour une loi normale, on a en outre : $\mathcal{Z}_X - \mathcal{Y}_X = \mu_X$

Les équations (3-7) à (3-12), ou les équations inverses donnant μ_Z et σ_Z en fonction de μ_Y et σ_Y et, Y_m ou Y_M éventuellement, permettent donc de tirer aléatoirement N valeurs dans des lois log-normales, (3-7) et (3-8), log-normales à 3 paramètres, (3-9) et (3-10), log-normales inverses à 3 paramètres, (3-11) et (3-12).

En effet, si l'on veut tirer, par exemple, N valeurs dans une loi log-normale $Y = LN(\mu_Y, \sigma_Y)$:

- * on fixe les valeurs de μ_Y et de σ_Y
- * on calcule les valeurs associées μ_Z et σ_Z , (3-7) et (3-8)
- * on est alors ramené au tirage de N valeurs z_i dans une loi $N(\mu_Z, \sigma_Z)$
- * on revient au y_i par $y_i = \exp(z_i)$

La démarche est tout à fait identique pour les lois LN_3 et LNI_3 .

C3-II-A-3) Traitement des valeurs extrêmes

Il convient ici de souligner un point délicat que l'on rencontre lorsque l'on génère des données qui ont un sens physique. En effet, les développements précédents sont purement mathématiques. Aussi lorsque l'on tire dans une loi $N(0,1)$ par exemple, on peut tirer des valeurs grandes en valeur absolue, même si l'on n'a, pour chaque valeur de z_{0i} , que 5% de chance d'être en dehors de l'intervalle $[-1.96; +1.96]$. Le passage de la valeur mathématique, z_{0i} , à la valeur physique finale, z_i , par l'équation (3-2) peut alors conduire à des valeurs physiquement erratiques.

Exemple : $Z = RU$
 $\sigma_Z = .4 \mu_Z$
 $z_{0i} = -3$

d'où :

$$z_i = RU_i = \mu_Z + \sigma_Z \cdot z_{0i} = - .2 \mu_Z$$

qui conduit à une valeur de RU_i négative, bien évidemment vide de sens physique.

Nous avons donc choisi, dans notre algorithme de tirage de tronquer les valeurs générées dans $N(0,1)$ à ± 2 et de ne garder que les z_{0i} tels que :

$$-2 < z_{0i} < +2$$

soit :

$$\mu_Z - 2 \sigma_Z < z_i < \mu_Z + 2 \sigma_Z \quad (3-13)$$

Cette troncature conduit à enlever, pour chaque réalisation, 5% environ des valeurs mathématiques générées.

C3-II-A-4) Choix d'une réalisation optimale

Compte-tenu des résultats de nos simulations de Monte Carlo, du temps de calcul important nécessaire à leur réalisation, de la place occupée en mémoire par un stockage par période des différentes variables du modèle, nous serons amenés dans le quatrième chapitre à analyser les résultats de simulations sur des réalisations optimales.

Se pose alors le problème du critère de choix de cette réalisation. Mais, dans un premier temps, il faut souligner les problèmes théoriques que soulèvent cette démarche, pourtant déjà suivie dans la littérature, Sharma et al., 1987.

En effet, en ne travaillant que sur une réalisation, même bien choisie, nous nous privons de l'étude des fluctuations liées à l'analyse des résultats sur un grand nombre de réalisations. De ce fait, notre estimation

des statistiques d'ensemble des sorties peut ne pas être très précise, voire biaisée.

Cependant, les résultats des simulations de Monte Carlo d'une part et le gain informatique d'autre part nous conduirons à suivre malgré tout cette démarche.

Le choix de la réalisation optimale est effectué selon la méthode suivante :

- Si les statistiques d'ensemble de la variable aléatoire considérée comme entrée du modèle sont, par exemple : loi normale de moyenne μ_z et d'écart-type σ_z .
- Si, de plus, on doit générer les valeurs de l'entrée sur N blocs, on génère successivement L réalisations et l'on ne conserve que la réalisation qui minimise Δ , défini par :

$$\Delta = |\mu_z - m_z|/\mu_z + |\sigma_z - s_z|/\sigma_z + |g_{1z}| + |g_{2z} - 3|/3 \quad (3-14)$$

Dans cette équation :

- * m_z et s_z sont la moyenne et l'écart-type de la réalisation, calculés respectivement par les équations données en (3-5) et (3-6)
- * g_{1z} et g_{2z} sont respectivement les coefficients de symétrie et d'aplatissement non-biaisés de la réalisation, Haan, 1979 :

$$g_{1z} = \frac{N(N-1)^{\frac{1}{2}}}{(N-2)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - m_z)^3}{[\sum_{i=1}^N (z_i - m_z)^2]^{3/2}} \quad (3-15)$$

$$g_{2z} = \frac{N^2(N-1)}{(N-2)(N-3)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - m_z)^4}{[\sum_{i=1}^N (z_i - m_z)^2]^2} \quad (3-16)$$

Pour une loi normale les valeurs théoriques sont :

$$\begin{aligned} g_{1z} &= 0. && : \text{loi symétrique} \\ \text{et} & && \\ g_{2z} &= 3. \end{aligned}$$

Le critère de choix est donc la minimisation de la somme des valeurs absolues des écarts relatifs aux valeurs théoriques, de la moyenne, de l'écart-type et des coefficients de symétrie et d'aplatissement.

Dans la pratique, on a appliqué ce critère sur un nombre L de 100 réalisations. Ainsi, la réalisation optimale est la réalisation, parmi ces 100, dont les statistiques spatiales ressemblent le plus, au sens de notre critère, aux statistiques d'ensemble du processus aléatoire généré.

C3-II-B) Traitement Statistique de Distributions Asymétriques

Quelques unes des méthodes de traitement de données utilisées dans le quatrième chapitre de ce mémoire sont tout à fait classiques :

- * calcul des deux premiers moments : moyenne et variance
- * calcul des coefficients de symétrie et d'aplatissement
- * tests d'ajustement à une loi normale.

Nous n'y reviendrons pas.

Par contre, nous aurons à analyser des variables aléatoires dont les lois de distribution sont dissymétriques avec un coefficient de symétrie positif, lois LN_3 et LN_3 , ou négatif, lois LNI_3 par exemple.

Dans ce cas, il faut, d'une part trouver les paramètres les plus à même de caractériser la variabilité de la variable aléatoire et d'autre part estimer la valeur Y_m ou Y_M dans le cas de lois LN_3 ou LNI_3 .

C3-II-B-1) Estimation des paramètres caractéristiques

Il est connu, Sharma et al., 1979 l'ont rappelé que, pour des propriétés distribuées selon une loi log-normale, la médiane représente mieux le comportement "moyen" de la population que la moyenne arithmétique calculée par la formule (3-5). En outre, pour une distribution log-normale, la variance calculée par la formule (3-6) représente mal la variabilité.

Aussi, dans le cas d'une loi dissymétrique, Cressie et Horton, 1987, proposent-ils d'utiliser les notions de médiane et de quartiles supérieur et inférieur pour caractériser le comportement "moyen" et la variabilité autour de ce comportement.

i) La médiane Me_z d'un échantillon de N valeurs z_i , $i = 1$ à N , estimateur de ζ_z , médiane de la population, est définie comme suit :

* Si N est impair, $N = 2k+1$:

$$Me_z = z_{c_k} \quad (3-17)$$

* Si N est pair, $N = 2k$:

$$Me_z = 1/2 \cdot (z_{c_{k-1}} + z_{c_{k+1}}) \quad (3-18)$$

où : z_{c_j} sont les valeurs classées des z_i

Remarque : Me_z sera un bon estimateur de ζ_z si l'échantillon est grand

ii) Le quartile supérieur (inférieur), Qs_z (Qi_z), est alors la médiane du demi sous-échantillon supérieur (inférieur) des valeurs classées. Ces sous-échantillons contiennent la médiane lorsque N est impair.

On introduit de plus l'inter-quartile, IQ_z , comme paramètre représentatif de la variabilité autour de la médiane par :

$$IQ_z = Qs_z - Qi_z \quad (3-19)$$

* Pour une loi qui a un coefficient de symétrie g_{1z} positif (lois LN , LN_3), on aura :

$$Qs_z - Me_z > Me_z - Qi_z$$

* Pour une loi qui a un coefficient de symétrie g_{1z} négatif (lois LNI_3), on aura :

$$Qs_z - Me_z < Me_z - Qi_z$$

C3-II-B-2) Estimation de Y_m et Y_M

Après avoir introduit ci-dessus les notions de lois log-normales à 3 paramètres, LN_3 et de lois log-normales inverses à 3 paramètres, LNI_3 , nous allons maintenant détailler le raisonnement qui permet de calculer Y_m et Y_M , dans le cas de lois LN_3 et LNI_3 respectivement, en fonction des moyenne, variance et médiane de Y , Sangal et Biswas, 1970.

Soit Y une loi log-normale à 3 paramètres : $LN_3(\mu_Y, \sigma_Y, Y_m)$,
 $Z = \log(Y - Y_m) = N(\mu_Z, \sigma_Z)$, la loi normale associée et \mathcal{Y}_Z , la médiane de Z .
 Comme Z est une loi normale, on a :

$$\mu_Z = \mathcal{Y}_Z$$

Si \mathcal{Y}_Y est la médiane de Y , alors \mathcal{Y}_{Y-Y_m} sera la médiane de $Y - Y_m$, donc :

$$\mathcal{Y}_Z = \log(\mathcal{Y}_{Y-Y_m})$$

d'où :

$$\exp(\mu_Z) = \exp(\mathcal{Y}_Z) = \mathcal{Y}_Y - Y_m \quad (3-20)$$

Cette dernière équation jointe aux équations (3-9) et (3-10) permet d'exprimer Y_m en fonction de μ_Y , σ_Y et \mathcal{Y}_Y . On obtient en effet, par élimination dans ces équations de μ_Z et σ_Z :

$$\begin{aligned} & 2Y_m^3 \cdot (\mu_Y - \mathcal{Y}_Y) + Y_m^2 \cdot (\sigma_Y^2 + \mathcal{Y}_Y^2 - 5\mu_Y^2 + 4\mu_Y \mathcal{Y}_Y) \\ & + 2Y_m \cdot (2\mu_Y^3 - \mathcal{Y}_Y \sigma_Y^2 - \mathcal{Y}_Y \mu_Y^2 - \mu_Y \mathcal{Y}_Y^2) + \mathcal{Y}_Y^2 \sigma_Y^2 - \mu_Y^4 + \mu_Y^2 \mathcal{Y}_Y^2 = 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

Nous allons maintenant montrer l'unicité de la solution de cette équation du troisième degré en Y_m . En effet, Haan, 1979, montre que, pour une loi log-normale :

$$g_{1Y} = 3CV_Y + CV_Y^3$$

où g_{1Y} est le coefficient de symétrie de Y et CV_Y le coefficient de variation ($CV_Y = \sigma_Y/\mu_Y$).

Pour une loi LN_3 , l'équation précédente devient :

$$g_{1(Y-Y_m)} = 3CV_{(Y-Y_m)} + CV_{(Y-Y_m)}^3$$

or : $g_{1Y} = g_{1(Y-Y_m)}$

d'où :

$$CV_{(Y-Y_m)}^3 + 3CV_{(Y-Y_m)} - g_{1Y} = 0 \quad (3-22)$$

Des considérations sur les solutions de cette équation du troisième degré en $CV_{(Y-Y_m)}$, sachant que $g_{1Y} > 0$, font que deux cas seulement sont envisageables :

- si cette équation a trois racines réelles, alors une est positive et les deux autres négatives
- s'il n'y a qu'une racine réelle et deux racines complexes conjuguées, alors la racine réelle est positive.

Or, seules les racines positives sont, dans notre cas, acceptables. En effet, $CV_{(Y-Y_m)}$ est positif puisque l'on travaille sur des valeurs positives, $Y - Y_m > 0$. Cette équation n'a donc qu'une seule racine réelle positive. On en déduit l'unicité de $CV_{(Y-Y_m)}$, c'est-à-dire l'unicité de Y_m solution de (3-22) et de (3-21).

En fait, par souci de simplification et parce que, souvent en hydrologie et dans les sciences du sol, σ_Z est petit, on transforme les équations en :

$$(3-9) : \mu_Y = Y_m + \exp(\mu_Z)[1 + (1/2 \cdot \sigma_Z^2)] \quad (3-23)$$

$$(3-10) : \sigma_Y^2 = \exp(2\mu_Z) \cdot \sigma_Z^2 \quad (3-24)$$

$$(3-20) : \exp(\mu_Z) = Y - Y_m$$

Ce système simplifié d'équations conduit à :

$$Y_m = Y_Y - \frac{\sigma_Y^2}{2(\mu_Y - Y_Y)} \quad (3-25)$$

équation qui exprime Y_m en fonction des deux premiers moments et de la médiane de Y , avec $\mu_Y - Y_Y > 0$.

La méthode et les raisonnements précédents s'appliquent de la même manière au cas d'une distribution log-normale inverse à 3 paramètres. Dans ce cas, l'équation (3-25) s'écrit encore, avec $\mu_Y - Y_Y < 0$:

$$Y_M = Y_Y - \frac{\sigma_Y^2}{2(\mu_Y - Y_Y)} \quad (3-26)$$

Dans la pratique, soit un échantillon de N valeurs, y_i , $i = 1$ à N , dont on veut tester, par exemple, s'il est issu d'une loi log-normale à 3 paramètres : $LN3(\mu_Y, \sigma_Y, Y_m)$.

Pour calculer y_m , estimateur de Y_m , on utilisera l'équation (3-25) où les estimateurs m_Y et s_Y de μ_Y et σ_Y seront calculés respectivement par les équations (3-5) et (3-6). Pour se prémunir d'échantillons petits, Sangal et Biswas préconisent l'utilisation, comme estimateur de la médiane, de la moyenne arithmétique du cinquième central de l'échantillon. Soit la moyenne de tous les yc_i tels que :

$$\text{Int}(.4*N) < i < \text{Int}(.6*N)$$

où Int désigne la partie entière et yc_i les valeurs classées des y_i .

L'équation (3-25) devient alors :

$$y_m = M_{ey} - \frac{s_y^2}{2(m_y - M_{ey})}$$

On peut ensuite calculer les valeurs transformées associées, z_i , par :

$$z_i = \log(y_i - y_m) \text{ pour tout } i = 1 \text{ à } N$$

La connaissance des z_i permet le calcul, par les équations (3-5) et (3-6), des estimateurs m_z et s_z , ainsi que l'application des tests de normalité sur l'échantillon des z_i .

En cas de réponse positive à ces tests, les équations suivantes fourniront de meilleurs estimateurs des paramètres de la loi de distribution de la variable aléatoire Y :

$$m'_Y = y_m + \exp(m_z + 1/2 \cdot s_z^2)$$

$$s'^2_Y = \exp(2s_z^2 + 2m_z) - \exp(s_z^2 + 2m_z)$$

$$Mo'_Y = y_m + \exp(m_z - s_z^2)$$

$$Me'_Y = y_m + \exp(m_z)$$

Pour ne pas alourdir le texte, nous ne développerons pas les équations dans le cas d'un échantillon dont on veut tester s'il est issu d'une loi log-normale inverse à 3 paramètres. Les développements théoriques précédents ainsi que leur application pour une loi log-normale à 3 paramètres seront un guide suffisant à l'utilisateur potentiel.

Remarque : Notons que la méthode d'estimation de la médiane indiquée ci-dessus est différente de celle donnée par les formules (3-17) ou (3-18). Nous avons pourtant conservé ces deux formulations, en gardant en mémoire, lors de l'utilisation de l'estimateur, sa méthode de calcul. En outre, la pratique a montré que les différences entre les deux estimateurs étaient, dans notre cas, peu importantes.

C3-III) ASPECTS GEOSTATISTIQUES

Jusqu'à présent, les méthodes que nous avons utilisées pour décrire un phénomène naturel à l'échelle d'un domaine D étaient de type statistique, c'est-à-dire que l'on supposait l'indépendance des valeurs mesurées ou générées, entre elles et dans l'espace.

Mais ces dernières années ont vu se développer de nombreuses expérimentations "in-situ" dont les résultats mettent plus ou moins clairement en évidence une autocorrélation entre les observations. Cela conduit donc à utiliser d'autres méthodes d'analyse.

Parmi celles-ci, la théorie des variables régionalisées, V.A., proposée par Matheron, 1965, et fondée sur la théorie des fonctions aléatoires, F.A., permet d'étudier la variabilité spatiale de phénomènes naturels en tenant compte de la dépendance spatiale des observations.

Dans ce mémoire, nous nous sommes limités à l'application de cette théorie dans notre cas particulier d'intérêt. Aussi, ferons nous référence dans le texte à des ouvrages plus théoriques en nous contentant de rappeler les notions dont nous aurons besoin par la suite.

C3-III-A) Définitions et Terminologie

En vue de l'utilisation des concepts géostatistiques dans une simulation de Monte Carlo, nous allons présenter les notions nécessaires à la compréhension de notre méthode de génération de réalisations d'un processus aléatoire spatialement corrélé.

C3-III-A-1) Définitions et hypothèses de base

Comme nous l'avons dit, la théorie des variables régionalisées est fondée sur la théorie des fonctions aléatoires ou processus stochastiques. Dans R^2 , ou R^3 , un tel processus est également appelé champ aléatoire. Dans R , on utilise les termes de processus linéaire ou monodimensionnel.

Une fonction aléatoire se définit comme suit : à chaque point x_0 du domaine étudié est associée une variable aléatoire $Z(x_0)$, la valeur du phénomène $z(x)$ en x_0 en est une réalisation. Cette variable aléatoire $Z(x_0)$ est dépendante des V.A. associées aux points voisins de x_0 , contrairement aux hypothèses faites dans la partie précédente de ce même chapitre. L'ensemble de cette infinité de V.A. constitue une F.A., notée $Z(x)$ dont chaque réalisation définit une répartition du phénomène sur le domaine étudié.

Défini comme précédemment, le nombre de paramètres requis pour définir une F.A. est infini. Seules des hypothèses plus ou moins strictes de stationnarité et d'ergodicité vont permettre de réduire le nombre de paramètres de la F.A.. Dans la pratique, ces hypothèses permettent l'estimation de toutes les lois de distribution de la F.A. (inférence statistique) à partir d'une seule réalisation.

Hypothèse de stationnarité d'ordre 2 :

Hypothèse la plus sévère, elle se résume comme suit :

- l'espérance mathématique de la F.A. est constante dans tout le domaine

$$E[Z(x)] = \mu_Z \quad \forall x \in D \quad (3-27)$$

- la covariance centrée entre deux points x et $x+h$ ne dépend que du vecteur h

$$E[\{Z(x) - \mu_Z\}\{Z(x+h) - \mu_Z\}] = C(h) \quad \forall x \in D \quad (3-28)$$

où : $C(h)$ est la fonction de covariance.

Cette hypothèse est stricte en ce sens qu'elle suppose que la F.A., $Z(x)$ a une variance finie : $\sigma_z^2 = C(0)$.

Or, certains phénomènes naturels, le mouvement Brownien par exemple, ont une capacité de dispersion infinie. On est alors amené, pour décrire correctement ces phénomènes, à faire des hypothèses moins contraignantes.

Hypothèse intrinsèque :

- la première des deux hypothèses précédentes reste inchangée
- la deuxième hypothèse est appliquée aux accroissements, soit :

$$E\{[Z(x+h)-Z(x)]^2\} = 2\gamma(h) \quad \forall x \in D \quad (3-29)$$

où : $\gamma(h)$ est le semi-variogramme. Par la suite, nous utiliserons simplement le terme variogramme.

Remarque : Si $Z(x)$ est une F.A. stationnaire d'ordre 2, elle vérifie également l'hypothèse intrinsèque et l'on a :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (3-30)$$

Hypothèse d'ergodicité :

Rappelons que l'hypothèse d'ergodicité, introduite dans la première partie de ce chapitre, C3-I, est également nécessaire lorsque, dans la pratique, on cherche à inférer statistiquement un phénomène aléatoire spatialement corrélé à partir d'une seule réalisation.

Isotropie :

Enfin, un phénomène sera dit isotrope si $\gamma(h)$, et $C(h)$, ne dépendent que du module de h et non de sa direction :

$$\gamma(h) = \gamma(|h|) = \gamma(h)$$

C3-III-A-2) Définition du variogramme expérimental

- Le variogramme défini précédemment sur un domaine infini D, est le variogramme d'ensemble, soit, compte-tenu de l'hypothèse d'ergodicité :

$$\gamma(h) = 1/2 \cdot E[\{Z(x+h) - Z(x)\}^2] = 1/2D' \cdot \int_{D'} [Z(x+h) - Z(x)]^2 \cdot dx$$

où : D' représente l'intersection de D avec son translaté de -h.

- Dans la pratique, on travaille sur des surfaces bornées S, sur lesquelles l'estimation du variogramme d'ensemble est donnée par le variogramme régional, $\gamma_R(h)$, avec :

$$\gamma_R(h) = 1/2S' \cdot \int_{S'} [z(x+h) - z(x)]^2 \cdot dx$$

où : S' représente l'intersection de S avec son translaté de -h.

- Enfin, sur cette surface S, on ne connaît la valeur du phénomène qu'en un nombre fini, N, de points. On définit alors le variogramme expérimental par :

$$\gamma^*(h) = 1/2N'(h) \cdot \sum_i^{N'(h)} [z(x_i+h) - z(x_i)]^2 \quad (3-31)$$

où : N'(h) est le nombre de couples de données distantes de h.

- Les mêmes considérations conduisent à l'estimation de la fonction de covariance par :

$$C^*(h) = 1/N'(h) \cdot \sum_i^{N'(h)} [z(x_i+h) - m_Z][z(x_i) - m_Z] \quad (3-32)$$

où : m_Z est donné par (3-5)

Pour de plus amples développements sur ces différents estimateurs des valeurs théoriques d'ensemble, valeurs régionales et valeurs expérimentales, on pourra se reporter à Munoz-Pardo, 1987.

Remarque :

- Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous noterons les fonctions de covariance et variogrammes expérimentaux sans " * ".

- De plus, nous continuerons d'utiliser le terme "expérimental", pour désigner un variogramme calculé, pour une réalisation, en un nombre fini de points, même si dans notre cas, c'est un abus de langage puisque nous ne travaillerons que sur des valeurs générées.

- Enfin, nous représenterons, sauf cas explicite, non pas le variogramme, mais plutôt le variogramme normalisé par la variance expérimentale : $\gamma(h)/s^2$.

C3-III-A-3) Calcul et ajustement du variogramme expérimental

Soit une surface S , discrétisée en un certain nombre, N , de points en lesquels on connaît la valeur du processus aléatoire.

Le variogramme expérimental, calculé par l'équation (3-31), sera :

- soit global si l'on suppose le processus isotrope et que l'on prend en compte tous les couples de points distants de h
- soit directionnel si l'on ne considère que les couples de points distants de h dans un secteur angulaire privilégié.

Dans tous les cas, on exprime le variogramme comme une fonction de $|h| = h$.

Plusieurs méthodes de calcul sont alors possibles pour calculer $\gamma(h)$. Pour notre part, nous avons considéré des classes de distance de même largeur.

Dans ce cas, le nombre de couples, $N'(h)$, est différent d'une classe à l'autre et la distance h pour la classe considérée est calculée comme la valeur moyenne des distances entre les points des couples de la classe.

En outre, Journel et Huijbregts, 1978 montrent que $\gamma(h)$ est peu fiable si :

- * $h > L_g/2$ où L_g est une distance caractéristique de la surface S
- ou si :
- * $N'(h) < 50$

Nous ne conserverons donc dans nos résultats que les classes pour lesquelles $h < L_s/2$ et $N'(h) < 50$.

Sous les contraintes précédentes, le calcul du variogramme par (3-31) fournit donc un certain nombre de points du variogramme expérimental, couples $(h_i, \hat{\gamma}(h_i))$. L'étape suivante consiste à faire passer au plus près de ces points un modèle théorique de variogramme qui puisse représenter le phénomène aléatoire étudié. On montre, Christakos, 1984, que les modèles sphériques et exponentiels, entre autres, sont des modèles possibles de variogrammes théoriques.

Ils sont définis comme suit :

- Modèle sphérique :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(h) &= \sigma^2 \cdot [C_0 + C_1 \cdot \{ 3/2 \cdot h/a - 1/2(h/a)^3 \}] & \text{si } h < a \\ \hat{\gamma}(h) &= \sigma^2 \cdot C_2 & \text{si } h > a \end{aligned} \quad (3-32)$$

où :

- C_0 : effet de pépité
- $C_1 = C_2 - C_0$
- C_2 : palier
- a : portée

Remarque : Deux points situés à une distance supérieure à la portée ne sont plus corrélés.

- Modèle exponentiel :

$$\hat{\gamma}(h) = \sigma^2 \cdot [C_0 + C_1 \cdot \{ 1 - \exp(-h/ae) \}] \quad (3-33)$$

où :

ae est la longueur d'autocorrélation

Par la suite, en l'absence de données de terrain plus précises, nous utiliserons uniquement ce dernier modèle car il permet des développements analytiques simples. En outre son emploi dans la littérature est très répandu et son utilisation ne limitera en rien la généralité de nos résultats.

Contrairement au modèle sphérique, le modèle exponentiel tend asymptotiquement vers son palier. Néanmoins, on peut définir une portée équivalente par utilisation du concept d'échelle intégrale, J , introduit, dans R^2 , par Russo et Bresler, 1981 :

$$J = \left\{ 2 \cdot \int_0^{\infty} (1 - \gamma(r)/\sigma^2) \cdot r \cdot dr \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Le calcul montre que $J_{\text{exp}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot a_e$ et que $J_{\text{sph}} = 5^{-\frac{1}{2}} \cdot a$. Un modèle exponentiel de même échelle intégrale qu'un modèle sphérique sera donc tel que :

$$a_e = 10^{-\frac{1}{2}} \cdot a = a/3.16 \quad (3-34)$$

Cette relation nous permettra d'utiliser, pour un variogramme exponentiel, la notion de portée équivalente, a , définie par : $a = 3.16 a_e$.

On a alors :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \cdot [C_0 + C_1 \cdot \{1 - \exp(-3.16 \cdot h/a)\}] \quad (3-35)$$

Le choix du variogramme théorique étant fait, nous effectuerons son ajustement aux points du variogramme expérimental par une méthode semi-automatique de régression non-linéaire, Snedecor et Cochran, 1980 et d'ajustement visuel.

C3-III-B) Génération d'un Champ Aléatoire

Cette sous-partie a pour objectif d'exposer la méthode de génération que nous avons utilisée pour les simulations de Monte Carlo avec prise en compte de l'autocorrélation spatiale.

Ici, les statistiques d'ensemble, fixées par l'utilisateur de la méthode, sont quelques peu différentes de celles fixées précédemment. Nous

nous attacherons pour notre part à générer, dans R^2 , une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2 et isotrope. Pour ce faire, on fixe les propriétés statistiques d'ensemble, loi normale, moyenne μ_z , variance σ_z^2 par exemple, et l'on se donne de plus les caractéristiques de la fonction de covariance, modèle exponentiel de portée équivalente a , par exemple. Le problème se pose alors de générer des réalisations du processus aléatoire en un certain nombre, N , de points de notre surface finie d'étude, S .

C3-III-B-1) Présentation des différentes méthodes utilisées dans la littérature

On distingue principalement trois types de méthodes :

- Les méthodes matricielles ou multivariées décrivent l'espace R^n par un nombre prédéterminé de points et préservent la covariance uniquement entre ces points, Wilson, 1979.

Cette dernière propriété de ces méthodes pose un problème qui est résolu par la théorie des fonctions aléatoires où le champ aléatoire est caractérisé en tout point du domaine.

- Ainsi, les méthodes fondées sur l'analyse spectrale permettent de générer des réalisations de processus stationnaires en n'importe quel point de l'espace R^n , Shinozuka et Jan, 1972, Meija et Rodriguez-Iturbe, 1974a.

- La méthode des Bandes tournantes, introduite par Matheron, 1973, est également fondée sur la théorie des fonctions aléatoires. Elle utilise l'isotropie de la F.A. pour transformer une simulation multidimensionnelle en une somme de simulations monodimensionnelles associées.

Cette méthode que nous allons appliquer par la suite, a particulièrement été utilisée en génie minier pour des simulations dans R^3 , David, 1977, Journel et Huijbregts, 1978. En hydrologie et en sciences du sol où les applications sont le plus souvent dans R^2 , un degré de complexité théorique plus élevé a rendu, dans un premier temps, l'utilisation de cette méthode plus rare. On peut malgré tout citer, Chiles, 1977, Delhomme, 1979

qui utilisent cette démarche dans des cas particuliers de fonction de structure.

Pour surmonter ce degré de complexité plus important, Mantoglou et Wilson, 1982 ont développé, un générateur monodimensionnel pour les lignes tournantes fondé sur l'analyse spectrale. Ils ont également étendu leur méthode aux cas de processus non-isotropes et non-stationnaires, Mantoglou et Wilson, 1981.

Munoz-Pardo, 1987, a utilisé leurs résultats dans le cas stationnaire isotrope comme base de son travail. Il a ensuite introduit deux nouveaux générateurs dont l'un, (Approche Equiprobable), donne de meilleurs résultats en ce qui concerne le temps de calcul et la restitution de la fonction de structure, covariance ou variogramme.

Pourtant, notre choix d'une fonction de structure de type exponentiel, aux développements analytiques simples, nous a conduit à utiliser le générateur de Mantoglou et Wilson, d'application plus simple, que nous allons maintenant présenter.

C3-III-B-2) Méthode de Mantoglou et Wilson

C3-III-B-2.1) Présentation générale

Les processus stochastiques générés par cette méthode seront stationnaires d'ordre 2 et isotropes, avec une fonction de covariance fixée par l'utilisateur. En outre, en chaque point, les valeurs du champ aléatoire seront, dans un premier temps, distribuées selon une loi normale de moyenne nulle.

La méthode consiste à générer un certain nombre de processus linéaires sur des lignes réparties dans R^2 , au lieu de générer directement le champ aléatoire bidimensionnel. Ces processus linéaires auront une fonction de covariance monodimensionnelle associée à la fonction de covariance bidimensionnelle. En chaque point, la valeur du processus stochastique, pour la réalisation considérée, sera une somme pondérée des valeurs associées des processus linéaires générés sur les lignes.

Les étapes de la démarche sont les suivantes, figure 3-1 :

1) Génération de L lignes de vecteur unitaire u_1 , tiré dans une loi uniforme sur le cercle unité. C'est-à-dire que les angles, Θ_1 , entre la ligne 1 et l'axe Ox , sont tirés dans une loi uniforme entre 0 et 2π .

2) Génération, sur chaque ligne 1, d'un processus discret monodimensionnel stationnaire d'ordre 2, $Z_1(x)$, de moyenne nulle et de covariance $C_1(\beta)$ où β est l'abscisse le long de la ligne 1 et $C_1(\beta)$ la fonction de covariance monodimensionnelle associée à $C(h)$.

3) Correspondance entre un point x_p et sa valeur associée sur la ligne 1. Soit x_p un point de l'espace où l'on veut générer le processus aléatoire, et x_p son vecteur des coordonnées. La projection orthogonale de x_p sur la ligne 1, soit $\beta_{p1} = x_p \cdot u_1$ est l'abscisse, sur la ligne 1, associée au point x_p . La valeur du processus monodimensionnel y sera : $z_{11}(\beta_{p1})$.

4) Calcul de la valeur du processus aléatoire au point x_p . A chaque point x_p sont donc associées L valeurs, $z_{11}(\beta_{p1}) = z_{11}(x_p \cdot u_1)$, pour l de 1 à L . La valeur de la fonction aléatoire au point x_p sera donnée par :

$$z(x_p) = L^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_l^L z_{11}(x_p \cdot u_1) \quad (3-36)$$

Si les processus linéaires sont de moyenne nulle, alors le processus bidimensionnel sera de moyenne nulle.

Le nom de Bandes Tournantes vient du fait que, pour ne pas alourdir le calcul, les processus linéaires sont générés de manière discrète. Ainsi, à une valeur, $z_{11}(\beta)$, correspond en fait un intervalle $[\beta - \Delta\beta/2 ; \beta + \Delta\beta/2[$. La longueur $\Delta\beta$ de l'intervalle, ou bande, étant la même pour toutes les lignes, on obtient une bande tournante lorsque l'on fait tourner la ligne 1.

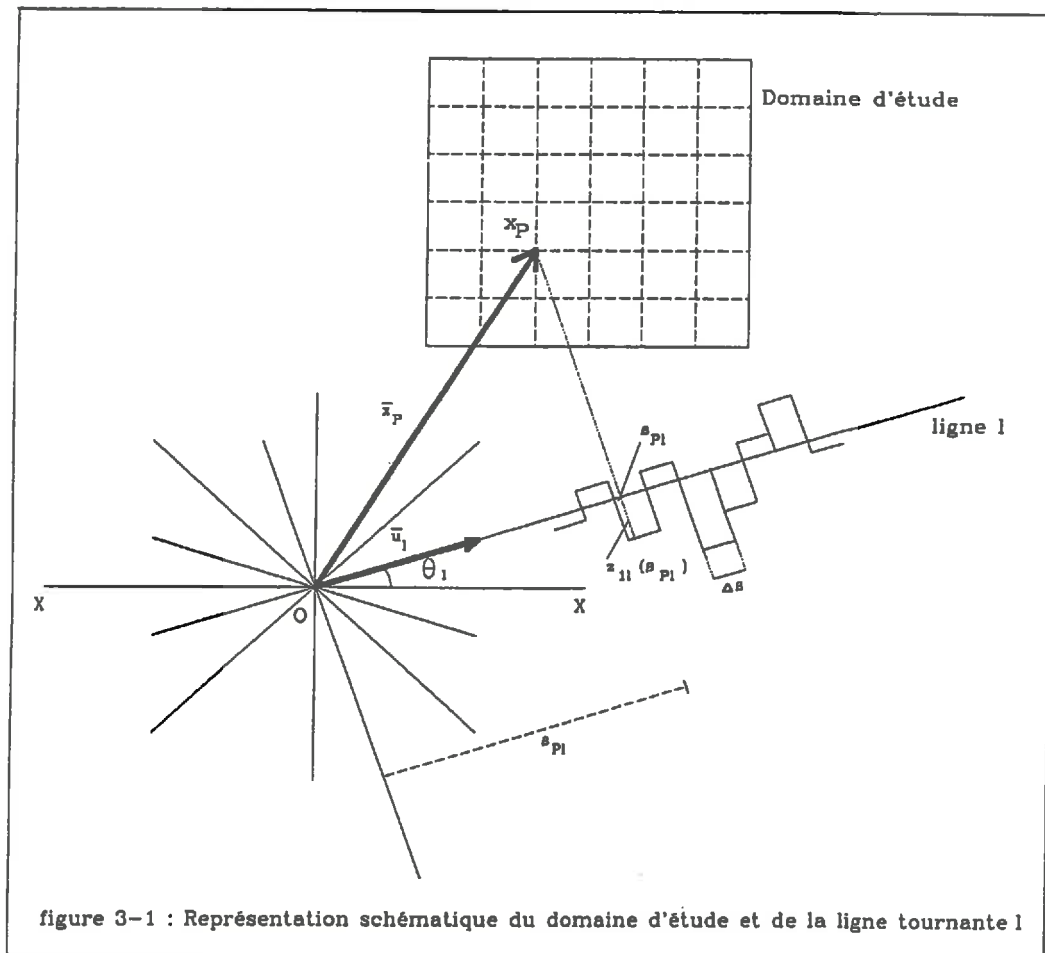


figure 3-1 : Représentation schématique du domaine d'étude et de la ligne tournante 1

La philosophie et les principales étapes de la méthode étant exposées, il est maintenant nécessaire de résoudre les deux problèmes suivants :

- la fonction de covariance bidimensionnelle étant fixée, quelle est la fonction de covariance monodimensionnelle associée
- Cette covariance étant calculée, comment générer un processus linéaire sur chaque ligne.

C3-III-B-2.2) Relation entre les fonctions de covariance

Soient x_1 et x_2 deux points de vecteurs coordonnées x_1 et x_2 , la fonction de covariance du champ généré par (3-36) est :

$$C(x_1, x_2) = E[Z(x_1) \cdot Z(x_2)] = L^{-1} \cdot \sum_l^L \sum_k^L E[Z_{1l}(x_1 \cdot u_l) \cdot Z_{1k}(x_2 \cdot u_k)]$$

Si les processus linéaires sont indépendants, les covariances sont toutes nulles sauf quand $l=k$, soit :

$$C(x_1, x_2) = L^{-1} \cdot \sum_l^L E[Z_{1l}(x_1 \cdot u_l) \cdot Z_{1l}(x_2 \cdot u_l)] = L^{-1} \cdot \sum_l^L C_1(h \cdot u_l) \quad (3-37)$$

où : $h = x_2 - x_1$

En effet, $C_1(h \cdot u_l) = E[Z_{1l}(x_1 \cdot u_l) \cdot Z_{1l}(x_2 \cdot u_l)]$ est la covariance monodimensionnelle du processus linéaire sur la ligne l entre les points $x_1 \cdot u_l$ et $x_2 \cdot u_l$, en supposant le processus stationnaire d'ordre 2 et de moyenne nulle.

Pour L grand, les u_l étant uniformément distribués sur le cercle unité, le membre de droite de l'équation (3-37) est uniquement fonction de h .

La fonction aléatoire générée par (3-36) est donc stationnaire d'ordre 2 et isotrope puisque :

$$C(x_1, x_2) = C(h) = C(h) = L^{-1} \cdot \sum_l^L C_1(h \cdot u_l)$$

où : $h = |h|$

Pour $L \rightarrow \infty$, on peut écrire :

$$C(h) = \lim [L^{-1} \cdot \sum_i C_1(h, u_i)] = E[C_1(h, u)] = \int_{cu} C_1(h, u) \cdot f(u) \cdot du$$

où :

- $f(u)$ est la fonction de densité de probabilité de u dans R^2 , pour une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, on a $f(u) = 1/2\pi$
- et l'intégrale est sur le cercle unité : C.U.

On obtient donc :

$$C(h) = 1/2\pi \cdot \int_{cu} C_1(h, u) \cdot du \quad (3-38)$$

Soit le repère orthonormé (x_1, i, j) , figure 3-2, où $j = (x_2 - x_1) / |x_2 - x_1|$.

Dans ce repère, si $\theta = \widehat{(i, u)}$, on a :

- $h \cdot u = h \cdot \sin \theta$
- $du = d\theta$

on obtient alors par changement de variable dans (3-37) :

$$C(h) = 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} C_1(h \cdot \sin \theta) \cdot d\theta \quad (3-39)$$

comme $C_1(\beta)$ est une fonction paire, l'intégrale précédente devient :

$$C(h) = 2/\pi \cdot \int_0^{\pi/2} C_1(h \cdot \sin \theta) \cdot d\theta \quad (3-40)$$

en effectuant maintenant le changement de variable : $\beta = h \cdot \sin \theta$, (3-40) devient :

$$C(h) = 2/\pi \cdot \int_0^h C_1(\beta) \cdot (h^2 - \beta^2)^{-1/2} \cdot d\beta \quad (3-41)$$

Contrairement au cas tridimensionnel où l'équation équivalente entre $C(h)$ et $C_1(\beta)$ permet d'obtenir de manière explicite $C_1(\beta)$ en fonction de $C(h)$, l'équation obtenue ici est une équation intégrale difficile à résoudre, sauf dans des cas particuliers de covariance bidimensionnelle. En outre, ces cas particuliers conduisent à des covariances linéaires difficilement modélisables, Mantoglou et Wilson, 1981. L'utilisation de

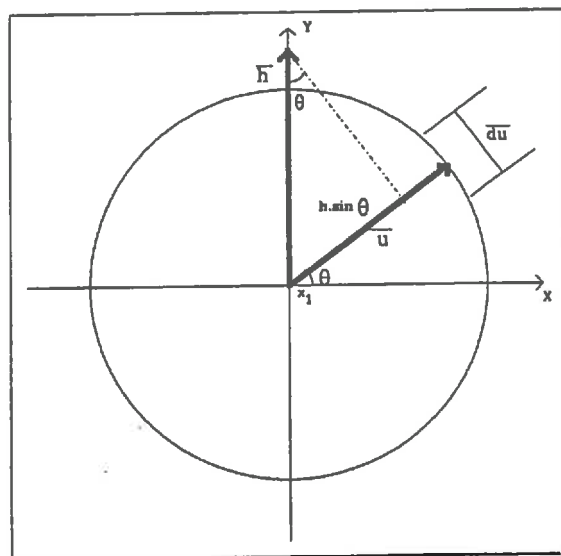


figure 3-2 : Repère orthonormé $(x_1 \vec{i}, \vec{j})$, cercle unité et projection de \vec{h}

techniques d'analyse spectrale permet par contre, comme nous allons le voir, de contourner ce problème.

Notons enfin que des considérations mathématiques assurent que si $C(h)$ est une fonction de covariance bidimensionnelle, alors $C_1(\beta)$, donnée par (3-41), a les propriétés requises d'une fonction de covariance.

C3-III-B-2.3) Relation entre les fonctions de densité spectrale

Soient $S(\omega)$ et $S_1(\omega)$ les fonctions de densité spectrale associées respectivement aux fonctions aléatoires $Z(x)$ sur R^2 et $Z_1(x)$ sur R .

Si $Z_1(x)$ est réelle alors $C_1(\beta)$ et $S_1(\omega)$ sont deux fonctions réelles, symétriques et forment une paire de transformées de Fourier, soit :

$$C_1(\beta) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot \beta) \cdot S_1(\omega) \cdot d\omega \quad (3-42)$$

et

$$S_1(\omega) = 1/\pi \cdot \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot \beta) \cdot C_1(\beta) \cdot d\beta \quad (3-43)$$

en posant : $\beta = h \cdot \sin \theta$, (3-42) devient :

$$C_1(h \cdot \sin \theta) = 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot h \cdot \sin \theta) \cdot S_1(\omega) \cdot d\omega \quad (3-44)$$

par substitution dans l'équation (3-40), on obtient :

$$C(h) = 2/\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \left\{ 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot h \cdot \sin \theta) \cdot S_1(\omega) \cdot d\omega \right\} \cdot d\theta$$

et par permutation des ordres d'intégration, on trouve :

$$C(h) = 4/\pi \cdot \int_0^{\infty} S_1(\omega) \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos(\omega \cdot h \cdot \sin \theta) \cdot d\theta \right\} \cdot d\omega \quad (3-45)$$

$J_0(x) = 2/\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(x \cdot \sin \theta) \cdot d\theta$ étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro, (3-45) devient :

$$C(h) = 2 \cdot \int_0^{\infty} S_1(\omega) \cdot J_0(\omega \cdot h) \cdot d\omega \quad (3-46)$$

L'utilisation de la transformée de Hankel, Sneddon, 1951, conduit à :

$$S_1(\omega) = \omega/2 \cdot \int_0^{\infty} C(h) \cdot J_0(\omega \cdot h) \cdot h \cdot dh \quad (3-47)$$

Cette équation relie donc la fonction de densité spectrale du processus linéaire de chaque ligne tournante à la fonction de covariance, fixée, du processus bidimensionnel.

Mais, de même que $C_1(\beta)$ et $S_1(\omega)$, $C(h)$ et $S(\omega)$, si la F.A. $Z(x)$ est isotrope, forment une paire de transformées de Fourier et l'on a, Mantoglou et Wilson, 1981 :

$$C(h) = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} J_0(\omega \cdot h) \cdot S(\omega) \cdot \omega \cdot d\omega \quad (3-48)$$

$$S(\omega) = 1/2 \cdot \int_0^{\infty} J_0(\omega \cdot h) \cdot C(h) \cdot h \cdot dh \quad (3-49)$$

La comparaison des équations (3-47) et (3-49) conduit à :

$$S_1(\omega) = \omega \cdot \pi \cdot S(\omega) \quad (3-50)$$

qui relie la fonction de densité spectrale de la F.A. bidimensionnelle à la fonction de densité spectrale de la F.A. monodimensionnelle associée.

Ainsi, le choix d'un modèle de covariance fixe la fonction $C(h)$ et permet ensuite de calculer :

- la fonction de densité spectrale $S(\omega)$, par l'équation (3-49) ou par des tables de transformées de Fourier
- la fonction de densité spectrale $S_1(\omega)$ du processus linéaire associé, (3-50).

La connaissance de cette fonction nous permet alors de générer, par une méthode d'analyse spectrale, un processus linéaire sur chaque ligne tournante ayant $S_1(\omega)$ comme fonction de densité spectrale et $C_1(\beta)$ comme fonction de covariance. On peut ensuite générer, par l'équation (3-36), une réalisation de la F.A. bidimensionnelle $Z(x)$. Nous nous proposons maintenant de décrire la méthode de génération des valeurs $z_{11}(\beta)$ sur les lignes tournantes.

C3-III-B-2.4) Génération de la F.A. monodimensionnelle

Mantoglou et Wilson, 1982 proposent ici d'utiliser la méthode spectrale de Shinozuka et Jan, 1972, où la valeur sur la ligne 1, en β , s'écrit :

$$z_{11}(\beta) = 2 \cdot \sum_k^M [S_1(\omega_k) \cdot \Delta\omega]^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\omega_k' \cdot \beta + \phi_k) \quad (3-51)$$

où :

- la fonction de densité spectrale est supposée symétrique et nulle en dehors de l'intervalle $[-\Omega, +\Omega]$

- la fréquence de discrétisation $\Delta\omega$ est prise égale à Ω/M , où M est le nombre d'harmoniques considérées

- $\omega_k = (k-1/2) \cdot \Delta\omega$ et $\omega_k' = \omega_k + \delta\omega$ pour $k = 1$ à M

$\delta\omega$ est une petite fréquence aléatoire introduite pour éviter des périodicités.

Elle est tirée dans une loi uniforme sur $[-\Delta\omega'/2, +\Delta\omega'/2]$ avec $\Delta\omega' \ll \Delta\omega$
Shinozuka et Jan proposent $\Delta\omega' = \Delta\omega/20$.

- ϕ_k sont des angles indépendamment tirés dans une distribution uniforme entre 0 et 2π

Par substitution de l'équation (3-51) dans l'équation (3-36), on trouve l'expression de la valeur du processus stochastique bidimensionnel en x_p :

$$z(x_p) = 2 \cdot L^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_p^L \sum_k^M [S_1(\omega_k) \cdot \Delta\omega]^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\omega_{k1}'(x_p \cdot u_1) + \phi_{k1}) \quad (3-52)$$

Shinozuka et Jan, 1972 ont montré que le processus donné par (3-51) est ergodique et gaussien, et ce même pour un nombre fini de lignes. Dans ce cas, pourtant, une erreur est introduite. Nous y reviendrons.

Ils ont également montré que le processus est de moyenne nulle et de fonction de covariance $C_1(\beta)$ quand M et Ω tendent vers l'infini et $\Delta\omega$ tend vers zéro. Dans la pratique M et Ω ont des valeurs grandes mais finies et $\Delta\omega$ est non-nul, ce qui introduit une erreur que nous détaillerons par la suite.

La génération discrète du processus linéaire est une autre source d'erreur. En effet, pour une raison de rapidité de calcul, la formule (3-51) est utilisée pour générer des valeurs au milieu des segments définis par les bandes le long de chaque ligne. Ces valeurs sont ensuite appliquées sur tout le segment.

Une autre méthode consiste à générer des valeurs aux points correspondant aux projections orthogonales des points de la surface étudiée sur les lignes. Mais cette méthode entraîne un fort accroissement du temps de calcul et n'est, en général, pas suivie dans la littérature.

On peut encore citer comme sources d'erreur la discrétisation de la fonction de densité spectrale et le nombre, toujours fini, de réalisations générées.

Mantoglou et Wilson, 1982 traitent ces différentes sources d'erreurs et conseillent alors l'emploi de leur méthode dans des conditions optimales d'utilisation. Nous présentons ici leurs conclusions :

- Répartition et nombre de lignes

Ils montrent que :

- * si un jeu de lignes est généré aléatoirement à chaque réalisation et en chaque point, le processus généré n'est pas ergodique

- * si un même jeu de lignes est utilisé pour tous les points à chaque réalisation, mais si les lignes sont tirées aléatoirement dans une loi

uniforme entre 0 et 2π , comme cela est exposé jusqu'à présent, le processus généré est ergodique, l'erreur entre la covariance vraie et la covariance simulée est non-biaisée et la variance de cette erreur tend vers zéro comme $1/L$.

* si les lignes sont uniformément réparties entre 0 et 2π , les équations introduites précédemment sont encore applicables et :

- l'erreur entre la covariance vraie et la covariance simulée est légèrement biaisée, en $1/L^2$
- la variance de cette erreur tend vers zéro en $1/L^2$.

Dans la suite, et malgré le léger biais, cette configuration, avec la première ligne prise telle que : $\theta_1 = 0$, sera préférée en raison de sa plus rapide convergence.

Un nombre de 16 lignes assure, dans ces conditions, une excellente restitution de la fonction de covariance.

- Intervalle de discrétisation sur les lignes : $\Delta\beta$

Mantoglou et Wilson étudient également, dans le cas d'une fonction de covariance bidimensionnelle exponentielle, l'influence sur la restitution de la fonction de covariance monodimensionnelle du pas de discrétisation sur chaque ligne tournante, $\Delta\beta$.

L'étude de sensibilité montre que la restitution est bonne si :

$$.05 \text{ ae} < \Delta\beta < .20 \text{ ae}$$

où : ae est la longueur d'autocorrélation du processus bidimensionnel.

Dans nos simulations, nous prendrons :

$$\Delta\beta = \min(.10 \text{ ae} ; .25 \Delta x)$$

où : Δx est le pas d'espace de la grille carrée sur laquelle nous générerons les valeurs.

Cette borne supérieure tenant compte du pas d'espace minimise le pas de discrétisation sur la ligne dans le cas d'une longueur de corrélation grande par rapport à la longueur d'un côté de la surface discrétisée.

- Approximations dans la génération par l'analyse spectrale du processus monodimensionnel

Nous avons vu que les valeurs finies de M et Ω introduisent également une erreur dans la génération.

Mantoglou et Wilson préconisent les valeurs suivantes :

$$\Omega = 40.ae^{-1} \text{ et } M = 100$$

qui, dans le cas d'une fonction de covariance bidimensionnelle exponentielle, restituent bien la variance et la corrélation à des distances grandes par rapport à la longueur d'autocorrélation ae .

Nous avons choisi d'utiliser le générateur de Mantoglou et Wilson en tenant compte de leur étude de sensibilité, Mantoglou et Wilson, 1982, pour nous placer dans un cas optimum.

C3-III-C) Choix d'une Réalisation Optimale "Moyenne"

C3-III-C-1) Méthodologie

La méthode de génération d'une réalisation d'un champ aléatoire spatialement corrélé, décrite ci-dessus, nécessite un temps de calcul bien plus conséquent que la méthode de génération d'une réalisation d'un champ aléatoire non spatialement corrélé telle que nous l'avons exposée dans la deuxième partie, C3-II-A, de ce chapitre.

Aussi, pour des raisons analogues à celles citées en C3-II-A-4, serons nous encore amenés à choisir une réalisation optimale.

Sharma et al., 1987 ont également adopté cette démarche bien que conscients des problèmes théoriques qu'elle soulève et de la perte d'informations qu'elle entraîne. Ces auteurs retiennent comme réalisation optimale, la réalisation, parmi 50, qui minimise la somme des carrés des écarts entre le variogramme expérimental de la réalisation et le variogramme théorique.

Pour notre part, si l'on effectue un nombre NR de réalisations et si l'on note :

- $z^i(x)$ la $i^{\text{ème}}$ réalisation de la F.A. gaussienne $Z(x)$ de moyenne nulle et de variance unité
- $z^i(x_p)$ la valeur de la $i^{\text{ème}}$ réalisation du processus stochastique bidimensionnel en x_p

la réalisation optimale sera la F.A. $Y(x)$, telle que :

$$Y(x) = NR^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_i^{NR} z^i(x) \quad (3-56)$$

la valeur de la F.A. $Y(x)$ en x_p sera alors :

$$y(x_p) = NR^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_i^{NR} z^i(x_p) \quad (3-57)$$

Pour la réalisation générée on a alors :

$$m_Y = NR^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_i^{NR} m_z^i \quad (3-58)$$

$$s_Y^2 = NR^{-1} \cdot \sum_i^{NR} s_z^i^2 + NR^{-1} \cdot \sum_i^{NR} \sum_j^{NR} \text{cov}(z^i, z^j) \quad (3-59)$$

$$\gamma_Y(h) = NR^{-1} \cdot \sum_i^{NR} \gamma_z^i(h) + NR^{-1} \cdot \sum_i^{NR} \sum_j^{NR} \gamma_z^{ij}(h) \quad (3-60)$$

où :

- $\text{cov}(z^i, z^j)$ est la covariance entre z^i et z^j , soit :

$$\text{cov}(z^i, z^j) = (N-1)^{-1} \cdot \sum_p^N [(z^i(x_p) - m_z^i)(z^j(x_p) - m_z^j)]$$

- $\gamma_z^{ij}(h)$ est le covariogramme expérimental entre z^i et z^j , soit :

$$\gamma_z^{ij}(h) = (2 \cdot N'(h))^{-1} \cdot \sum_p^{N'(h)} [z^i(x_p+h) - z^i(x_p)][z^j(x_p+h) - z^j(x_p)]$$

Mais les réalisations i et j sont indépendantes, donc les valeurs théoriques de $\text{cov}(z^i, z^j)$ et de $\gamma_z^{ij}(h)$ sont nulles. Dans la pratique, les valeurs expérimentales seront faibles mais non nulles.

Aux valeurs de bruit expérimental près, on peut donc écrire :

$$m_Y = NR^{-1/2} \cdot \sum_L^{NR} m_Z^i \neq 0 \quad (3-61)$$

$$s_Y^2 = NR^{-1} \cdot \sum_L^{NR} s_Z^i \neq 1 \quad (3-62)$$

$$\gamma_Y(h) = NR^{-1} \cdot \sum_L^{NR} \gamma_Z^i(h) \quad (3-63)$$

puisque m_Z^i et s_Z^i sont des estimateurs de μ_Z et σ_Z qui valent 0. et 1. respectivement.

La fonction aléatoire $Y(x)$, définie ci-dessus est donc une F.A. gaussienne de moyenne nulle, de variance égale à l'unité et de fonction de structure la fonction de structure théorique imposée.

Pour la réalisation considérée, m_Y et s_Y sont des estimateurs de μ_Y et σ_Y respectivement, avec $\mu_Y=0$ et $\sigma_Y=1$. $\hat{\gamma}_Y(h)$, moyenne d'ensemble des variogrammes des NR réalisations tend, lorsque NR est grand, vers le variogramme théorique imposé.

C3-III-C-2) Exemple d'application

On trouvera figures 3-3 et 3-4, un exemple nous permettant de valider notre méthode de génération ainsi que le bien-fondé de notre méthode de choix d'une réalisation optimale.

Nous avons en effet généré, comme indiqué précédemment, une réalisation d'une fonction aléatoire $Y(x)$ à partir de 200 réalisations d'une F.A. $Z(x)$.

- La surface échantillonnée est une parcelle de $100 \times 100 \text{ m}^2$, le pas d'espace de la grille carrée est $\Delta x = 5 \text{ m}$, soit 400 points d'échantillonnage. On a généré 200 réalisations d'une F.A. de fonction de covariance bidimensionnelle exponentielle de portée équivalente $a=30 \text{ m}$.

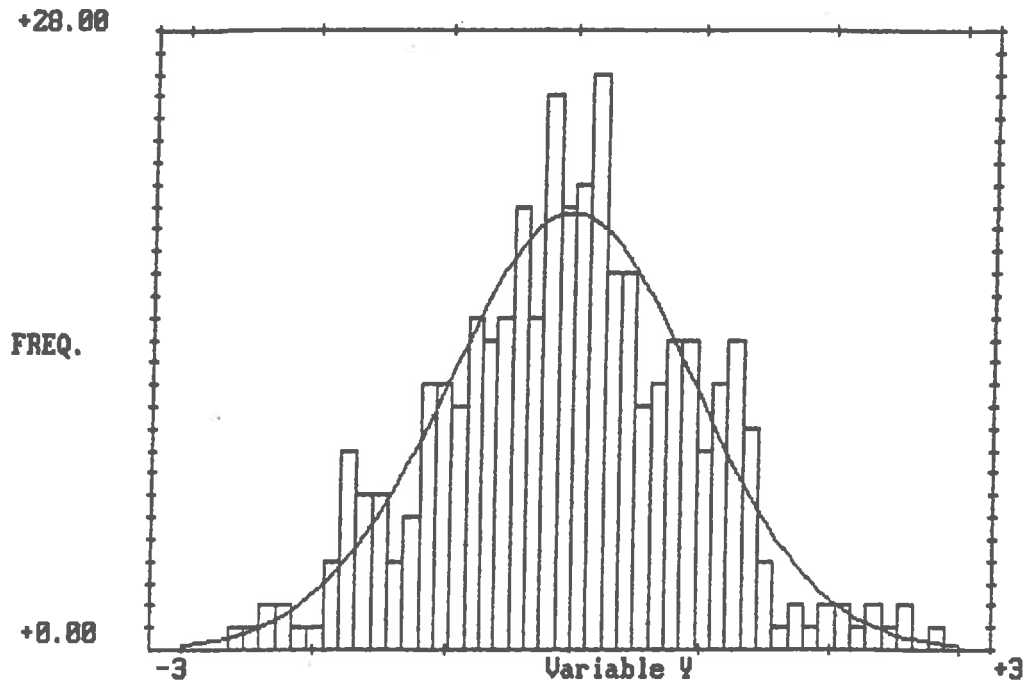


figure 3-3-a : Histogramme et courbe de Gauss de la réalisation de $Y(x)$

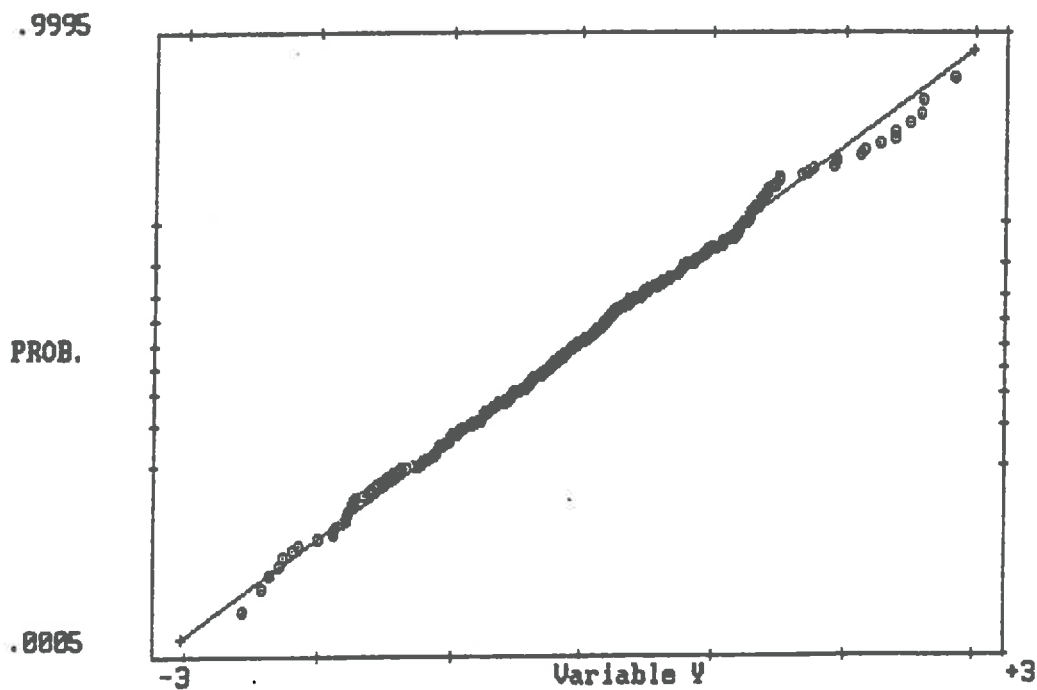


figure 3-3-b : Test graphique de normalité de la réalisation de $Y(x)$

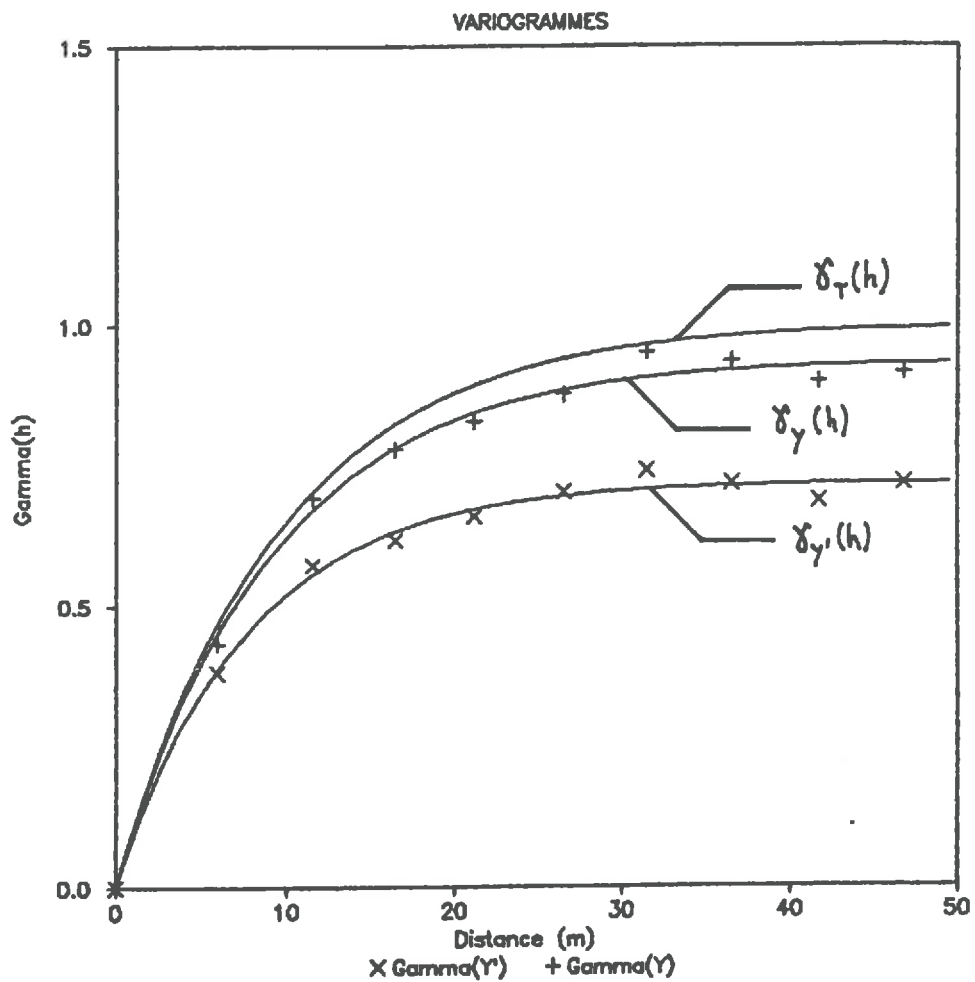


figure 3-4 : Variogrammes théorique, expérimentaux et calés sur les réalisations non-tronquée (Y) et tronquée (Y') de Y(x)

- La fonction de covariance bidimensionnelle exponentielle s'écrit dans ce cas :

$$C(h) = \sigma^2 \cdot \exp(-h/ae) \quad \text{avec} \quad ae = a/3.16 \quad (3-64)$$

- La fonction de densité spectrale monodimensionnelle $S_1(\omega)$ associée est alors, d'après l'équation (3-47) :

$$S_1(\omega) = 1/2 \cdot \sigma^2 \cdot \omega \cdot ae^2 \cdot [1 + \omega^2 \cdot ae^2]^{-3/2} \quad (3-65)$$

- Les valeurs des paramètres de la génération sont celles conseillées par Mantoglou et Wilson.

Le rapport entre la longueur caractéristique de la parcelle, $L_g=100m$, et la portée du phénomène généré, $a=30m$, est donc : $L_g/a=3.33$.

Dans son étude, Munoz-Pardo, 1987 montre que la valeur de ce rapport est importante pour l'estimation des paramètres d'une fonction aléatoire et que si $L_g/a > 2$, ce qui est le cas ici, cette estimation est bonne et l'inférence statistique acceptable.

Les paramètres statistiques de la réalisation de 400 valeurs de la F.A. $Y(x)$ sont :

$$\begin{aligned} m_Y &= -.0248 \\ s_Y &= .9723 \\ g_{1Y} &= 4.85 \cdot 10^{-2} \\ g_{2Y} &= 2.971 \end{aligned}$$

On constate un bon accord :

- d'une part entre ces valeurs et leurs valeurs théoriques respectives : 0, 1, 0 et 3. D'où un histogramme et un tracé sur un papier de Gauss, figure 3-3, très proches de ceux d'une loi normale.

Sur la figure 3-3, la courbe de Gauss, (3-3-a), et la droite, (3-3-b), correspondent à une loi normale théorique de moyenne, la moyenne expérimentale de la réalisation, et de variance, la variance expérimentale.

- d'autre part, figure 3-4, entre le variogramme théorique ($\hat{\gamma}_T$), et le variogramme expérimental (+). En effet, sur les neuf points, $N_p=9$, du

variogramme expérimental, l'écart quadratique moyen, EQM, entre le variogramme théorique et le variogramme expérimental :

$$EQM = [N_p^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{N_p} \{ \gamma_T(h_j) - \gamma_Y(h_j) \}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3-66)$$

vaut : $EQM = 5.55 \cdot 10^{-2}$.

Dans l'expression précédente,

- $\gamma_T(h_j)$ est la valeur du variogramme théorique, calculé par (3-35), à la distance h_j
- $\gamma_Y(h_j)$ la valeur du variogramme expérimental, calculé par (3-31), à cette même distance.

Sur la figure 3-4, nous n'avons tracé le variogramme expérimental que jusqu'à des distances $h = 50$. $m = L_s/2$, car l'on sait que les points situés à une distance supérieure seraient entachés d'une grande fluctuation et difficilement interprétables.

Comme en C3-II-A-3, nous avons été amenés à tronquer les valeurs extrêmes des réalisations générées. Cet exemple nous permet de montrer l'influence d'une troncature sur les paramètres statistiques et géostatistiques d'une réalisation.

Ainsi, pour l'exemple précédent, une troncature à ± 2 a été effectuée. Cette troncature conduit à une nouvelle réalisation, de 383 points (17 points ont donc été supprimés), ayant comme paramètres statistiques :

$$\begin{aligned} m_Y' &= -.0351 \\ s_Y' &= .8594 \\ g_{1Y}' &= 6.13 \cdot 10^{-2} \\ g_{2Y}' &= 2.410 \end{aligned}$$

Les paramètres statistiques de la réalisation les plus modifiés par la troncature sont, on le comprend aisément, l'écart-type et le coefficient d'aplatissement qui sont réduits de respectivement 12. et 19.7 . On

trouvera l'histogramme et le tracé sur papier de Gauss de la réalisation tronquée figure 3-5.

Cette troncature entraîne également quelques modifications au niveau de la structure. Ainsi, le calage d'un variogramme de type exponentiel sur les points des variogrammes expérimentaux conduit aux valeurs suivantes :

- pour la réalisation non-tronquée, (Y) :

pépite : $C_{0Y} = 0$.

palier : $Pa_Y = s_Y^2 \cdot C_{2Y} = .934$; $C_{2Y} = .989$

portée : $a_Y = 28.81$ m

EQM : $2.16 \cdot 10^{-2}$

- pour la réalisation tronquée, (Y') :

pépite : $C_{0Y'} = 0$.

palier : $Pa_{Y'} = s_{Y'}^2 \cdot C_{2Y'} = .719$; $C_{2Y'} = .975$

portée : $a_{Y'} = 24.60$ m

EQM : $1.75 \cdot 10^{-2}$

On constate une réduction de la portée de 15% et une réduction du palier du variogramme non-normalisé par la variance de 23%.

Les points des variogrammes expérimentaux de la réalisation non-tronquée, (+), et de la réalisation tronquée, (x), ainsi que les variogrammes exponentiels théoriques calés sur ces points, $\hat{\gamma}_Y(h)$ et $\hat{\gamma}_{Y'}(h)$ respectivement, sont représentés figure 3-4.

Nous retiendrons que si la troncature dénature quelque peu l'échantillon généré, elle demeure indispensable pour le passage à des valeurs ayant un sens physique dans le cas de fortes variabilités. Nous avons donc appliqué cette méthode dans toutes nos générations en tronquant toutes les réalisations de F.A. $N(0,1)$ et $N(0,1,a)$ à ± 2 .

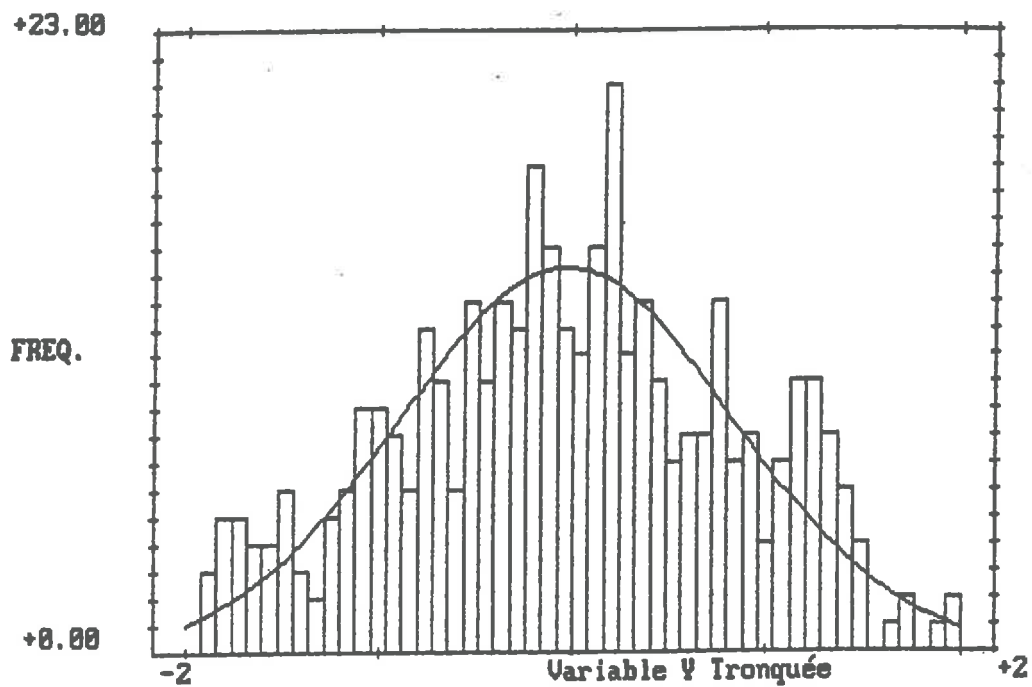


figure 3-5-a : Histogramme et courbe de Gauss de la réalisation tronquée

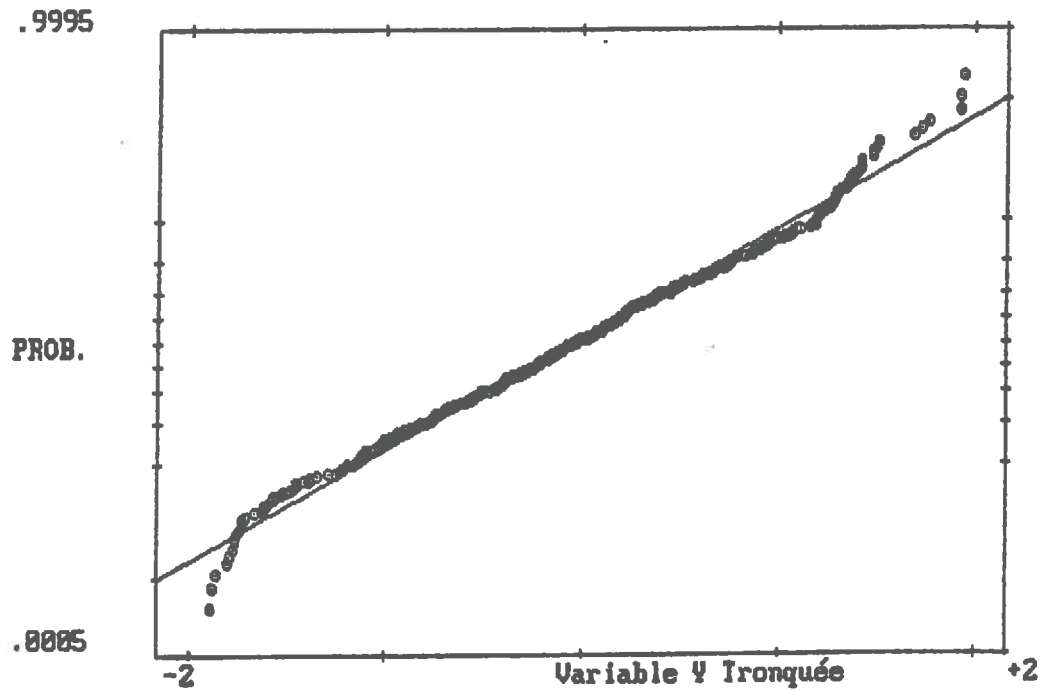


figure 3-5-b : Test graphique de normalité de la réalisation tronquée

C3-III-D) Variogramme Expérimental d'une distribution asymétrique

C3-III-D-1) Méthodologie

Si l'on peut toujours calculer un variogramme expérimental, Hamlett et al., 1986 ont souligné les dangers d'une interprétation trop rapide d'un tel variogramme si l'on ne s'assure pas auparavant, que les hypothèses de base, sur la stationnarité notamment, sont vérifiées. Dans ce cadre, et en accord avec de Marsily, 1984, ils préconisent le calcul du variogramme sur des réalisations symétriques.

de Marsily, 1984 donne, dans le cas d'une variable distribuée selon une loi log-normale, deux raisons à une transformation du type $Z = \log Y$:

- i) Comme Matheron l'a montré, la structure du phénomène est plus explicite si l'on travaille sur la variable transformée
- ii) Dans le cas d'une distribution log-normale, la moyenne géométrique, dont le logarithme est la moyenne arithmétique des logarithmes, est un meilleur estimateur du comportement moyen. Le passage aux logarithmes permet ainsi de travailler, comme on le fait habituellement, avec des valeurs de moyennes arithmétiques et d'avoir une équivalence simple en termes de moyennes géométriques.

Lorsqu'au cours de nos analyses nous avons eu à calculer des variogrammes expérimentaux sur des réalisations dissymétriques à coefficient de symétrie positif ou négatif, nous avons d'abord cherché, par la méthode exposée en C3-II-B-2 de ce chapitre, la transformation logarithmique qui rendait la réalisation plus proche d'une réalisation issue d'une loi gaussienne. Puis, nous avons calculé le variogramme expérimental sur les valeurs transformées.

C3-III-D-2) Exemple d'application

On trouvera figures 3-6 et 3-7 et tableau 3-1, un exemple d'application de la méthode proposée en C3-II-B-2, ainsi que les variogrammes expérimentaux calculés sur les valeurs brutes et transformées

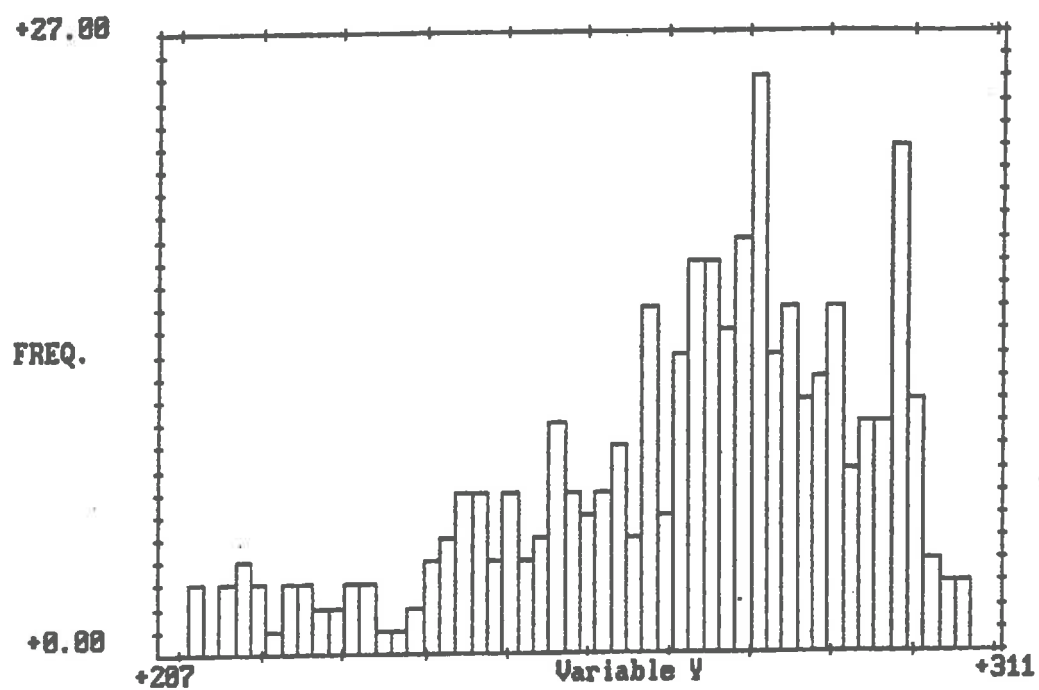


figure 3-6 : Histogramme des valeurs brutes : Y

et normés par la variance expérimentale des réalisations respectives, figure 3-8.

La réalisation des valeurs brutes de la F.A. Y, dont on trouvera l'histogramme, figure 3-6, a comme paramètres statistiques les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} m_Y &= 272.19 \\ s_Y &= 21.67 \\ g_{1Y} &= -.837 \\ g_{2Y} &= 3.162 \end{aligned}$$

La forme de l'histogramme et la valeur négative du coefficient de symétrie nous conduisent à rechercher une valeur Y_M telle que la réalisation des valeurs transformées, $z = \log(Y_M - y)$, puisse être issue d'une loi normale. L'utilisation de la méthode et des équations développées en C3-II-B-2 conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} Y_M &= 330.60 \\ m_Z &= 4.00 \\ s_Z &= .36 \\ g_{1Z} &= 9.3 \cdot 10^{-2} \\ g_{2Z} &= 2.428 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m'_Y &= 272.20 \\ s'_Y &= 21.84 \\ Mo'_Y &= 282.61 \\ Me'_Y &= 275.90 \end{aligned}$$

où les estimateurs m'_Y , s'_Y , Mo'_Y et Me'_Y sont calculés, à l'aide des formules de correspondance, à partir des estimateurs Y_M , m_Z et s_Z .

L'histogramme et le test graphique de normalité de l'échantillon des valeurs transformées, figure 3-7, ainsi que le test, au seuil de 5%, sur la valeur de g_{1Z} , montrent que l'on peut supposer que cette réalisation est issue d'une loi normale.

La faible valeur du coefficient d'aplatissement, $g_{2Z}=2.428$, vient du fait que l'exemple pris ici est le résultat de transformations sur une

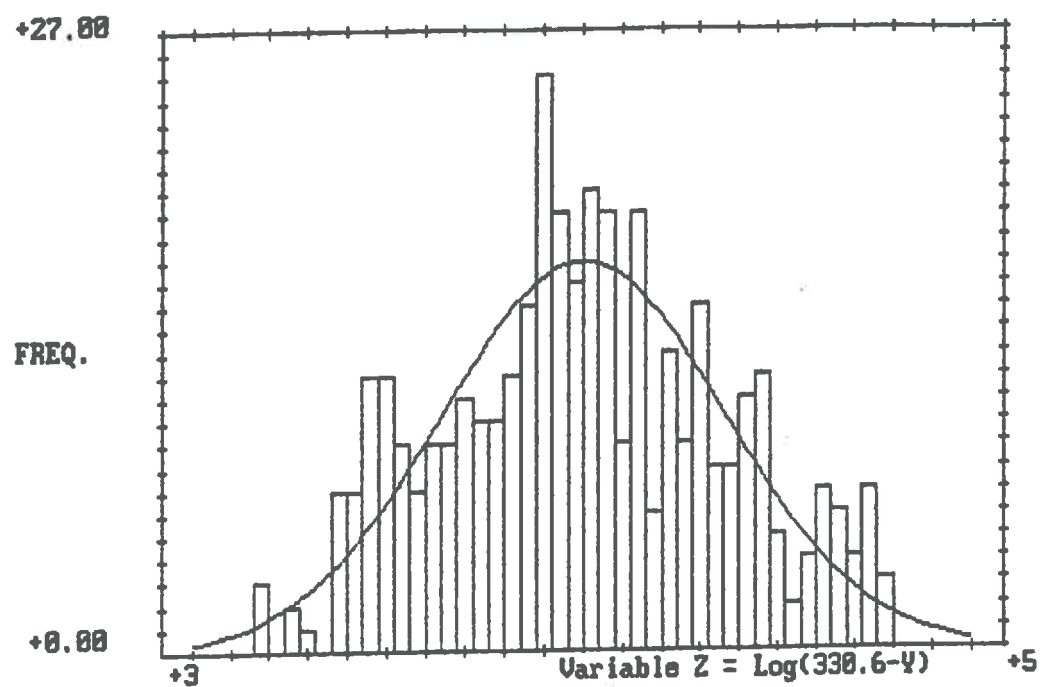


figure 3-7-a : Histogramme des valeurs transformées :
 $Z = \log(Y_M - Y)$

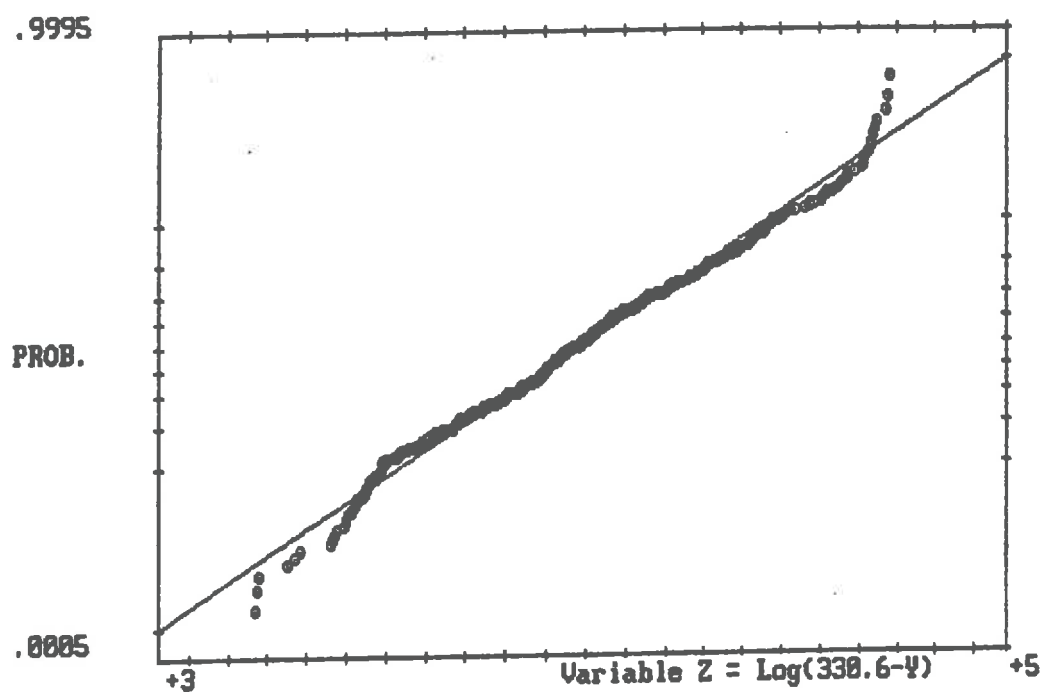


figure 3-7-b : Test graphique de normalité sur les valeurs transformées :
 $Z = \log(Y_M - Y)$

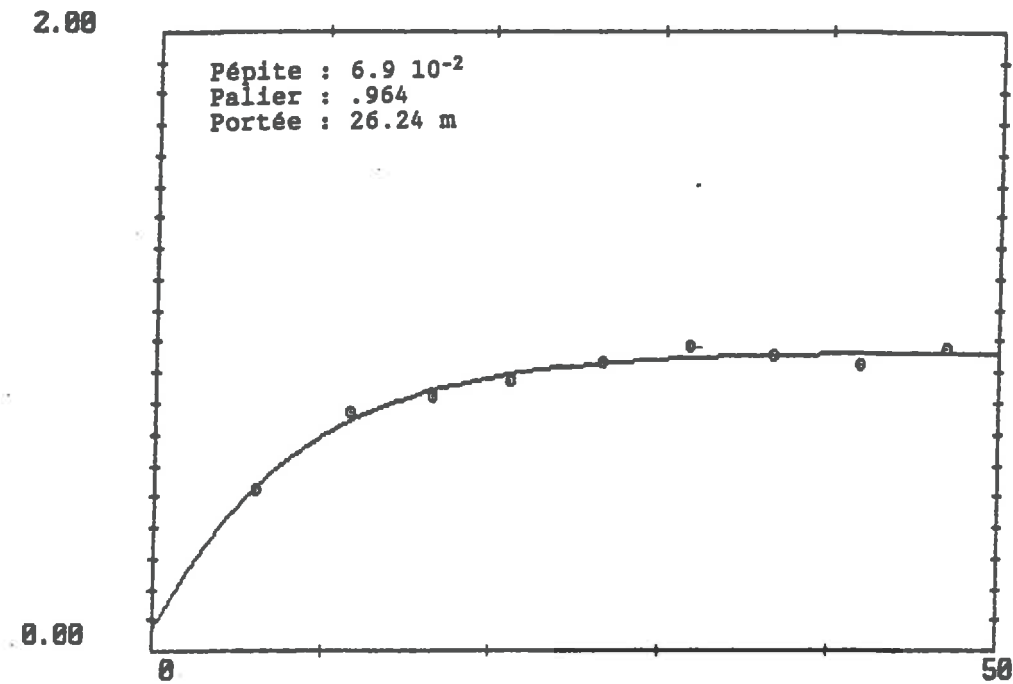


figure 3-8-a : Variogramme expérimental normé des valeurs brutes : Y

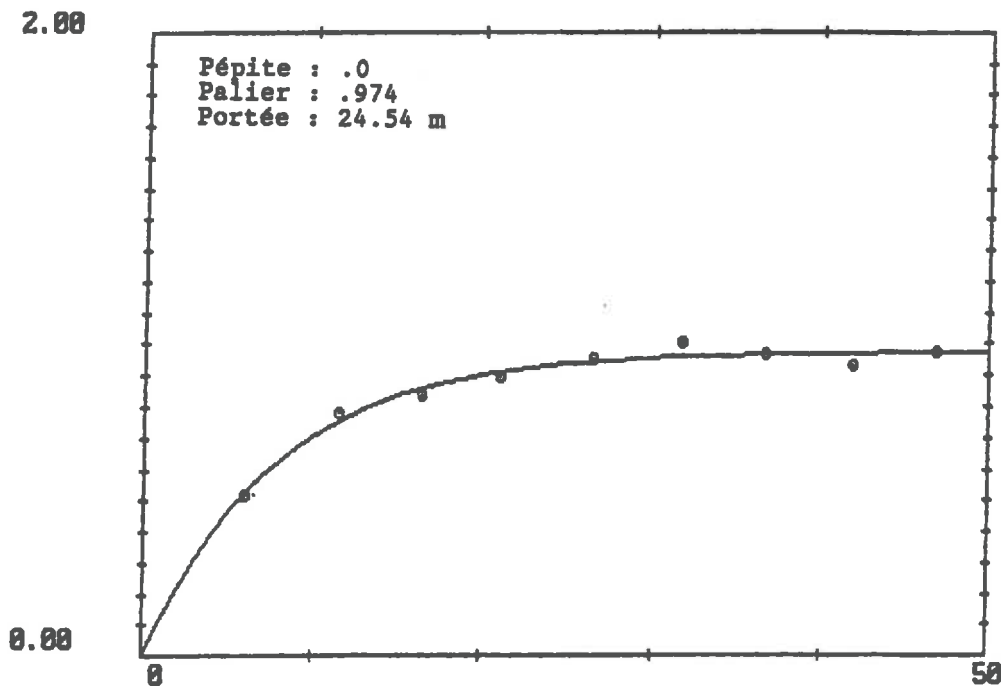


figure 3-8-b : Variogramme expérimental normé des valeurs transformées :
 $Z = \log(Y_M - Y)$

réalisation tronquée. Or, on a vu précédemment qu'une troncature entraînait une réduction du coefficient d'aplatissement.

Au niveau de la structure, le tableau 3-1 donne les valeurs des paramètres du variogramme exponentiel normé par la variance de la réalisation et calé sur les points expérimentaux. EQM est calculé à partir des variogrammes normés.

	Y	Z
pépite	$6.9 \cdot 10^{-2}$	0.
palier	.964	.974
portée	26.24	24.54
EQM	$2.31 \cdot 10^{-2}$	$2.36 \cdot 10^{-2}$

Tableau 3-1: valeurs des paramètres du variogramme calé

Cet exemple montre une tendance que nous avons observée lors de toutes nos transformations de ce type, à savoir :

- une réduction de l'effet de pépite
- une réduction de la portée.

C3-III-E) Conclusion Partielle

En conclusion de ce chapitre de présentation théorique des méthodes que nous allons maintenant appliquer sur le site expérimental de Bouaké, nous retiendrons les points suivants.

Tout d'abord, pour une réalisation donnée, une part importante de l'écart entre les valeurs théoriques imposées des paramètres statistiques et géostatistiques et les valeurs expérimentales obtenues, est due à la troncature effectuée sur les réalisations mathématiques issues de l'application des différentes méthodes de génération. Cette troncature réduit la variance donc le palier du variogramme, le coefficient

d'aplatissement et la portée de la réalisation considérée. Elle aura donc des effets similaires sur les sorties du modèle. Ceci étant dit, cette troncature, imposée par la physique, ne modifiera pas les conclusions que l'on pourra tirer.

En outre, nous pouvons souligner, sur le plan de la modélisation, le degré de complexité et le coût informatique bien supérieurs des méthodes de génération des champs aléatoires spatialement corrélés. Sur le plan pratique, le recours à ces notions théoriques impose également un coût supérieur en main d'oeuvre et en travail de terrain pour la détermination expérimentale des différents paramètres que, faute de données et en raison de la méthodologie employée, nous avons générés dans ce mémoire.

A l'issue des résultats de nos simulations, il faudra garder en mémoire ces coûts supérieurs lorsque nous fournirons une réponse aux questions que nous nous sommes posés à la fin du premier chapitre sur le caractère nécessaire d'une simulation stochastique fonctionnelle des bilans hydriques à l'échelle d'une parcelle agronomique d'une part, et sur la prise en compte, dans une telle simulation, de l'autocorrélation spatiale des variables d'entrée du modèle d'autre part.

CHAPITRE 4

RESULTATS DES SIMULATIONS STOCHASTIQUES

Dans ce quatrième chapitre, nous allons présenter les résultats des simulations stochastiques que nous avons effectuées. Notre objectif est, rappelons-le, d'étudier l'influence de la variabilité spatiale des paramètres d'entrée du modèle, tels que la réserve en eau utile, la vitesse de croissance racinaire et le vecteur pentadaire des coefficients cultureux, sur les sorties du modèle en termes de consommation en eau par la plante et de pertes en eau par le réservoir, sur l'ensemble du cycle et par période.

Pour ce faire, nous avons été amenés à établir différents scénarios correspondant à :

- des situations géostatistiques
- des degrés de variabilité
- des environnements climatiques

que nous nous sommes imposés compte-tenu du cadre réel de BOUAKE dans lequel nous avons travaillé.

Dans un premier temps, nous allons rappeler les résultats de simulations déterministes afin de préciser les valeurs qui nous serviront de référence dans notre comparaison entre les approches déterministe et stochastique de la modélisation du bilan hydrique.

C4-I) RAPPEL SUR LES RESULTATS DETERMINISTES

Dans le cadre de l'expérimentation menée à Bouaké en 1986, nous avons choisi de travailler sur le site B₂T₁, en lui assignant une nouvelle valeur de la RU, soit :

$$RU_{det} = .565 \text{ mm/cm}$$

qui correspond à la valeur moyenne de la RU sur l'ensemble des 15 sites neutroniques introduits en C2-II-B.

Ce choix, purement subjectif, n'affecte bien évidemment en rien la généralité de nos résultats.

Les données climatiques seront, dans un premier temps, les données réelles mesurées sur le site. Par la suite, C4-III-E, nous étudierons l'influence de la pluviométrie en termes de pluie cumulée sur l'ensemble du cycle, et de répartition dans le temps de cette pluviométrie. Soit S₀, le spectre pluviométrique de référence, P(J) la pluie du jour J et P_{0c} = 400 mm, la pluie cumulée sur le cycle. On trouvera, figure 4-1, le spectre de pluie correspondant.

Le tableau 4-1, résultat d'une simulation déterministe, fournit les valeurs moyennes par décade d'ETM, d'ETR et de D, en mm/j, ainsi que l'évapotranspiration maximale, la consommation et les pertes cumulées sur l'ensemble du cycle de 110 jours, ETM_c, ETR_c et D_c, en mm.

On trouvera également dans ce tableau, les valeurs de l'indice de satisfaction par période IS_p ainsi que les valeurs de l'indice de satisfaction sur l'ensemble du cycle IS_c, Forest et Kalms, 1984, Forest et Reyniers, 1985, 1986.

IS_p et IS_c sont respectivement définis par :

$$IS_p(I_p) = 1/NJ_p \cdot \sum_J^{NJ_p} ETR_{Ip}(J)/ETM_{Ip}(J) \quad (4-1)$$

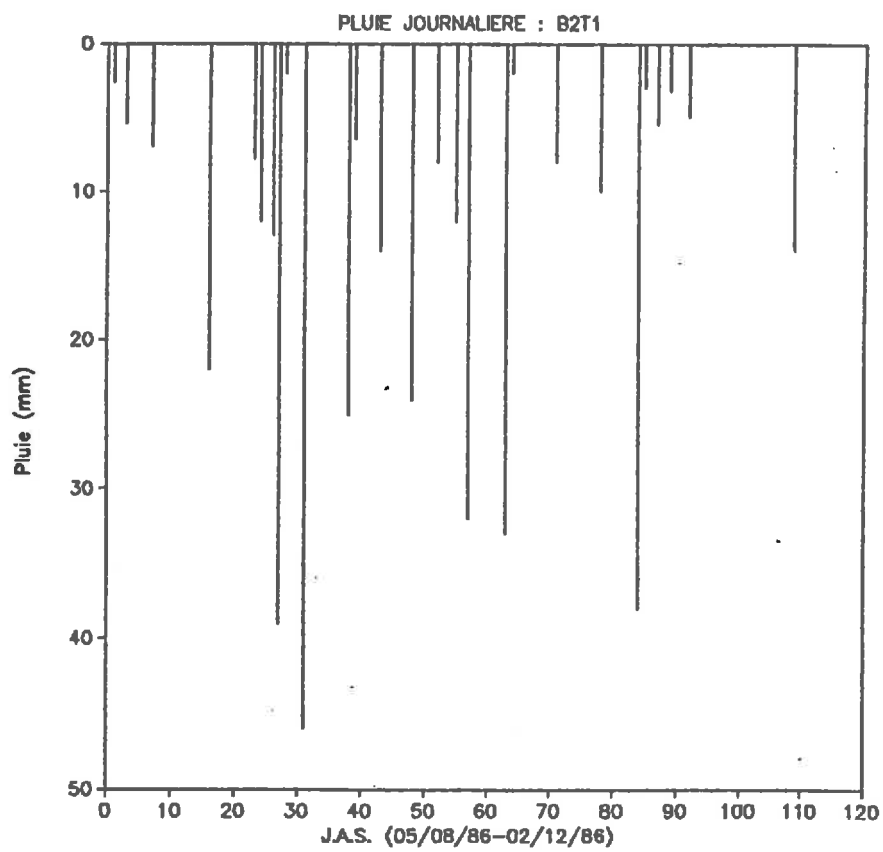


figure 4-1 : Spectre pluviométrique de référence : S_0

- où :
- NJ_p est le nombre de jours par période, ici 10 jours
 - $ETR_{Ip}(J)$ est l'ETR, calculée par (2-5), du J ème jour de la I_p ème période
 - $ETM_{Ip}(J)$ est l'ETM, calculée par (2-7), du J ème jour de la I_p ème période

et :

$$IS_C = 1/NJ_C \cdot \sum_J^{NJ_C} ETR(J)/ETM(J)$$

$$= 1/NP \cdot \sum_{I_p}^{NP} IS_p(I_p) \quad (4-2)$$

- où :
- NP est le nombre de périodes du cycle
 - NJ_C est la durée en jours du cycle ($NJ_C = NP \times NJ_p$)

Période (JAS)	ETM (mm/j)	ETR (mm/j)	D (mm/j)	IS _p (%)
1-10	1.39	1.38	0.00	99.9
11-20	0.85	0.85	1.01	100.0
21-30	1.78	1.77	5.55	99.7
31-40	2.38	2.36	5.32	99.3
41-50	4.30	3.90	0.95	92.2
51-60	6.33	4.69	1.27	74.2
61-70	6.77	3.74	0.56	58.9
71-80	6.19	2.08	0.00	36.7
81-90	4.86	3.00	0.07	71.1
91-100	4.44	2.78	0.00	65.5
101-110	3.92	1.16	0.00	31.3
	ETM _C (mm)	ETR _C (mm)	D _C (mm)	IS _C (%)
Cycle	432.0	277.1	147.3	75.3

tableau 4-1 : valeurs moyennes par période et cumulées sur le cycle

La figure 4-2 donne, les courbes correspondantes des valeurs moyennes d'ETR, d'ETM et de D par décade, en mm/j.

On observe que, sur les quatre premières décades, la consommation se fait à l'ETM : l'eau n'est pas un facteur limitant. En outre, la pluviométrie

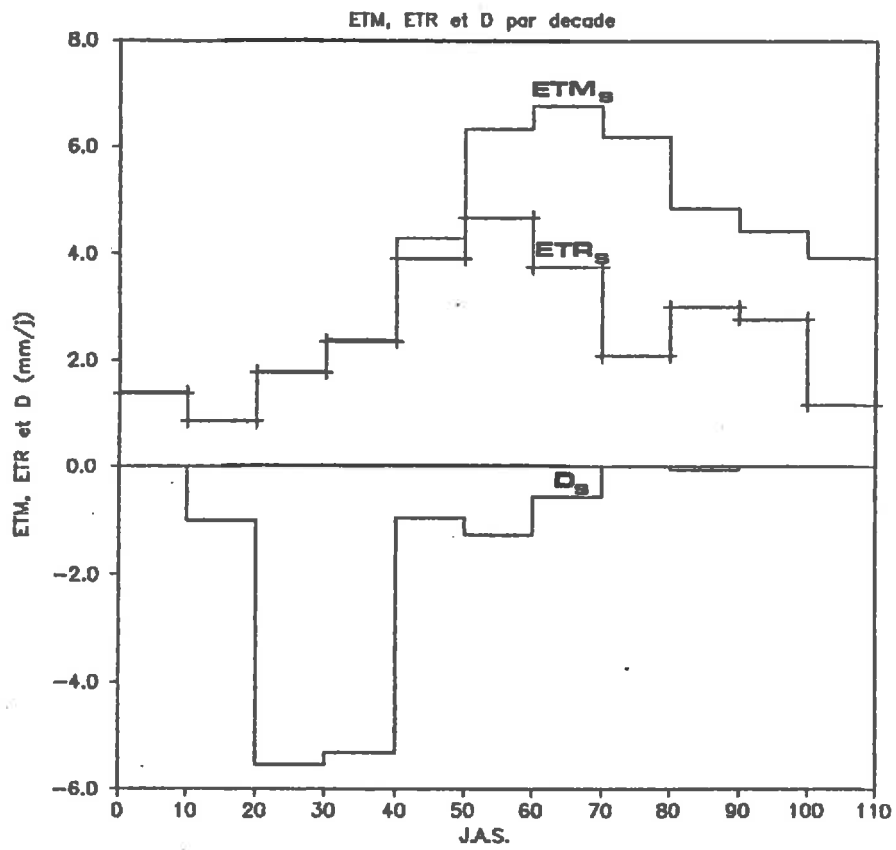


figure 4-2 : Valeurs moyennes par decade d'ETM, d'ETR et de D en mm/j

étant particulièrement forte durant les troisième et quatrième décades, les pertes en eau pour le réservoir sont très grandes. Ces fortes valeurs de D peuvent, par lixiviation, entraîner des pertes minérales dommageables pour le bon développement ultérieur de la plante. Mais cet aspect n'est pas pris en compte par le modèle considéré.

A partir de la sixième décade, la consommation ne se fait plus à l'ETM. L'eau devient alors un facteur limitant, notamment durant la huitième décade où l'indice de satisfaction tombe à 37.7. Sur l'ensemble du cycle, l'indice de satisfaction vaut 75.7.

Dans un premier temps, nous allons estimer, dans la situation climatique de référence S_0 , la sensibilité du modèle à des entrées stochastiques sur la RU. Nous regarderons ensuite l'évolution de cette sensibilité en fonction de différentes situations climatiques. Nous présenterons enfin les résultats de simulations stochastiques dans lesquelles la vitesse de croissance racinaire, CJ , puis le vecteur des coefficients cultureux, K_c , sont également des fonctions aléatoires.

C4-II) SIMULATIONS DE MONTE CARLO SUR LA RESERVE UTILE

C4-II-A) Présentation des Résultats

Nous avons ici adopté la démarche suivante, El Kadi, 1987 :

- sur la parcelle introduite précédemment, C3-III-C-2, de $L_s^2 = 100 \times 100 \text{ m}^2$, nous avons considéré un plan d'échantillonnage à maille carrée de :
 $\Delta x = \Delta y = 5.0 \text{ m}$, soit 400 points d'échantillonnage.

- sur cette parcelle, supposée être une parcelle agronomique réelle, nous avons alors envisagé quatre fonctions de structure pour la réserve en eau utile.

Le tableau 4-2 fournit les caractéristiques des fonctions de structure théoriques utilisées :

	Type	Portée a (m)	L_s/a
cas 1	sans	0.	oo.
cas 2	exponentiel	10.	10.
cas 3	exponentiel	30.	3.33
cas 4	exponentiel	50.	2.

tableau 4-2 : Caractéristiques des fonctions de structure théoriques

La fonction aléatoire est de plus supposée gaussienne :

- de moyenne :

$$\mu_{RU} = .565 \text{ mm/cm}$$

- et d'écart-type :

$$\sigma_{RU} = .1695 \text{ mm/cm}$$

- soit un coefficient de variation :

$$CV_{RU} = 30.7$$

Pour la génération, nous avons en fait considéré, dans un premier temps, une fonction aléatoire associée de moyenne nulle et de variance égale à l'unité : $N(0,1,a)$. Les variogrammes théoriques associés, pour les quatre valeurs de a, sont donnés figure 4-3.

Pour chaque fonction de structure nous avons alors généré 200 réalisations du processus stochastique considéré.

- Dans le cas 1, la méthode de génération utilisée est celle décrite en C3-II-A.

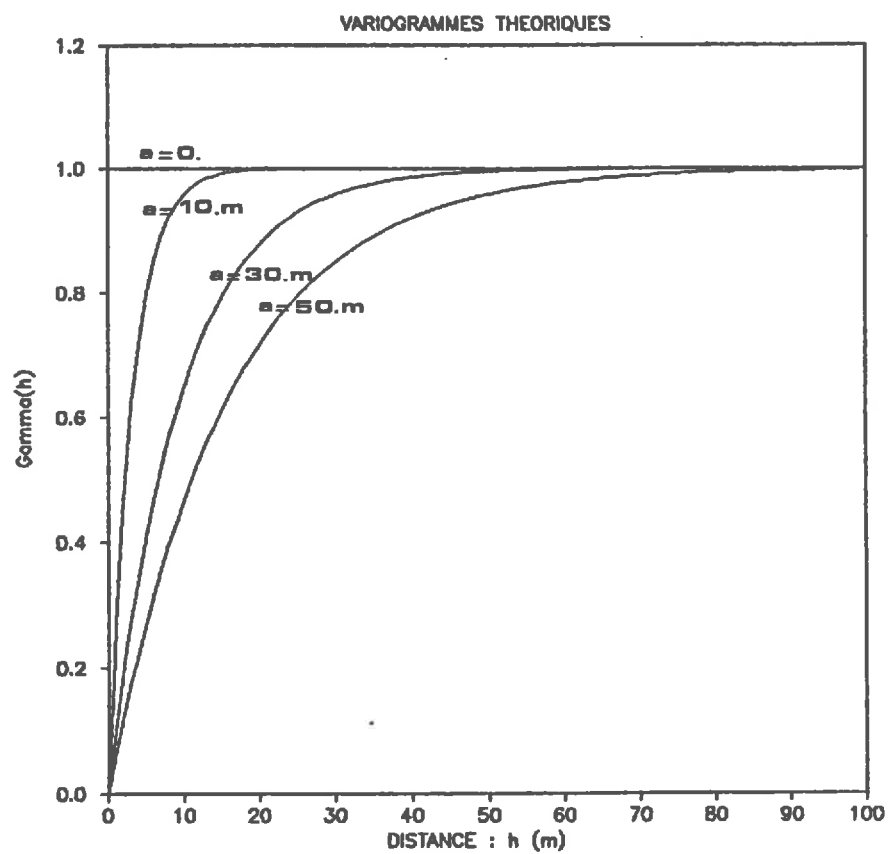


figure 4-3 : Variogrammes exponentiels théoriques considérés

- Pour tous les autres cas, nous avons utilisé la méthode des bandes tournantes avec le générateur monodimensionnel de Mantoglou et Wilson, 1981 en nous plaçant dans les conditions optimales décrites par ces auteurs, C3-III-B-2.

Pour mémoire, ces conditions sont :

- NB=16 lignes tournantes uniformément réparties entre 0 et 2π avec $\Theta_1=0$.
- M=100 harmoniques pour discrétiser la fonction de densité spectrale monodimensionnelle
- $\Omega = 40/ae$ (avec $ae=a/3.16$) fréquence au-delà de laquelle la fonction de densité spectrale est prise nulle
- $\Delta\beta = \min(.10ae ; .25 \Delta x)$ largeur des bandes tournantes

Pour les trois cas où le phénomène est spatialement corrélé, (a différent de zéro), et à l'aide des 200 réalisations $Z^i(x)$, nous avons généré une réalisation optimale "moyenne" par la formule (3-56).

Soit :

$$Y(x) = NR^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_i^{NR} Z^i(x)$$

Les propriétés de la réalisation optimale générée ci-dessus sont données en C3-III-C-1. Les valeurs des paramètres statistiques et géostatistiques de $Y(x)$ nous permettent de tester le code de génération et la simulation de Monte Carlo.

On trouvera donc, tableau 4-3, pour les cas 2 à 4, les valeurs des moyennes m_Y , écarts-types s_Y , coefficients de symétrie et d'aplatissement g_{1Y} et g_{2Y} , ainsi que les valeurs des pépites $P_{eY}=s_Y^2.C_{0Y}$, palier $P_{aY}=s_Y^2.C_{2Y}$ et portée équivalente a_Y , du variogramme exponentiel calé sur le variogramme expérimental de la réalisation.

On trouvera également dans ce tableau le rapport entre le palier et la variance expérimentale C_{2Y} , ainsi que la valeur de l'EQM, calculée par (3-66), entre le variogramme expérimental et le variogramme théorique.

Y	Val.Thé.	a=10.	a=30.	a=50.
my	0.	-.0406	-.0248	-.1355
sy	1.	.9947	.9723	.9535
S1Y	0.	.1030	4.85 10 ⁻²	2.31 10 ⁻²
S2Y	3.	3.458	2.971	2.951
Pey	0.	0.	0.	0.
Pay	1.	.959	.935	1.046
C2Y	1.	.969	.989	1.150
ay	a	9.33	28.81	45.96
EQM	0.	3.92 10 ⁻²	5.55 10 ⁻²	7.45 10 ⁻²

tableau 4-3 : Paramètres statistiques et géostatistiques de Y(x)

Dans ce tableau, tant au niveau des paramètres statistiques que géostatistiques, les valeurs expérimentales sont plus proches des valeurs théoriques si a est petit par rapport à L_s . Ceci est principalement vrai pour la moyenne, l'écart-type et l'EQM.

Ce résultat est en plein accord avec ceux de Munoz-Pardo, 1987 et de Smith et Freeze, 1979 notamment.

En effet, Munoz-Pardo montre que, dans une simulation d'une F.A., une bonne inférence statistique dépend :

- du nombre de réalisations
- du nombre de points d'échantillonnage ainsi que de leur répartition dans l'espace
- du rapport L_s/a

Ainsi, tout le reste étant égal par ailleurs, (200 réalisations, 400 points d'échantillonnage aux noeuds d'une grille carrée), il est normal que l'estimation des paramètres théoriques soit moins précise si L_s/a augmente.

Nous avons cependant considéré les résultats précédents comme satisfaisants pour la suite de notre étude, compte-tenu des objectifs fixés.

C4-II-B) Résultats des Simulations

Dans les quatre cas de structure, nous avons alors utilisé le modèle déterministe sur chacune des 200 réalisations issues des réalisations tronquées à ± 2 sur les lois $N(0,1,a)$.

Le tableau 4-4 donne ainsi, pour les quatre valeurs de a , les moyennes et écarts-types d'ensemble, sur les 200 réalisations, des moyennes et écarts-types spatiaux calculés à partir des valeurs de la RU sur les réalisations tronquées.

on notera que :

- m_{RU} et s_{RU} sont les moyennes et écarts-types spatiaux calculés, pour chaque réalisation, sur environ 380 points (à peu près 5% des valeurs générées dans une loi $N(0,1,a)$ sont extérieures à l'intervalle $[-2;+2]$).
- $\langle m_{RU} \rangle$ et $\text{sig}(m_{RU})$ sont les moyennes et écarts-types d'ensemble de m_{RU} sur les 200 réalisations.
- $\langle s_{RU} \rangle$ et $\text{sig}(s_{RU})$ sont les moyennes et écarts-types d'ensemble de s_{RU} sur les 200 réalisations.

Portée (m)	$\langle m_{RU} \rangle$ (mm/cm)	$\text{sig}(m_{RU})$ (mm/cm)	$\langle s_{RU} \rangle$ (mm/cm)	$\text{sig}(s_{RU})$ (mm/cm)
a= 0.	.564	.008	.150	.004
a=10.	.565	.007	.149	.005
a=30.	.564	.033	.145	.007
a=50.	.563	.049	.142	.011

tableau 4-4 : Moyennes et Ecarts-types d'ensemble

Chaque simulation sur une réalisation de la RU a alors fourni une réalisation d'environ 380 valeurs d' ETR_c et de D_c . La pratique montre, nous le verrons plus loin que les réalisations obtenues sont dissymétriques. Aussi, compte-tenu de C2-II-B, avons nous calculé sur chacune de ces

réalisations la médiane Me et l'inter-quartile IQ par les formules (3-17) à (3-19) suivant la parité du nombre de valeurs considérées.

A l'issue d'une simulation de Monte Carlo complète nous avons donc obtenu un échantillon de 200 valeurs de médianes et d'inter-quartiles.

Les tableaux 4-5 donnent, pour les quatre cas de structure envisagés, les valeurs moyennes et écarts-types d'ensemble, sur les 200 réalisations, des valeurs de la médiane et de l'inter-quartile obtenues sur chaque réalisation :

- $\langle Me_X \rangle$ et $\text{sig}(Me_X)$ pour les médianes
- $\langle IQ_X \rangle$ et $\text{sig}(IQ_X)$ pour les inter-quartiles

où X est successivement :

- ETR_C : ETR cumulée sur tout le cycle
- D_C : pertes en eau cumulées sur tout le cycle.

Portée (m)	$\langle Me_{ETR_C} \rangle$ (mm)	$\text{sig}(Me_{ETR_C})$ (mm)	$\langle IQ_{ETR_C} \rangle$ (mm)	$\text{sig}(IQ_{ETR_C})$ (mm)
a= 0.	277.00	1.25	29.55	2.00
a=10.	277.01	1.19	29.26	2.08
a=30.	276.97	4.61	28.40	3.75
a=50.	276.41	7.10	27.91	5.09

tableau 4-5-a : Moyennes et Ecart-types d'ensemble de Me_{ETR_C} et IQ_{ETR_C}

Portée (m)	$\langle Me_{D_C} \rangle$ (mm)	$\text{sig}(Me_{D_C})$ (mm)	$\langle IQ_{D_C} \rangle$ (mm)	$\text{sig}(IQ_{D_C})$ (mm)
a= 0.	147.55	2.08	38.70	2.37
a=10.	147.51	1.99	38.36	2.46
a=30.	147.89	6.67	37.29	4.27
a=50.	148.65	9.76	36.52	5.90

tableau 4-5-b : Moyennes et Ecart-types d'ensemble de Me_{D_C} et IQ_{D_C}

L'étude de ces tableaux conduit aux commentaires suivants :

* Moyennes spatiales de la RU :

- les moyennes d'ensemble des moyennes spatiales de la RU sont toujours très proches de la valeur théorique de la moyenne : $\mu_{RU} = .565 \text{ mm/cm}$.

- l'écart-type d'ensemble des moyennes spatiales est proche de zéro.

Il croît faiblement avec la portée du phénomène.

- le coefficient de variation, $CV = \text{sig}(m_{RU}) / \langle m_{RU} \rangle$, augmente de 1. à 9. % lorsque a augmente de 0. à 50. m.

* Ecart-types spatiaux de la RU :

- la moyenne d'ensemble tend à diminuer lorsque la portée croît

- l'écart-type d'ensemble croît avec la portée.

- le CV varie de 3. à 8. % lorsque a augmente de 0. à 50. m.

* Médianes spatiales des sorties : ETR_C et D_C :

- les valeurs moyennes des médianes spatiales ne sont pas sensibles à la valeur de la portée du phénomène aléatoire étudié.

- Par contre, ici encore, l'écart-type des échantillons des médianes croît avec la portée.

- le coefficient de variation de l'échantillon des médianes croît de .4 à 3. % pour l' ETR_C et de 1. à 7. % pour le D_C .

* Inter-Quartiles spatiaux des sorties : ETR_C et D_C :

- les moyennes d'ensemble des inter-quartiles spatiaux diminuent sensiblement quand la portée augmente.

- les écarts-types d'ensemble augmentent encore avec la portée.

- ces évolutions se conjuguent pour conduire à une plus forte augmentation du coefficient de variation avec la portée du phénomène : ainsi, pour l' ETR_C , $CV(IQ_{ETR_C})$ croît de 7. à 18. %, et pour le D_C , $CV(IQ_{D_C})$ croît de 6. à 16. % quand a croît de 0. à 50. m.

Dans tous les cas, $\langle Me_X \rangle$, avec X égal à ETR_C ou D_C , est proche de la valeur déterministe obtenue avec $RU=RU_{det}$, tableau 4-1. En effet, nous verrons que sur l'ensemble du cycle, et dans la gamme des variations de la RU envisagée, ETR_C est une fonction monotone croissante de la RU, et D_C une fonction monotone décroissante. Aussi, à la médiane d'un échantillon de RU correspondent les médianes respectives des échantillons de ETR_C et de D_C associés. Or, RU étant tirée dans une loi normale, $m_{RU} \neq Me_{RU}$, et comme μ_{RU} est égale à la valeur déterministe considérée, ($\mu_{RU}=RU_{det}=0.565$ mm/cm), Me_{ETR_C} et Me_{D_C} sont proches des valeurs obtenues avec la simulation déterministe.

Au niveau de la dépendance à la portée, ces résultats sont tout à fait cohérents avec ceux d'El Kadi, 1987 et de Smith et Freeze, 1979, a, b. En effet, la méthode de génération d'une fonction aléatoire utilisée n'est qu'asymptotiquement ergodique. Ainsi, lorsque l'on génère le champ sur un domaine fini, (notre parcelle de 100×100 m²), en un nombre fini de points, (400 points), le champ généré sera d'autant moins ergodique que le rapport L_s/a entre la longueur caractéristique de la parcelle et la portée du phénomène sera petit, (a grand par rapport à L_s).

- Lorsque L_s/a est grand, (a petit), le processus est pratiquement ergodique, les statistiques spatiales d'une réalisation quelconque sont proches des statistiques d'ensemble et les différences entre deux réalisations sont petites : $sig(Me_X)$ et $sig(IQ_X)$ sont donc faibles.

- lorsque L_s/a est petit, (a grand), la valeur de la RU en un point est fortement corrélée avec les valeurs des points voisins.

Ce fait a tendance :

- * à diminuer la variabilité au sein d'une même réalisation, diminution de $\langle IQ_X \rangle$ avec la portée
- * à accroître cette variabilité entre réalisations, augmentation de $sig(Me_X)$ et de $sig(IQ_X)$ avec la portée.

Dans la pratique ces résultats ont les conséquences suivantes :

* Si la portée est faible :

- Il faut un certain nombre de points, donné par la théorie statistique, pour estimer le comportement moyen de la parcelle à un niveau de confiance donné.

- L'extrapolation des résultats obtenus sur la parcelle d'étude (une réalisation) à une autre parcelle voisine (une autre réalisation) est possible.

* Si la portée du phénomène croît :

- Il faudra moins de points pour estimer le comportement moyen de la parcelle à ce même niveau de confiance, nombre N de points donné par la théorie géostatistique.

- Mais, l'extrapolation à une autre parcelle des résultats obtenus sur la parcelle d'étude conduira à une erreur plus grande.

On pourra se reporter à Munoz-Pardo, 1987 pour une étude théorique détaillée de ces erreurs.

Les résultats des simulations de Monte Carlo présentés ci-dessus sont intéressants d'un point de vue théorique et satisfaisants, car analogues, en termes de tendance, à d'autres résultats publiés dans la littérature. Mais, compte-tenu du degré d'incertitude lié à la modélisation des bilans hydriques, ils ne nous semblent pas suffisamment dépendants de la portée du phénomène théorique imposé pour justifier la poursuite de cette démarche, difficile à mettre en oeuvre et coûteuse en temps de calcul et occupation mémoire.

Par la suite, pour déterminer le comportement du modèle sur l'ensemble du cycle et par période dans différents cas de figure, nous travaillerons donc sur des réalisations optimales déterminées par les méthodes exposées en C3-II-A-4 et C3-III-C, suivant que la portée du phénomène aléatoire est nulle ou non.

C4-II-C) Comparaison avec les Résultats d'une Réalisation Optimale

Afin de justifier notre démarche, nous allons présenter, pour deux valeurs de la portée, ($a=0.$ et $a=30.$ m), les résultats des comparaisons entre les valeurs des paramètres statistiques obtenus par moyenne d'ensemble sur 200 réalisations et les valeurs obtenues à partir d'une réalisation optimale.

Dans le cas où $a=0.$, la réalisation optimale a été générée indépendamment de la simulation de Monte Carlo, selon la méthode décrite en C3-II-A-4. Dans le cas où $a=30.$ m, la réalisation optimale est celle définie par (3-56) à partir des 200 réalisations de la simulation de Monte Carlo.

Les simulations de Monte Carlo considérées sont celles précédemment décrites. Le tableau 4-6 rappelle les valeurs des moyennes et écarts-types d'ensemble des médianes et inter-quartiles spatiaux pour l' ETR_C et le D_C .

La dernière colonne de ce tableau donne la valeur de la médiane, et de l'inter-quartile, obtenue avec la réalisation optimale.

Les deux valeurs de médianes indicées d'une astérisque sont différentes, au seuil de 5%, de la valeur moyenne associée, compte-tenu de l'écart-type correspondant.

Portée (m)		X	<X> (mm)	sig(X) (mm)	Réa.Opt. (mm)
a=0.	ETR _C	Me _{ETRC}	277.00	1.25	277.49*
		IQ _{ETRC}	29.55	2.00	29.44
	D _C	Me _{DC}	147.55	2.08	146.68*
		IQ _{DC}	38.70	2.37	38.59
a=30.	ETR _C	Me _{ETRC}	276.97	4.61	276.53
		IQ _{ETRC}	28.40	3.75	28.70
	D _C	Me _{DC}	147.89	6.67	148.31
		IQ _{DC}	37.29	4.27	37.65

Tableau 4-6 : Statistiques d'ensemble et statistiques d'une réalisation optimale

D'un point de vue purement statistique, notre méthode est-elle biaisée :

- dans le cas où $a=0.$, les valeurs des médianes sont différentes au seuil de 5.7
- dans le cas où $a=30.m$, les valeurs ne sont pas différentes, mais la réalisation optimale est créée à partir des 200 réalisations de la simulation de Monte Carlo.

Cependant, en replaçant les résultats dans leur contexte d'application pratique, nous pensons que l'utilisation d'une réalisation optimale au sens du critère de ressemblance aux statistiques d'ensemble fournit, dans un premier temps, suffisamment d'informations sur le comportement stochastique du modèle pour que nous l'utilisions dans la suite de notre étude.

C4-II-D) Influence du Nombre de Points

Avant de poursuivre plus avant notre étude, nous nous sommes malgré tout interrogés sur le nombre de points d'échantillonnage à utiliser dans une réalisation optimale :

- un nombre trop réduit de points rendrait la réalisation, même optimale, sujette à d'importantes fluctuations, et les résultats seraient non-représentatifs
- un nombre trop important de points multiplierait les temps de calcul sans, pour autant, apporter plus d'informations.

En outre, dans la simulation de fonctions aléatoires ayant une structure spatiale, la position (plan d'échantillonnage) et le nombre de points de l'échantillonnage jouent un rôle important, Munoz-Pardo, 1987.

Pour déterminer ce nombre de points, nous avons généré, par la méthode exposée en C3-II-A-4, trois réalisations optimales de lois $N(0,1,0)$, de respectivement 200, 400 et 1600 points. Chaque réalisation de N points est donc celle, parmi 100 réalisations de N points, qui ressemble le plus aux statistiques d'ensemble au sens du critère explicité en C3-II-A-4, à savoir la minimisation de Δ , donné par (3-14) :

$$\Delta = |\mu_z - m_z|/\mu_z + |\sigma_z - s_z|/\sigma_z + |g_{1z}| + |g_{2z-3}|/3$$

Ici, $\mu_z=0.$, $\sigma_z=1.$: Δ est alors pris égal à :

$$\Delta = |m_z| + |1-s_z| + |g_{1z}| + |g_{2z-3}|/3$$

Le tableau 4-7 donne les valeurs des paramètres statistiques des trois réalisations de lois $N(0,1,0)$, ainsi que les valeurs pour les réalisations tronquées associées. On trouvera également les valeurs des paramètres des réalisations correspondantes de la RU.

Réalisation optimale : X : N(0,1,0)			
N _X	200	400	1600
m _X	- .0010	.0122	- .0006
s _X	.9878	1.0043	.9868
g _{1X}	-4.91 10 ⁻²	-1.31 10 ⁻²	-4.77 10 ⁻³
g _{2X}	2.945	2.976	3.029
Δ _X	8.06 10 ⁻²	3.76 10 ⁻²	2.82 10 ⁻²
Réalisation tronquée : X _T			
N _{XT}	191	384	1529
m _{XT}	.0295	.0005	.0017
s _{XT}	.8734	.8973	.8672
g _{1XT}	-2.65 10 ⁻²	-6.60 10 ⁻²	1.94 10 ⁻²
g _{2XT}	2.474	2.520	2.394
RU associée : RU = .565 + .1695 * X _T			
m _{RU}	.570	.565	.565
s _{RU}	.148	.152	.147
CV _{RU}	26.	27.	26.
g _{1RU}	-2.65 10 ⁻²	-6.60 10 ⁻²	1.94 10 ⁻²
g _{2RU}	2.474	2.520	2.394

Tableau 4-7 : Paramètres statistiques des réalisations optimales pour différents nombres de points

L'utilisation du modèle pour chacune des valeurs de la RU, sur les trois réalisations, nous a alors permis d'obtenir les trois réalisations d'ETR_C et de D_C associées. Le tableau 4-8 donne, pour chacun des cas, les valeurs des moyennes, écarts-types et coefficients de symétrie et d'aplatissement, ainsi que les valeurs des médianes et inter-quartiles des réalisations obtenues.

X	ETR _C				D _C		
N _X	191	384	1529		191	384	1529
m _X	273.6	272.7	273.0		151.4	152.6	152.3
s _X	21.4	22.5	21.2		26.9	28.2	26.8
g _{1X}	-.843	-.917	-.773		.673	.742	.604
g _{2X}	3.285	3.421	3.120		2.950	3.060	2.798
Me _X	277.0	277.5	276.9		147.5	146.7	147.7
IQ _X	27.2	29.4	29.0		36.0	38.6	38.0

Tableau 4-8 : Paramètres statistiques des réalisations d'ETR_C et de D_C issues des réalisations optimales pour différents nombres de points

L'examen de ce tableau, conjugué à celui du tableau 4-7, nous a conduit pour notre étude à venir, à choisir des réalisations optimales de 400 points environ.

En effet, les tableaux précédents montrent une faible variation des paramètres statistiques entre des réalisations optimales ayant un nombre de points différents.

En outre, nous avons vu précédemment qu'il nous a été possible de générer avec suffisamment de précision, tableau 4-3, des réalisations de champs aléatoires spatialement corrélés à partir de 400 points aux noeuds d'une grille carrée, et ce pour les trois portées envisagées.

Par souci de cohérence, et parce que les calculs menés sur des réalisations d'environ 400 valeurs conjuguent :

- rapidité relative de temps de calcul
- plus faible occupation mémoire
- description suffisante du comportement du modèle,

les résultats présentés ultérieurement correspondront tous à des réalisations d'environ 400 valeurs.

On notera enfin, avant de poursuivre, que dans tous les cas, tableau 4-8 :

$$g_{1ETRc} \ll 0. \text{ et } g_{1Dc} \gg 0.$$

Les distributions des ETR_c et des D_c sont donc dissymétriques, ce qui justifient le calcul et l'utilisation des notions de médiane et de quartiles préférées aux notions de moyenne arithmétique et d'écart-type.

C4-III) SIMULATIONS AVEC UNE REALISATION OPTIMALE SUR LA RU

Dans ce sous-chapitre, nous allons étudier l'influence de la variabilité de la réserve utile sur le comportement du modèle. Compte-tenu des résultats précédents, nous travaillerons sur des réalisations "optimales" ayant environ 400 points d'échantillonnage.

C4-III-A) Réalisation de Référence

Dans notre étude de sensibilité à la variabilité de la RU, nous avons utilisé comme simulation de référence, la simulation sur la réalisation de 384 points introduite précédemment, C4-II-D. Nous allons rappeler ici les différentes étapes de la construction de cette réalisation et détailler les résultats qu'elle permet d'obtenir.

Parmi 100 réalisations de 400 points d'une variable aléatoire gaussienne, $N(0,1,0)$, nous avons donc retenu celle qui minimisait la quantité Δ , définie en C3-II-A-4. Soit RO cette Réalisation Optimale. Une troncature à ± 2 , nous a ensuite donné la réalisation optimale physique tronquée, RO_T , de 384 points. Nous avons vu, C3-III-C-2 et tableau 4-7, que

les statistiques de cette réalisation sont quelques peu dénaturées par rapport à celles de la réalisation RO, principalement en termes de d'écart-type et de coefficient d'aplatissement.

A partir de cette réalisation tronquée, nous avons alors construit, par l'équation (3-2), une réalisation de la RU de moyenne théorique, $\mu_{RU} = .565$ mm/cm, et d'écart-type théorique, $\sigma_{RU} = .1695$ mm/cm, soit un coefficient de variation, $CV_{RU} = 30.7$.

Cette valeur de CV_{RU} nous a paru, dans un premier temps, raisonnable compte-tenu des coefficients de variation rencontrés couramment dans la littérature des sciences du sol. Cependant, nous étudierons ultérieurement l'influence respective des valeurs de μ_{RU} et de σ_{RU} .

Dans la suite, par raison de clarté, nous appellerons cette réalisation : M_2S_2 .

Le tableau 4-9 rappelle les valeurs des paramètres statistiques de ces trois réalisations, la figure 4-4 donne les histogrammes et ajustements graphiques de normalité des réalisations RO et RO_T , ainsi que l'histogramme de la réalisation de la RU correspondante. Sur les histogrammes sont également tracés les courbes de densité de probabilité des lois normales de moyenne, la moyenne expérimentale de la réalisation, et d'écart-type, l'écart-type expérimental.

X	RO	RO_T	M_2S_2
N_X	400	384	384
m_X	.0122	.0005	.565
s_X	1.0043	.8973	.152
g_{1X}	-.0131	-.0660	-.0660
g_{2X}	2.976	2.520	2.520

tableau 4-9 : Paramètres statistiques de RO, RO_T et M_2S_2

L'utilisation du modèle, sur le site B_2T_1 et dans la situation climatique de référence S_0 , fournit alors les deux réalisations d' ETR_c et de D_c

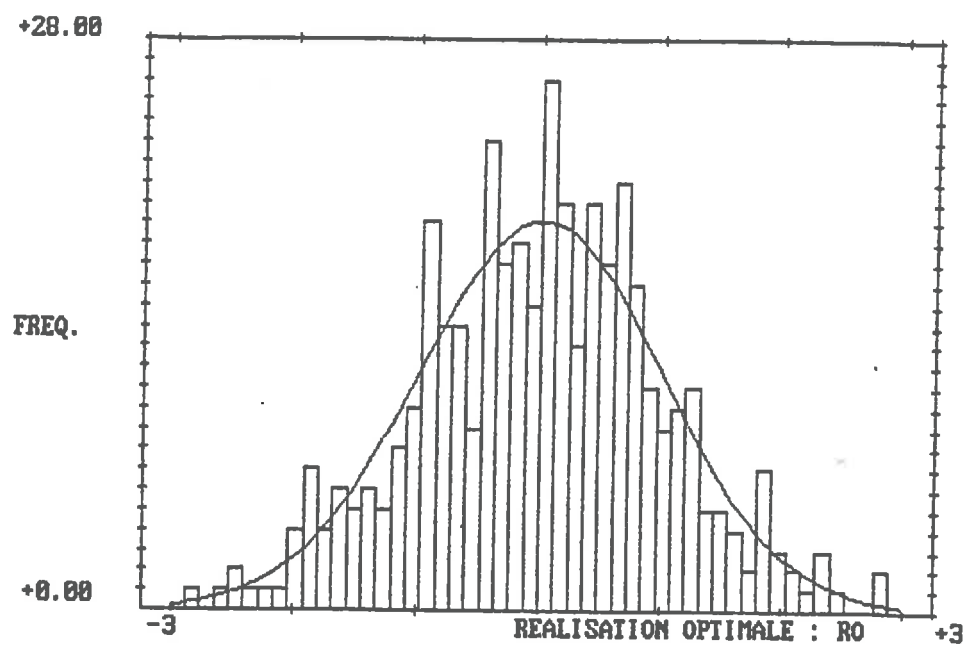


figure 4-4-a : Histogramme de la réalisation optimale : RO

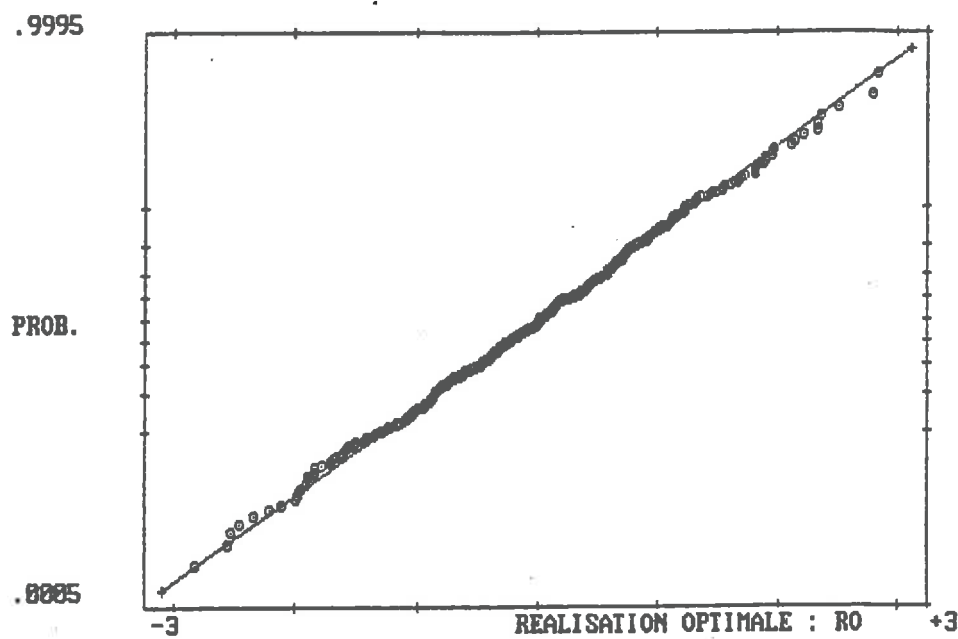


figure 4-4-b : Test graphique de normalité sur la réalisation optimale : RO

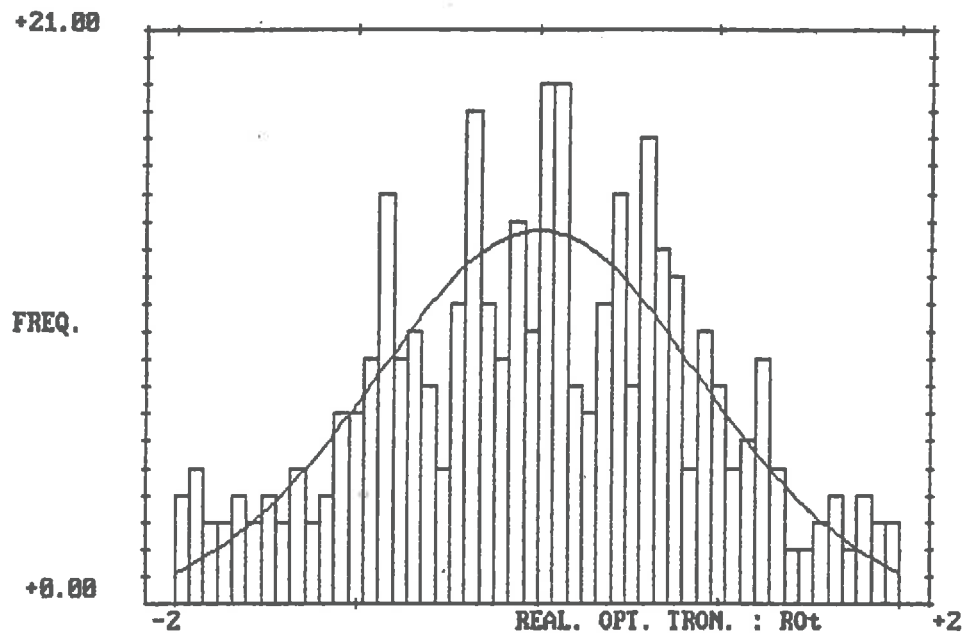


figure 4-4-c : Histogramme de la réalisation optimale tronquée: RO_T

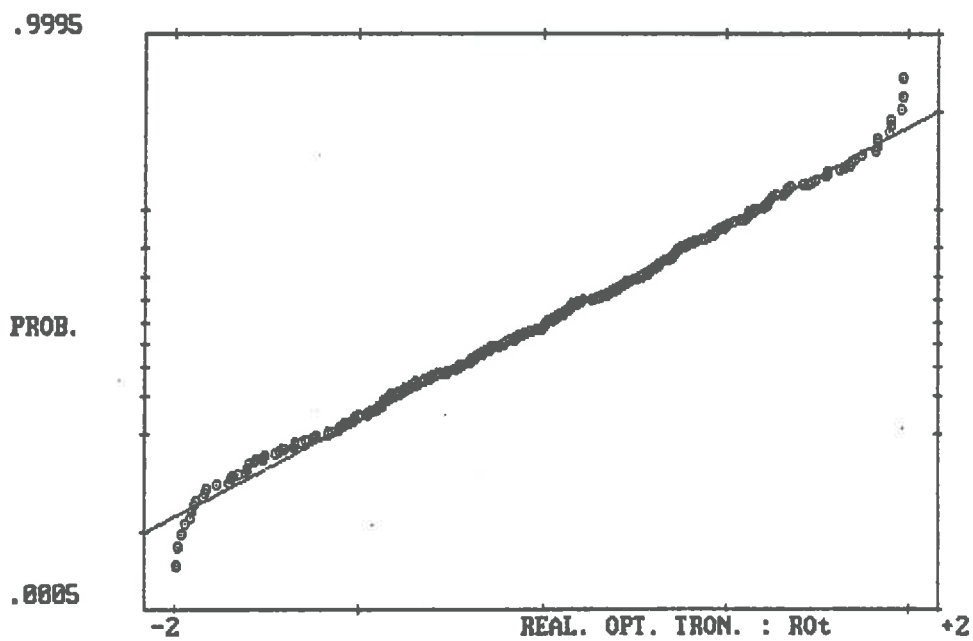


figure 4-4-d : Test graphique de normalité sur la réalisation optimale tronquée : RO_T

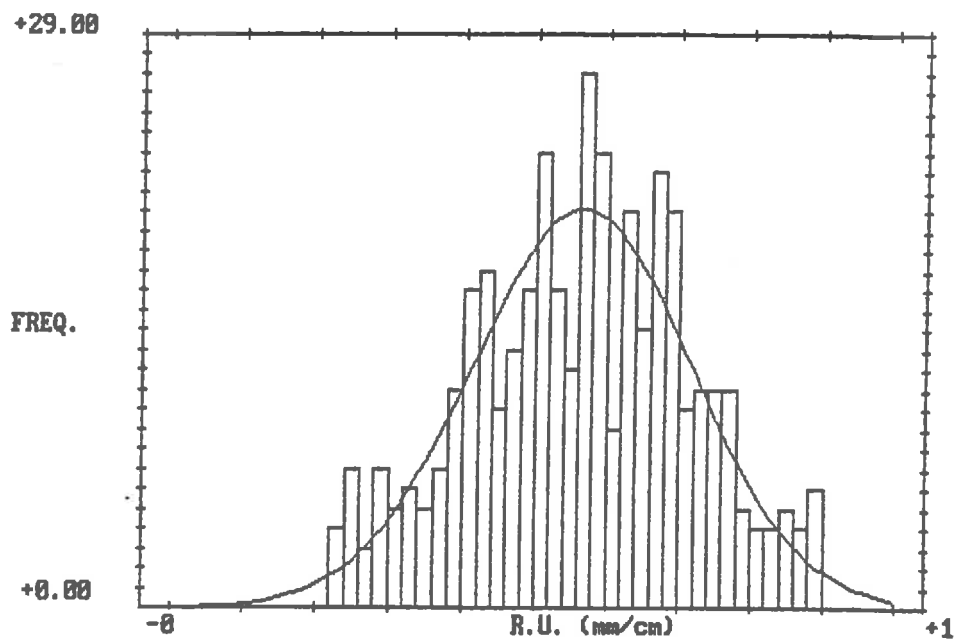


figure 4-4-e : Histogramme de la réalisation de la RU associée

correspondantes. Le tableau 4-10 détaille les paramètres statistiques des deux distributions obtenues.

Dans ce tableau :

- B_X , m'_X , s'_X , Mo'_X , Me'_X sont respectivement les valeurs de la borne, inférieure (X_m) ou supérieure (X_M), de la moyenne, de l'écart-type, du mode et de la médiane calculés, dans le cas d'une distribution asymétrique par les formules de correspondance données en C3-II-B-2.
- g_{1X} et g_{2X} sont les coefficients de symétrie et d'aplatissement de la variable brute.
- g_{11X} et g_{21X} sont les coefficients de symétrie et d'aplatissement de la variable transformée : $\log(X-X_m)$ ou $\log(X_M-X)$ suivant le cas.
- Me_X , Q_{1X} , Q_{3X} et IQ_X sont les médianes, quartile inférieur, quartile supérieur et inter-quartile, définis en C3-II-B-1, des distributions de X , où X est successivement ETR_C et D_C .

X	ETR _C	D _C
Loi: X	LNI ₃	LN ₃
B _X	332.6	76.6
m' _X	272.7	152.6
s' _X	22.5	29.2
Mo' _X	283.5	138.5
Me' _X	276.6	147.6
g _{1X}	-.917	.742
g _{2X}	3.42	3.06
g _{11X}	.118	-.057
g _{21X}	2.53	2.55
Me _X	277.5	146.7
Qi _X	259.6	131.8
Qs _X	289.1	170.4
IQ _X	29.5	38.6

tableau 4-10 : distributions de ETR_C et de D_C obtenues avec M₂S₂

La figure 4-5 donne les histogrammes d'ETR_C, de D_C et des distributions transformées : $\log(\text{ETR}_{\text{CM}} - \text{ETR}_C)$ et $\log(D_C - D_{\text{CM}})$.

On constate que :

- les distributions d'ETR_C et de D_C sont fortement dissymétriques, fig.4-5-a, avec :

$$g_{1\text{ETR}_C} = -.917 \text{ et } g_{1D_C} = .742$$

- cette dissymétrie est, dans les deux cas, bien traitée par une transformation logarithmique, fig.4-5-b. Ce résultat nous permet de conclure que ETR_C est ici distribué selon une loi log-normale inverse à trois paramètres, LNI₃, et D_C selon une loi log-normale à trois paramètres, LN₃.

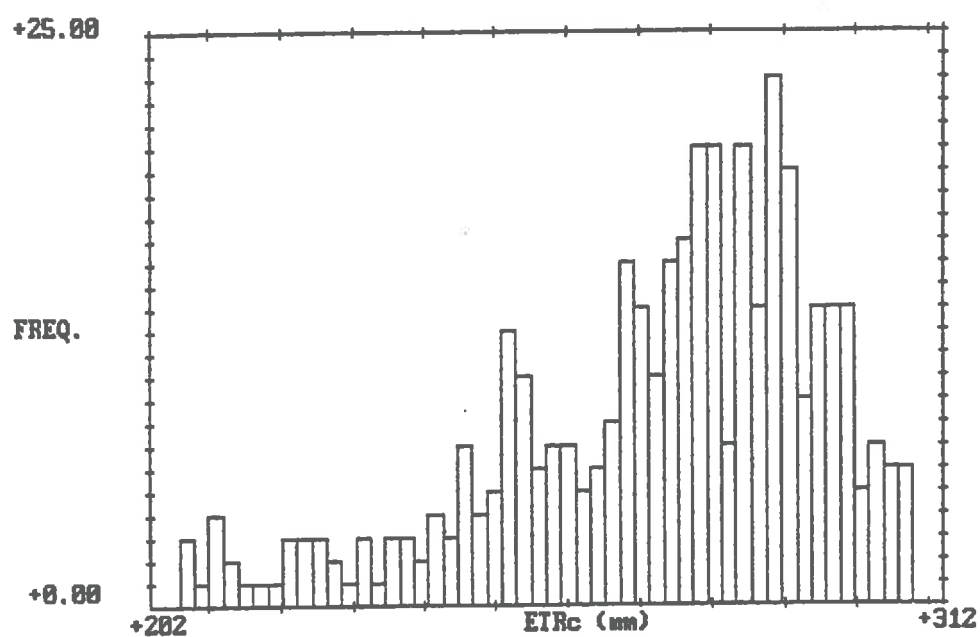


figure 4-5-a₁ : Histogramme de la réalisation d' ETR_c

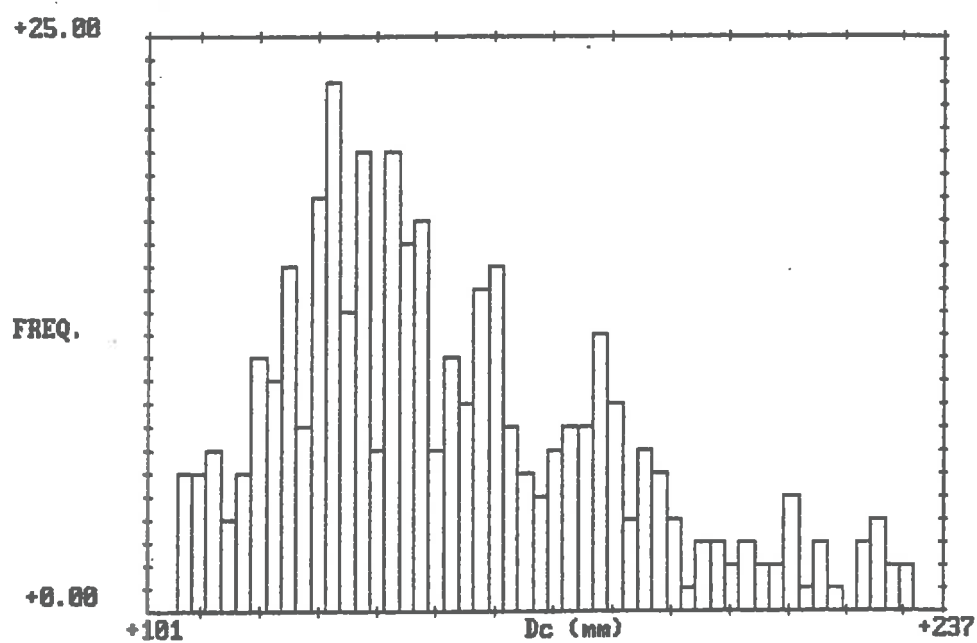


figure 4-5-a₂ : Histogramme de la réalisation de D_c

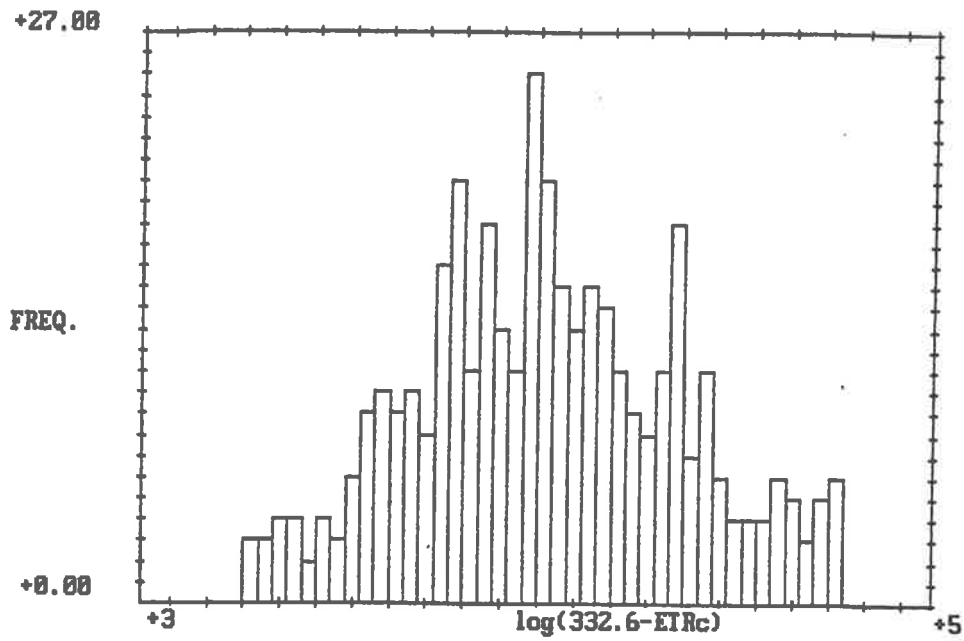


figure 4-5-b₁ : Histogramme de la réalisation transformée : $\log(ETR_{CM} - ETR_C)$

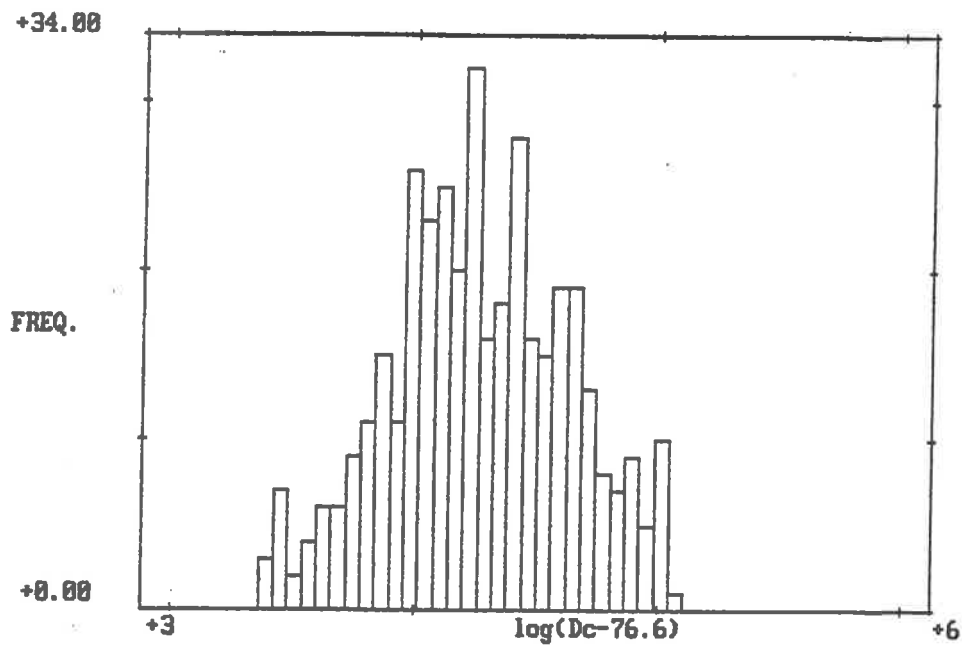


figure 4-5-b₂ : Histogramme de la réalisation transformée : $\log(D_C - D_{cm})$

Notons encore que :

- 50.7 des valeurs de ETR_C sont en dehors de l'intervalle [259.6 ; 289.1], d'amplitude $IQ_{ETR_C} = 29.5$ mm
- 50.7 des valeurs de D_C sont en dehors de l'intervalle [131.8 ; 170.4], d'amplitude $IQ_{D_C} = 38.6$ mm
- et que ces valeurs se répartissent de manière égale de part et d'autre de l'intervalle correspondant.

Dans la pratique, si la RU utilisée dans une simulation déterministe est bien représentative du comportement moyen de la parcelle, les résultats déterministes correspondront bien aux comportements "moyens", estimés par les médianes, en termes d' ETR_C et de D_C .

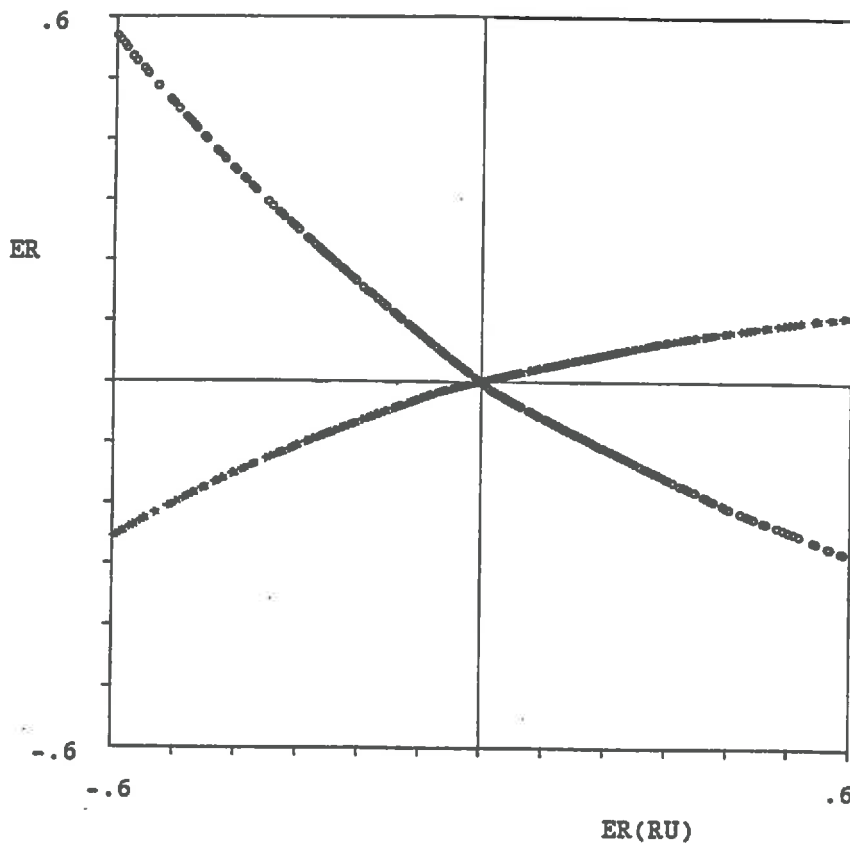
Mais, si la RU est mal estimée, on pourra faire une erreur plus importante sur l'estimation du comportement moyen de la parcelle. En outre, la dissymétrie des lois de distribution d' ETR_C et de D_C fait qu'une surestimation ou une sous-estimation de la réserve utile entraîneront des erreurs différentes sur l'estimation de la consommation et des pertes en eau cumulées au niveau de la parcelle.

La figure 4-6 donne l'erreur relative sur ETR_C (*) et sur D_C (o) en fonction de l'erreur relative sur la RU.

Où l'erreur relative est définie par :

$$ER(X) = \frac{X - X_{det}}{X_{det}}$$

Cette figure peut être interprétée, d'une part comme une mesure de l'écart entre les résultats de deux simulations déterministes avec des RU différentes (étude de la sensibilité à la RU), et d'autre part comme une mesure de l'écart entre le comportement spatial moyen de la parcelle (estimé par les médianes de ETR_C et de D_C) et le résultat obtenu par une simulation déterministe où l'estimation de la RU représentative de la parcelle serait mauvaise.



$$ER(ETR_c) \text{ et } ER(D_c) = f(ER(RU))$$

figure 4-6 : Erreur relative sur $ETR_c(*)$ et sur $D_c(o)$ en fonction de l'erreur relative sur la RU

On constate sur cette figure que ETR_C est une fonction monotone croissante de la RU, et que D_C est une fonction monotone décroissante.

On retrouve également les effets différents d'une surestimation et d'une sous-estimation de la RU. Ici, une sous-estimation de la RU conduit à de plus fortes erreurs, sur l' ETR_C comme sur le D_C , qu'une surestimation, et l'erreur relative sur le D_C est toujours plus forte que l'erreur relative sur l' ETR_C . Ceci est dû à la méthode de prise en compte de ces phénomènes dans le modèle. Cependant, il faut retenir que les erreurs réduites, notamment pour ETR_C , restent faibles par rapport aux erreurs réduites introduites sur la RU.

Au niveau du comportement par période, la figure 4-7 donne, pour la simulation précédente, les valeurs par décade des médianes et quartiles inférieurs et supérieurs pour l'ETR et le D en mm/j. Rappelons que 50.2 des valeurs d'ETR et de D se trouvent en dehors de l'intervalle $[Q_i ; Q_s]$ où Q_i et Q_s sont respectivement les quartiles inférieur et supérieur.

On constate que :

- il y a des périodes peu ou pas du tout sensibles à la variabilité de la RU : cinq premières décades pour ETR, 3^{ième} à 5^{ième} décades pour D. On se souvient que durant les premières décades du cycle, la consommation se fait à l'ETM car le taux de remplissage des réservoirs racinaires HR, vaut 1. Quelle que soit la valeur de la RU envisagée ici, HR reste égale à 1. et ETR égale à ETM.

Pour les décades à très forte pluviométrie, tous les réservoirs étant déjà pleins, l'eau n'est pas retenue dans le sol, les termes de drainage et/ou ruissellement sont donc pratiquement tous égaux à la pluviométrie et la sensibilité de D à la variabilité de la RU est faible.

- il y a par contre des périodes à forte sensibilité : 6^{ième} et 7^{ième} décades pour l'ETR, 2^{ième}, 7^{ième} et 9^{ième} décade pour le D.

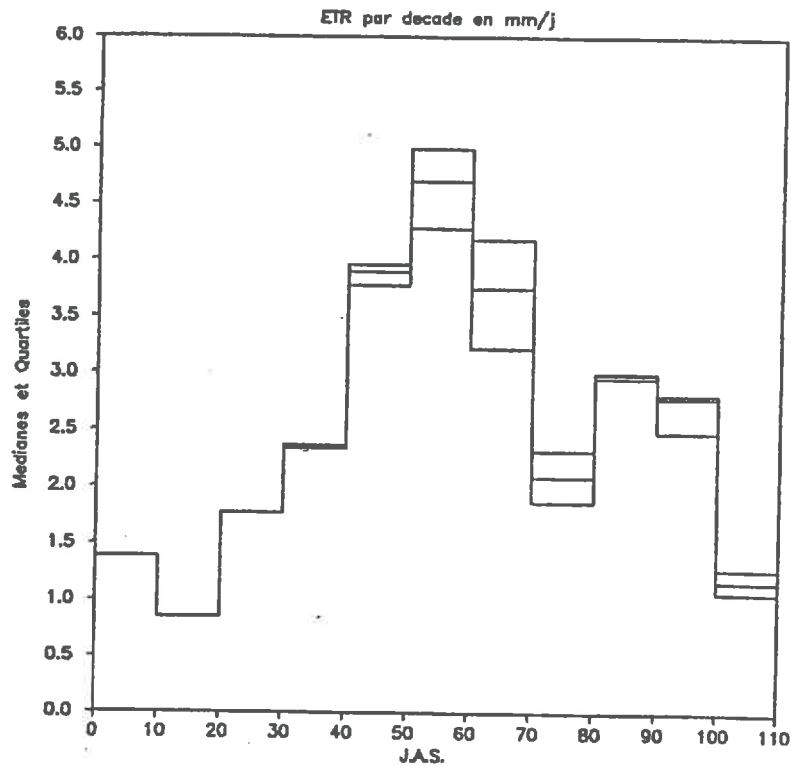


figure 4-7-a : Valeurs par decade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR, en mm/j

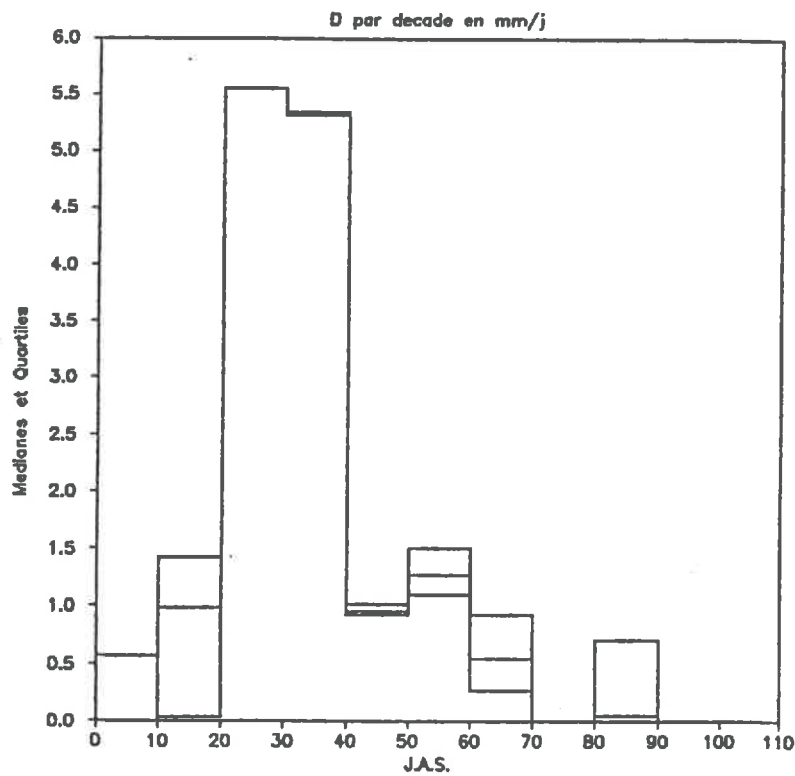


figure 4-7-b : Valeurs par decade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de D, en mm/j

- les réalisations des valeurs par décade sont également dissymétriques puisque la médiane de la réalisation n'est en général pas le milieu de l'intervalle $[Q_i ; Q_s]$.

Dans la dernière partie de ce sous-chapitre, nous reviendrons de manière plus approfondie sur le comportement du modèle par période, mais d'ores et déjà, on peut souligner qu'une étude stochastique de ce modèle de bilan hydrique prend toute son importance au vu de ces comportements par période.

En effet, durant les décades sensibles, la valeur de l'inter-quartile est forte, les différences de consommation pour des RU différentes sont donc élevées. Si ces périodes sensibles au niveau de la consommation en eau se produisent au cours de phases sensibles pour la culture, au niveau physiologique, ces différences mises en évidence par une simulation stochastique auront une grande influence sur le comportement global de la parcelle étudiée.

C4-III-B) Influence de la Distribution

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la RU était issue d'une loi gaussienne, l'échantillon des 15 valeurs mesurées sur le site de Bouaké semble effectivement être normalement distribué. Mais, nous savons également que l'on rencontre souvent dans les sciences du sol des variables log-normalement distribuées. Aussi, pour ne rien enlever à la généralité de notre démarche, avons nous envisagé le cas où la RU serait issue d'une loi log-normale d'une part, et d'une loi log-normale à trois paramètres d'autre part.

Les deux réalisations de la RU correspondantes, L_2S_2 et L_2S_{2a} ont été générées, selon la méthode décrite en C3-II-A-2, à partir de la réalisation optimale R_0 précédente. Le tableau 4-11 donne les valeurs théoriques des paramètres des distributions, en mm/cm.

	L_2S_{2a}	L_2S_2
Type	LN	LN_3
μ_{RU}	.565	.565
σ_{RU}	.1695	.1695
RU_m	.0	.3955

Tableau 4-11 : Valeurs théoriques de L_2S_2 et L_2S_{2a}

On trouvera, figure 4-8, les histogrammes des réalisations de RU correspondantes. Nous avons travaillé ici directement sur la réalisation optimale RO et non sur la réalisation optimale tronquée RO_T , car, pour la génération d'une loi LN ou LN_3 , on fixe la valeur de la borne inférieure. Ainsi, on voit, figure 4-8, qu'aucune des valeurs générées n'est inférieure à .2 mm/cm dans le premier cas et à .4 mm/cm dans le second, valeurs qui sont faibles mais acceptables physiquement. Au niveau des fortes valeurs, aucune n'est supérieure à 1.3 mm/cm.

En outre, nous nous intéressons principalement au niveau des sorties du modèle aux médianes et inter-quartiles des réalisations. Or, la médiane est peu dépendante des valeurs extrêmes de la RU car notre troncature sur RO est symétrique. On tronque donc approximativement autant de points de part et d'autre de la distribution de RO , donc de RU. ETR_c et D_c étant des fonctions monotones de RU, la médiane, compte-tenu de la définition donnée en C3-II-B-1, est peu affectée par la troncature. L'inter-quartile, par contre, est diminué par une troncature.

On notera que L_2S_2 et L_2S_{2a} ont les mêmes moyenne et écart-type théoriques que la réalisation M_2S_2 précédemment étudiée. La comparaison des résultats des simulations, tableau 4-12, permet donc de déterminer l'influence de la loi de distribution de la RU sur les sorties du modèle.

Les estimateurs des paramètres théoriques de ce tableau, B_X , m'_X , s'_X , Mo'_X , Me'_X , g_{1X} , g_{2X} , g_{11X} , g_{21X} , Me_X , Q_{1X} , Q_{3X} et IQ_X ont les mêmes définitions que dans le tableau 4-10. Mais, dans le cas où la distribution est symétrique, ces estimateurs, s'ils ont lieu d'être, sont calculés classiquement. On notera en outre, que les deux estimateurs de la médiane

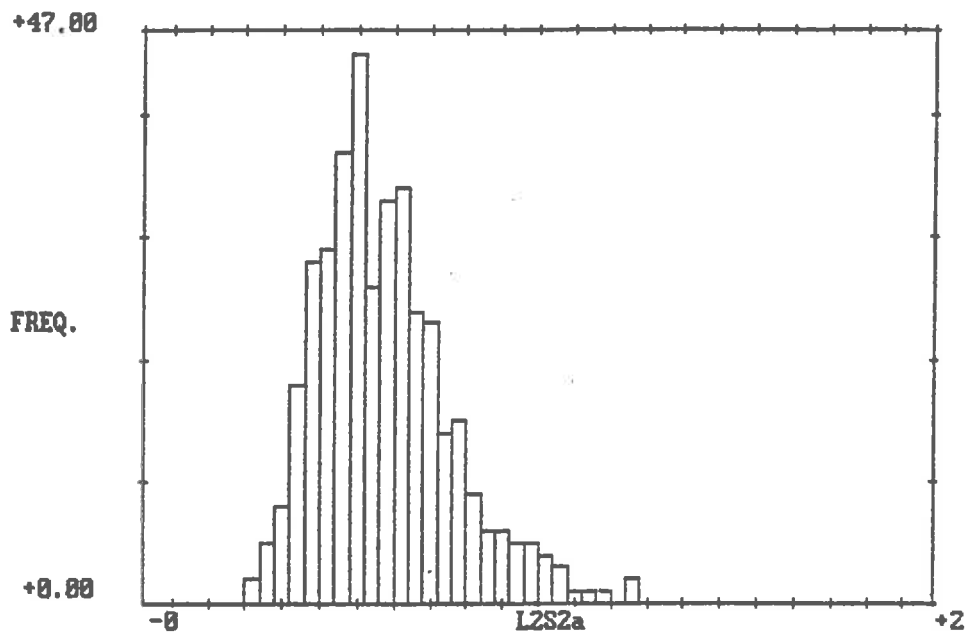


figure 4-8-a : Histogramme de la réalisation L_2S_{2a} de la RU

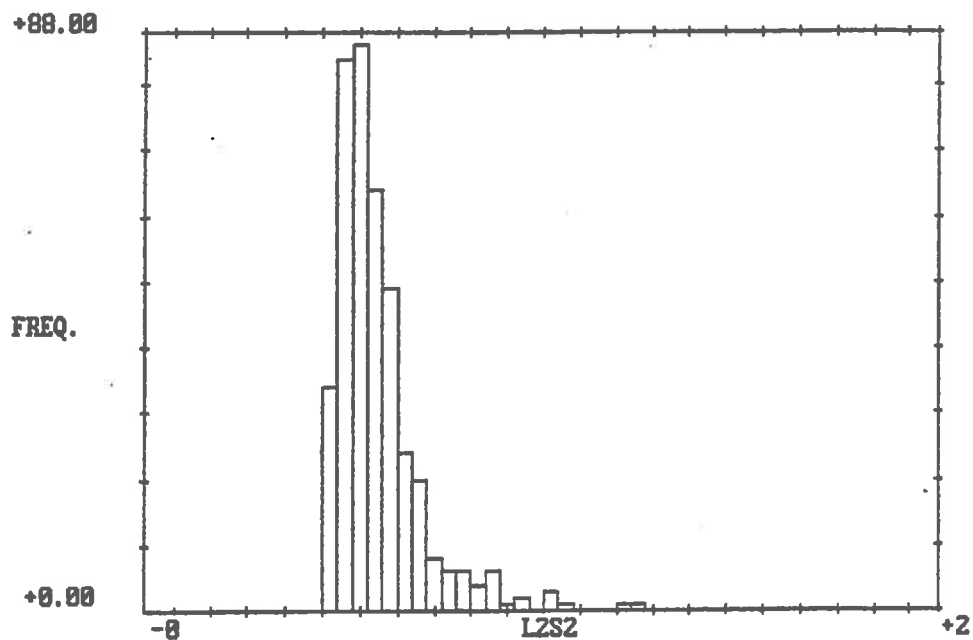


figure 4-8-b : Histogramme de la réalisation L_2S_2 de la RU

théorique des populations d' ETR_C et de D_C , Me'_{ETR_C} et Me_{ETR_C} d'une part, Me'_{D_C} et Me_{D_C} d'autre part, sont toujours très proches.

X	ETR_C				D_C		
	M_2S_2	L_2S_{2a}	L_2S_2		M_2S_2	L_2S_{2a}	L_2S_2
Loi:RU	N	LN	LN_3		N	LN	LN_3
Loi: X	LNI_3	N	LN_3		LN_3	N	LNI_3
B_X	332.6	-	222.7		76.6	-	203.2
m'_X	272.7	273.3	272.7		152.6	151.7	153.4
s'_X	22.5	23.1	13.0		29.2	29.7	17.4
Mo'_X	283.5	-	268.1		138.5	-	161.4
Me'_X	276.6	-	271.1		147.6	-	156.2
g_{1X}	-.917	-.265	1.05		.742	.037	-1.23
g_{2X}	3.42	2.87	4.50		3.06	2.80	5.08
g_{11X}	.118	-	.323		-.057	-	.289
g_{21X}	2.53	-	2.84		2.55	-	2.71
Me_X	277.5	275.5	271.0		146.7	150.2	157.2
Qi_X	259.6	258.4	262.4		131.8	131.4	143.5
Qs_X	289.1	289.4	279.6		170.4	171.8	167.3
IQ_X	29.5	31.0	17.2		38.6	40.4	23.8

tableau 4-12 : Influence de la loi de distribution sur ETR_C et D_C

On constate, figures 4-9, que les distributions des ETR_C et des D_C sont très sensibles à la distribution de la RU.

En effet :

- pour la simulation M_2S_2 :

$$* g_{1ETR_C} = -.917 < 0. \text{ et } g_{1D_C} = .742 > 0.$$

- pour la simulation L_2S_2 :

$$* g_{1ETR_C} = 1.05 > 0. \text{ et } g_{1D_C} = -1.23 < 0.$$

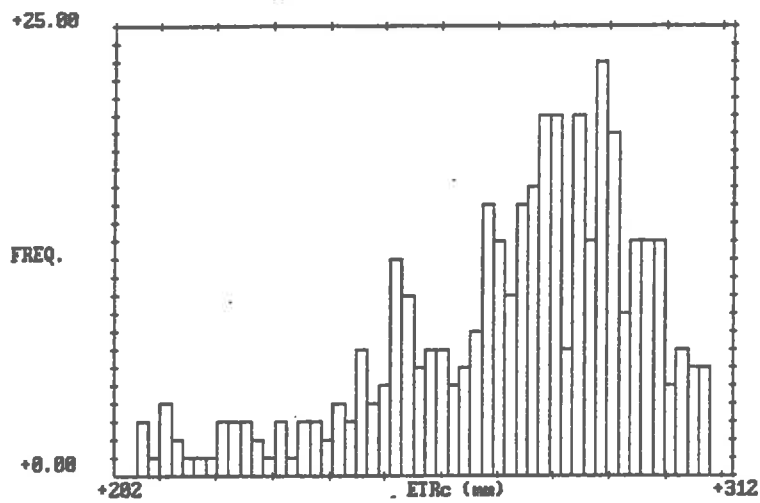


figure 4-9-a₁ : Histogramme de l' ETR_c pour la réalisation M_2S_2 de la RU

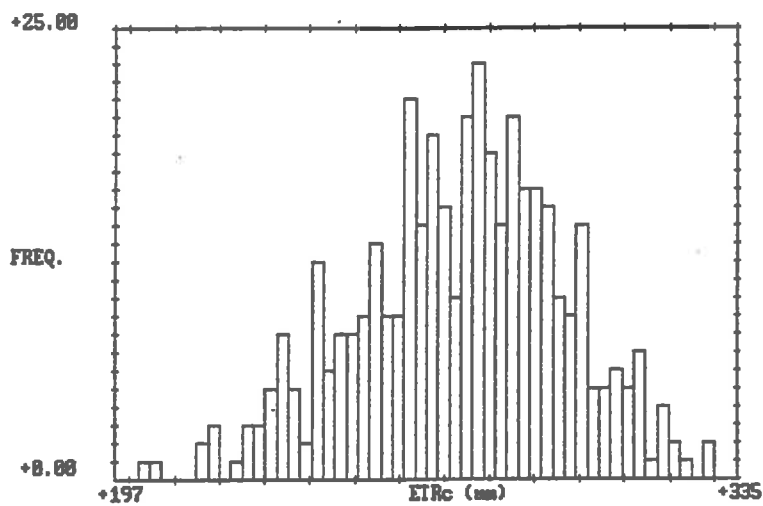


figure 4-9-a₂ : Histogramme de l' ETR_c pour la réalisation L_2S_{2a} de la RU

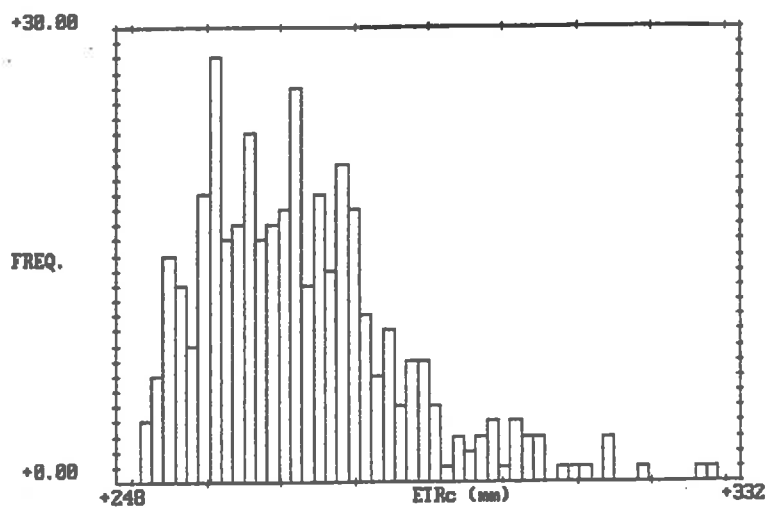


figure 4-9-a₃ : Histogramme de l' ETR_c pour la réalisation L_2S_2 de la RU

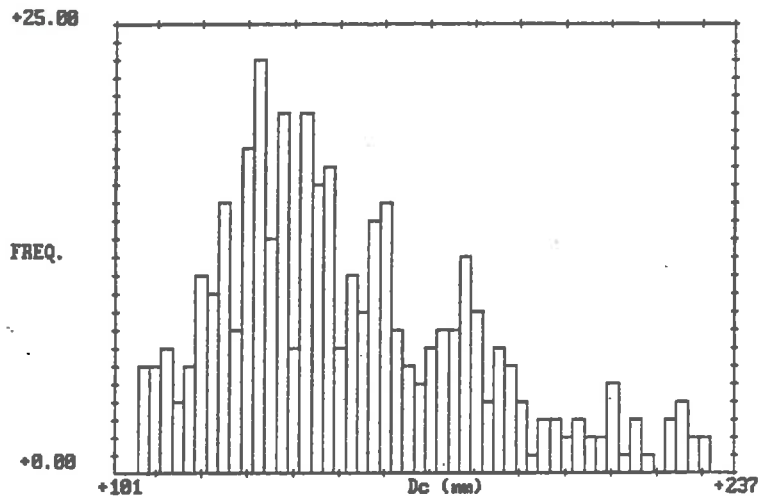


figure 4-9-b₁ : Histogramme de D_c pour la réalisation M_2S_2 de la RU

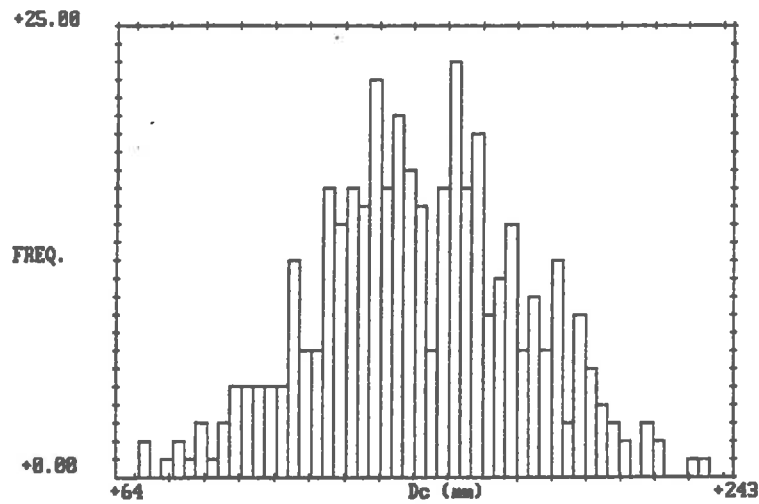


figure 4-9-b₂ : Histogramme de D_c pour la réalisation L_2S_{2a} de la RU

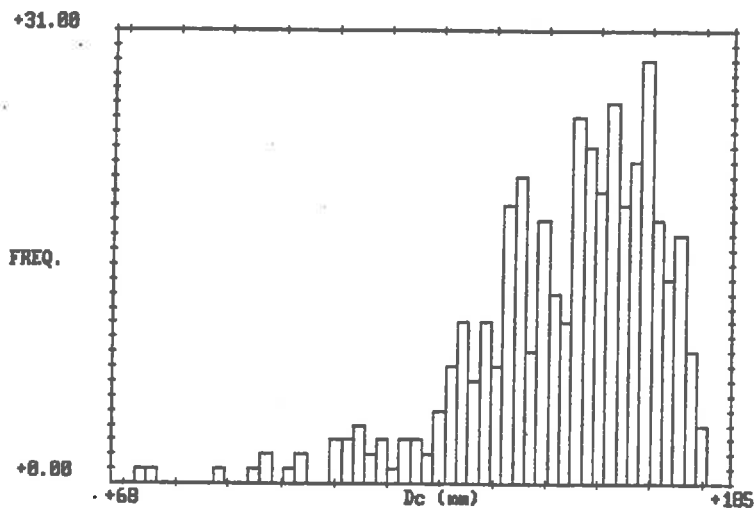


figure 4-9-b₃ : Histogramme de D_c pour la réalisation L_2S_2 de la RU

- pour la simulation L_2S_{2a} , la situation est intermédiaire puisque les distributions sont relativement symétriques avec :

$$* g_{1ETR_C} = -.265 \text{ et } g_{1D_C} = 3.70 \cdot 10^{-2}$$

Une transformation logarithmique selon la méthode proposée en C3-II-B-2 est en général satisfaisante puisque les coefficients g_{11X} obtenus ont des valeurs absolues plus faibles que les g_{1X} et que les coefficients g_{21X} ont des valeurs voisines de 3., ou de g_{2RU} , dans le cas de la simulation M_2S_2 . Nous renvoyons à la figure 4-5-b pour démontrer l'applicabilité de cette méthode, mais nous rappelons cependant que celle-ci est, sous quelques hypothèses, (σ_z petit, où Z est la variable transformée), liée à des approximations et que ses performances diminuent lorsque l'on s'éloigne de son cadre d'applicabilité.

Enfin, pour les simulations L_2S_{2a} et L_2S_2 , la médiane des réalisations d' ETR_C et de D_C n'est plus la valeur déterministe correspondant à la valeur moyenne de la distribution des RU. En effet, \mathcal{Y}_{RU} , médiane théorique de la variable aléatoire RU vaut :

- pour L_2S_{2a} : $\mathcal{Y}_{RU} = .541 \text{ mm/cm}$
- pour L_2S_2 : $\mathcal{Y}_{RU} = .515 \text{ mm/cm}$

La valeur de la médiane trouvée pour ETR_C , ou D_C , est alors proche de la valeur déterministe que l'on obtiendrait avec une simulation déterministe et $RU = .541 \text{ mm/cm}$, par exemple, pour L_2S_{2a} .

D'un point de vue pratique :

1) il faut noter que les valeurs des inter-quartiles sont du même ordre de grandeur pour les simulations M_2S_2 et L_2S_{2a} , mais qu'elles sont plus faibles pour la simulation L_2S_2 . Ceci s'explique par le fait que pour L_2S_2 , on fixe la borne inférieure à $.3955 \text{ mm/cm}$ et que cette borne inférieure joue en quelque sorte le rôle d'un point d'accumulation pour les faibles valeurs de la distribution de RU, et diminue ainsi la variabilité, figure 4-8.

2) le signe de g_{1ETRc} , ou de g_{1Dc} , nous paraît également important. En effet, si g_{1ETRc} est positif, la queue de la distribution des consommations en eau sera vers les fortes valeurs de ETR_c . Par contre, si g_{1ETRc} est négatif, une partie non-négligeable, fig.4-5-a, de la parcelle verra la culture consommer beaucoup moins d'eau que la moyenne. Cela pourra conduire à des rendements plus faibles que ceux espérés par une modélisation déterministe, même si la RU déterministe choisie représente bien la RU moyenne de la parcelle.

g_{1ETRc} et g_{1Dc} étant de signe contraire, on peut faire des commentaires analogues sur l'importance de la forme de l'histogramme de D_c si l'on s'intéresse, par exemple, à la lixiviation.

3) au niveau de la comparaison des comportements par décade, on observe les mêmes tendances qui ne seront pas développées ici.

C4-III-C) Influence de la Valeur Moyenne

Nous allons maintenant étudier, pour une distribution gaussienne de la réserve utile, l'influence de la moyenne de la RU sur le comportement du modèle.

Pour ce faire, nous avons généré, de même que précédemment, (à partir de la réalisation RO_T), les réalisations suivantes de la RU : M_1S_2 et M_3S_2 . Leurs caractéristiques sont données tableau 4-13.

	M_1S_2	M_2S_2	M_3S_2
Type	N	N	N
μ_{RU}	.424	.565	.848
σ_{RU}	.1695	.1695	.1695
CV_{RU}	40.	30.	20.

Tableau 4-13 : Valeurs théoriques de M_1S_2 , M_2S_2 et M_3S_2

Les valeurs expérimentales associées à chaque réalisation sont des estimateurs des valeurs théoriques données tableau 4-13, nous n'y revenons pas.

L'utilisation du modèle, sur le site B_2T_1 et dans la situation climatique de référence, S_0 , pour chacune des trois réalisations précédentes a alors fourni trois réalisations d' ETR_c et de D_c dont les paramètres statistiques sont donnés tableau 4-14.

X	ETR _C				D _C		
	M ₁ S ₂	M ₂ S ₂	M ₃ S ₂		M ₁ S ₂	M ₂ S ₂	M ₃ S ₂
Loi:RU	N	N	N		N	N	N
Loi: X	LNI ₃	LNI ₃	LNI ₃		LN ₃	LN ₃	LN ₃
B _X	347.1	332.6	357.0		50.0	76.6	28.2
m' _X	250.4	272.7	302.5		180.2	152.6	112.7
s' _X	30.4	22.5	11.8		36.7	29.2	17.1
Mo' _X	263.2	283.5	306.2		166.1	138.5	107.7
Me' _X	254.9	276.6	303.8		175.3	147.6	111.0
g ₁ X	-.812	-.917	-.595		.759	.742	.466
g ₂ X	3.18	3.42	3.07		3.26	3.06	2.96
g ₁₁ X	.176	.118	.061		.132	.057	-.044
g ₂₁ X	2.42	2.53	2.71		2.51	2.55	2.75
Me _X	255.9	277.5	304.0		174.8	146.7	111.0
Qi _X	231.7	259.6	295.7		152.2	131.8	100.7
Qs _X	274.3	289.1	310.9		202.6	170.4	123.5
IQ _X	42.6	29.5	15.2		50.4	38.6	22.8

tableau 4-14 : Influence de la moyenne de la RU sur ETR_C et D_C

La figure 4-10 présente l'évolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles supérieur et inférieur de l'ETR_C et du D_C pour les trois simulations.

Tout le reste étant égal par ailleurs, lorsque μ_{RU} augmente, Me_{ETR_C} augmente, Me_{D_C} diminue et, dans les deux cas, IQ décroît. Ces résultats sont tout à fait cohérents avec le fait que ETR_C (D_C) soit une fonction monotone croissante (décroissante) de la RU, avec une pente qui décroît quand RU croît, figure 4-6.

La différence entre la moyenne arithmétique spatiale des ETR_C (D_C) et la médiane des distributions correspondantes diminue lorsque μ_{RU} augmente, les deux valeurs sont néanmoins toujours très proches. Or, l'écart entre ces deux valeurs correspond à une mesure de l'erreur entre une simulation déterministe, avec $RU_{det} = \mu_{RU}$ (Me_{ETR_C} , Me_{D_C}), et une

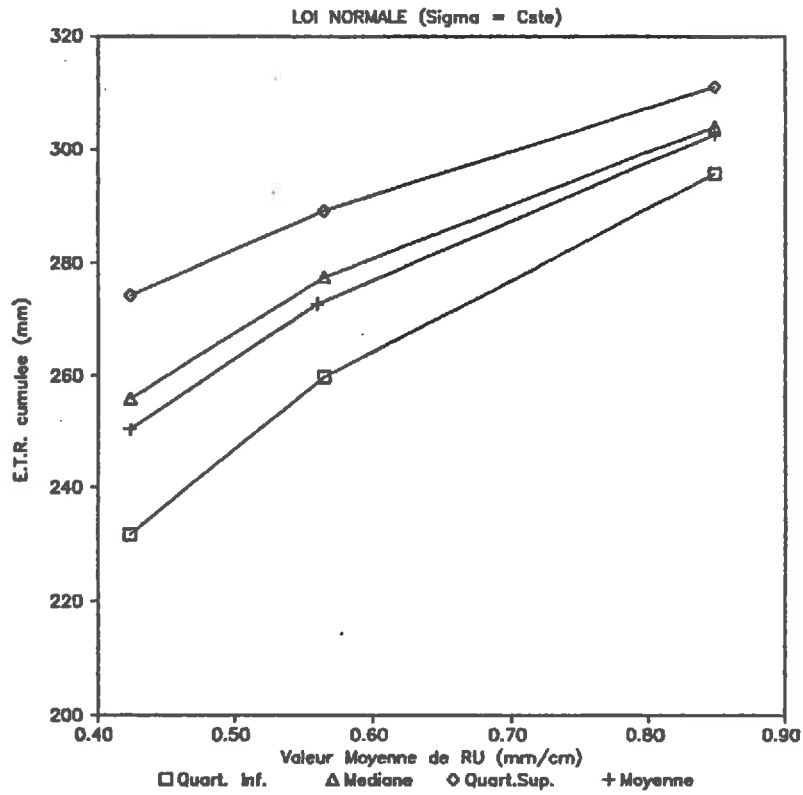


figure 4-10-a : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles inférieur et supérieur de l'ETR_C pour les réalisations M₁S₂, M₂S₂ et M₃S₂

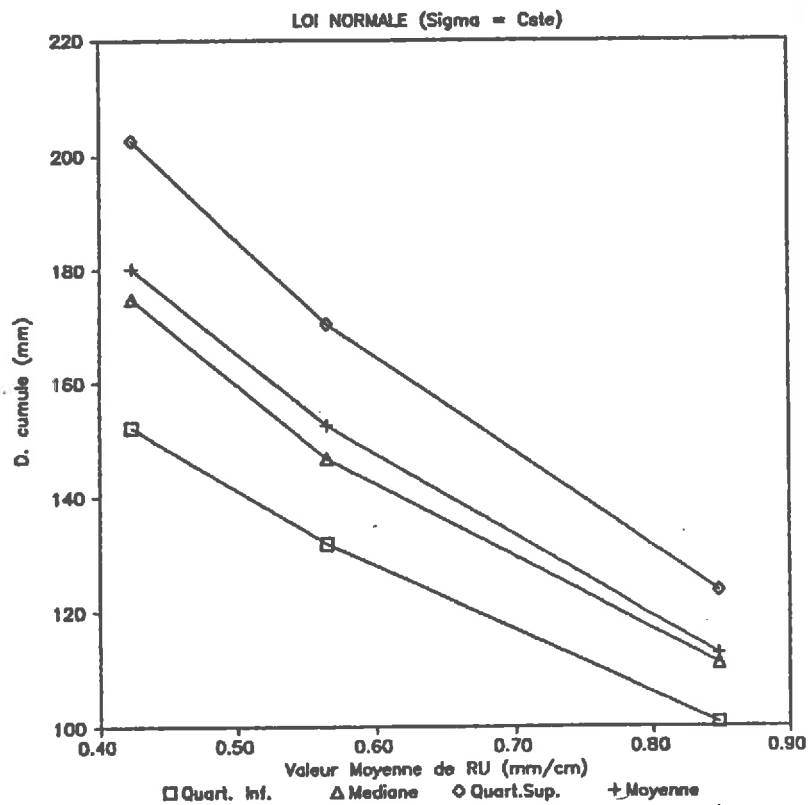


figure 4-10-b : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles inférieur et supérieur du D_C pour les réalisations M₁S₂, M₂S₂ et M₃S₂

simulation stochastique avec la distribution complète de RU pour laquelle on considère ensuite m_{ETRC} et m_{DC} .

Cela veut dire que, bien que les distributions d' $ETRC$ et de D_C soient fortement dissymétriques, les moyennes arithmétiques restent assez proches des médianes. Donc, si on connaît bien la loi de distribution de la RU, une simulation déterministe peut suffire pour estimer le comportement moyen de la parcelle sur l'ensemble du cycle. Mais, les valeurs de l'inter-quartile étant fortes, si notre estimation de la RU déterministe est mauvaise, le résultat de la simulation déterministe pourra alors être très différent du comportement moyen de la parcelle.

Notons que pour la réalisation M_2S_2 par exemple, l'inter-quartile de la RU vaut : $IQ_{RU} = .23$ mm/cm, avec $Q_{1RU} = .45$ mm/cm et $Q_{3RU} = .68$ mm/cm. Donc, si on tire une valeur de RU, on a 50.2 de chance d'être en dehors de l'intervalle $[.45 ; .68]$ mm/cm : si c'est le cas, une simulation déterministe conduira à une erreur forte sur l'estimation du comportement moyen de la parcelle.

Au niveau du comportement par période, la figure 4-11 donne les médianes et quartiles supérieurs et inférieurs pour l'ETR et le D par décade pour les simulations M_1S_2 et M_3S_2 . Cette figure est à rapprocher de la figure 4-7, résultat de la simulation sur la réalisation M_2S_2 .

Sur les quatre premières décades, l'eau n'est pas un facteur limitant, la consommation se fait, dans les trois cas, à l'ETM. Pour les décades ultérieures, le niveau de consommation pour la réalisation M_3S_2 est toujours supérieur, et les inter-quartiles pour cette simulation sont toujours plus faibles.

En ce qui concerne les pertes en eau, les constatations sont globalement identiques, sauf pour la troisième décade où la pluviométrie est forte, 73.8 mm, et où l'inter-quartile est plus grand pour la simulation M_3S_2 car les réservoirs ont une capacité plus grande qui leur permet de réagir à cette forte entrée en pluie, alors que, pour la simulation M_1S_2 , pratiquement toute la pluie est perdue par les réservoirs.

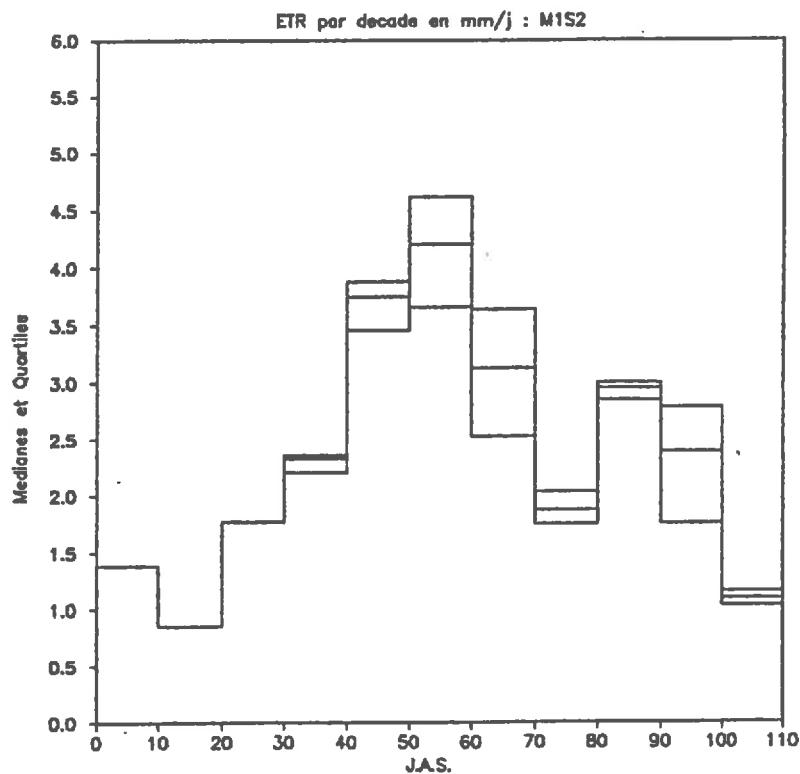


figure 4-11-a₁ : Valeurs par decade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la simulation M₁S₂

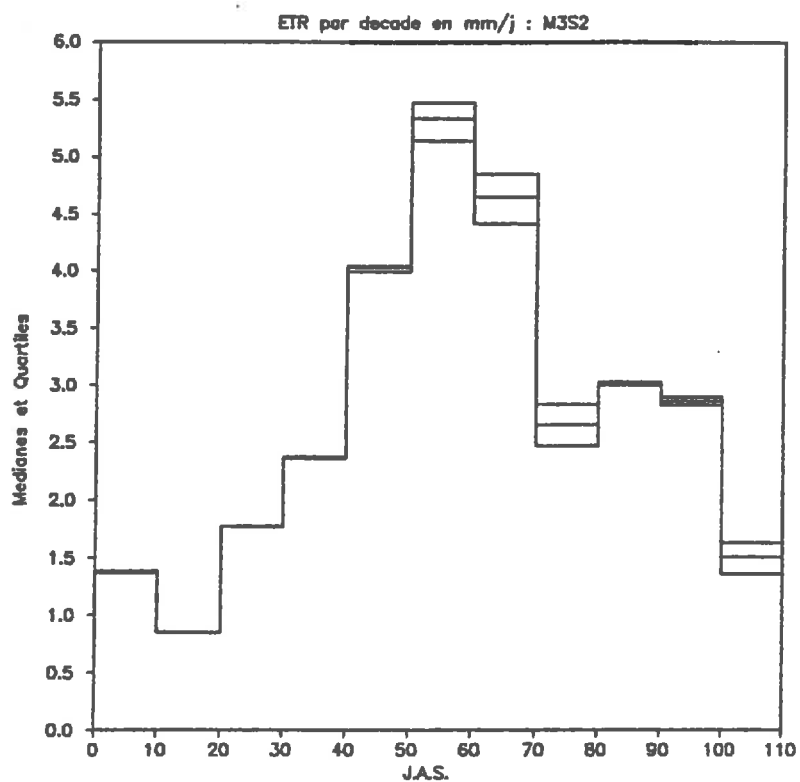


figure 4-11-a₂ : Valeurs par decade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la simulation M₃S₂

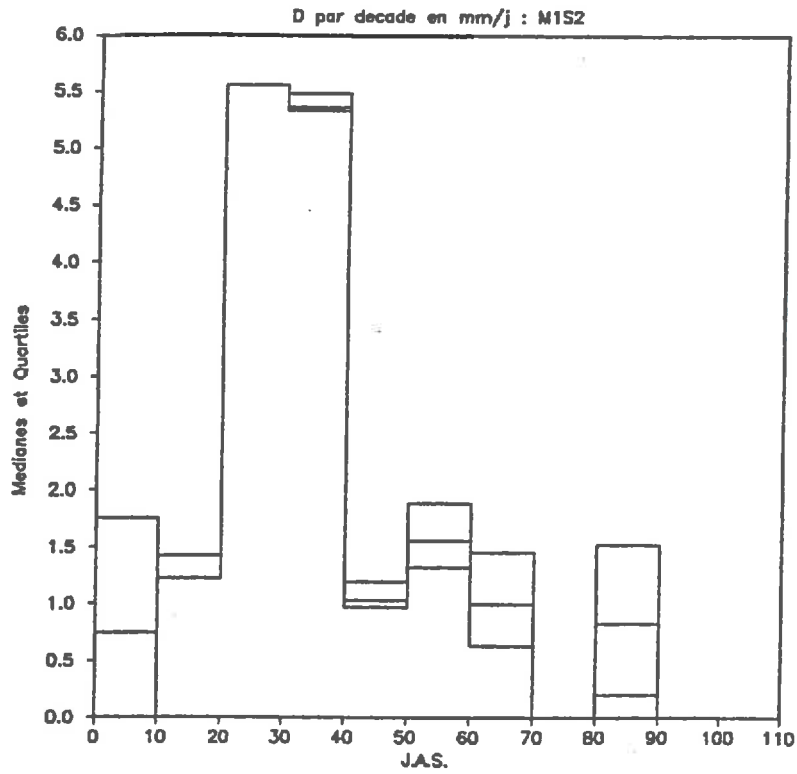


Figure 4-11-b₁ : Valeurs par decade des medianes, quartiles inferieurs et superieurs de D pour la simulation M₁S₂

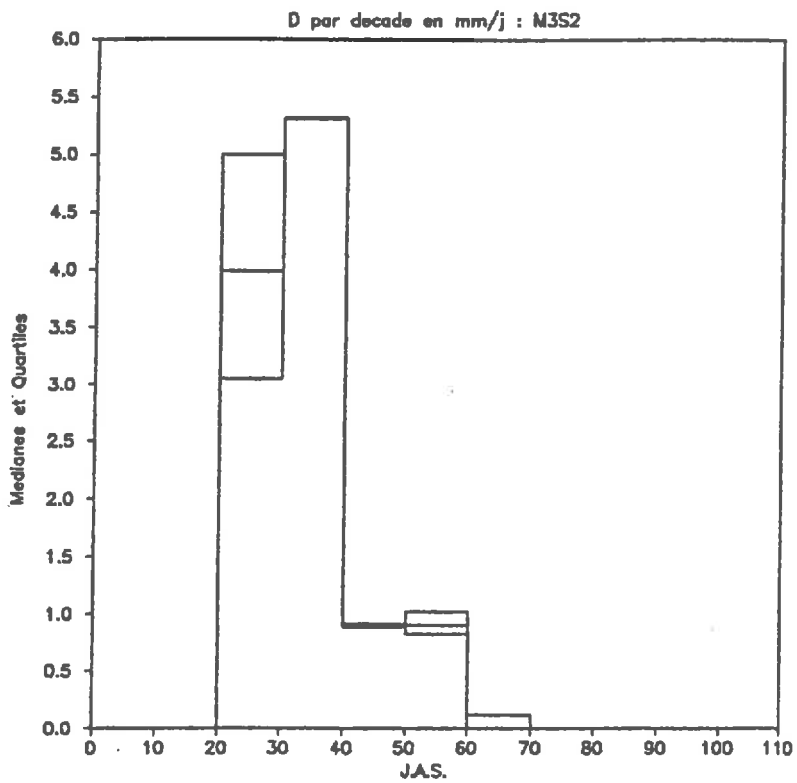


Figure 4-11-b₂ : Valeurs par decade des medianes, quartiles inferieurs et superieurs de D pour la simulation M₃S₂

C4-III-D) Influence de l'Ecart-Type

Ce paragraphe étudie, dans le cas d'une distribution gaussienne, l'influence de l'écart-type de la réserve utile sur les sorties du modèle.

A partir de la réalisation optimale tronquée, RO_T , nous avons généré deux nouvelles réalisations de la RU, M_2S_1 et M_2S_3 , dont les valeurs théoriques des paramètres statistiques sont données tableau 4-15.

	M_2S_1	M_2S_2	M_2S_3
Type	N	N	N
μ_{RU}	.565	.565	.565
σ_{RU}	.1130	.1695	.2260
$CV_{RU}\%$	20.	30.	40.

Tableau 4-15 : Valeurs théoriques de M_2S_1 , M_2S_2 et M_2S_3

Les paramètres statistiques des distributions d' ETR_C et de D_C associées sont données tableau 4-16.

X	ETR _C				D _C		
	M ₂ S ₁	M ₂ S ₂	M ₂ S ₃		M ₂ S ₁	M ₂ S ₂	M ₂ S ₃
Loi:RU	N	N	N		N	N	N
Loi: X	LNI ₃	LNI ₃	LNI ₃		LN ₃	LN ₃	LN ₃
B _X	323.6	332.6	342.5		94.1	76.6	60.6
m' _X	275.0	272.7	269.7		150.2	152.6	155.9
s' _X	14.3	22.5	31.2		19.1	29.2	39.9
Mo' _X	280.8	283.5	286.0		141.7	138.5	135.3
Me' _X	277.0	276.6	275.6		147.2	147.6	148.5
g ₁ X	-.716	-.917	-1.11		.582	.742	.952
g ₂ X	3.11	3.42	3.84		2.79	3.06	3.56
g ₁₁ X	.043	.118	.220		-.140	.057	.051
g ₂₁ X	2.63	2.53	2.53		2.61	2.55	2.57
Me _X	277.4	277.5	277.6		146.9	146.7	146.5
Qi _X	266.5	259.6	252.5		136.6	131.8	127.1
Qs _X	285.2	289.1	292.8		162.4	170.4	178.7
IQ _X	18.7	29.5	40.3		25.8	38.6	51.6

tableau 4-16 : Influence de l'écart-type de la RU sur ETR_C et D_C

La figure 4-12 présente l'évolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles supérieur et inférieur de l'ETR_C et du D_C pour les trois simulations.

- Puisque les lois de distribution de la RU sont normales, de même valeur moyenne, donc de même médiane, la médiane des réalisations de ETR_C et de D_C ne varie pas avec σ_{RU} .

- La valeur moyenne de ETR_C (D_C) diminue (augmente) faiblement avec l'écart-type de la RU. Mais l'écart entre la valeur moyenne et la médiane reste là encore très faible. Le raisonnement mené au paragraphe précédent est encore valable et donc, si la RU est bien estimée, une simulation déterministe permet d'estimer avec une précision suffisante le comportement moyen de la parcelle.

- Par contre, l'inter-quartile augmente fortement avec σ_{RU} et si la RU déterministe est mal estimée, l'erreur introduite dans l'estimation du comportement moyen peut être forte.

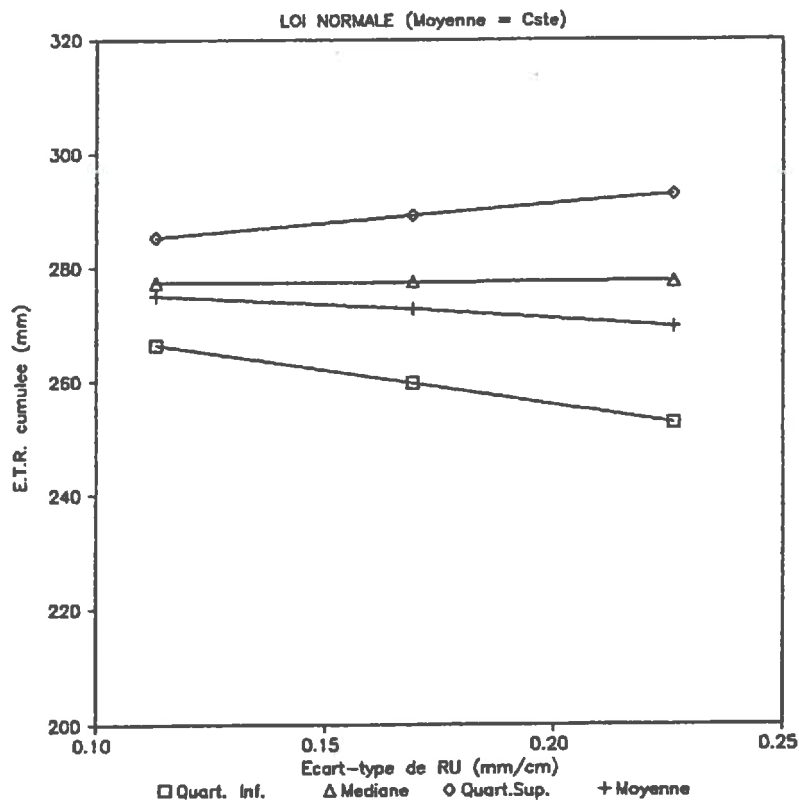


figure 4-12-a : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles inférieur et supérieur de l'ETR_c pour les réalisations M₂S₁, M₂S₂ et M₂S₃

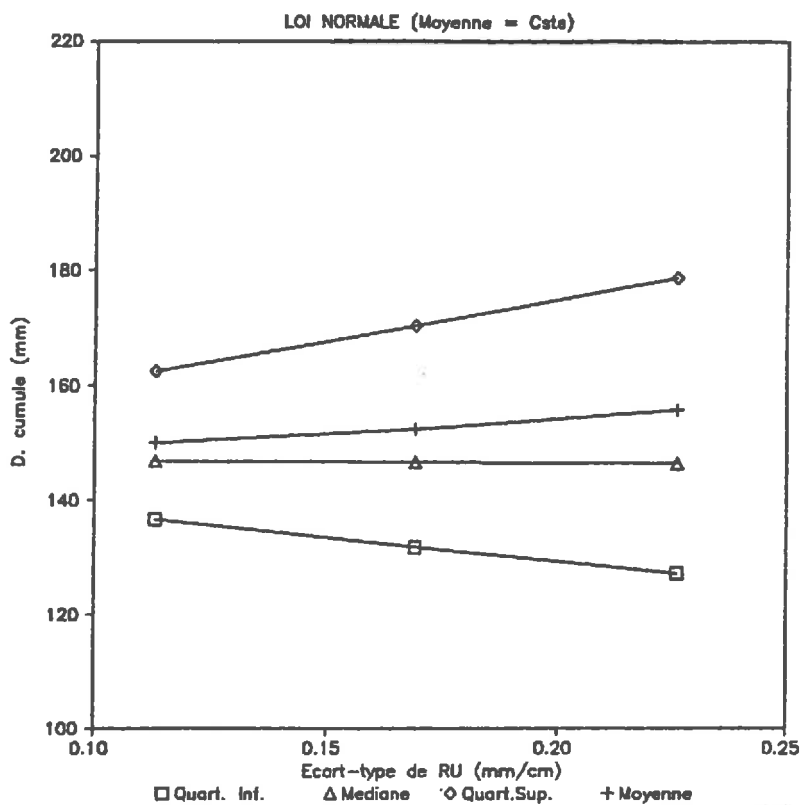


figure 4-12-b : Evolution de la moyenne arithmétique, de la médiane et des quartiles inférieur et supérieur du D_c pour les réalisations M₂S₁, M₂S₂ et M₂S₃

La comparaison des tableaux 4-14 et 4-16 nous permet de remarquer que, pour des coefficients de variation égaux, $(M_1S_2; M_2S_3)$ et $(M_3S_2; M_2S_1)$, les valeurs des inter-quartiles sont voisines. Dans la plage de variation considérée, la valeur du coefficient de variation de la réserve utile semble donc suffire pour décrire, en termes d'inter-quartile, la variabilité des sorties du modèle.

On notera, tableau 4-16, que $|g_{1X}|$ et $|g_{2X}|$, où X est ETR_C ou D_C , augmentent avec l'écart-type de la RU. Les distributions des consommations et pertes en eau cumulées sur l'ensemble du cycle sont donc d'autant plus dissymétriques que l'écart-type est grand. On retrouve également sur la figure 4-12 que ETR_C est dissymétrique avec $g_{1ETR_C} < 0$, puisque :

$$Q_{sETR_C} - Me_{ETR_C} < Me_{ETR_C} - Q_{iETR_C}$$

Pour D_C , les inégalités inverses sont vérifiées.

Nous ne présentons pas ici les courbes des médianes et quartiles par période car elles conduisent aux mêmes commentaires.

C4-III-E) Influence du Spectre de Pluie

Nous allons considérer ici quatre nouvelles situations pluviométriques et utiliser le modèle dans un contexte stochastique sur chacun de ces scénarios.

La réalisation de la RU considérée est la réalisation M_2S_2 . A la lumière de la dépendance des résultats à la pluviométrie, pour une variabilité donnée, et compte-tenu des résultats concernant l'influence de la nature de la loi de distribution, de la valeur moyenne et de l'écart-type de la RU, on pourra estimer l'évolution de la dépendance à la pluviométrie pour différentes lois de distribution de la RU.

Pour étudier l'influence de la pluviométrie en termes de pluie cumulée sur l'ensemble du cycle et de spectre de pluie, nous avons donc introduit les spectres de pluie suivants :

- S_0 : spectre de référence : $P(J)$: $P_{0c} = 400$ mm
- S_1 : coefficient réducteur : $0.8 \times P(J)$: $P_{1c} = 320$ mm
- S_2 : coefficient multiplicateur : $1.2 \times P(J)$: $P_{2c} = 480$ mm
- S_3 : autre spectre : $P'(J)$: $P_{3c} = 320$ mm
- S_4 : autre spectre : $P''(J)$: $P_{4c} = 480$ mm

où : P_{ic} est la pluie cumulée sur le cycle pour la situation climatique S_i .

La figure 4-13 présente les spectres de pluie correspondant aux pluviométries S_0 , S_3 et S_4 . Par rapport à la situation climatique de référence, S_0 , nous avons voulu, pour S_3 , créer une zone à faible pluviométrie en milieu de cycle où les besoins en eau de la plante sont importants, et, pour S_4 , une zone à forte pluviométrie.

La pluviométrie cumulée, entre le 41^{ème} et le 80^{ème} jour, est alors :

$$S_0 : 143 \text{ mm}$$

$$S_3 : 63 \text{ mm}$$

$$S_4 : 223 \text{ mm}$$

On a évidemment : $S_1 : 0.8 \times 143 = 114.4 \text{ mm}$

et $S_2 : 1.2 \times 143 = 171.6 \text{ mm}$

La figure 4-14 fournit, pour les cinq scénarios de pluie, les valeurs des médianes ainsi que la représentation de l'inter-quartile autour de ces médianes pour l'ETR_c (4-14-a), et pour le D_c (4-14-b).

Le tableau 4-17 donne les valeurs correspondantes, ainsi que les valeurs de g_1 et de g_2 des réalisations de ETR_c et de D_c associées.

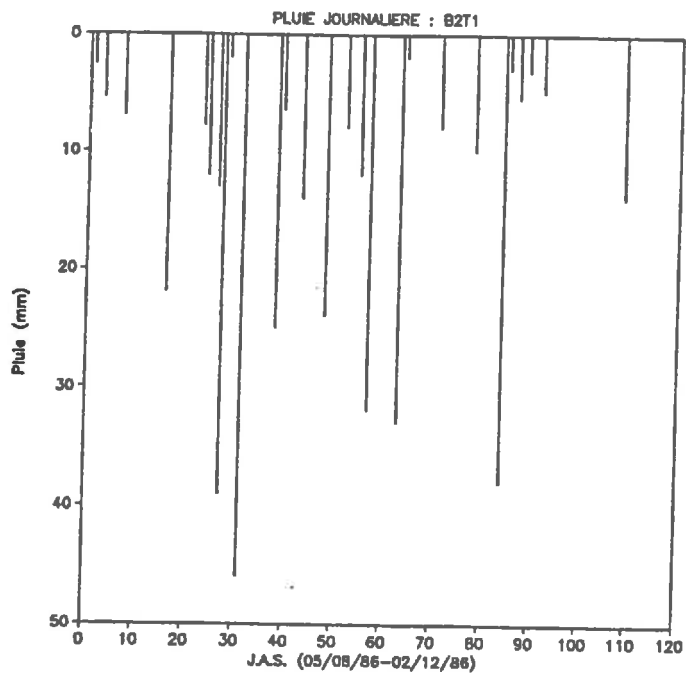


figure 4-13-a : Situation climatique de référence : S_0

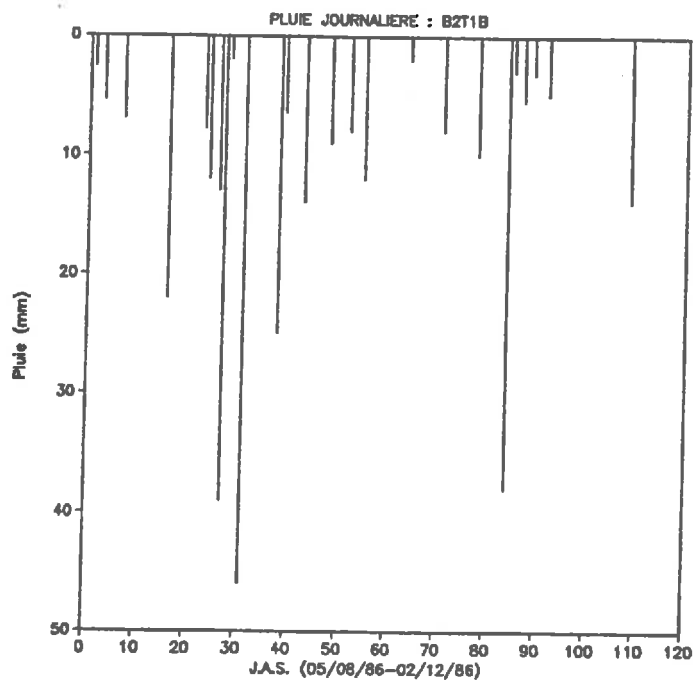


figure 4-13-b : Situation climatique : S_3

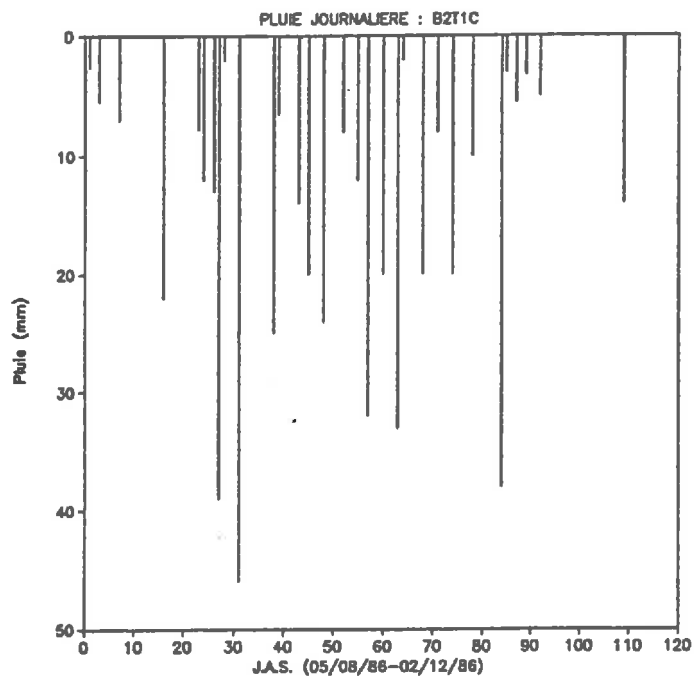


figure 4-13-c : Situation climatique : S₄

	ETR _C				D _C			
	Me	IQ	g ₁	g ₂	Me	IQ	g ₁	g ₂
S ₀	277.5	29.4	-.917	3.42	146.7	38.6	.742	3.06
S ₁	257.4	21.2	-1.19	4.34	88.6	28.2	.980	3.78
S ₂	287.8	36.1	-.696	2.96	216.1	43.0	.513	2.78
S ₃	217.5	16.1	-.842	3.35	125.9	30.5	.463	2.55
S ₄	328.8	28.4	-1.03	3.89	177.8	37.3	.798	3.39

tableau 4-17 : Influence de la pluviométrie sur les sorties du modèle

On constate d'une part une certaine sensibilité du modèle, pour un spectre donné, à la quantité de pluie (S₀, S₁, S₂), et, d'autre part, une grande sensibilité, pour une pluviométrie donnée, à sa répartition dans le temps (S₁, S₃) et (S₂, S₄).

Cette constatation, simple, est heureuse car elle montre que le modèle réagit bien à des entrées en pluie différentes : Qualité première pour un modèle de bilan hydrique !

Au niveau de la variabilité, les valeurs des inter-quartiles sont plus faibles, notamment pour l'ETR_C lorsque la pluviométrie est faible : situations S₁ et S₃.

On peut noter également que, pour un même spectre, |g_{1X}|, avec X égale ETR_C ou D_C, diminue lorsque la pluviométrie totale augmente. Les réalisations d'ETR_C et de D_C deviennent donc moins dissymétriques. Mais, pour une même pluviométrie cumulée, la valeur de g_{1X} peut beaucoup fluctuer en fonction de la répartition dans le temps de la pluviométrie.

Les comportements par période, pour l'ETR, sont reportés figure 4-15 pour les situations climatiques S₁ à S₄. Sur cette figure, le comportement par période pour la situation climatique de référence S₀ est également rappelé.

- Sur les quatre premières décades, la pluviométrie est suffisante pour que, dans tous les cas et pour toutes les valeurs de RU, HR, taux de remplissage du réservoir racinaire introduit en C1-I-A-2, soit égal à 1. La

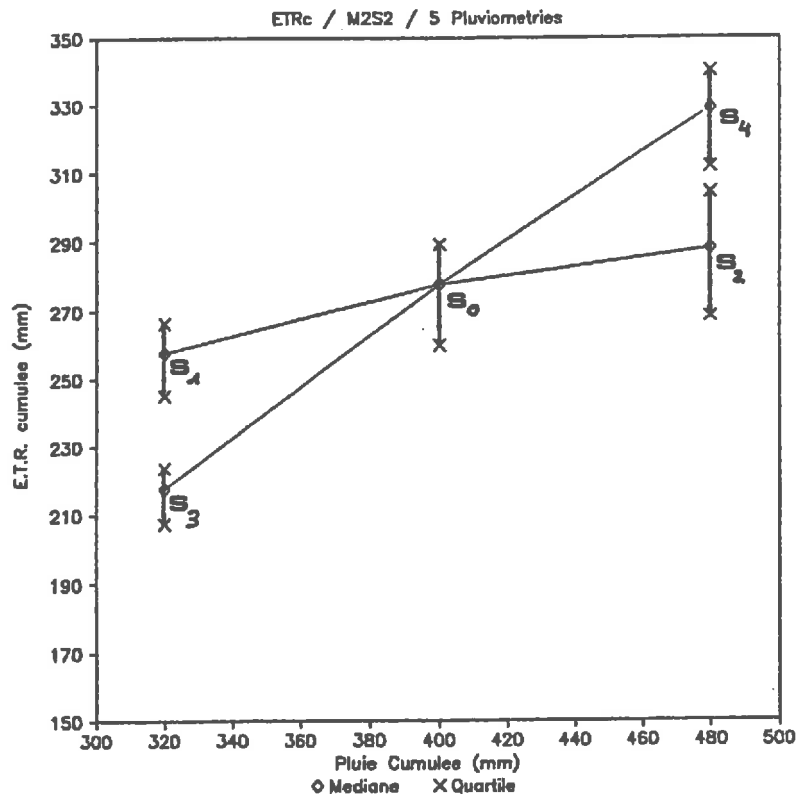


figure 4-14-a : Médianes et inter-quartiles de l'ETRC pour les cinq situations pluviométriques

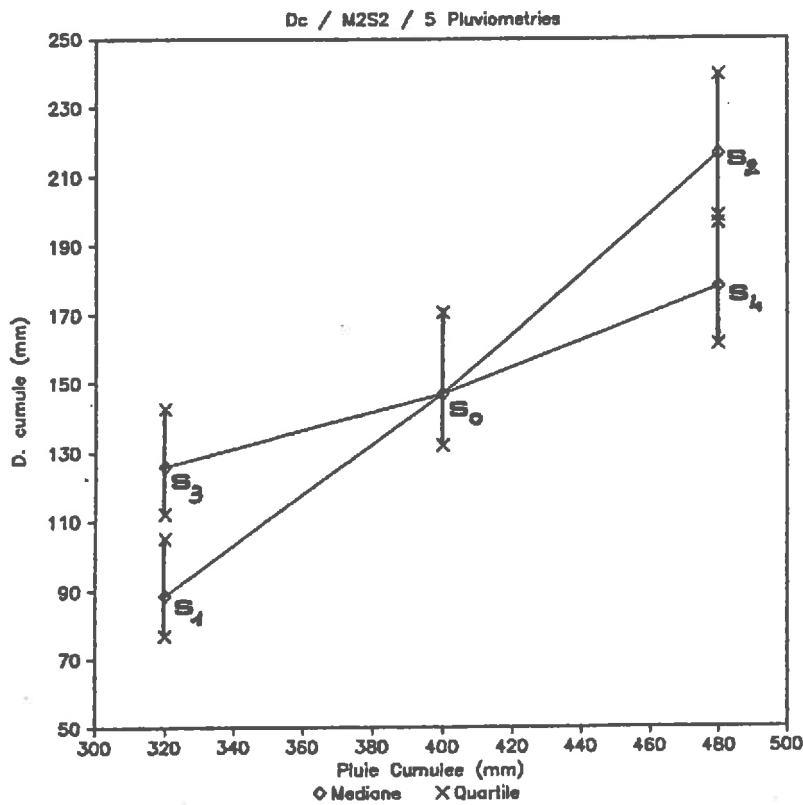


figure 4-14-b : Médianes et inter-quartiles de D_C pour les cinq situations pluviométriques

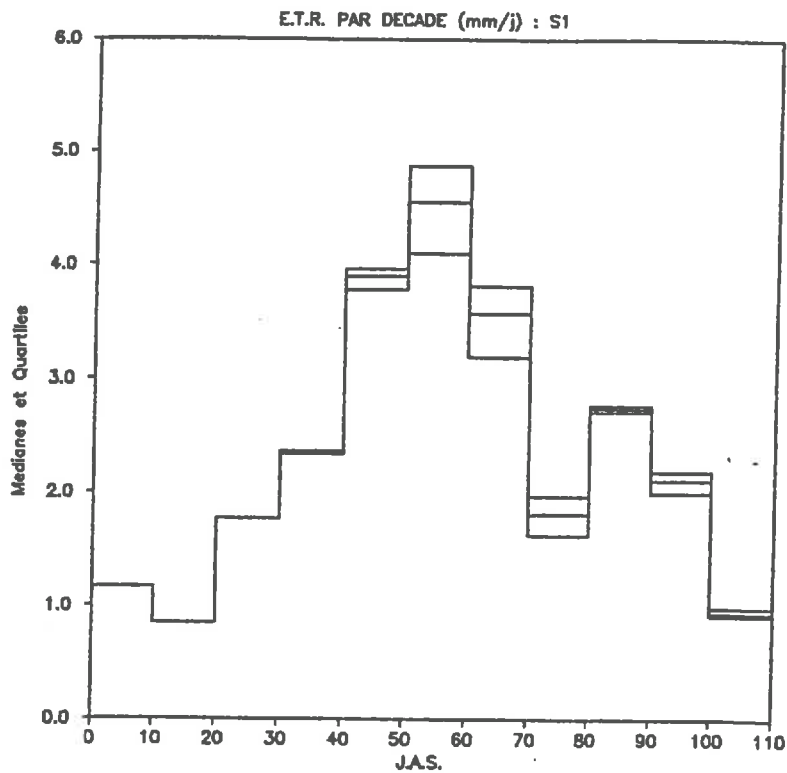


figure 4-15-a : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S₁

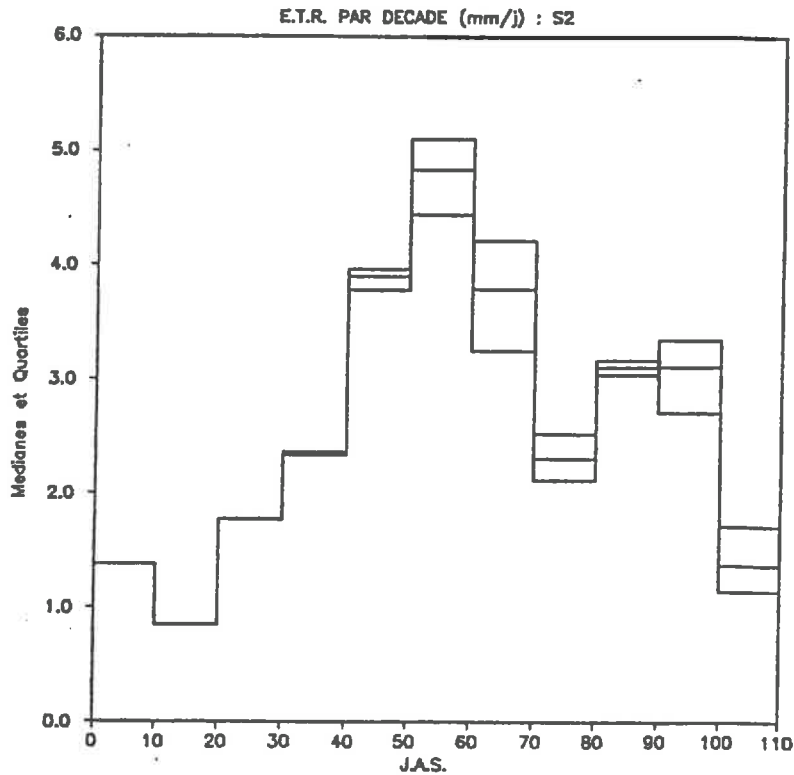


figure 4-15-b : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S₂

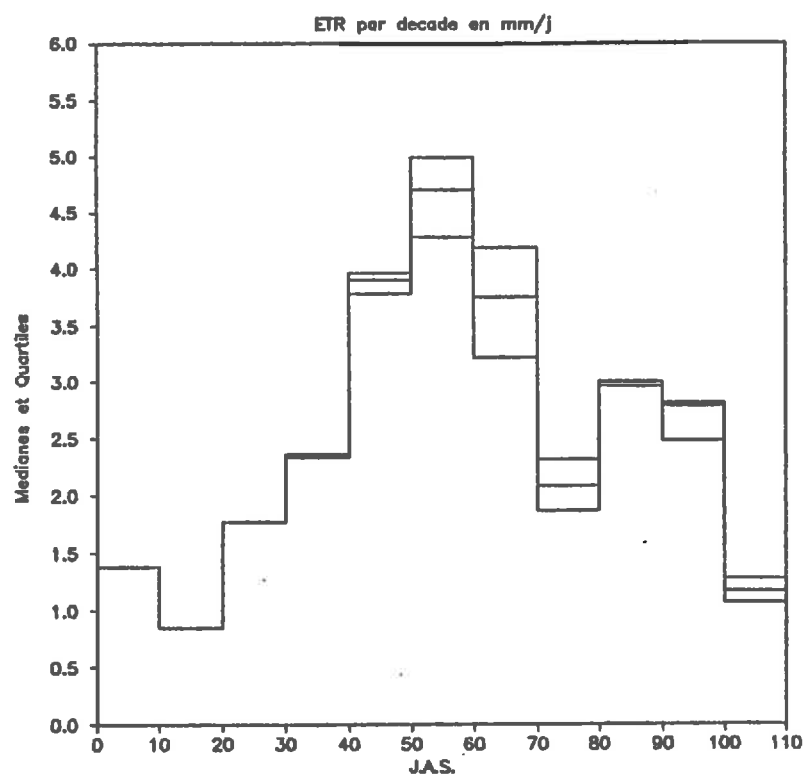


figure 4-15-c : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S_0

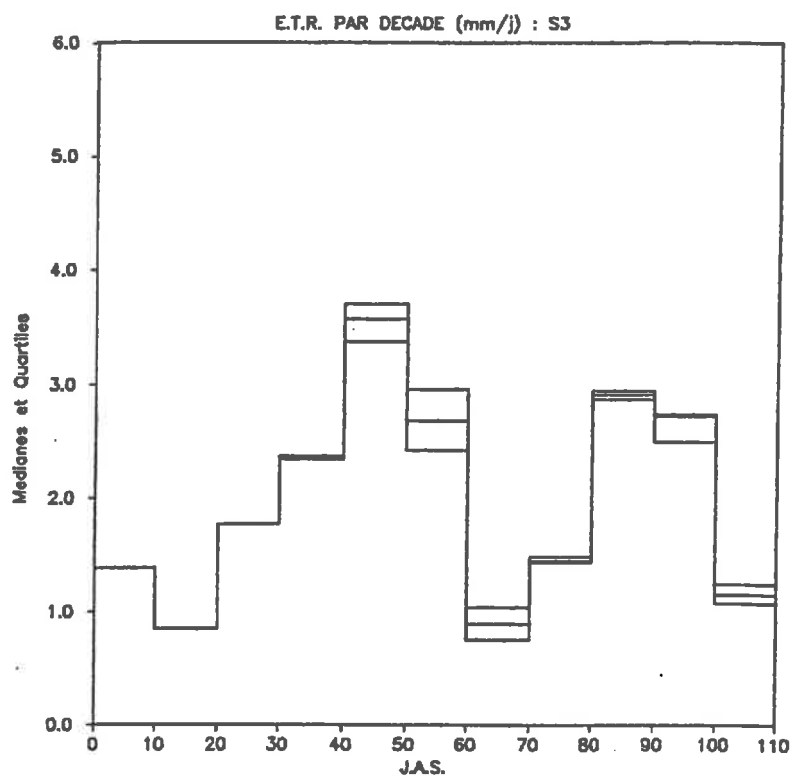


figure 4-15-d : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S₃

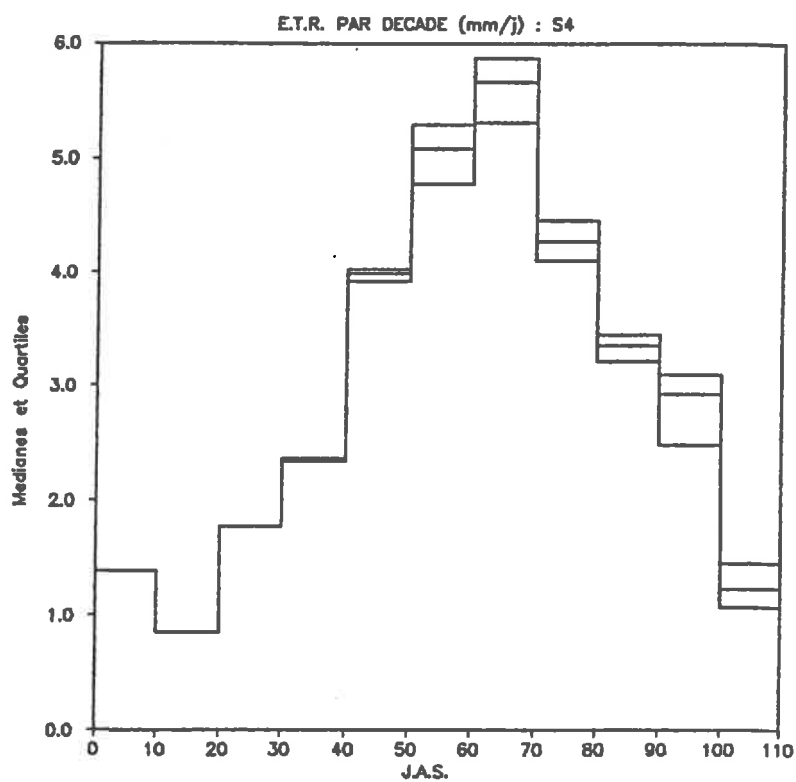


figure 4-15-e : Valeurs par décade des médianes, quartiles inférieurs et supérieurs de l'ETR pour la situation climatique S₄

consommation se fait alors à l'ETM. Il n'y a pas de variabilité, quelle que soit la situation climatique considérée ici.

- Sur la période où la pluviométrie a été modifiée, de la cinquième à la huitième décade, la variabilité est forte si les HR ont des valeurs intermédiaires : situations S_0 , S_1 et S_2 .

Par contre :

* la faible pluviométrie de la simulation S_3 entraîne une faible consommation et une faible variabilité, en termes d'inter-quartiles.

* la forte pluviométrie de la simulation S_4 entraîne une consommation forte mais une variabilité faible car le taux de remplissage est proche de l'unité.

Ces phénomènes sont tout à fait expliqués par les figures 2-4 et 2-6 du chapitre deux. On observe effectivement sur ces figures que, d'une manière générale, la variabilité de l'ETR croît avec l'ETM et la variabilité de la RU, mais qu'elle dépend fortement du niveau d'humectation du réservoir.

En conclusion, nous pouvons dire que le spectre de pluie a une très grande influence sur les sorties du modèle, non seulement au niveau de la valeur de la consommation totale sur le cycle et des consommations par période, mais aussi au niveau de la réponse à la variabilité de la RU. Pour une variabilité de la RU donnée, la variabilité sur les sorties est plus importante pour un spectre qui assure un taux de remplissage du réservoir racinaire ni trop faible (situation S_3), ni trop fort (situation S_4).

C4-III-F) Structure Spatiale des Sorties

Dans les sous-chapitres précédents, nous n'avons travaillé que sur une réalisation optimale de la réserve utile n'ayant pas de structure spatiale. A l'aide de cette réalisation, nous avons étudié l'influence des paramètres de la loi de distribution tels que :

- la nature de la loi

- la valeur de la moyenne
- la valeur de l'écart-type

sur la variabilité des sorties par période et sur l'ensemble du cycle.

Nous allons maintenant travailler sur des réalisations optimales de la RU présentant une structure spatiale. Ces réalisations sont générées, rappelons-le, à partir de 200 réalisations d'une simulation complète de Monte Carlo selon la méthode exposée en C3-III-C.

Les paramètres statistiques d'une telle réalisation ressemblent, nous l'avons vu, aux statistiques d'ensemble, c'est-à-dire aux statistiques théoriques, imposées, de la fonction aléatoire générée. Les valeurs théoriques de la moyenne et de la variance étant fixées, l'histogramme d'une réalisation optimale générée par cette méthode est donc très voisin de l'histogramme d'une réalisation optimale obtenue dans le cas où la RU n'est pas structurée.

En termes statistiques, (valeurs des moyennes, écarts-types, médianes, inter-quartiles et coefficients de symétrie et d'aplatissement), les résultats obtenus sur deux réalisations optimales sont donc très peu différents.

Nous ne présenterons donc ici que l'aspect géostatistique des résultats issus de simulations sur des réalisations de la RU présentant une structure.

Dans un premier temps, nous avons travaillé sur les trois réalisations optimales tronquées issues des simulations de Monte Carlo avec une portée a différente de 0., C4-II. Soient RU10, RU30 et RU50 ces trois réalisations.

Pour ces trois réalisations, nous avons considéré les valeurs théoriques suivantes :

- $\mu_{RU} = .565 \text{ mm/cm}$
- $\sigma_{RU} = .1695 \text{ mm/cm}$

Le tableau 4-18 donne les valeurs expérimentales des paramètres statistiques et géostatistiques des trois réalisations de RU considérées.

	Val.Thé.	RU10	RU30	RU50
m _{RU}	.565	.559	.559	.546
s _{RU}	.1695	.148	.146	.144
g _{1RU}	0.0	-.056	-.061	.095
g _{2RU}	3.0	2.39	2.41	2.54
C _{ORU}	0.0	0.0	0.0	0.0
C _{2RU}	1.0	.980	.975	1.10
a _{RU}	10/30/50	8.08	24.60	41.97

tableau 4-18 : Paramètres statistiques et géostatistiques des réalisations de RU

Notons que ce tableau est à rapprocher du tableau 4-3 qui donne ces mêmes paramètres pour les trois distributions centrées réduites non-tronquées associées. On sait que la troncature entraîne une réduction de l'écart-type, du coefficient d'aplatissement ainsi que de la portée, C3-III-C-2. Elle explique donc en partie l'écart entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales du tableau 4-18.

Sur la figure 4-16 sont reportées, pour les trois valeurs de la portée, les variogrammes expérimentaux divisés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{CM}-ETR_C)$ et $\log(D_C-D_{CM})$. Les courbes correspondent aux variogrammes exponentiels lissés sur les points expérimentaux du variogramme de la RU.

Dans les cas traités ici, si l'on calcule les variogrammes expérimentaux directement sur les valeurs d' ETR_C , ou de D_C , sans considérer la transformation logarithmique, les résultats obtenus ne sont pas grandement différents. On observe cependant un bruit plus important, au niveau des valeurs de la portée et du palier notamment.

On constate, quelle que soit la valeur de la portée, une parfaite identité entre la structure de la RU et la structure des variables transformées, $\log(ETR_{CM}-ETR_C)$ et $\log(D_C-D_{CM})$.

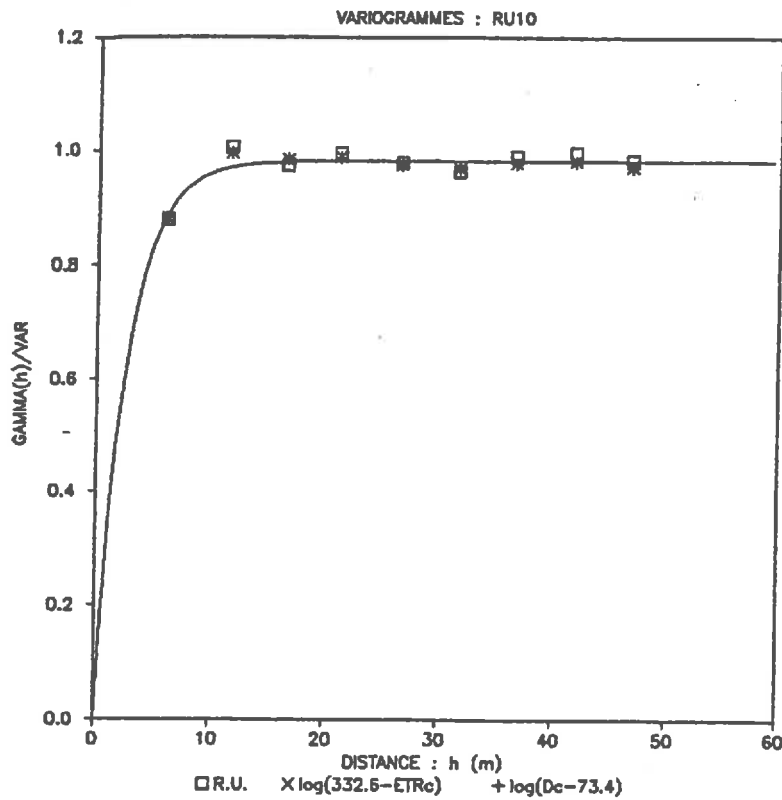


figure 4-16-a : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{CM}-ETR_C)$ et $\log(D_C-D_{CM})$ pour $a_{RU}=10.m$

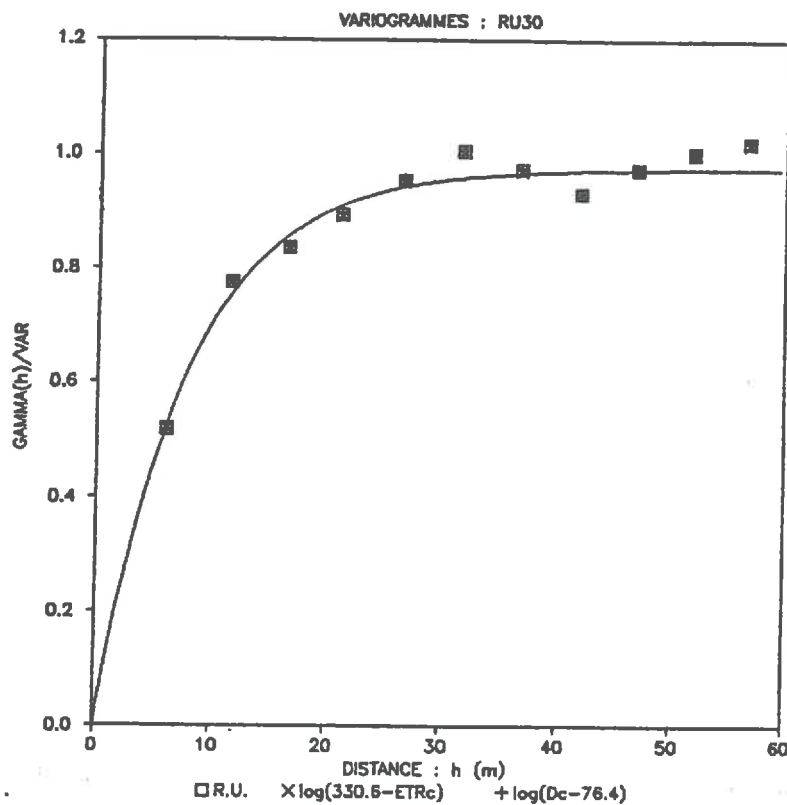


figure 4-16-b : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{CM}-ETR_C)$ et $\log(D_C-D_{CM})$ pour $a_{RU}=30.m$

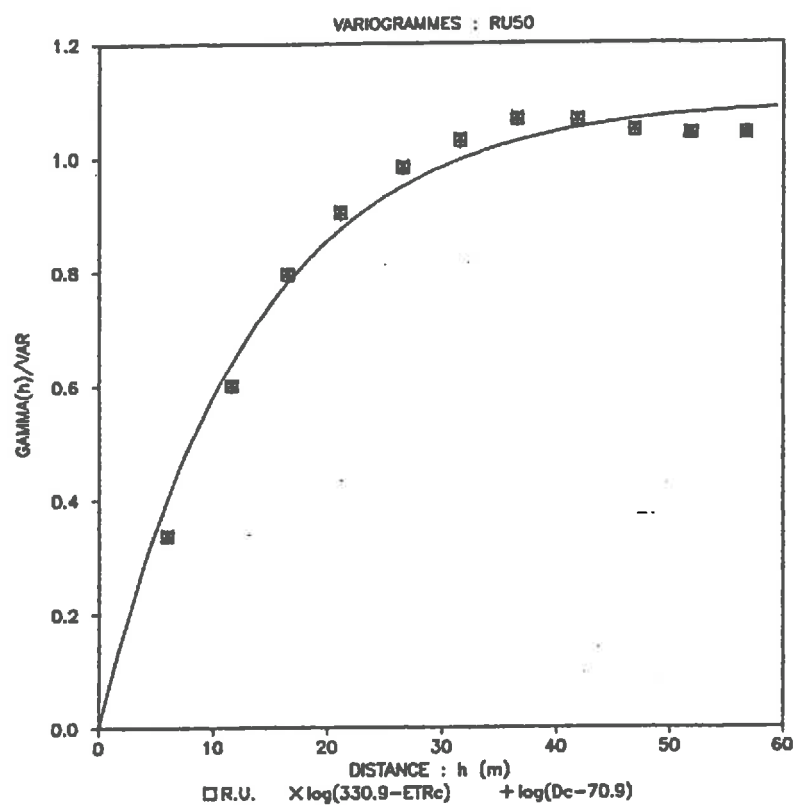


figure 4-16-c : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale, de RU, $\log(ETR_{CM} - ETR_C)$ et $\log(D_C - D_{CM})$ pour $a_{RU} = 50.m$

Cette similitude entre la structure de la variable caractérisant le sol et la structure de la variable caractérisant la consommation en eau, donc, dans une large mesure, les rendements, est à rapprocher de résultats publiés dans la littérature où les auteurs observent, d'une part une structure spatiale pour les rendements, et d'autre part, une concordance entre cette structure et la structure du sol.

Parmi ces auteurs, on peut citer :

- Ruelle et al., 1986 qui étudient les rendements de trois cultures pluviales successives sur une même parcelle et comparent leur structure à celle de l'humidité et de la texture moyennées sur le premier mètre de sol.

- Bresler et al., 1981 et Russo, 1984 qui étudient la structure des rendements et de variables caractérisant le sol sur des parcelles irriguées.

Bresler et al., 1981 trouvent :

- * que les variables sol, (teneurs en eau avant et après l'irrigation, conductivité à saturation), et les rendements en arachide, (matière sèche totale, poids des gousses), sont distribués selon des lois log-normales

- * que le coefficient de variation des rendements est plus faible que les coefficients de variation des variables sol

- * et que l'échelle intégrale, C3-III-A-3, des rendements est également plus faible que celle des variables sol.

Le tableau 4-19 rappelle, pour mémoire, les ordres de grandeur des coefficients de variation, C.V., et des échelles intégrales, J., obtenus dans les trois articles précédemment cités.

Référence	Variable	C.V. (%)	J. (m)
Bresler et al., 1981 <u>Arachide</u>	Rendement total	18.	13.
	Humi. Sol Avant Irrigation	34.	21.
	Humi. Sol Après Irrigation	27.	21.
	K _{sat}	64.	25.
Russo, 1984 <u>Piment</u>	Rendement fruit	10.	34.
	Pression de l'eau à mi-distance des goutteurs	34.	36.
Ruelle et al., 1986	<u>Blé Tendre</u> : Nbre Epis	19.	19.
	<u>Vesce-Avoine</u> :		
	Matière Sèche Totale	20.	0.
	Matière Sèche Vesce	42.	2.
	Matière Sèche Avoine	50.	1.
	Matière Sèche Adventices :		
	Graminées	101.	0.
	Dicotylédones	122.	0.
	<u>Blé Dur</u> :		
	Nombre de Pieds	15.	0.
	Nombre d'Epis	15.	12.
	Tallage Epis	17.	13.
	Matière Sèche Epis	29.	18.
	Matière Sèche Totale	18.	10.
	<u>Humidité Pondérale [0;1m]</u>		
	W ₁₉₈₁	19.	15.
	W ₁₉₈₂	12.	15.
	<u>(A+L)_{moyen} sur [0;1m]</u>	16.	14.

tableau 4-19 : Coefficients de variation et échelles intégrales de quelques rendements et variables sol relevés dans la littérature

Ce tableau montre que les niveaux de variabilité et les valeurs des portées que nous avons choisis dans ce mémoire, ainsi que les résultats de nos simulations, sont comparables, en termes d'ordres de grandeur, à des valeurs obtenues sur différents sites et pour différentes cultures par des mesures in-situ.

Le jeu statistique auquel nous nous sommes livrés n'est donc pas déconnecté de la réalité agronomique. Nous pourrions donc, en conclusion, de tirer des conséquences d'ordre pratique de ce travail.

Au niveau de l'échelle intégrale, nos résultats sont cependant quelque peu différents de ceux de Bresler et al. notamment, puisque nous ne trouvons pas de réduction de la portée. Mais ils ne sont pas en contradiction avec les résultats théoriques de Lumley et Panofsky, 1964 qui montrent, en utilisant des notions d'analyse spectrale que l'échelle intégrale d'un processus aléatoire $V(h)$, avec $V(h)=f(U(h))$ où $U(h)$ est un processus aléatoire gaussien, ne peut être supérieure à l'échelle intégrale de $U(h)$.

Dans le cas où la portée vaut $a=30.m$, nous avons étudié l'influence de la variabilité de la RU, (variation de μ_{RU} , variation de σ_{RU}), sur la portée de ETR_c et de D_c . Dans la gamme de variation envisagée, (CV_{RU} variant de 20. à 40. %), nous n'avons trouvé aucune altération de la structure liée à un changement du coefficient de variation.

Pour cette même valeur de la portée, et pour un coefficient de variation de 30. %, nous avons calculé les variogrammes de la consommation en eau par période. La figure 4-17 présente les variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale des réalisations d'ETR moyenne par décade pour les décades 5 à 8 où la variabilité est forte. La courbe correspond au variogramme exponentiel lissé sur les points du variogramme expérimental de la RU considérée. Sur cette figure, les variogrammes ont été calculés, suivant le degré de symétrie de la réalisation de l'ETR décadaire, directement sur l'ETR ou sur la transformation logarithmique de cette variable.

On constate là encore, que la structure est globalement conservée. En fait, les figures 4-7 et 4-15 le montrent, les niveaux de variance varient beaucoup d'une décade à l'autre. Les paliers des variogrammes expérimentaux, $\gamma_{ETR}(h)$, sont donc très différents d'une décade à l'autre. Mais, comme le montre la figure 4-17, le variogramme expérimental divisé par la variance expérimentale se conserve au cours du cycle, tout au moins durant les décades où la consommation varie d'une valeur de la RU à l'autre. En effet, pour une décade où la consommation est constante, égale

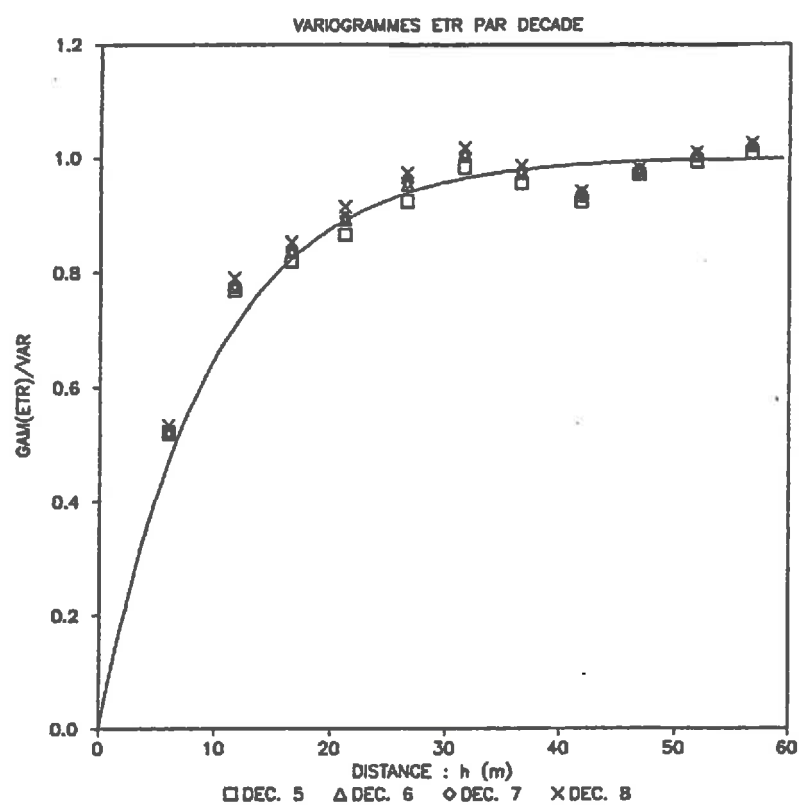


figure 4-17 : Variogrammes expérimentaux normés par la variance expérimentale des ETR moyennes par décade pour les décades 5 à 8, avec $a_{RU}=30.m$

à l'ETM, sur l'ensemble de la parcelle, $\hat{\gamma}_{ETR}(h) = 0.$, pour toutes les valeurs de h .

C4-III-G) Evolution des Courbes d'Ecart-Réduits de ETR et de D en Fonction de l'Ecart-Réduit de RU

Pour la réalisation RU30 de la RU, et dans la situation climatique de référence S_0 , nous allons présenter les courbes d'écarts-réduits sur l'ensemble du cycle pour l' ETR_c et le D_c et, sur quelques décades, pour l'ETR.

Une première figure de ce type a été introduite, pour la réalisation M_2S_2 dans la situation climatique de référence, figure 4-6.

Nous rappelons que ces figures peuvent s'interpréter, d'une part comme l'écart-réduit entre deux simulations déterministes avec deux valeurs différentes de la RU, et d'autre part, comme l'écart-réduit entre les résultats d'une simulation déterministe avec une RU donnée, résultats assimilés au comportement moyen de la parcelle, et une estimation du comportement "moyen" réel de la parcelle, estimé par les valeurs des médianes et issu d'une simulation stochastique.

L'écart-réduit pour la variable X est calculé par :

$$ER(X) = \frac{X(RU) - X(RU_{det})}{X(RU_{det})}$$

où X est successivement : ETR_c , D_c et ETR, valeur moyenne par décade de la consommation.

L'étude de la figure 4-18 semble permettre les conclusions suivantes :

- on retrouve, comme sur la figure 4-6, les conséquences différentes d'une surestimation et d'une sous-estimation de la RU sur l' ETR_c et le D_c

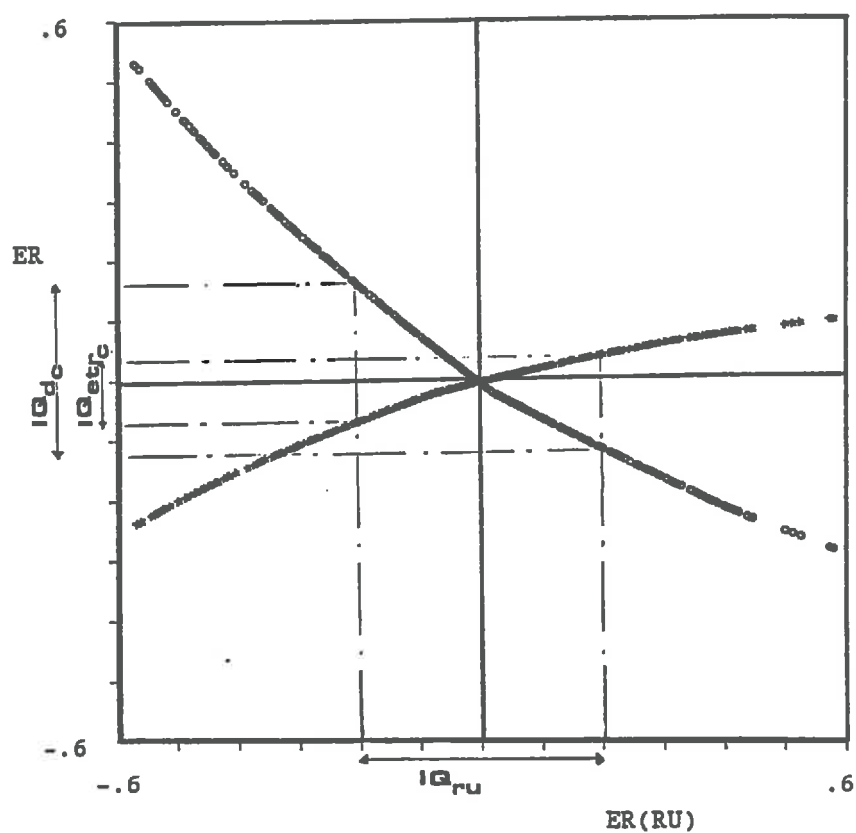


figure 4-18 : Erreur relative sur $ETR_C(*)$ et sur $D_C(o)$ en fonction de l'erreur relative sur la RU , pour la réalisation $RU30$

- pour cette variabilité de la RU et dans ces conditions climatiques, l'erreur faite sur l' ETR_C est toujours faible :

* si $ER(RU) = +60\%$, $ER(ETR_C) = +10\%$

* si $ER(RU) = -60\%$, $ER(ETR_C) = -25\%$

- par contre, l'erreur relative sur le D_C est beaucoup plus forte :

* si $ER(RU) = +60\%$, $ER(D_C) = -30\%$

* si $ER(RU) = -60\%$, $ER(D_C) = +55\%$

Or, si le niveau de consommation en eau de la culture est un élément important dans son développement, on sait également, même si ce phénomène n'est pas pris en compte dans ce modèle, que des fortes valeurs de D peuvent entraîner, par lixiviation, des pertes en éléments minéraux et nuire ainsi au bon développement ultérieur de la culture. L'importance d'une bonne estimation de la lame d'eau drainée, sur l'ensemble du cycle et par période, en découle. Dans l'exemple traité, cette estimation peut être entaché d'une erreur forte, une bonne estimation de la réserve en eau utile semble donc être nécessaire.

L'interprétation différente de cette figure qui consiste à assimiler le résultat d'une simulation déterministe au comportement global de la parcelle conduit à des erreurs de même nature, par rapport au comportement médian réel de la parcelle. Les conséquences d'une telle assimilation sont donc identiques, à savoir que :

- l'erreur sur l' ETR_C n'est jamais très forte, et ce, d'autant plus que la RU déterministe est bien estimée

- et que cette erreur sera toujours plus forte sur le D_C

Au niveau des erreurs relatives par période, la figure 4-19 fournit les erreurs relatives sur l' ETR moyenne par décade pour les décades 6, 7, 8 et 11, et pour trois scénarios de pluie : $S_0(0)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, scénarios de référence, sec et très pluvieux respectivement.

Nous avons choisi ces quatre décades car, sur les cinq premières, on sait que, quel que soit le scénario de pluie envisagé, la consommation se fait pratiquement, pour toutes les valeurs de la RU, à l' ETM . Les erreurs sont

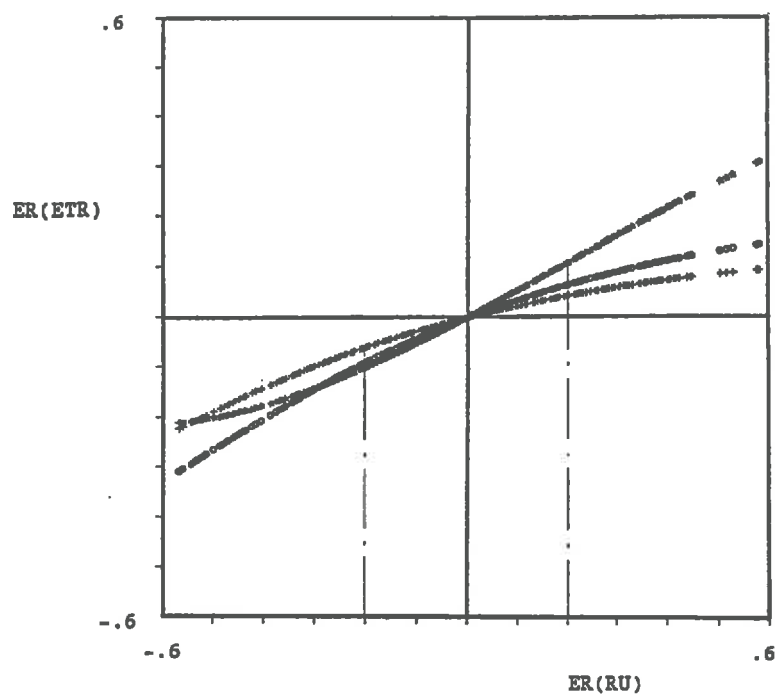


figure 4-19-a : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la sixième décade

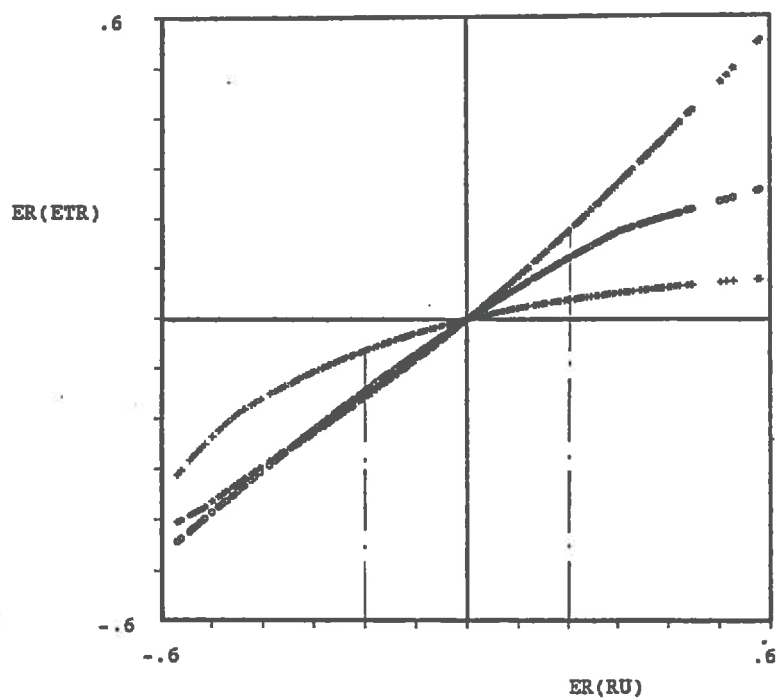


figure 4-19-b : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la septième décade

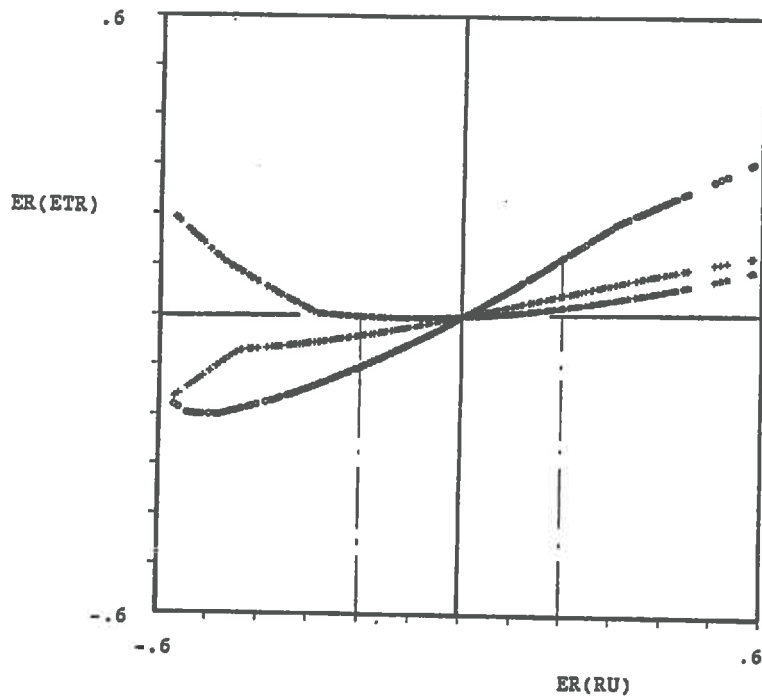


figure 4-19-c : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la huitième décade

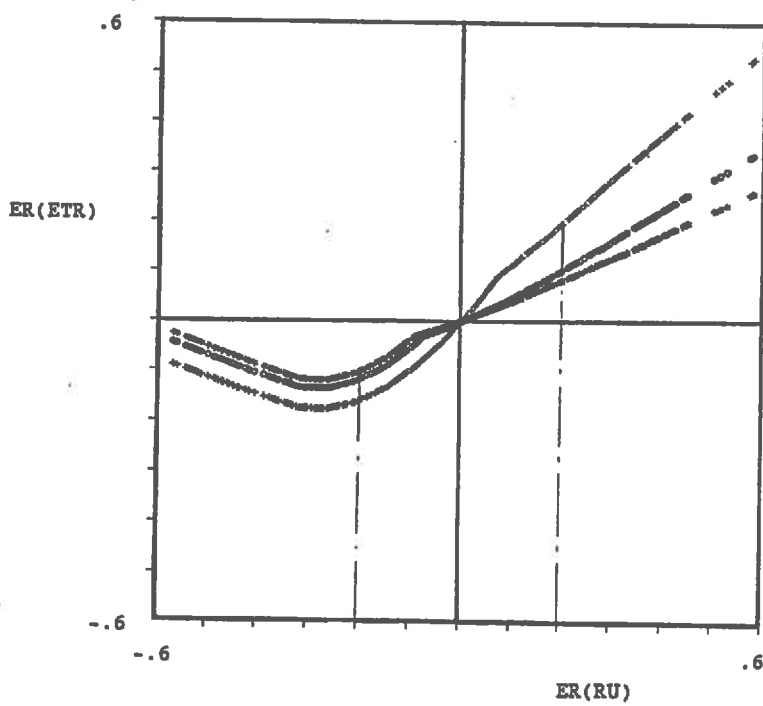


figure 4-19-d : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les trois scénarios de pluie : $S_0(o)$, $S_3(*)$ et $S_4(+)$, pour la onzième décade

donc pratiquement toutes nulles. Quant aux décades 9 et 10, elles n'apportent pas d'informations supplémentaires.

L'étude de ces figures appelle les commentaires suivants :

- les écarts-réduits par période sont plus forts que sur l'ensemble du cycle. Certains écarts sont notamment proches de la première bissectrice.

- Ils sont également très dépendants de la pluviométrie et les trois scénarios sont, tour à tour, les plus sensibles.

- Enfin, ces figures permettent de montrer les phénomènes de compensation qui se produisent au cours du cycle. Ainsi, sur les huitième et onzième décades, l'ensemble des points correspondant à un scénario de pluie étant assimilé à une courbe, certaines de ces courbes ont une pente négative. C'est-à-dire que sur la décade considérée et pour l'intervalle de la RU correspondant, la consommation pour une valeur plus faible de la RU est plus forte. Ces phénomènes de compensation atténuent bien évidemment les différences d'un site à l'autre sur l'ensemble du cycle.

Ces figures mettent également en évidence une information qui n'est pas donnée par les valeurs des quartiles et inter-quartiles, à savoir le comportement à l'extérieur de l'intervalle d'amplitude l'inter-quartile. En effet, à l'intervalle $[Q_i ; Q_s]$, on peut associer l'intervalle correspondant en termes d'écarts-réduits. Ainsi, pour une loi normale théorique de moyenne $\mu_{RU} = .565$ mm/cm, et d'écart-type $\sigma_{RU} = .1695$ mm/cm, on a :

$$Q_{iRU} = .4497 \text{ mm/cm}$$

et

$$Q_{sRU} = .6803 \text{ mm/cm}$$

soit :

$$IQ_{RU} = .2306 \text{ mm/cm}$$

Les valeurs correspondantes, en termes d'écarts-réduits sont :

$$Q_{iER}(RU) = (.4497 - .565)/.1695 = - 20.7$$

et

$$Q_{sER}(RU) = (.6803 - .565)/.1695 = + 20.7$$

soit :

$$IQ_{ER}(RU) = + 40.7$$

Puisque ETR_C et D_C sont des fonctions monotones de RU, on peut associer à ces valeurs les quartiles inférieur et supérieur, ainsi que l'inter-quartile des distributions de $ER(ETR_C)$ et $ER(D_C)$.

Cette correspondance est représentée figure 4-18, on trouve :

$$IQ_{ER}(ETR_C) = + 10.7$$

et

$$IQ_{ER}(D_C) = + 27.7$$

Au niveau des comportements par période, le même raisonnement peut être appliqué dès que la courbe des écarts-réduits est monotone. Dans chacun des cas de la figure 4-19, nous avons donc tracé l'intervalle d'amplitude $IQ_{ER}(RU)$, auquel on peut associer, pour les sixième et septième décades notamment, les valeurs de $IQ_{ER}(ETR)$.

On constate que les valeurs de $IQ_{ER}(ETR)$ observées sont, en général, beaucoup plus fortes que celles trouvées sur le cycle. D'autre part, pour certaines périodes et pour certaines situations climatiques, la valeur absolue de l'écart-réduit croît faiblement pour les quarts extrêmes des distributions : les quartiles supérieurs et inférieurs sont alors de bons estimateurs de la variabilité à l'échelle de la parcelle.

Par contre, la valeur absolue de cet écart-réduit croît parfois de manière importante pour les quarts extrêmes de la distribution de $ER(RU)$, donc de RU : les quartiles supérieurs et inférieurs, de part leur méthode de calcul, ne sont alors pas capables de traduire cette forte variabilité.

C'est notamment le cas pour la septième décade dans la situation climatique de référence. On a vu dans ces conditions de variabilité et sous ces conditions climatiques, même si c'est pour une réalisation différente (M_2S_2) de la RU, figure 4-7-a, que la consommation médiane est assez faible ($Me_{ETR}=3.75$ mm/j pour une valeur de l'ETM de : $ETM=6.77$ mm/j), et que la variabilité est assez forte ($Q_{iETR}=3.22$ mm/j et $Q_{sETR}=4.18$ mm/j), soit une valeur de IQ_{ETR} d'environ 10 mm sur la décade.

La figure 4-19-b nous montre de plus que la variabilité continue de croître assez fortement si la valeur de la RU se trouve à l'extérieur de l'intervalle $[Q_{iRU} ; Q_{sRU}]$.

Pour cette même décade et pour la situation climatique S_4 , l'écart-réduit sur ETR n'augmente que faiblement si RU est supérieure à Q_{sRU} , mais diminue plus fortement en valeur absolue si RU est inférieure à Q_{iRU} .

Notons enfin que des commentaires analogues peuvent être faits sur les valeurs de $ER(D)$ si les valeurs de $D(RU_{det})$ ne sont pas nulles, ou directement sur les valeurs de D sinon.

En conclusion, il faut adopter ici un point de vue agronomique et expliquer une fausse contradiction qui a pu apparaître entre notre conclusion du paragraphe C4-III-E et les commentaires ci-dessus.

En C4-III-E, nous avons dit que, pour une variabilité de la RU donnée, la variabilité sur les sorties, en termes d'inter-quartiles, est plus importante pour un spectre qui assure un taux de remplissage du réservoir racinaire ni trop faible (situation S_3), ni trop fort (situation S_4), autrement dit pour les spectres S_0 , S_1 et S_2 .

Or, nous avons présenté ici les écarts-réduits pour les situations S_0 , S_3 et S_4 où les écarts-réduits sont parfois très forts, sixième et septième décades pour le scénario S_3 , onzième décade pour le scénario S_4 . Ces écarts correspondent en fait à des consommations médianes faibles avec des écarts absolus (quartiles) faibles, mais des écarts-relatifs forts.

Cependant, pour ces décades, les résultats en termes d'écarts absolus sont plus importants d'un point de vue agronomique.

Ainsi, pour la septième décade dans la situation climatique S_3 , la valeur de la médiane de l'ETR est $Me_{ETR} = .9 \text{ mm/j}$. Même si l'on fait une erreur de 50.2 sur cette valeur, la valeur corrigée, 1.35 mm/j , restera toujours très faible par rapport à l'ETM qui vaut 6.77 mm/j .

On peut alors dire que la présentation de la variabilité de la RU sous la forme des médianes et quartiles est plus intéressante d'un point de vue agronomique, même si elle ne donne pas d'information sur les quarts extrêmes des distributions et si elle ne permet pas de mettre en évidence les phénomènes de compensation.

Enfin, nous renvoyons ici à l'étude de sensibilité statique sur l'ETR qui a été faite en C2-I-B-2, et où l'on avait déjà noté :

- l'influence différente d'une surestimation et d'une sous-estimation de la réserve utile
- une forte dépendance à la valeur de l'ETM ainsi qu'à celle du taux d'humectation du réservoir racinaire
- une non-proportionnalité à l'erreur relative sur la RU.

Tous ces aspects sont encore vrais ici, mais les erreurs sur l'ETR sont atténuées par le caractère dynamique de l'étude menée ci-dessus et par les phénomènes de compensation qui se produisent, au cours d'une décade d'une part, et sur l'ensemble du cycle d'autre part. Pour ces mêmes raisons, une étude menée sur les valeurs moyennées par pentades conduirait à des valeurs plus fortes pour $ER(ETR)$ et $ER(D)$.

En conclusion de cette étude plus détaillée du comportement du modèle par décade, on constate que ces sorties par période sont beaucoup plus sensibles à la variabilité de la réserve utile en termes d'erreurs relatives comme en termes d'inter-quartiles. Il faut donc être très prudent dans toute interprétation de résultats par décade, et plus encore par pentade, issus d'une simulation déterministe.

C4-IV) SIMULATIONS SUR LES VARIABLES CARACTERISANT LA PLANTE : CJ - K_c

Les mesures in-situ des caractéristiques du développement racinaire et foliaire d'une culture présentant une très forte variabilité, il est important, dans une optique de modélisation du bilan hydrique à l'échelle d'une parcelle agronomique, de tester la sensibilité du modèle à cette variabilité.

Or, à l'heure actuelle, les caractéristiques racinaires et foliaires de la culture considérées dans les simulations sont envisagées sous l'angle déterministe, et sont souvent issues de résultats bibliographiques. Nous avons d'ailleurs partiellement adopté cette démarche dans ce mémoire, notamment au niveau des valeurs des vitesses de croissance racinaire journalière.

Nous allons maintenant présenter brièvement deux simulations de Monte Carlo en considérant les variables caractérisant la plante comme des fonctions aléatoires.

Dans ces simulations, la réserve utile est considérée comme fixe d'un point à l'autre de la parcelle, la vitesse de croissance racinaire journalière, CJ, et le vecteur pentadaire des coefficients culturaux, K_c , seront successivement assimilés à des fonctions aléatoires.

C4-IV-A) Simulations sur CJ

C4-IV-A-1) Simulation de Monte Carlo sur CJ

Nous avons réalisé une simulation de Monte Carlo analogue à celles effectuées en C4-II, en considérant la vitesse de croissance racinaire journalière comme une fonction aléatoire non spatialement structurée.

200 réalisations de 400 valeurs ont donc été générées, les paramètres théoriques de la fonction aléatoire sont :

- loi normale
- $\mu_{CJ} = CJ_{det} = .9 \text{ cm/j}$
- $\sigma_{CJ} = .27 \text{ cm/j}$
- $CV_{CJ} = 30.2\%$

Pour les raisons invoquées précédemment, les réalisations de la fonction aléatoire, $N(0,1,0)$, associées ont été tronquées à ± 2 .

A l'issue de cette simulation de Monte Carlo, nous avons donc obtenu 200 réalisations d'environ 400 valeurs d' ETR_c et de D_c . Le tableau 4-20 donne les moyennes et écarts-types d'ensemble de m_{CJ} , s_{CJ} , Me_{ETRC} , IQ_{ETRC} , Me_{Dc} et IQ_{Dc} dont nous ne rappellerons pas les définitions.

X	m_{CJ} (cm/j)	s_{CJ} (cm/j)	Me_{ETRC} (mm)	IQ_{ETRC} (mm)	Me_{Dc} (mm)	IQ_{Dc} (mm)
<X>	.9003	.2388	277.16	22.14	147.29	14.62
sig(X)	.0130	.0071	0.94	1.54	0.86	1.02

tableau 4-20 : Résultats d'une simulation de Monte Carlo sur la CJ

Pour les raisons indiquées en C4-II-B, quasi-ergodicité de la méthode de génération dans le cas où la portée du phénomène aléatoire est faible, (ici $a_{CJ} = 0.$), par rapport à la taille caractéristique de la parcelle échantillonnée, les écarts-types d'ensemble de toutes les variables considérées dans le tableau précédent sont tous très faibles.

Bien évidemment, l'augmentation de la portée a_{CJ} aurait des effets analogues à ceux observés sur les simulations de Monte Carlo effectuées sur la réserve utile. Nous ne les présenterons pas ici, bien que l'on puisse envisager, à priori, que la vitesse de croissance racinaire soit spatialement structurée.

Une comparaison du tableau 4-20 et de la première ligne des tableaux 4-5-a et 4-5-b qui correspond à la simulation de Monte Carlo sur la RU avec $argU = 0.$, nous montre :

- d'une part, que les moyennes d'ensemble des valeurs des médianes des réalisations de ETR_c et de D_c sont voisines, et également proches des résultats de la simulation déterministe de référence avec $RU_{det} = .565$ mm/cm et $CJ_{det} = .9$ cm/j, tableau 4-1.

- d'autre part, que les moyennes d'ensemble des inter-quartiles sont plus faibles pour la simulation sur CJ.

On trouve en effet :

$$* \quad \langle IQ_{ETRC} \rangle_{CJ} = 22.1 \text{ mm et } \langle IQ_{ETRC} \rangle_{RU} = 29.6 \text{ mm}$$

$$* \quad \langle IQ_{Dc} \rangle_{CJ} = 14.6 \text{ mm et } \langle IQ_{Dc} \rangle_{RU} = 38.7 \text{ mm}$$

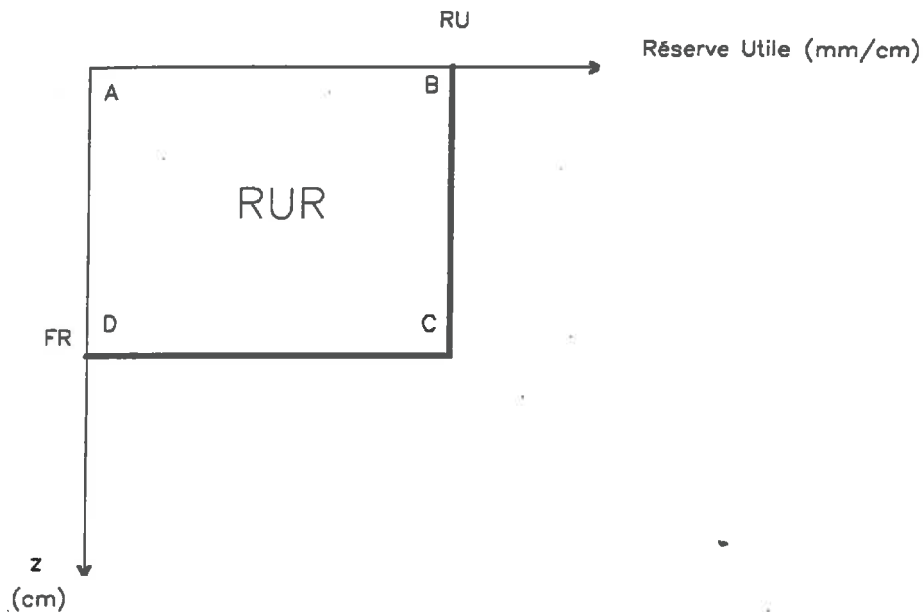
Or, par rapport à la simulation déterministe de référence, on a introduit successivement sur la RU et sur la CJ une variabilité correspondant à un coefficient de variation de 30.%. .

Il semble donc, qu'à niveau de variation équivalent par rapport à la simulation de référence, les sorties du modèle soient moins sensibles à la variabilité de la vitesse de croissance racinaire journalière qu'à la variabilité de la réserve en eau utile. Des simulations effectuées dans d'autres conditions de variabilité nous ont permis de conclure sur la généralité, dans les conditions d'utilisation présentes, de cette propriété.

Ce résultat mérite d'être étudié de manière plus approfondie, et nous allons voir que sa réalité dépend des conditions d'utilisation du modèle.

C4-IV-A-2) Explication de la plus faible sensibilité à la variabilité de CJ

Si nous envisageons la représentation suivante du réservoir racinaire :



Soit RUR , la quantité d'eau correspondant à la quantité maximale en eau utilisable par la plante pour la profondeur racinaire FR .

On a :

$$RUR = SR_{max} = FR * RU$$

Assimiler la RU à une variable aléatoire consiste donc à déplacer horizontalement la frontière BC de la représentation précédente suivant le valeur de RU .

Une simulation avec CJ variable consiste à déplacer verticalement la frontière CD .

Dans le cadre de la simulation déterministe de référence, les conditions initiales sont :

$$FH(1) = z_D = 90. \text{ cm}$$

$$FR(1) = 12.5 \text{ cm}$$

avec LS , durée de croissance racinaire égale à 75 jours.

- la valeur initiale du front d'humectation, $FH(1)$, est dictée par la pluviométrie précédent le semis.

- la valeur initiale non-nulle du front racinaire est donnée par la régression linéaire effectuée par Chopart, 1980 sur ses résultats expérimentaux.

Dans ces conditions, la valeur du front racinaire au jour J s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{FR}(J) &= \text{FR}(1) + \text{CJ} * J && \text{pour } J < \text{LS} \\ \text{FR}(J) &= \text{FR}_{\text{max}} && \text{pour } J > \text{LS} \end{aligned}$$

- une erreur relative, $\text{ER}(\text{RU})$, sur la RU conduit alors à l'erreur relative suivante sur la RUR :

$$\text{ER}(\text{RUR}(J)) = \text{ER}(\text{RU})$$

où :

$$\text{ER}(X) = \frac{X - X_{\text{ref}}}{X_{\text{ref}}}$$

- une erreur relative $\text{ER}(\text{CJ})$ sur la CJ conduit, par contre à :

$$\text{ER}(\text{RUR}(J)) = \frac{\text{FR}(J) - \text{FR}_{\text{ref}}(J)}{\text{FR}_{\text{ref}}(J)} = \frac{J * (\text{CJ} - \text{CJ}_{\text{ref}})}{\text{FR}(1) + (\text{CJ}_{\text{ref}} * J)} < \text{ER}(\text{CJ})$$

Donc, par rapport à une situation de référence, une variation de CJ telle que $\text{ER}(\text{CJ}) = 30\%$ par exemple, entraîne une variation sur la quantité d'eau utilisable par la culture plus faible qu'une variation de la RU telle que $\text{ER}(\text{RU}) = 30\%$.

La variation sur RUR étant plus faible, on en déduit de manière directe que la variation sur l'ETR est plus faible.

Les remarques ci-dessus sont valables dans notre cas d'application, mais ne sont pas extrapolables à d'autres conditions.

En effet, si $\text{FR}(1) = 0$. notamment, on trouve $\text{ER}(\text{RUR}) = \text{ER}(\text{CJ})$. Une variation de CJ aura alors les mêmes effets sur les variations de RUR, donc de l'ETR, qu'une variation de même valeur de la RU.

Notons encore que, même si $\text{FR}(1) = 0$., cette dernière remarque est fautive si le front racinaire est bloqué par le front d'humectation FH. Dans ce dernier cas, la variabilité de RUR, donc de ETR, sera également diminuée.

En ce qui concerne les pertes en eau par le réservoir, la variabilité de la croissance journalière ne les influencent que faiblement, puisque le volume total du réservoir reste inchangé. Or, la lame d'eau perdue par le réservoir sol au jour J est calculée par, (2-10) :

$$D(J) = \text{Max} (0. ; ST(J)+P(J)+I(J)-z_D*RU)$$

Si CJ varie, seul ST(J) est modifié dans cette expression et la variation de D(J) reste faible.

Nous venons donc d'exposer les raisons pour lesquelles le modèle est ici moins sensible à la variabilité de la vitesse de la croissance racinaire journalière qu'il ne l'est à la variabilité de la réserve utile. Il faut pourtant souligner que cette propriété n'est pas générale et qu'elle dépend des paramètres de la simulation, notamment au niveau des valeurs initiales.

En outre, la valeur initiale du front racinaire fixée dans les simulations envisagées dans ce mémoire est uniquement liée à un artifice de modélisation : intersection de la droite de régression, ($FR=f(J)$), avec l'axe des ordonnées, (profondeur z en cm).

La prise en compte de la progression du front racinaire par une autre fonction, (deux droites, fonction logarithmique), conduira à des résultats différents au niveau de la sensibilité du modèle à la variabilité de la croissance racinaire journalière.

Dans la pratique, cela veut dire que l'on peut s'attendre à ce que la réponse à la variabilité de la position du front racinaire soit comparable à la réponse à la variabilité de la réserve utile.

Il paraît donc souhaitable :

- d'avoir une bonne estimation de la position du front racinaire et de sa variabilité
- de conserver en mémoire les effets du choix de la fonction caractérisant la position du front racinaire sur la variabilité des sorties du modèle.

C4-IV-B) Simulations sur K_c

C4-IV-B-1) Simulation de Monte Carlo sur K_c

La simulation de Monte Carlo réalisée sur le vecteur pentadaire des coefficients cultureux est, ici encore, analogue à celles effectuées en C4-II. Le vecteur pentadaire des coefficients cultureux, K_c , a été assimilé à une fonction aléatoire non spatialement structurée. Les vecteurs ont été construits de la manière suivante :

$$K_c = \alpha * K_{c\text{det}}$$

avec α assimilé à une fonction aléatoire de paramètres théoriques :

- loi normale
- $\mu_{\alpha} = 1.$
- $\sigma_{\alpha} = .2$
- $CV_{\alpha} = 20.2$

200 réalisations de 400 valeurs ont été générées, puis tronquées. Elles nous ont permis d'obtenir 200 réalisations d' ETR_c et de D_c , dont on trouvera les statistiques d'ensemble tableau 4-21.

X	m_{α}	s_{α}	Me_{ETR_c} (mm)	IQ_{ETR_c} (mm)	Me_{D_c} (mm)	IQ_{D_c} (mm)
<X>	.9993	.1774	277.09	13.48	147.34	10.94
sig(X)	.0092	.0056	0.62	0.94	0.47	0.88

tableau 4-21 : Résultats d'une simulation de Monte Carlo sur le K_c

Les écarts-types d'ensemble des variables considérées sont ici encore très faibles en raison de la quasi-ergodicité de la méthode de génération et du nombre suffisant de points par réalisation. $\langle s_{\alpha} \rangle$ est plus faible que la valeur théorique imposée en raison de la troncature.

La comparaison du tableau 4-21 et du tableau 4-16, dans le cas de la réalisation optimale M_2S_1 correspondant à $CV_{RU} = 20\%$, conduit aux constatations suivantes :

- les valeurs des inter-quartiles sur les distributions d' ETR_c et de D_c sont plus faibles, à variation égale par rapport à une simulation de référence, pour une simulation sur K_c que sur une simulation sur RU.

on trouve en effet :

$$* \langle IQ_{ETRC} \rangle_{Kc} = 13.5 \text{ mm et } \langle IQ_{ETRC} \rangle_{M2S1} = 18.7 \text{ mm}$$

$$* \langle IQ_{Dc} \rangle_{Kc} = 10.9 \text{ mm et } \langle IQ_{Dc} \rangle_{M2S1} = 25.8 \text{ mm}$$

Des simulations effectuées dans d'autres conditions de variabilité ont conduit à des constatations analogues.

- l'écart entre les inter-quartiles $\langle IQ_{Dc} \rangle_{Kc}$ et $\langle IQ_{Dc} \rangle_{M2S1}$, est assez important car, comme pour les simulations avec CJ variable, une variation de K_c entraîne, dans le calcul des pertes en eau par la formule (2-10), uniquement une variation du terme $ST(J)$. Or, dans le cas d'une variation de la RU, les deux termes, $ST(J)$ et $z_D \cdot RU$, sont modifiés. La variabilité est de $D(J)$ est alors plus forte.

C4-IV-B-2) Explication de la plus faible sensibilité de ETR_c à la variabilité de K_c

La valeur plus faible de $\langle IQ_{ETRC} \rangle_{Kc}$ est expliquée par des compensations plus fortes durant le cycle. La figure 4-20 donne, dans la situation climatique de référence S_0 , les écarts-réduits par période pour l'ETR pour les deux simulations suivantes :

* M_2S_1 : simulation optimale sur la RU avec :

$$\mu_{RU} = RU_{det} = .565 \text{ mm/cm}$$

et

$$CV_{RU} = 20\%$$

* Kc_{21} : simulation optimale sur le K_c avec :

$$\mu_{\alpha} = \alpha_{det} = 1.$$

et

$$CV_{\alpha} = 20\%$$

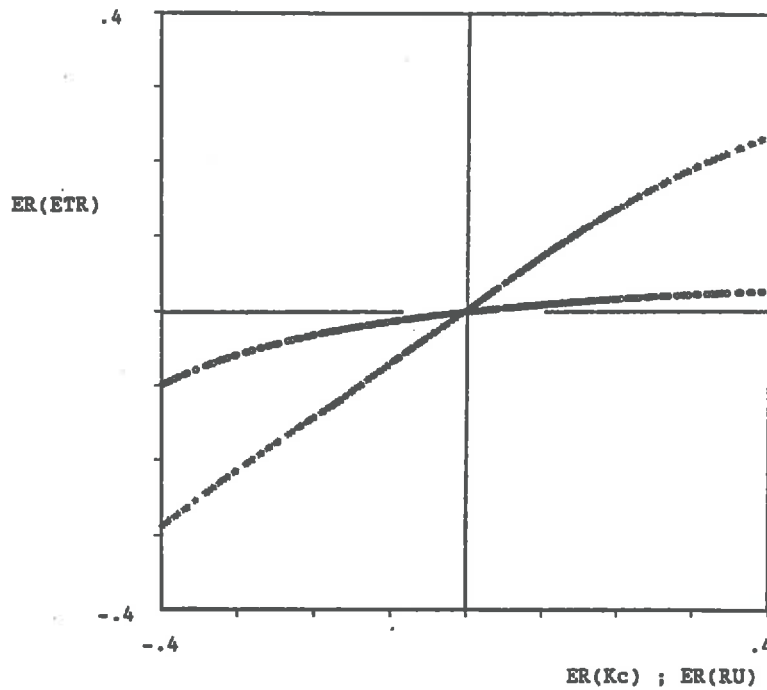


figure 4-20-a : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la cinquième décade

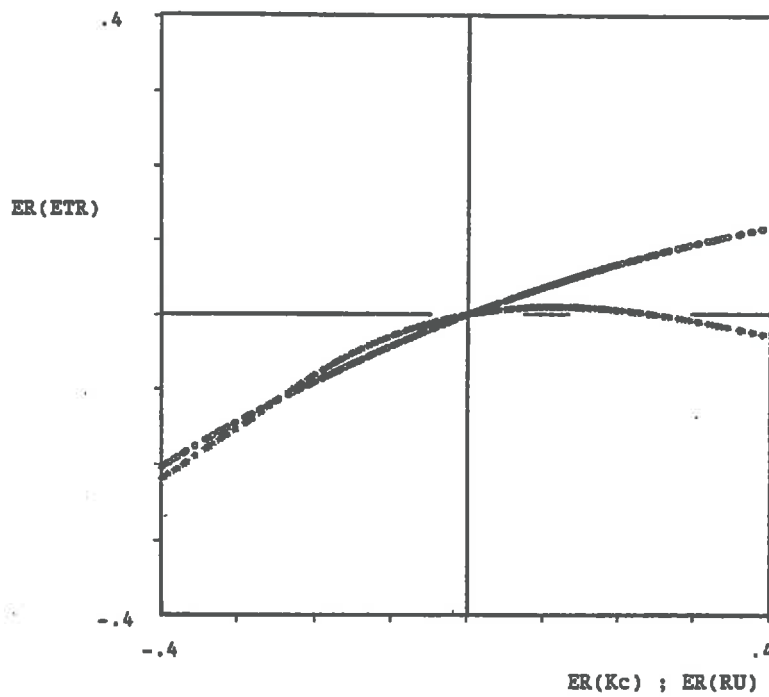


figure 4-20-b : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la sixième décade

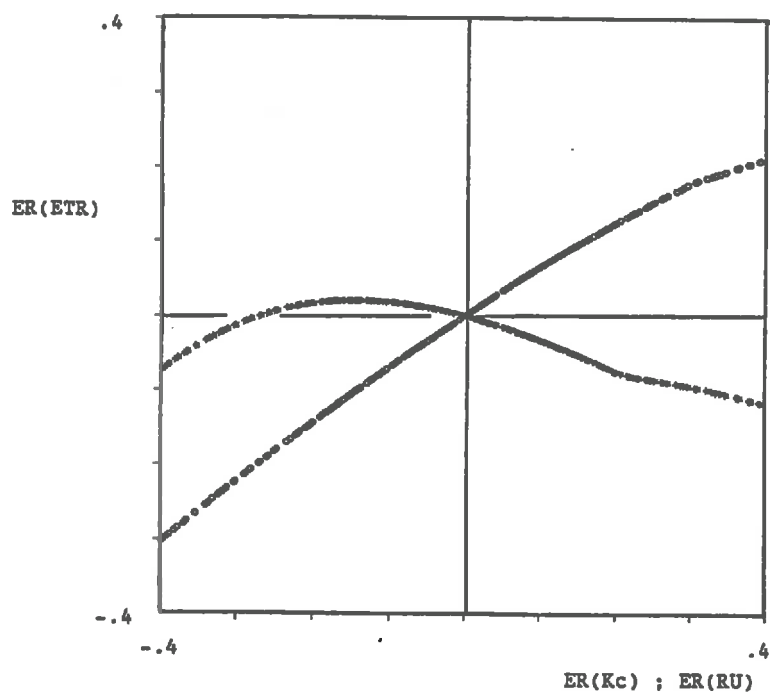


figure 4-20-c : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la septième décade

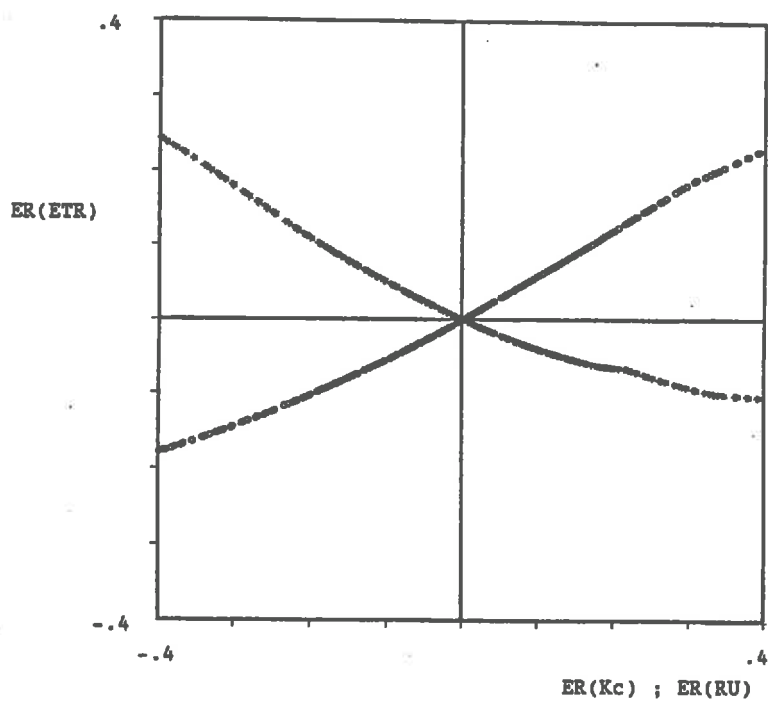


figure 4-20-d : Erreur relative sur l'ETR moyenne par décade pour les deux simulations $M_2S_1(o)$ et $Kc_{21}(*)$, pour la huitième décade

Comme précédemment, l'écart-réduit sur X vaut :

$$ER(X) = \frac{X - X_{det}}{X_{det}}$$

avec X égal à ETR, RU et K_c

La simulation déterministe de référence est identique dans les deux cas, on peut donc comparer les effets relatifs d'une variation de la RU et d'une variation du K_c .

Sur la cinquième décade, la pluviométrie est suffisamment forte pour assurer un bon remplissage du réservoir racinaire, la consommation est contrôlée par l'ETM, et donc, la sensibilité à la variabilité de K_c est beaucoup plus forte que la sensibilité à la variabilité de la RU puisque, dans ce dernier cas, ETM est constant et HR pratiquement toujours égal à 1.

Sur les décades ultérieures, la pluviométrie est plus faible et le taux d'humectation du réservoir racinaire diminue :

* si la RU est variable, avec ETM constant, la consommation est très sensible à la valeur de HR :

- si RU est faible, HR sera faible et ETR également
- si RU est fort, la valeur de HR mettra plus de temps à diminuer et la consommation est plus forte

* si K_c est variable, avec RU constant, après une période de forte pluie, tous les réservoirs sont pleins, HR vaut 1. partout. Aux points où K_c est fort, ETM est fort et l'ETR est donc élevée. Le réservoir se vide rapidement, or on a vu, figure 2-1, que si HR est petit et ETM fort, l'ETR donnée par la fonction d'Eagelman est faible, plus faible que l'ETR associée à un HR plus grand et à une ETM plus faible.

Cette propriété de la fonction d'Eagelman explique les courbes des écarts-réduits obtenues pour la simulation K_{c21} sur les sixième, septième et huitième décades. Les compensations sont donc beaucoup plus fortes, dans la situation climatique envisagée ici, lorsque K_c varie que lorsque RU varie.

Mais, les constatations précédentes sont fortement dépendantes de la pluviométrie sur le cycle cultural :

- si la pluviométrie est importante, et bien répartie sur le cycle, les sorties du modèle en termes de consommation en eau seront très dépendantes des coefficients cultureux car c'est la valeur de l'ETM qui régit l'évapotranspiration. En outre, comme $HR \neq 1$, $ETR \neq ETM$, et les variations seront approximativement linéaires.

- si, au cours du cycle, on observe des périodes où la pluviométrie est importante et d'autres périodes plus sèches, les phénomènes de compensation seront très importants. Sur l'ensemble du cycle, la variabilité des consommations sera atténuée.

C4-IV-C) Conclusion sur les simulations sur CJ et K_c

En assimilant successivement la réserve utile, RU, la vitesse de croissance journalière, CJ, et le vecteur pentadaire des coefficients cultureux, K_c , nous avons comparé les résultats de simulations en termes de consommations et pertes en eau par le réservoir sol, sur l'ensemble du cycle et par période.

Nous allons maintenant, pour conclure, comparer ces résultats en termes d'indice de satisfaction sur l'ensemble du cycle, C4-I.

Cet indice représente le taux de satisfaction des besoins en eau de la culture et, est un des éléments qui permet d'estimer les rendements, Forest et Reyniers, 1985, 1986.

Notons que l'indice minimum de satisfaction par période pendant une des phases phénologiques critiques de la culture est un autre élément de cette estimation.

Dans le cas d'un coefficient de variation de 20.7 par rapport à la simulation déterministe de référence, simulations M_2S_1 sur RU, CJ_{21} sur CJ

et K_{c21} sur K_c , nous avons donc calculé l'indice de satisfaction sur l'ensemble du cycle.

La figure 4-21 fournit les histogrammes correspondants, et le tableau 4-22, les valeurs des médianes, quartiles et inter-quartiles associées.

Simulation	Me	Q_1	Q_3	IQ
M_2S_1	75.37	73.73	76.48	2.75
CJ_{21}	75.36	74.16	76.20	2.04
K_{c21}	75.22	71.81	79.46	7.66

tableau 4-21 : Paramètres statistiques des distributions d' IS_c en %

- Pour les simulations où RU, ou CJ, est assimilée à une fonction aléatoire, la valeur de l'ETM ne varie pas d'un point à l'autre de la parcelle. La variabilité de l' IS_c est donc fortement liée à la variabilité de l'ETR_c.

On retrouve ainsi qu' IS_c est dissymétrique avec un coefficient de symétrie $g_{1ISc} < 0$., pour les simulations M_2S_1 et CJ_{21} .

On retrouve également la plus faible variabilité des résultats de la simulation CJ_{21} :

$$(IQ_{ISc})_{CJ21} = 2.04\% \text{ et } (IQ_{ISc})_{M2S1} = 2.75\%$$

- Par contre, pour la simulation où K_c est assimilé à une fonction aléatoire, l'ETR et l'ETM varient d'un point à l'autre de la parcelle. Il en résulte :

* une plus grande variabilité de l'indice de satisfaction sur l'ensemble du cycle, $(IQ_{ISc})_{Kc21} = 7.66\%$

* une forme différente de l'histogramme, puisque $g_{1ISc} > 0$.

Les figures 4-22 permettent de préciser l'évolution relative des indices de satisfaction sur le cycle pour les trois simulations envisagées ici.

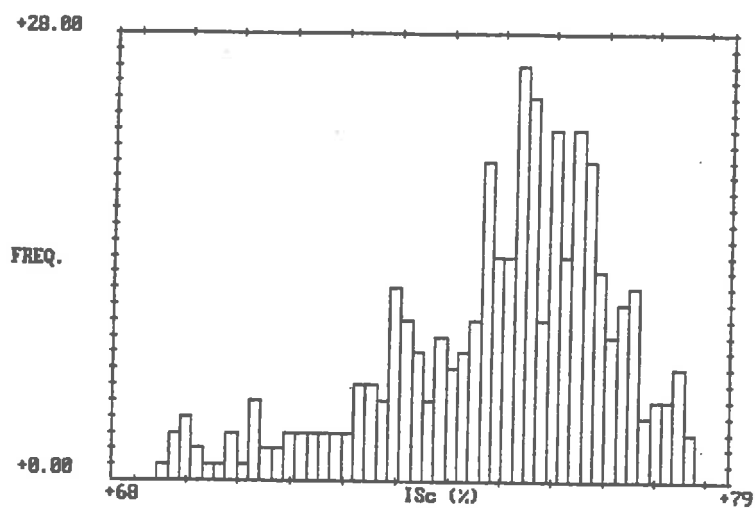


figure 4-21-a : Histogramme de l' IS_c pour la réalisation M_2S_1 de la RU

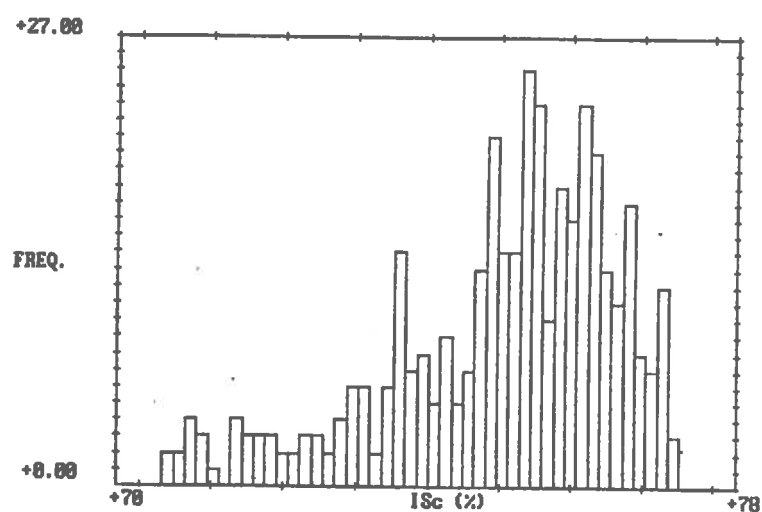


figure 4-21-b : Histogramme de l' IS_c pour la réalisation CJ_{21} de la CJ

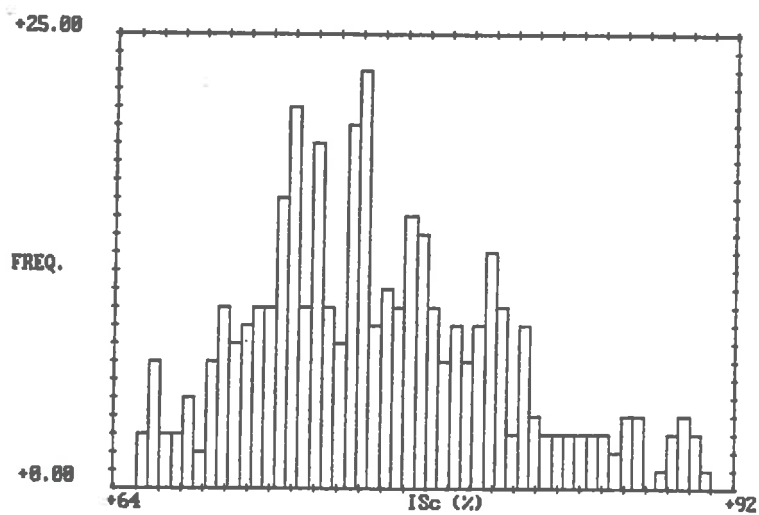
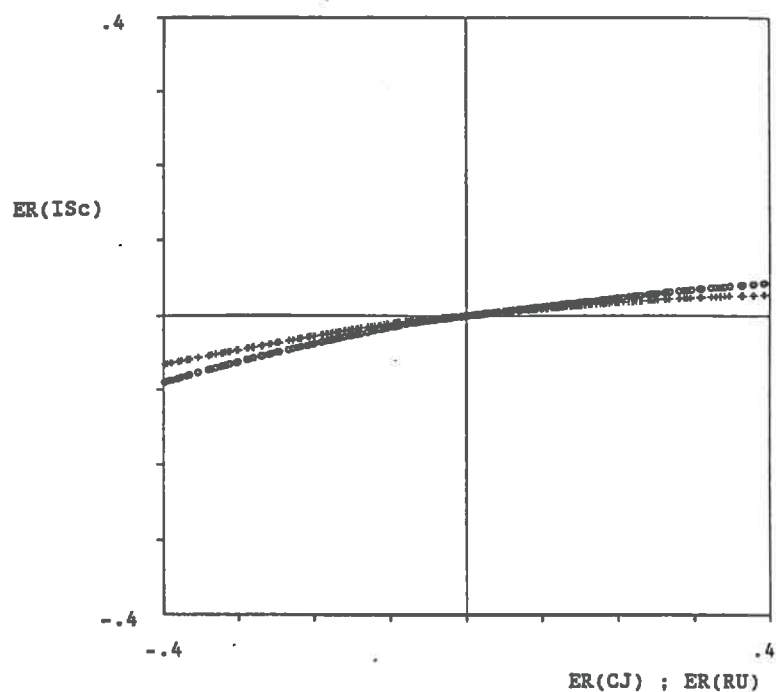
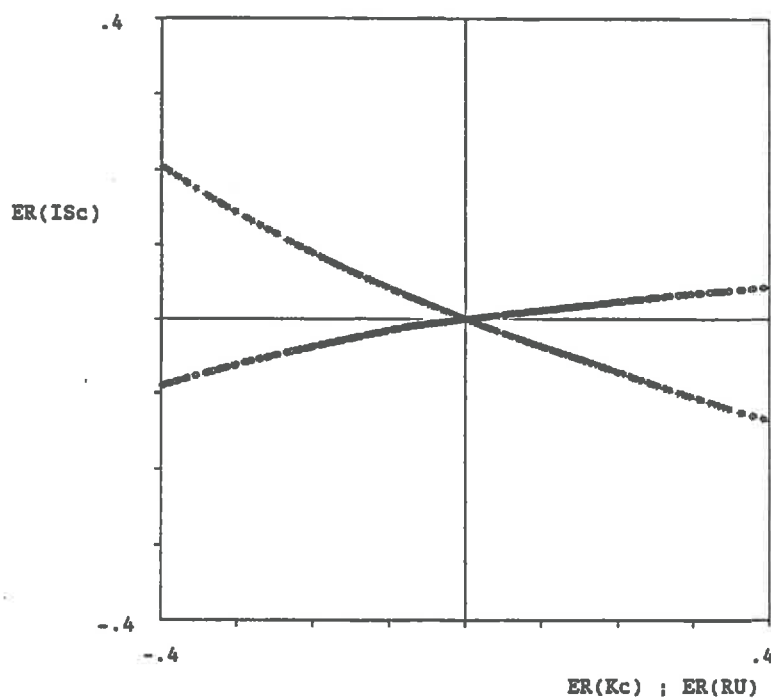


figure 4-21-c : Histogramme de l' IS_c pour la réalisation Kc_{21} du K_c



$$ER(ISc) = f(ER(RU) \text{ ou } ER(CJ))$$

figure 4-22-a : Erreur relative sur IS_c en fonction de l'erreur relative sur la RU (o) et sur la CJ (+)



$$ER(ISc) = f(ER(RU) \text{ ou } ER(Kc))$$

figure 4-22-b : Erreur relative sur IS_c en fonction de l'erreur relative sur la RU (o) et sur le K_c (*)

Ces figures, 4-22-a et 4-22-b, donnent l'erreur relative sur l' IS_C en fonction de l'erreur relative sur la RU, la CJ et le K_C respectivement.

On retrouve, figure 4-22-a, les comportements relatifs des simulations sur RU et sur CJ, ainsi que la faible dépendance sur l'ensemble du cycle pour ce niveau de variation, ($CV = 20\%$) et pour ce spectre de pluie.

La figure 4-22-b compare les résultats issus de simulations sur RU et sur K_C . Les erreurs relatives sur IS_C dues aux erreurs relatives sur K_C sont assez fortes. En outre, pour la simulation considérée, IS_C est une fonction décroissante de K_C . Cela s'explique par les phénomènes de compensation, figure 4-20, qui diminuent la variabilité de la consommation alors que l'ETM, ($ETM(J) = K_C(J) \cdot ETP(J)$), varie linéairement d'un point à l'autre de la parcelle.

C4-V) CONCLUSION PARTIELLE

En conclusion de ce quatrième chapitre sur les résultats des simulations stochastiques que nous avons effectuées, on peut noter les points suivants :

- Les résultats des simulations de Monte Carlo dépendent faiblement de la valeur du rapport L_g/a , pour la plage de valeurs envisagées (de ∞ à 2.).

- En raison de cette faible dépendance, et parce que la méthode de génération est quasi-ergodique pour les faibles valeurs de la portée a , nous nous sommes autorisés à travailler sur des réalisations optimales.

- Les simulations sur ces réalisations nous ont permis de quantifier, pour la réserve utile, l'influence sur les sorties du modèle, sur l'ensemble du cycle et par période :

- * de la nature de la loi de distribution
- * et, dans le cas d'une loi normale, de la valeur de la moyenne et de la variance.

- Ces résultats sont grandement dépendants du spectre de pluie. La réponse à la variabilité de la RU est plus forte pour un spectre qui assure un remplissage du réservoir racinaire ni trop fort, ni trop faible.

- Dans tous les cas de figure, les résultats d'une simulation déterministe avec une RU_{det} "moyenne" ne sont jamais très différents des moyennes spatiales des résultats de la simulation stochastique associée. Ce résultat montre qu'une simulation déterministe avec une RU bien estimée fournit une bonne estimation du comportement moyen de la parcelle issu d'une simulation stochastique.

- Pourtant, dans certaines conditions de variabilité et sous certaines conditions climatiques, la variabilité des consommations et des pertes en eau est forte, notamment par période. Une simulation déterministe, avec une RU mal estimée peut alors conduire à une mauvaise estimation du comportement moyen.

- En outre, les lois de distribution d'ETR et de D sont, en général, dissymétriques. La détermination du signe du coefficient de symétrie de ces distributions peut être important pour savoir si la queue de la distribution sera vers les fortes valeurs d'ETR ($g_{1ETR} > 0.$), ou vers les faibles ($g_{1ETR} < 0.$).

- Le modèle, s'il ne conserve pas la symétrie, ou l'asymétrie, des distributions des variables d'entrée, conserve la structure, et ce, même par période. Nous avons vu que ce résultat est cohérent avec des observations in-situ décrites dans la littérature entre des variables caractérisant le sol et d'autres les rendements.

- Enfin, nous avons comparé les résultats de nos simulations en considérant RU variable à des résultats où CJ et K_c sont respectivement assimilés à des fonctions aléatoires. Sur les simulations considérées dans ce mémoire, la dépendance à la variabilité de l'entrée stochastique est plus faible, pour l'ETR_c et le D_c; elle est plus forte pour l'IS_c lorsque K_c est assimilé à une fonction aléatoire. Mais, nous avons vu que cette dépendance est fonction, d'une part des conditions initiales, de la position de FR(J) par rapport à FH(J) et de la fonction donnant la valeur du front racinaire au jour J, pour les simulations sur CJ, et d'autre part,

du niveau d'alimentation du réservoir racinaire pour les simulations sur K_c . Notons que la dépendance à la variabilité de K_c sera forte lorsque HR sera proche de 1., situation pour laquelle la dépendance à la variabilité de la RU est plus faible.

- Nous avons également mis en évidence les phénomènes de compensation qui atténuent les différences sur l'ensemble du cycle d'un point à l'autre de la parcelle où les valeurs des variables d'entrée sont différentes.

On peut donc dire, à l'issue de ce chapitre, que le modèle est plus ou moins sensible à la variabilité de telle ou telle variable d'entrée suivant le contexte climatique, et principalement pluviométrique, dans lequel il est utilisé, et bien évidemment, suivant le niveau relatif de variabilité de ces variables d'entrée.

Dans un contexte où, par exemple, la réserve utile est le principal facteur de variabilité, on peut conclure qu'une simulation déterministe, avec une RU_{det} bien estimée, est suffisante pour estimer le comportement moyen, sur l'ensemble du cycle, de la parcelle.

Cependant, la variabilité par période peut être assez forte, et il peut être souhaitable d'avoir une estimation de la variabilité par période, notamment s'il y a concomitance entre une période sensible au niveau de la consommation et une période sensible au niveau phénologique.

Dans tous les cas, il semble important d'avoir, au moins, une bonne estimation des valeurs "moyennes" des variables d'entrée du modèle, ce qui nécessite une assez bonne estimation des lois de distribution de ces variables.

CONCLUSION

L'approche suivie dans ce mémoire nous a permis de quantifier, pour la modélisation de type fonctionnel envisagée, la réponse à la variabilité d'une entrée assimilée à une fonction aléatoire bidimensionnelle, isotrope, stationnaire d'ordre 2 et spatialement auto-corrélée ou non.

Nous avons dans un premier temps constaté la faible dépendance des résultats de simulations de Monte Carlo à la valeur du rapport entre la taille caractéristique de la parcelle agronomique, L_s , et la portée du phénomène considéré, a . Ces résultats sont cohérents, en termes de tendance, avec ceux de El Kadi, 1987 qui a étudié la variabilité de l'infiltration due à la variabilité de la conductivité hydraulique à saturation, K_s . Cependant, l'approche utilisée par El Kadi est de type conceptuel, et ses résultats sont beaucoup plus dépendants de la valeur du rapport L_s/a .

Compte-tenu de cette faible dépendance et en suivant la démarche de Sharma et al., 1987, nous avons alors travaillé sur des réalisations optimales au sens d'un critère de ressemblance aux statistiques d'ensemble de la fonction aléatoire envisagée. Cette approche est limitative en ce sens qu'elle ne permet pas l'étude des fluctuations liées à l'analyse des résultats sur un grand nombre de réalisations. Nous l'avons cependant adopté car, au vu des résultats des simulations de Monte Carlo que nous avons effectuées, elle donne une bonne estimation de la réponse du modèle à la variabilité de ses entrées.

L'étude sur des réalisations optimales pour différents cas de structure spatiale, de degrés de variabilité et d'environnement climatique conduit aux constatations suivantes :

- Il y a conservation de la structure spatiale entre les entrées et les sorties du modèle.
- Il y a une forte modification de la symétrie, ou de l'asymétrie, de la loi de distribution de l'entrée aléatoire considérée.

- La réponse à la variabilité de l'entrée est fortement dépendante :
 - * de la nature de la loi de distribution et du degré de variabilité de l'entrée
 - * de l'environnement climatique, en terme de spectre de pluie principalement
 - * de la variable considérée en sortie : consommation, pertes en eau par le réservoir ou indice de satisfaction, par période ou cumulée sur le cycle cultural.

Ainsi, on peut retenir que :

- si l'on assimile la réserve utile, RU, à une fonction aléatoire :
 - * La variabilité des sorties est plus forte pour un spectre de pluie assurant un taux de remplissage du réservoir racinaire ni trop fort, ni trop faible.

- * Cette variabilité semble plus forte sur l'ensemble du cycle pour le drainage et/ou ruissellement que pour la consommation.

- * Enfin, si dans les cas considérés, la variabilité peut paraître faible sur l'ensemble du cycle, on a montré qu'elle peut être forte si l'on considère les résultats par décade. On peut alors envisager qu'elle ait des conséquences agronomiques non-négligeables si une période sensible au niveau de la consommation est concomitante à une période sensible au niveau phénologique.

- si l'on assimile la vitesse de croissance racinaire journalière, CJ, à une fonction aléatoire :

- * La variabilité du drainage et/ou ruissellement est plus faible car le réservoir fixe n'est pas modifié.

- * La prise en compte de l'avancement du front racinaire envisagée dans ce mémoire diminue également la réponse de la consommation à la variabilité de CJ. Mais, des conditions initiales différentes ou une autre fonction de croissance racinaire rendrait cette réponse comparable à celle obtenue en considérant la RU variable.

- enfin, si l'on assimile le vecteur pentadaire des coefficients culturaux, K_c , à une fonction aléatoire, la dépendance au spectre de pluie est très importante.

* La remarque précédente concernant le terme de drainage et/ou ruissellement s'applique encore.

* Les compensations au niveau de la consommation, pour le spectre de pluie considéré, sont plus fortes.

* La variabilité de l'indice de satisfaction, par période ou sur l'ensemble du cycle est supérieure à celle trouvée pour les simulations où CJ ou RU sont variables.

Si l'on compare la moyenne spatiale des résultats obtenus par une simulation stochastique aux résultats issus d'une simulation déterministe avec une valeur "moyenne", (moyenne pour une loi de distribution normale de l'entrée considérée, médiane pour une loi log-normale), la différence est toujours assez faible. Ces résultats sont en accord avec ceux de Peck et al., 1977, mais en désaccord avec ceux de Sharma et al., 1979, Vauclin et al., 1983 et El Kadi, 1987 qui trouvent que la moyenne spatiale stochastique diffère de la solution déterministe "moyenne". Il faut ici noter que l'approche utilisée dans ces quatre dernières modélisations est de type conceptuel, et que Sharma et al., 1979 ont en fait repris l'étude de Peck et al., 1977 pour des degrés de variabilité plus forts et des lois de distribution différentes. Cette différence de résultats est à notre avis expliquée par une plus grande non-linéarité des équations utilisées dans une approche conceptuelle, ainsi que par la nature différente des paramètres introduits dans chacune des deux approches : paramètres capacitifs dans une approche fonctionnelle, et paramètres de flux dans une approche conceptuelle. De plus, les paramètres capacitifs sont moins variables à l'échelle d'une parcelle agronomique, les coefficients de variation que nous avons donc envisagé dans nos simulations sont ainsi plus faibles que ceux envisagés lorsque l'on s'intéresse à des paramètres de flux.

Cependant, notre étude a montré qu'une mauvaise estimation des paramètres d'entrée peut conduire à des erreurs très fortes. Il est donc nécessaire d'avoir une estimation suffisamment précise des valeurs représentatives des paramètres d'entrée pour pouvoir s'autoriser à ne faire qu'une simulation déterministe. Une connaissance plus précise de la nature de la loi de distribution et du degré de variabilité peut être nécessaire pour une étude plus fine, notamment au niveau des comportements par période.

Enfin, le contexte climatique, en termes pluviométriques principalement, joue un rôle prépondérant dans la sensibilité du modèle.

La prise en compte de la structure spatiale des paramètres peut être intéressante au niveau de la stratégie d'échantillonnage à entreprendre, ainsi qu'au niveau d'une vérification in-situ de la concordance entre la structure spatiale de la réserve utile et de la consommation par exemple, mais ce n'est pas, à notre avis un des points fondamentaux.

Nous avons également montré que les paramètres d'entrée que nous avons étudiés, réserve utile, RU, vitesse de croissance racinaire journalière, CJ, et vecteur pentadaire des coefficients cultureux, K_C , peuvent être tour à tour prépondérants au niveau de la sensibilité à une incertitude et/ou à une variabilité. Aussi, dans une optique d'amélioration du comportement du modèle, il ne faut pas, à notre avis, déconnecter les problèmes liés à la modélisation des transferts d'eau dans le sol, (RU), des problèmes liés à la modélisation du développement de la culture, (CJ, K_C).

Cependant, on a vu que la modélisation des pertes en eau par le réservoir est très grossière et que l'on ne sait pas dissocier le terme de ruissellement du terme de drainage. La résolution de ce problème nous paraît être prioritaire, notamment pour prendre en compte les phénomènes liés à la lixiviation. Des réflexions sur ce thème sont déjà menées à l'IRAT, et l'expérimentation implantée à Thyssé-Kaymor s'attache à l'étude in-situ des phénomènes de ruissellement : nous pensons qu'il faut poursuivre ces travaux.

Nous noterons encore ici que, dans ce mémoire, nous n'avons assimilé à une fonction aléatoire qu'un paramètre à la fois. Dans la pratique, à l'échelle de la parcelle, tous les paramètres d'entrée peuvent être variables et inter-corrélés. En outre, il peut également exister une certaine variabilité au niveau des entrées climatiques. Une brève étude menée en considérant des couples de paramètres précités, variables et positivement corrélés a montré que, pour le spectre pluviométrique de référence, la variabilité sur les sorties (ETR_C et D_C) était accrue, dans tous les cas, et ce, d'autant plus que la corrélation était forte.

Si la variabilité n'est pas trop forte, et si les valeurs des paramètres utilisés sont représentatives du comportement moyen de la parcelle, la modélisation fonctionnelle du bilan hydrique envisagée dans ce mémoire fournira une bonne estimation du comportement moyen de la culture sur la parcelle. Cette propriété est liée à l'approche fonctionnelle considérée, car elle n'est pas nécessairement vérifiée pour une approche conceptuelle.

Enfin, il ressort de cette étude que tous les paramètres étudiés sont également sensibles à une incertitude, et/ou variabilité, suivant les variables considérées et les conditions climatiques. On ne peut donc pas privilégier la modélisation de tel ou tel aspect en vue de l'amélioration du comportement du modèle. Il semble préférable de procéder globalement, par étapes successives, en gardant un ensemble cohérent et équilibré en termes d'approche simplificatrice.

BIBLIOGRAPHIE

- AASE J.K., J.R. WIGHT et T.H. SIDDOWAY, 1973**
 Estimating Soil Water Content on Native Rangeland
Agric. Meteorol., 12, 185-191
- ADDISCOTT T.M. et R.J. WAGENET, 1985**
 Concepts of Solute Leaching in Soils : a Review of Modelling Approaches
Journal of Soil Science, 36, 411-424
- ARORA V.K., S.S. PRIHAR et P.R. GAJRI, 1987**
 Synthesis of a Simplified Water Use Simulation Model for Predicting Wheat Yields
Water Resources Research, 23, 903-910
- BELMANS C., J.G. WESSELING et R.A. FEDDES, 1983**
 Simulation Model of the Water Balance of a Cropped Soil : SWATRE
Journal of Hydrology, 63, 271-286
- BROOKS R.H. et A.T. COREY, 1964**
 Hydraulic Properties of Porous Media
Hydrology Paper 3, Colorado State University, Fort Collins
- BRESLER E., S. DASBERG, D. RUSSO et G. DAGAN, 1981**
 Spatial Variability of Crop Yield as a Stochastic Soil Process
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 45, 600-605
- CAMPBELL G.S., 1974**
 A Simple Method for Determining Unsaturated Conductivity from Moisture Retention Data
Soil Science, 117, 311-314
- CARNEIRO DA SILVA C. et E. DE JONG, 1986**
 Comparison of Two Computer Models for Predicting Soil Water in a Tropical Monsoon Climate
Agric. Forest Meteorol., 36, 249-262
- CHILES J.P., 1977**
 Géostatistique des Phénomènes Non-Stationnaires
Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Nancy
- CHOPART J.L., 1980**
 Etude au Champ des Systèmes Racinaires des Principales Cultures Pluviales au SENEGAL (Arachide-Mil-Sorgho-Riz Pluvial)
Thèse de Doctorat, INP TOULOUSE, 160 pp

- CHOPART J.L. et K. DOFFANGUI, 1984
 Comparaison de Différentes Techniques de Travail du Sol dans une Succession Maïs-Cotonnier en Côte d'Ivoire. Alimentation Hydrique-Production.
Colloque FAO/AIEA : "Isotopes and Radiation Techniques for Efficient Water and Fertilizer Use in Semi Arid Regions", 6-10 Février, Vienne, Autriche
- CHOPART J.L., L. N'CHO, P. SIBAND et M. VAUCLIN, 1988
 Besoins en Eau du Riz Pluvial (var. IRAT 144), Relations avec Certaines Caractéristiques du Couvert Végétal
Soumis à L'Agronomie Tropicale
- CHOPART J.L. et P. SIBAND, 1988
 Probe : Programme de Bilan de l'Eau
Mémoires et Travaux de l'IRAT, n°17
- CHOPART J.L. et M. VAUCLIN, 1988
 Field Test of a Simulation Model for Estimating the Water Balance of a Cropped Soil
Soumis à Soil Sci. Soc. Amer. Jour.
- CHRISTAKOS G., 1984
 On the Problem of Permissible Covariance and Variogram
Water Resources Research, 20, 251-265
- CLAPP R.B., G.M. HORNBERGER et B.J. COSBY, 1983
 Estimating Spatial Variability in Soil Moisture With a Simplified Dynamic Model
Water Resources Research, 19, 739-745
- CORDOVA J.R. et R.L. BRAS, 1981
 Physically Based Probabilistic Models of Infiltration, Soil Moisture and Actual Evapotranspiration
Water Resources Research, 17, 93-106
- CRESSIE N.A.C. et R. HORTON, 1987
 A Robust-Resistant Spatial Analysis of Soil Water Infiltration
Water Resources Research, 23, 911-917
- DAGAN G., 1982
 Analysis of Flow Through Heterogeneous Random Aquifers, 2, Unsteady Flow in Confined Formations
Water Resources Research, 18, 1571-1585
- DANCETTE C., 1983
 Estimation des Besoins en Eau des Principales Cultures Pluviales en Zone Soudano-Sahélienne
L'Agronomie Tropicale, 38, 281-294
- DANE J.H., 1980
 Comparison of Field and Laboratory Determined Hydraulic Conductivity Values
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 44, 228-231

- DAVID M., 1977
Geostatistical Ore Reserve Estimation
Elsevier, New York
- DE JONG R. et D.R. CAMERON, 1979
Computer Simulation Model for Predicting Soil Water Content Profiles
Soil Science, 128, 41-48
- DE JONG R., 1981
Soil Water Models : a Review
Land Resource Research Institute, Contribution N° 123, 1-39
- DE JONG R. et C.F. SHAYKEWICH, 1981
A Soil Water Budget Model with a Nearly Impermeable Layer
Can. Jour. Soil Sci., 61, 361-371
- DE JONG R. et H.N. HAYHOE, 1984
Diffusion-Based Soil Water Simulation for Native Grassland
Agric. Water Manage., 9, 47-60
- DELHOMME J.P., 1979
Spatial Variability and Uncertainty in Groundwater Flow Parameters :
A Geostatistical Approach
Water Resources Research, 15, 269-280
- DE MARSILY G., 1984
Spatial Variability of Properties in Porous Media :
A Stochastic Approach
Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, J. Bear et Y. Corapcioglu, Martinus Nijhoff Publishers
- DETTINGER M.D. et J.L. WILSON, 1981
First-Order Analysis of Uncertainty in Numerical Models of
Groundwater Flow, 1, Mathematical Development
Water Resources Research, 17, 149-161
- EAGLEMAN J.R., 1971
An Experimentally Derived Model for Actual Evapotranspiration
Agric. Meteorol., 8, 385-394
Water Resources Research, 11, 751-754
- EAGLESON P.S., 1978
Climate, Soil and Vegetation, 5, A Derived Distribution of Storm
Surface Runoff
Water Resources Research, 14, 741-748
- EL KADI A. et W. BRUTSAERT, 1985
Applicability of Effective Parameters for Unsteady Flow in
Nonuniform Aquifers
Water Resources Research, 21, 183-198
- EL KADI A., 1987
Variability of Infiltration Under Uncertainty in Unsaturated Zone
Parameters
Journal of Hydrology, 90, 61-80

- F.A.O., 1975
Bulletin d'Irrigation et de Drainage, N°24, 144 pp
- FEDERER C.A., 1979
 A Soil-Plant-Atmosphere Model for Transpiration and Availability of Soil Water
Water Resources Research, 15, 555-562
- FEDDES R.A. et P.E. RIJTEMA, 1972
 Water Withdrawal by Plant Roots
Journal of Hydrology, 17, 33-59
- FEDDES R.A., P. KOWALIK, K. KOLINSKA-MALINSKA et H. ZARADANY, 1976
 Simulation of Field Water Uptake by Plants Using a Soil Water Dependent Root Extraction Function
Journal of Hydrology, 31, 13-26
- FITZPATRICK E.A. et H.A. NIX, 1969
 A Model for Simulating Soil Water Regime in Alternating Fallow-Crop Systems
Agric. Meteorol., 6, 303-319
- FOREST F. et J.M. KALMS, 1984
 Influence du Régime d'Alimentation en Eau sur la Production du Riz Pluvial, Simulation du Bilan Hydrique
L'Agronomie Tropicale, 39, 42-50
- FOREST F. et F.N. REYNIERS, 1985
 Propositions de Classification en termes du Bilan Hydrique des Situations Agroclimatiques de Riziculture Pluviale
Conférence Internationale Riz Pluvial, Djakarta, 4-7 Mars 1985
- FOREST F. et F.N. REYNIERS, 1986
 Proposals for the Classification of Agroclimatic Situations of Upland Rice in Terms of Water Balance
 In : *Progress in Upland Rice Research, Proceedings of the 1985 Jakarta Conference, 93-103, Manila, IRRI*
- FRANQUIN P. et F. FOREST, 1977
 Des Programmes pour l'Evaluation et l'Analyse Fréquentielle des Termes du Bilan Hydrique
L'Agronomie Tropicale, 32, 7-11
- FREEZE R.A., 1980
 A Stochastic-Conceptual Analysis of Rainfall-Runoff Process on a Hillslope
Water Resources Research, 16, 391-408
- FRETEAUD J.P., R. POSS et H. SARAGONI, 1987
 Ajustement d'un Modèle de Bilan Hydrique à des Mesures Tensio-Neutroniques *in situ* sous Culture de Maïs
L'Agronomie Tropicale, 42, 94-102

- GARDNER W.R., 1960
Dynamic Aspects of Water Availability to Plants
Soil Science, 89, 63-73
- GARDNER W.R., 1964
Relation of Root Distribution to Water Uptake and Availability
Agronomy Journal, 56, 41-45
- GUREGHIAN A.B., 1981
A Two-Dimensional Finite-Element Solution Scheme for the Saturated-Unsaturated Flow with Applications to Flow through Ditch-Drained Soils
Journal of Hydrology, 50, 333-353
- GUTJAHR A.L., L.W. GELHAR, A.A. BAKR et J.R. MACMILLAN, 1978
Stochastic Analysis of Spatial Variability in Subsurface Flows, 2, Evaluation and Application
Water Resources Research, 14, 953-959
- GUTJAHR A.L. et L.W. GELHAR, 1981
Stochastic Models of Subsurface Flow : Infinite Versus Finite Domains and Stationarity
Water Resources Research, 17, 337-350
- HAAN C.T., 1979
Statistical Methods in Hydrology
The Iowa State University Press, Ames, 378 pp
- HAMLETT J.M., R. HORTON et N.A.C. CRESSIE, 1986
Resistant and Exploratory Techniques for Use in Semivariogram Analyses
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 50, 868-875
- HANKS R. et S.A. BOWERS, 1962
Numerical Solution of the Moisture Flow Equation into Layered Soils
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 26, 530-534
- HAVERKAMP R., M. VAUCLIN, J. TOUMA, P.J. WIERENGA et G. VACHAUD, 1977
A Comparison of Numerical Simulation Models for One-Dimensional Infiltration
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 41, 285-294
- HAVERKAMP R. et M. VAUCLIN, 1981
A Comparative Study of Three Forms of the Richard Equation Used for Predicting One-Dimensional Infiltration in Unsaturated Soil
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 45, 13-20
- HAVERKAMP R. et J.Y. PARLANGE, 1986
Prediction of Water Retention Curve from Particle-Size Distribution. Part I : Sandy Soils Without Organic Matter.
Soil Science, 142, 325-339

- HILLEL D., H. TALPAZ et H. Van KEULEN, 1976
A Macro-sopic Scale Model of Water Uptake by a Non-Uniform Root System and of Water and Salt Movement in the Soil Profile
Soil Science, 121, 242-255
- HOMES R.M., 1961
Estimation of Soil Moisture Content Using Evaporation Data
Evaporation - Proc. Hydrol. Symp. N°2, Toronto Queen's Printer, Ottawa, 184-196
- JOURNEL A.G. et C.J. HUIJBREGTS, 1978
Minig Geostatistics
Academic Press, New York
- JURY W.A., W.A. STOLZY et P. SHOUSE, 1982
A Field Test of the Transfer Function Model for Predicting Solute Transport
Water Resources Research, 18, 369-373
- LUMLEY J.L. et A. PANOFISKY, 1964
The structure of Atmospheric Turbulence
John Wiley & Sons, Inc., New York
- LUXMOORE R.J. et M.L. SHARMA, 1980
Runoff Responses to Soil Heterogeneity : Experimental and Simulation Comparisons for Two Contrasting Watersheds
Water Resources Research, 16, 675-684
- MALLER R.A. et M.L. SHARMA, 1981
Analysis of Spatial Variability in Relation to Areal Infiltration
Journal of Hydrology, 52, 25-37
- MANTOGLOU A. et J.L. WILSON, 1981
Simulation of Random Fields with the Turning Band Method
Report n°264, Ralph M. Parsons Lab., Dep. of Civ. Eng., Mass. Inst. of Tech., Cambridge, Massachusetts
- MANTOGLOU A. et J.L. WILSON, 1982
The Turning Band Method for Simulation of Random Field Using Line Generation by a Spectral Method
Water Resources Research, 18, 1379-1394
- MATHERON G., 1965
Les Variables Régionalisées et Leur Estimation
Editions Masson, Paris
- MATHERON G., 1973
The Intrinsic Random Functions and Their Applications
Advan. Appl. Prob., 5, 439-468
- MEIJA J.M. et I. RODRIGUEZ-ITURBE, 1974
Correlation Links Between Normal and Log-Normal Processes
Water Resources Research, 10, 689-693

- MEIJA J.M. et I. RODRIGUEZ-ITURBE, 1974a**
On the Synthesis of Random Fields from the Spectrum :
An Application to the Generation of Hydrologic Spatial Processes
Water Resources Research, 10, 705-711
- MILLER D.E. et J.S. AARSTAD, 1974**
Calculation of the Drainage Component of Soil Water Depletion
Soil Science, 118, 11-15
- MOLZ F.J., I. REMSON, A.A. FUNGAROLI et R.L. DRAKE, 1968**
Soil Moisture Availability for Transpiration
Water Resources Research, 4, 1161-1169
- MOLZ F.J. et I. REMSON, 1971**
Extraction Term Models of Soil Moisture Use by Transpiring Plants
Water Resources Research, 6, 1346-1356
- MONTEITH J.L., 1965**
Evaporation and Environment
Proc. Symp. Soc. Exp. Biol., 19, 205-234
- MUALEM Y., 1976**
A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media
Water Resources Research, 12, 513-522
- MUNOZ-PARDO J.F., 1987**
Approche Géostatistique de la Variabilité Spatiale des Milieux Géophysiques. Application à l'échantillonnage de phénomènes bidimensionnels par simulation d'une fonction aléatoire
Thèse de Docteur Ingénieur I.N.P.G., 254 pp
- NEUMAN S.P., R.A. FEDDES et E. BRESLER, 1975**
Finite Element Analysis of Two Dimensional Flow in Soil Considering Water Uptake by Roots : I. Theory
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 39, 224-230
- NIMAH M.N. et R.J. HANKS, 1973**
Model for Estimating Soil Water, Plant and Atmospheric Interrelations : I. Description and Sensitivity
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 37, 522-527
- PENMAN H.L., 1948**
Natural Evaporation from Open Water, Bare Soil and Grass
Proc. Roy. Soc., 193, 120-145
- PIKUL M.F., R.L. STREET et I. REMSON, 1974**
A Numerical Model Based on Coupled One-Dimensional Richards and Boussinesq Equations
Water Resources Research, 10-2, 295-302
- PRIESTLEY C.H.B. et TAYLOR R.J., 1972**
On the Assessment of Surface Flux and Evaporation Using Large-Scale Parameters
Mon. Weather Rev., 100, 81-92

- RIJTEMA P.E., 1965**
An Analysis of Actual Evapotranspiration
PUDOC, Wageningen, Agric. Res. Rep. 859, 107 pp
- RUELLE P., D. BEN SALAH et M. VAUCLIN, 1986**
Méthodologie d'Analyse de la Variabilité Spatiale d'une Parcelle Agronomique. Application à l'Echantillonnage.
Agronomie, 6, 529-532
- RUELLE P., M. SENE et M. VAUCLIN, 1988**
Bilan Hydrique d'un Micro Bassin Versant Cultivé : Aspects Stationnel et Spatial
Colloque ATP-PIREN, Carry-le-Rouet, 19-20 Septembre
- RUSSO D. et E. BRESLER, 1981**
Soil Hydraulic Properties as Stochastic Processes :
I : An Analysis of field Spatial Variability
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 45, 682-687
- RUSSO D., 1983**
A Geostatistical Approach to the Trickle Irrigation Design in Heterogeneous Soil : I : Theory
Water Resources Research, 19, 632-642
- RUSSO D., 1984**
A Geostatistical Approach to the Trickle Irrigation Design in Heterogeneous Soil : II : A Field Test
Water Resources Research, 20, 543-552
- SANGAL B.P. et A.K. BISWAS, 1970**
The 3-Parameter Lognormal Distribution and its Applications in Hydrology
Water Resources Research, 6, 505-515
- SHARMA M.L. et R.J. LUXMOORE, 1979**
Soil Spatial Variability and its Consequences on Simulated Water Balance
Water Resources Research, 15, 1567-1573
- SHARMA M.L., R.J. LUXMOORE, R. DEANGELIS, R.C. WARD et G.T. YEH, 1987**
Subsurface Water Flow Simulated for Hillslopes With Spatially Dependent Soil Hydraulic Characteristics
Water Resources Research, 23, 1523-1530
- SHAW R.H., 1964**
Prediction of Soil Moisture under Meadow
Agronomy Journal, 65, 320-324
- SHINOZUKA M. et C.M. JAN, 1972**
Digital Simulation of Random Processes and its Applications
Journal of Sound and Vibration, 25, 111-128

- SMITH L. et R.A. FREEZE, 1979a
Stochastic Analysis of Steady State Groundwater Flow in a Bounded Domain, 1, One-Dimensional Simulations
Water Resources Research, 15, 521-528
- SMITH L. et R.A. FREEZE, 1979b
Stochastic Analysis of Steady State Groundwater Flow in a Bounded Domain, 2, Two-Dimensional Simulations
Water Resources Research, 15, 1543-1559
- SNEDDON I.M., 1951
Fourier Transforms
Mac Graw-Hill, New-York
- SNEDECOR G.W. et W.G. COCHRAN, 1980
Statistics Methods
The Iowa State University Press
- STAPLE W.J., 1966
Infiltration and Redistribution of Water in Vertical Columns of Loam
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 33, 645-651
- STUFF R.G. et R.F. DALE, 1978
A Soil Moisture Budget Model Accounting for Shallow Water Table Influences
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 42, 637-643
- VAN GENUCHTEN M.T., 1980
A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 44, 892-898
- VAUCLIN M., R. HAVERKAMP et G. VACHAUD, 1979
Résolution Numérique d'une Equation de Diffusion Non Linéaire
Presses Universitaires de Grenoble, 183 pp
- VAUCLIN M., 1983
Méthodes d'étude de la variabilité spatiale des propriétés d'un sol
In "Variabilité spatiale des processus de transfert dans les sols", Coll. Soc. Hydrotechn. Fr., INRA, Gr. travail "Dispersion en milieux poreux", Avignon, 24-25 Juin 1982, Les Colloques de l'INRA, n°15, INRA, Paris, France, 9-43
- VAUCLIN M., J. IMBERNON, G. VACHAUD et C. DANCETTE, 1983
Description Experimentale et Modélisation Stochastique des Transferts par la Mise en Echelle des Propriétés Hydrodynamiques des Sols
Isotope and Radiation Techniques in Soil Physics and Irrigation Studies, IAEA, VIENNA, 103-124
- VAUCLIN M., 1984
Optimisation des Techniques Culturelles du Riz Pluvial
Rapport au Gvt de la RCI, AIEA, IVC/5/012, 1-33

- VAUCLIN M., 1985
Optimisation des Techniques Culturelles du Riz Pluvial
Rapport au Gvt de la RCI, AIEA, IVC/5/012, 1-29
- VAUCLIN M., 1987
Optimisation des Techniques Culturelles du Riz Pluvial
Rapport au Gvt de la RCI, AIEA, IVC/5/012, 1-33
- WAGENET R.J. et RAO B.K., 1983
Description of Nitrogen Movement in the Presence of Spatially
Variable Soil Hydraulic Properties
Agricultural Water Management, 6, 227-242
- WARRICK A.W., G.J. MULLEN et D.R. NIELSEN, 1977
Predictions of the Soil Water Flux Based upon Field-Measured Soil-
Water Properties
Soil Sci. Soc. Amer. Jour., 41, 14-19
- WARRICK A.W. et W.R. GARDNER, 1983
Crop Yield as Affected by Spatial Variations of Soil and Irrigation
Water Resources Research, 19, 181-186
- WILSON J.L., 1979
The Synthetic Generation of Areal Averages of Random Field
Socorro Workshop on Stochastic Methods in Subsurface Hydrology
New Mexico Tech., Socorro, New Mexico
- WOOD E.F., 1976
An Analysis of the Effects of Parameter Uncertainty in Deterministic
Hydrologic Models
Water Resources Research, 12, 925-932
- YEH T.C.J., L.W. GELHAR et A.L. GUTJAHR, 1985a
Stochastic Analysis of Unsaturated Flow in Heterogeneous Soils, 1,
Statistically Isotropic Media
Water Resources Research, 21, 447-456
- YEH T.C.J., L.W. GELHAR et A.L. GUTJAHR, 1985b
Stochastic Analysis of Unsaturated Flow in Heterogeneous Soils, 2,
Statistically Anisotropic Media with Variable Alpha
Water Resources Research, 21, 457-464
- YEH T.C.J., L.W. GELHAR et A.L. GUTJAHR, 1985c
Stochastic Analysis of Unsaturated Flow in Heterogeneous Soils, 3,
Observations and Applications
Water Resources Research, 21, 465-472
- YOON Y.S. et W.W.G. YEH, 1975
The Galerkin Method for Nonlinear Parabolic Equations of Unsteady
Groundwater Flow
Water Resources Research, 11, 751-754
-