

Estimation d'un champ de perméabilité
à partir de mesures de charge hydraulique

THÈSE

présentée à

l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

Etienne CASTELIER

pour obtenir le titre de

Docteur en Géostatistique

Soutenue le 26 Octobre 1995 devant le jury composé de :

MM.	G. MATHERON	Président
	G. de MARSILY	Rapporteur
	P. ACKERER	Rapporteur
	C. BRUNET	Examineur
Mme	C. de FOUQUET	Examineur
M.	P. CHAUVET	Examineur



*A Claudia,
Pour sa présence fidèle au fond de mon écran,
Pour son sourire complice,
Et ses clins d'œil câlins.*

Remerciements

Je remercie le professeur G. Matheron, président de mon jury, de m'avoir accueilli au Centre de Géostatistique, les professeurs G. de Marsily et P. Ackerer d'avoir accepté le rôle de rapporteur externe, les docteurs P. Chauvet et C. de Fouquet, chercheurs au centre de Géostatistique, d'avoir suivi ce travail de près, ainsi que C. Brunet, J. P. Fabre et J. J. Fry, ingénieurs chez EDF, de l'intérêt qu'ils ont manifesté.

Je remercie les membres du Centre de Géostatistique de m'avoir accueilli chaleureusement parmi eux. Je pense particulièrement à C. Lantuéjoul, C. Lajaunie et H. Wackernagel qui m'ont aidé à plusieurs occasions pour ce travail.

Je remercie mes collègues de bureau, M. Touati, T. Koudriavsteva et C. Roth pour la joyeuse ambiance qu'ils savent créer autour d'eux. Je pense également à mes autres collègues thésards, notamment à E. Schuhler qui a réalisé une magnifique cravate sans laquelle je n'aurais pu soutenir décemment ma thèse.

Résumé

En hydrogéologie, un milieu poreux est principalement caractérisé par son champ de perméabilité, dont les valeurs sont reliées aux valeurs de pression du fluide traversant le milieu. L'estimation du champ de perméabilité à partir de quelques mesures de pression est un **problème inverse**. Les problèmes inverses sont **mal posés** au sens mathématique du terme, ce qui en rend la résolution numériquement instable. Depuis une quarantaine d'années, ils font l'objet de nombreux travaux, et les méthodes de résolution sont en constante évolution. En hydrogéologie, ces méthodes se classent en trois approches : les méthodes directes, les méthodes indirectes et les méthodes stochastiques.

La méthode de résolution adoptée ici est une méthode directe : elle repose sur la résolution directe de l'équation qui relie le champ de perméabilité au champ de pression. Elle peut se décomposer en plusieurs étapes : interpolation des mesures de pression, construction des tubes de courant de l'écoulement, conservation du flux dans les tubes de courant, et calcul des valeurs de perméabilités par une méthode de **moindres carrés**. La première étape, l'interpolation des mesures de pression, est déterminante. Elle nécessite des techniques de **régularisation** pour stabiliser les calculs numériques. Elle est réalisée par un **krigeage**. Elle peut s'interpréter, dans le domaine physique, en termes de perméabilités équivalentes.

Pour valider en pratique l'algorithme proposé, des données synthétiques de pression sont calculées par un logiciel d'écoulement sur des champs de perméabilité donnés a priori. Les valeurs de perméabilité sont retrouvées par l'algorithme étudié, puis comparées aux valeurs a priori. Ce test permet d'évaluer l'influence du nombre et de la précision des mesures sur les résultats d'inversion. La méthode est enfin appliquée à des données mesurées dans un barrage en terre.

Mots-clefs Hydrogéologie, perméabilité, problème inverse, problème mal posé, krigeage, régularisation, moindres carrés.

Abstract

In hydrogeology, a porous medium is principally characterized by its **permeability** field, whose values are linked to pressure values of the fluid flowing through the medium. Estimating the permeability field from pressure measurements is an **inverse problem**. Inverse problems are **ill posed** in the mathematical sense, which leads to their numerical resolution being unstable. They have been the object of numerous works for about forty years, and the resolution methods are always evolving. In hydrogeology, these methods can be classified into three approaches : the direct methods, the indirect methods and the stochastic methods.

The resolution method proposed here is a direct method since it is based on a direct solution of the equation that links the permeability field to the pressure field. It is composed of several steps : interpolation of the pressure measurements, building of the stream tubes of the flow, flow conservation in the stream tubes, and computation of the permeability field with a **least squares method**. The first step is very important. This interpolation, which requires **regularization** techniques to stabilize numerical calculations, is performed by a **kriging**. It can be translated into the physical framework in terms of equivalent permeabilities.

To validate the proposed algorithm, synthetic pressure data are generated by a flow software package for given a priori permeability fields. The permeability values are then estimated

by the tested algorithm, and compared with the a priori inputted values. This test allows us to assess the influence of the number and of the precision of the measurements on the inversion results. The method is finally applied to real data measured in an earth dam.

Key words Hydrogeology, permeability, inverse problem, ill posed problem, kriging, regularization, least squares.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
Guide de lecture	2
1 Définition du problème inverse	3
1.1 Définition du problème inverse	4
1.2 Etude bibliographique	6
2 Description de la méthode de résolution	13
3 Interpolation de la charge par krigeage	23
3.1 Approche régulatrice et perméabilité équivalente	24
3.2 Régularisation par krigeage	30
3.3 Modélisation de la charge	36
4 Surdétermination	41
4.1 Analyse mathématique du problème inverse	42
4.2 Méthode des moindres carrés	45
5 Résolution numérique	53
5.1 Maillage d'un potentiel	54
5.2 Discrétisation	58
5.3 Caractérisation numérique de l'indétermination	65
5.4 Problème inverse conditionnel	74
6 Expériences numériques	81
6.1 Exemples numériques	82
6.2 Premiers résultats	90
6.3 Influence des différents paramètres	97
7 Application à un barrage	111
7.1 Présentation des données	112
7.2 Correction des données par convolution	121
7.3 Résultats	129
Conclusion	147

A	Convergence d'une approche discrétisée	149
A.1	Application rigoureuse du théorème des projections	149
A.2	Définition et propriétés d'une approche discrétisée	157
A.3	Propriétés topologiques de l'espace somme $B + G$	162
B	Krigeage et régularité des fonctions de covariance	171
C	Calculs d'éléments propres	175
	Bibliographie	179

Introduction

Le travail présenté ici repose sur un problème concret posé par Electricité de France (EDF). Lors de sa construction, un barrage en terre a été équipé de différents capteurs, dont les mesures au cours du temps permettent d'étudier l'évolution de certaines propriétés physiques du barrage. Un certain nombre de cellules, notamment, mesurent la pression interstitielle de l'eau.

La pression interstitielle est reliée aux écoulements d'eau dans le barrage. Du point de vue des écoulements, le barrage est principalement caractérisé par ses valeurs de **perméabilité**. Lorsque les perméabilités du barrage évoluent, les écoulements s'organisent différemment, ce qui modifie les réponses des mesures de pression. L'objet de cette thèse est de pouvoir **quantifier** les variations de perméabilités lorsque les cellules de pression répondent différemment.

Pour étudier l'évolution des perméabilités, il faut auparavant pouvoir calculer les perméabilités, à partir des seules mesures de pression. C'est un **problème inverse en hydrogéologie**. Actuellement, le calcul inverse des perméabilités est effectué par un ajustement manuel des valeurs de perméabilités, dont le résultat est validé par un logiciel d'éléments finis (NS2D). Ce calcul demande un temps considérable. L'objet de cette thèse est donc de proposer une méthode plus automatique de calcul inverse.

En hydrogéologie, il n'existe pas un, mais plusieurs problèmes inverses dont certains sont très similaires. Une même méthode peut facilement s'adapter à plusieurs problèmes moyennant quelques modifications. A travers le cas particulier traité ici, c'est plus généralement une classe de problèmes inverses qui sera ainsi étudiée.

Les problèmes inverses sont dit mathématiquement **mal posés** : s'il existe des relations mathématiques théoriques, qui relient les perméabilités aux valeurs de pression, les calculs numériques correspondants sont instables. Cette difficulté explique pourquoi ces problèmes font l'objet de tant de travaux depuis une quarantaine d'années, et pourquoi les méthodes de résolution proposées sont en constante évolution.

Les premières méthodes ont naturellement commencé par résoudre directement le problème inverse, grâce aux équations mathématiques qui lient pression hydraulique et perméabilité, mais l'instabilité des calculs a conduit bien vite à d'autres méthodes. Les méthodes les plus récentes emploient un formalisme probabiliste, ce qui traduit bien l'aspect erratique auquel conduisent les instabilités de calcul.

La méthode proposée dans cette thèse va un peu à contre-courant de cette évolution, elle s'apparente en effet aux premières méthodes, car elle s'appuie sur les relations fonctionnelles exactes qui relient la pression et la perméabilité. Elle s'appuie aussi sur un certain nombre d'idées proposées dans d'autres méthodes pour traiter l'instabilité des calculs. Elle utilise notamment une méthode de **moindres carrés**, associée à une méthode de **régularisation**. Ainsi, la méthode de résolution du problème inverse se présente-t-elle comme une combinaison d'éléments existant dans d'autres méthodes.

Cette combinaison n'est pas arbitraire. Les difficultés inhérentes au problème inverse sont d'abord repérées par une approche mathématique. Puis, les différentes étapes de la méthode sont construites pour tenter de résoudre ces difficultés. La méthode une fois construite est ensuite essayée sur des exemples synthétiques, avant d'être appliquée à des données réelles.

Guide de lecture

La thèse suit le plan suivant : elle commence par définir le problème inverse, analyse les difficultés d'un tel problème, puis propose une méthode de résolution. Cette méthode est exposée dans ses étapes successives. Elle est ensuite appliquée à des exemples synthétiques, puis à des données réelles.

Il est peut-être préférable dans un premier temps de lire la thèse à un niveau **global** : lire les chapitres 1 et 2, qui exposent la méthode de résolution du problème inverse, puis passer directement aux applications, dans les chapitres 6 et 7.

Dans une seconde approche, on pourra lire la thèse à un niveau **détaillé**, et lire les chapitres 3 à 5. Cette double lecture fait en sorte que les détails ne masquent pas les principes de la méthode, que les arbres ne cachent pas la forêt.

Pour que la lecture ne soit pas heurtée, et pour ne pas perdre le fil directeur, il est aussi recommandé d'éviter la lecture des démonstrations. Un certain nombre de résultats sont en effet démontrés mathématiquement, et prennent la forme d'un théorème, d'un lemme ou d'une proposition.

Théorème *Le théorème est un résultat important.*

Lemme *Le lemme est un résultat intermédiaire.*

Proposition *La proposition est un résultat démontré sans beaucoup de rigueur mathématique. Elle complète les calculs mathématiques par des intuitions physiques.*

Démonstration La démonstration, qui accompagne l'énoncé du résultat, est généralement pénible à lire, car elle est technique et abstraite. Elle n'a d'intérêt que parce qu'elle établit mathématiquement un résultat. J'engage ainsi le lecteur, en première lecture, à éviter chaque démonstration. S'il met en doute le résultat proposé, il peut ensuite aborder la démonstration.

Les démonstrations sont facilement repérables car elles se terminent par un point. Cette convention permet d'en éviter la lecture.

■

Chapitre 1

Définition du problème inverse

Résumé du chapitre

Ce chapitre expose la problématique du problème inverse.

- La section 1.1 rappelle les lois de l'hydrogéologie nécessaires à la résolution d'un problème concret, ce qui permet d'y reconnaître un problème inverse.
- La section 1.2 est une étude bibliographique traitant des problèmes inverses en hydrogéologie.

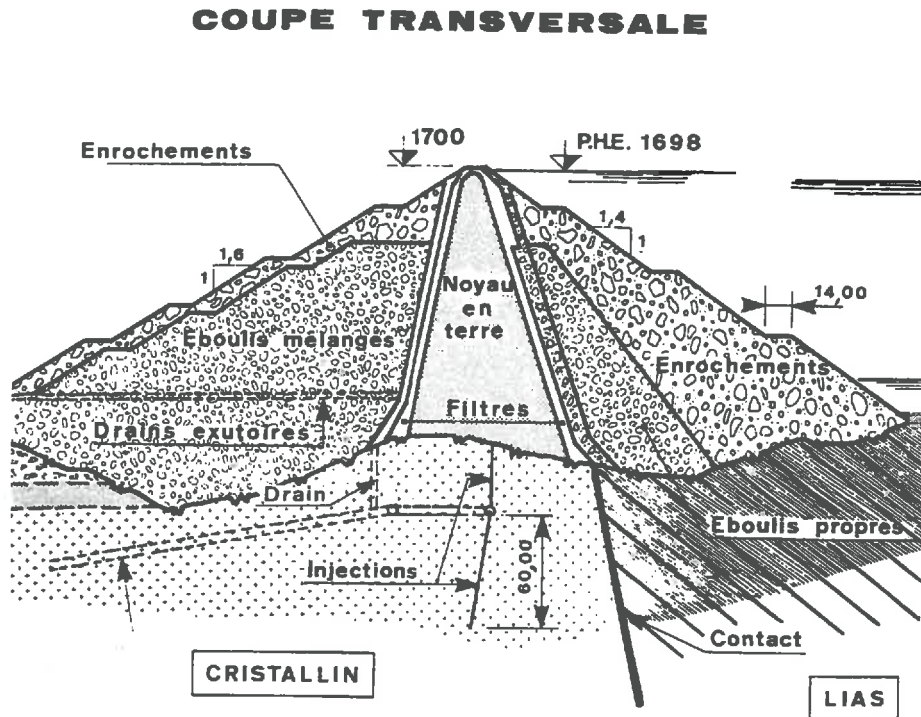


FIG. 1.1 - Coupe transversale du barrage. Remarque : c'est la seule représentation du barrage où l'amont est situé à droite. Document EDF.

1.1 Définition du problème inverse

Le travail présenté ici consiste à estimer les perméabilités d'un barrage en terre. Les seules données disponibles pour cette estimation sont des mesures de pression interstitielle, réparties dans le barrage.

1.1.1 Données du problème

Les données proviennent d'un barrage en terre et en enrochement. Il est constitué d'un noyau en graves argileuses, protégé à l'amont et à l'aval par des filtres, et épaulé par des éboulis et des enrochements. La figure 1.1 montre une coupe transversale du barrage. Les argiles du noyau, très imperméables, servent à retenir l'eau de l'amont. Le noyau est pourtant traversé par un écoulement d'eau, mais en quantité infiniment faible, et avec des vitesses infiniment lentes. Cette circulation de fluide obéit aux lois de l'hydrogéologie.

Les écoulements de fluides sont principalement caractérisés par la perméabilité du milieu poreux. Dans cette thèse on se propose d'estimer les perméabilités du barrage indirectement, à partir seulement de mesures de pression interstitielle. Lors de la construction, des cellules de pression interstitielle ont été réparties selon plusieurs profils verticaux orientés dans la direction amont-aval. Les mesures proviennent d'un de ces profils, situé au milieu du barrage.

Ce profil a été choisi pour deux raisons : c'est d'une part le profil le mieux équipé car il est situé au milieu du barrage, où les sections sont les plus grandes ; d'autre part, compte tenu de la symétrie du barrage et du sens de l'écoulement, l'écoulement peut être supposé plan dans

le profil. Dans la suite, l'écoulement est modélisé à deux dimensions. Un point du plan, noté \boldsymbol{x} , est repéré par une abscisse x et une cote z .

L'exposé des lois de l'hydrogéologie qui suit rappelle comment les valeurs de pressions sont liées au champ de perméabilité du barrage.

1.1.2 Loi de Darcy

Les lois de l'hydrogéologie, résumées ici, sont exposées en détail dans les livres de Schneebeli [43] et de Marsily [26].

En hydrogéologie, les pressions interstitielles p sont transformées en **charge hydraulique** par la formule :

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

où ρ est la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et z la cote de pose de la cellule. La **loi de Darcy** relie la circulation de fluide d'un milieu poreux aux valeurs de charge hydraulique. Elle s'écrit :

$$\Phi = -K.\text{grad}(h)$$

où Φ désigne le flux d'eau par unité de surface, $\text{grad}(h)$ le gradient de charge. K est une propriété du milieu poreux, définie par la loi de Darcy et appelée **perméabilité**. En toute généralité, K est un **tenseur symétrique**, c'est-à-dire peut s'écrire comme une matrice :

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$$

Lorsque le milieu est localement isotrope, cette matrice peut s'écrire :

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur est alors assimilé au scalaire k , la perméabilité est dite **scalaire**. Dans la suite, le milieu est supposé isotrope, avec des perméabilités scalaires. Les perméabilités sont des propriétés locales du milieu poreux, et dépendent des coordonnées d'espace \boldsymbol{x} . Finalement, dans un milieu localement isotrope, la loi de Darcy s'écrit :

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -k(\boldsymbol{x})\text{grad}(h(\boldsymbol{x})) \quad (1.1)$$

1.1.3 Ecoulement d'une nappe libre

L'écoulement dans le barrage est un écoulement de **nappe libre** : le milieu n'est saturé en eau que sur une certaine hauteur et il est surmonté par un milieu poreux non-saturé. La ligne de partage de ces milieux est la **surface libre**, dont le mouvement au cours du temps emmagasine ou libère l'eau de la nappe.

Le milieu saturé est caractérisé par des pressions interstitielles positives ; la surface libre est donc définie par l'équation implicite

$$p(\boldsymbol{x}, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(\boldsymbol{x}, z) = z$$

Dans ce milieu, la perméabilité $k(\boldsymbol{x})$ est supposée invariante dans le temps sur la période considérée. Elle ne dépend que du point \boldsymbol{x} . La conservation de la masse d'eau, combinée à la loi de Darcy (1.1), donne l'**équation de diffusivité** pour une nappe libre :

$$\text{div}(k(\boldsymbol{x})\text{grad}(h(\boldsymbol{x}))) = 0 \quad (1.2)$$

Cette équation n'implique pas explicitement les variations temporelles de la charge, qui sont implicitement contenues dans les déplacements de la surface libre.

Dans le milieu non saturé, les perméabilités dépendent du degré et de l'historique de saturation. Les lois du milieu non saturé sont très compliquées et fortement non linéaires. Ce sont les propriétés du milieu non saturé qui déterminent la position de la surface libre. Dans la suite, l'écoulement ne sera étudié que dans sa partie saturée, qui sera localisée avec un soin particulier dans les applications.

1.1.4 Problème direct et problème inverse

Dans le milieu poreux, l'équation de diffusivité doit en fait s'écrire :

$$\operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad}(h(\mathbf{x}, t))) = 0$$

car la charge $h(\mathbf{x}, t)$ peut varier au cours du temps, alors que la perméabilité $k(\mathbf{x})$ est supposée constante. Cette relation entre les deux variables charge et perméabilité, intervient dans deux problèmes différents, le **problème direct** et le **problème inverse**.

Le **problème direct** consiste à calculer la charge hydraulique h à partir du champ de perméabilité k . Pour être bien posé, ce problème suppose connues des conditions aux limites sur la charge. C'est un problème classique qui, en général, se résout numériquement par une méthode d'éléments finis ou de différences finies. La principale difficulté du problème direct est la modélisation du comportement du milieu non saturé qui conditionne la position de la surface libre.

Le **problème inverse** consiste à calculer la perméabilité k du milieu, à partir des seules mesures de charge $h(\mathbf{x}, t)$, prises en plusieurs dates. Dans certains cas il est possible de disposer de quelques mesures de perméabilité. Le problème inverse est un problème difficile comme en témoigne l'étude bibliographique suivante.

1.2 Etude bibliographique

En hydrogéologie il existe une classe de problèmes inverses, définis comme l'identification de coefficients répartis dans l'équation de diffusivité. Dans le cas général, celle-ci s'écrit :

$$\operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad}(h(\mathbf{x}, t))) = s(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial t}h(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

où

- l'espace peut être de dimension 1, 2 ou 3 ;
- $h(\mathbf{x}, t)$ est la charge hydraulique ;
- $k(\mathbf{x})$ peut désigner la perméabilité du milieu ou sa transmissivité (intégrale de la perméabilité sur la hauteur de la nappe) ; pour simplifier la bibliographie, k sera toujours appelé perméabilité, même pour un article qui traite de transmissivité.
- $s(\mathbf{x})$ est le coefficient d'emmagasinement spécifique du milieu. Selon les cas il peut être nul, constant ou variable ;
- $q(\mathbf{x}, t)$ est un terme de recharge supposé connu.

Les problèmes inverses consistent à déterminer soit $k(\mathbf{x})$, soit le couple $(k(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}))$. Les données disponibles sont des mesures de charges hydrauliques, des débits. Il est possible de disposer également de mesures de perméabilité (ou transmissivité) $k(\mathbf{x})$, mais celles-ci sont rares et peu précises.

Les problèmes inverses de cette classe sont très voisins. Une même méthode peut facilement s'adapter à plusieurs problèmes moyennant quelques modifications. Depuis une quarantaine d'années un grand nombre de problèmes inverses ont été traités, faisant l'objet de nombreux articles. Les méthodes proposées peuvent se classer en trois approches : approche directe, approche indirecte ou itérative, et approche stochastique.

La bibliographie présentée ici s'appuie sur la bibliographie très détaillée de la thèse de C. Certes [4], dont le manuscrit de thèse est hélas inachevé. Deux articles offrent également un panorama des méthodes inverses : l'article de W. Yeh [46] pour les approches directe et indirecte, et l'article de T. Ginn et J. Cushman [17] pour l'approche stochastique.

1.2.1 Analyse mathématique

L'analyse mathématique de R. Nelson, qui est citée en référence dans de nombreux travaux, est indispensable pour comprendre les relations mathématiques liant la charge et la perméabilité.

Dans son article [34], R. Nelson étudie le problème inverse suivant : pour un écoulement en régime permanent et sans recharge, le champ de charge hydraulique $h(\mathbf{x})$ est supposé connu dans tout un domaine. Le champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$ est la seule inconnue. Dans ce cas, l'équation de diffusivité (1.3),

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \operatorname{grad}(h(\mathbf{x}))) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{grad}(h) \cdot \operatorname{grad}(k) + k \Delta h &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

devient une équation aux dérivées partielles de degré 1 par rapport à la variable recherchée $k(\mathbf{x})$. C'est une équation classique (Bass [2]). Sa résolution théorique passe par le calcul des lignes de courant. Le calcul du champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$ nécessite une condition aux limites (ou condition de Cauchy) : la perméabilité doit être connue sur une courbe qui croise toutes les lignes de courant de l'écoulement.

Dans les études du problème inverse, la condition aux limites est souvent assimilée à une indétermination car il est rare de disposer de suffisamment de mesures de perméabilité pour connaître effectivement la perméabilité le long d'une courbe.

1.2.2 Approche directe

Les **méthodes directes** sont les méthodes qui résolvent directement l'équation aux dérivées partielles (1.4). Elle peuvent se classer suivant trois types.

1. Les méthodes de suivi des lignes de courant. Dans [35], R. Nelson construit des tubes de courant en calculant les lignes de courant de l'écoulement. Il applique ensuite sur chaque tube de courant la loi de conservation du flux. Dans [36], il change légèrement sa méthode. Elle repose toujours sur le suivi de lignes de courant, mais les perméabilités sont calculées par l'intégration numérique d'une équation différentielle.
2. Les méthodes de différences finies comme dans Nutbrown [39].

3. Les méthodes d'éléments finis comme dans Frind et Pinder [15].

Les méthodes de suivi de lignes de courant sont rares, peut-être parce qu'elles sont compliquées à mettre en œuvre. En revanche, les méthodes de différences finies sont fréquentes. Pourtant d'après Nelson [35], qui compare ces deux types de méthodes, les méthodes de suivi des lignes de courant donnent de meilleurs résultats.

Dans les applications, la charge n'est mesurée qu'en un nombre fini de points. Or, d'après l'analyse mathématique, le calcul des perméabilités nécessite la connaissance complète du champ de charge. Les méthodes de résolution du problème inverse proposent donc une interpolation du champ de charge. Cette interpolation a été réalisée de plusieurs manières. R. Nelson, dans [35] et [36], utilise des splines ou des polynômes. Dans les méthodes d'éléments finis et de différences finies, la charge est interpolée implicitement.

Les méthodes directes ont évolué vers des méthodes où les perméabilités ne sont plus calculées directement, mais sont issues d'une minimisation. Un champ de perméabilité k quelconque est a priori incompatible avec le champ de charge $h(\mathbf{x})$ donné. Il ne vérifie donc pas l'équation d'écoulement (1.2). L'erreur ε qui en résulte,

$$\varepsilon = \operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad}(h(\mathbf{x})))$$

est une différence de débit, appelée **débit d'erreur**. Elle peut être mesurée par une fonctionnelle $J_1(k)$.

Les premières méthodes ont supposé les équations vérifiées exactement ($\varepsilon = 0$). Mais les erreurs de mesures et de calculs produisaient des résultats instables. Pour y remédier, les méthodes ultérieures tiennent compte de ces erreurs sous la forme du débit d'erreur ε . Elles ne cherchent plus à annuler le débit d'erreur, mais à le minimiser. Les articles de Kleinecke [23], de Emsellem et de Marsily [12] ou de Sagar et. al [42] présentent différents types de minimisation.

1.2.3 Approche indirecte ou itérative

Les **méthodes indirectes** sont des méthodes d'essai-erreur. A un champ de perméabilité k quelconque correspond un champ de charge h_k , qui se calcule par résolution numérique du problème direct. Les valeurs de ce champ de charge h_k peuvent être comparées aux mesures de charge h_m . Les méthodes d'essai-erreur consistent à modifier itérativement un champ de perméabilité k , donné a priori, pour diminuer la différence entre les mesures h_m et le champ de charge h_k .

Cette approche prend la forme de la minimisation d'un critère $J_1(k)$, qui mesure la différence entre les mesures h_m et le champ de charge h_k relatif au champ k . Cette différence est considérée comme un **erreur de prédiction** du champ de perméabilité modélisé par le champ k . Ainsi comme les méthodes directes, les méthodes indirectes sont des méthodes de minimisation. Mais les erreurs que minimisent ces méthodes sont de nature différente.

L'article de Jacquard et Jain [21] de 1965 est l'un des premiers qui expose les méthodes d'essai-erreur sous forme de minimisation. Depuis, de nombreuses études ont été faites sur ce sujet, où varient les méthodes de calcul direct du champ de charge (éléments finis ou différences finies), ainsi que les techniques de minimisation.

Les méthodes indirectes sont des méthodes coûteuses en temps de calcul, car d'une part elles supposent à chaque itération une résolution du problème direct, et d'autre part elles minimisent un certain nombre de paramètres. Une grande attention est donc portée sur la

méthode de minimisation. C'est pourquoi la méthode de l'état adjoint de Chavent [7] s'est très vite répandue, car elle donne le gradient de la fonctionnelle $J_1(k)$ à chaque itération et sans approximation.

Il semble que l'approche indirecte ait peu à peu remplacé l'approche directe du problème inverse, et cela grâce à l'évolution des ordinateurs, qui permettent des calculs de plus en plus rapides. Dans son article de 1973 [37], Neuman reproche en effet aux méthodes indirectes d'être coûteuses, alors qu'ils les emploie lui-même dans son article de 79 [38].

1.2.4 Problème mal posé

La difficulté principale liée à la résolution du problème inverse est que ce problème est **mal posé** au sens de Hadamard [18]. Pour qu'un problème soit bien posé, il doit vérifier les trois conditions suivantes :

1. Existence de la solution.
2. Unicité de la solution.
3. Stabilité de la solution par rapport aux données.

Or le problème inverse peut ne remplir aucune de ces conditions.

1. Si le champ de charge est connu en plusieurs dates, le nombre des équations, qui relie les perméabilités aux champs de charge, dépasse le nombre d'inconnues. Si une petite erreur est commise sur les mesures de charge, ou dans les calculs d'inversion, le problème ne possède pas de solution.
2. L'analyse mathématique de Nelson a montré que le champ de perméabilité obtenu dépend d'une condition aux limites. Si elle n'est pas déterminée par les données du problème, le champ de perméabilité obtenu à partir des mesures de charge n'est pas unique.
3. L'instabilité du problème inverse, passée sous silence dans l'analyse mathématique de Nelson, constitue sa difficulté majeure. Depuis longtemps, les praticiens ont remarqué, en résolvant le problème direct, qu'une forte variation de la perméabilité k pouvait ne produire qu'une faible variation de la charge h . Inversement, une faible variation de charge peut conduire à des champs de perméabilité très différents. Le champ de perméabilité obtenu par inversion est donc très sensible aux erreurs de mesure.

La minimisation d'une erreur, présente dans les approches directe et indirecte, permet de parer à l'éventuelle non existence de solutions : la solution n'est plus définie comme le champ de perméabilité qui vérifie exactement toutes les équations, mais comme celui qui les vérifie au mieux.

1.2.5 Paramétrisation

La non-unicité et l'instabilité des solutions ont été longtemps prises en compte par la **paramétrisation**, définie maintenant. Dans les méthodes d'inversion, le champ de perméabilité est modélisé pour ne dépendre que d'un nombre fini de paramètres, qui doivent être estimés par le calcul inverse. Cette paramétrisation suit deux stratégies :

- Une méthode de **zonation**. Le champ de perméabilité est divisé en plusieurs zones de perméabilité constante. Le nombre de paramètres correspond au nombre de zones

différentes. (Voir par exemple les articles de Emsellem et de Marsily [12] ou de Yeh et Yoon [47]).

- Une méthode d'**interpolation**. Les paramètres correspondent aux valeurs de perméabilité d'un certain nombre de points. Le champ est interpolé par des combinaisons linéaires de ces valeurs au moyen d'une base de fonctions. (Voir par exemple les articles de DiStefano et Rath [10] et de Clifton et Neuman [8]).

Les auteurs soulignent l'importance de la **dimension de la paramétrisation**, c'est-à-dire du nombre de paramètres. La raison en est la suivante : l'augmentation du nombre de paramètres a deux conséquences. D'une part, l'erreur $J_1(k)$ (erreur de débit pour l'approche directe, erreur de prédiction pour l'approche indirecte) diminue, c'est-à-dire que le champ de perméabilité obtenu par calcul inverse restitue mieux les mesures de charge. Mais d'autre part, le champ de perméabilité devient de plus en plus irrégulier.

C'est le caractère instable du problème inverse qui fait diverger les solutions lorsque la paramétrisation augmente. La limitation du nombre de paramètres force les solutions à rester régulières et constitue ainsi une réponse à ce problème.

La dimension de la paramétrisation doit donc être déterminée avec soin, pour que les solutions soient suffisamment compatibles avec les mesures de charge sans être trop irrégulières. De nombreuses stratégies ont été mises en œuvre pour réaliser ce compromis. Il apparaît empiriquement que la dimension de la paramétrisation dépend de la qualité et de la quantité des données disponibles.

Dans son article, qui dresse l'inventaire des méthodes de résolution du problème inverse, Yeh [46] résume ce problème de paramétrisation. "Il y a deux types d'erreurs associées au problème inverse : (1) une erreur liée à la capacité du champ de perméabilité modélisé à reproduire les données de charge, et (2) l'imprécision dans le calcul des paramètres. Accroître le nombre de paramètres améliore la capacité à reproduire les données de charge, mais détériore la précision du calcul des paramètres et vice versa. Le degré optimal de paramétrisation dépend de la quantité et de la qualité des mesures."

1.2.6 Régularisation, information a priori

La régularisation est un autre moyen que la limitation du nombre de paramètres pour remédier à l'instabilité. Elle a été proposée par Tikhonov [44] pour résoudre les problèmes mal posés. Elle a été appliquée au problème inverse, d'une part pour réaliser des calculs stables, et d'autre part pour produire une solution unique. (Voir par exemple les articles de Gavalas et al [16] et de Neuman et Yakowitz [38].)

La régularisation consiste à ajouter à la fonctionnelle $J_1(k)$, qui mesure la compatibilité entre le champ de perméabilité k et les mesures de charge, un **terme de pénalisation** $J_2(k)$, qui pénalise les solutions k irrégulières. Le problème inverse consiste alors à minimiser la nouvelle fonctionnelle

$$J_\lambda(k) = J_1(k) + \lambda J_2(k)$$

Le paramètre λ détermine l'importance relative des termes $J_1(k)$ et $J_2(k)$. Si les mesures de charge sont supposées de bonne qualité, la solution aura peu besoin d'être régularisée, ce qui correspond à une faible valeur de λ .

Les travaux de Tikhonov expliquent pourquoi la régularisation est adaptée aux problèmes mal posés. Elle utilise une minimisation, donc remédie au problème de non-existence. La

solution proposée est la solution la *plus régulière*, donc résout simultanément les problèmes d'instabilité et de non-unicité.

Dans les applications, l'étape déterminante des méthodes de régularisation est le choix du terme de régularisation $J_2(k)$. Dans de nombreux cas, $J_2(k)$ mesure la différence entre le champ k et un champ k_0 donné a priori. Cette différence est mesurée par une norme, issue d'une fonction de covariance, et qui traduit la structure spatiale du champ de perméabilité. Par la présence d'une fonction de covariance dans la norme, ce type de calcul inverse est appelé **estimation Bayésienne**.

Le champ de perméabilité k_0 , la forme de la fonction de covariance sont autant d'informations qui s'ajoutent aux mesures de charge et qui conditionnent le résultat d'inversion. Ces informations sont soit de nature objective (mesures de perméabilité, calcul de la fonction de covariance à partir d'un autre champ de perméabilité bien échantillonné), soit de nature subjective (régularité souhaitée pour les solutions).

La régularisation sous la forme d'estimation Bayésienne est très séduisante car elle permet d'incorporer plusieurs types d'informations dans le problème inverse. Cette souplesse est considérée comme un avantage. Mais elle peut aussi être vue comme un inconvénient, car l'information supplémentaire conditionne fortement les résultats du calcul inverse. En caricaturant, on peut accuser l'estimation Bayésienne de retrouver par calcul inverse l'information donnée a priori.

1.2.7 Approche stochastique

La troisième approche pour résoudre le problème inverse est l'approche **stochastique**, qui utilise des méthodes de Géostatistique. Dans cette approche, la perméabilité est généralement remplacée par son logarithme. (D'après Freeze [14] la perméabilité suit une loi lognormale). La charge $h(\mathbf{x})$ et le log-perméabilité $\ln(k(\mathbf{x}))$ sont modélisés par des fonctions aléatoires $H(\mathbf{x})$ et $Y(\mathbf{x})$. Le champ de log-perméabilité est estimé par **cokrigeage**, c'est-à-dire par une combinaison linéaire des mesures de charge et de log-perméabilité. Cette combinaison est calculée pour être sans biais et optimale au sens de la variance minimale [28].

Le cokrigeage nécessite la connaissance des fonctions de covariance simple et croisée des fonctions aléatoires $H(\mathbf{x})$ et $Y(\mathbf{x})$. Les premières études qui ont utilisé le cokrigeage n'ont pas tenu compte de l'équation d'écoulement, qui lie charge et perméabilité. Les nombreux travaux qui ont suivi ont largement compensé cette lacune.

Un grand nombre d'études, qui intègrent l'équation d'écoulement, procèdent par la méthode des perturbations. L'équation est linéarisée et la fonction de covariance des log-perméabilités est supposée connue. Les autres fonctions de covariances sont alors linéairement dépendantes de cette première fonction de covariance. Cette relation linéaire s'exprime théoriquement sous forme d'une convolution, avec un noyau de convolution appelé **noyau de Green**. Kitanidis et Vomvoris [22] exploitent directement cette convolution et calculent le noyau de Green numériquement à partir des matrices d'éléments finis.

D'autres auteurs, comme Mizell et al [33] ou Dong [11], préfèrent procéder par une intégration théorique. L'équation linéarisée, qui lie $H(\mathbf{x})$ et $Y(\mathbf{x})$ se transforme en une équation aux dérivées partielles linéaire liant les fonctions de covariance. Cette équation peut s'intégrer théoriquement moyennant quelques hypothèses. Par cette intégration, les fonctions de covariance dépendent de la fonction de covariance des log-perméabilités.

L'inconvénient de ces méthodes de perturbation est de s'appuyer sur la linéarisation de l'équation d'écoulement. Les méthodes de **Monte Carlo**, utilisées par Hoeksema et Clapp

[20] ou par Roth [40], permettent de contourner cette difficulté. Dans ces études, la fonction de covariance des log-perméabilités $Y(\mathbf{x})$ est toujours supposée connue. Un grand nombre de champs de log-perméabilités sont simulés par des méthodes de Monte Carlo, sur lesquels les champs de charge sont ensuite calculés par des méthodes numériques (éléments finis ou différences finies). Les covariances, qui relient les champs de charge H aux champs de log-perméabilité, et qui sont nécessaires au cokrigage, sont alors calculées numériquement sur l'ensemble des simulations. Ces méthodes sont coûteuses car elles demandent un grand nombre de simulations, et pour chaque simulation un calcul d'écoulement. Mais la puissance des ordinateurs modernes rend ce coût acceptable.

Finalement, les méthodes stochastiques possèdent deux inconvénients :

- Elles supposent connue la fonction de covariance des log-perméabilités. Cette fonction est difficile à connaître à partir des seules mesures de perméabilités car, dans la majorité des études, celles-ci sont peu nombreuses. Elle est également difficile à obtenir à partir des mesures de charge. En effet, dans ces méthodes, le problème mal posé, qui relie la perméabilité et la charge, est déplacé sur un problème tout aussi mal posé, qui relie la fonction de covariance des log-perméabilités à la fonction de covariance de la charge.
- Le champ de log-perméabilité est calculé par des combinaisons linéaires impliquant les mesures de charge. Or la relation entre log-perméabilité et charge n'est pas linéaire.

Chapitre 2

Description de la méthode de résolution

Résumé du chapitre

Ce court chapitre montre la relation entre le champ de charge et le champ de perméabilité. Il décrit ensuite la méthode de résolution du problème inverse proposée dans cette thèse.

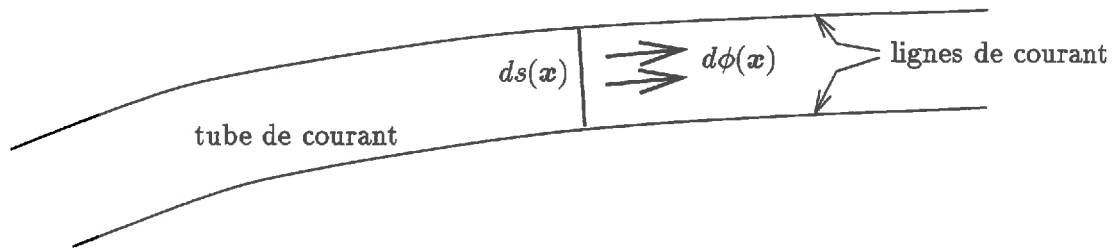
Ce chapitre expose intuitivement certains résultats qui seront démontrés plus rigoureusement au chapitre 4.

Le calcul inverse repose sur deux principes, présentés ici : le calcul des valeurs de perméabilité sur les tubes de courant, et la complémentarité des écoulements aux différentes dates.

2.1.1 Calcul intuitif de la perméabilité

Pour montrer les relations entre la charge et la perméabilité, il est commode de ne considérer d'abord qu'un seul écoulement. Supposons donc la charge $h(\mathbf{x}, t_1)$ connue en une seule date t_1 . Le raisonnement intuitif qui suit s'appuie sur les caractéristiques de l'écoulement, obtenues à partir des dérivées de la charge.

Une **ligne de courant** est une courbe partout parallèle à la vitesse du fluide, donc aux gradients de charge lorsque la perméabilité est scalaire. Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant comprises entre deux lignes de courant limites.



D'après la loi de Darcy (1.1), le flux d'eau $d\phi(\mathbf{x})$ qui traverse la section $ds(\mathbf{x})$ au point \mathbf{x} d'un tube de courant infiniment fin vaut

$$d\phi(\mathbf{x}) = ds(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}) = -ds(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad}(h(\mathbf{x}, t)) k(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ désigne un vecteur unitaire normal à la surface $ds(\mathbf{x})$. Pour une section $ds(\mathbf{x})$ orthogonale au tube, le vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est parallèle au gradient de charge ; pour obtenir des flux positifs, il est orienté dans le sens du flux $\Phi(\mathbf{x})$, d'où :

$$d\phi(\mathbf{x}) = ds(\mathbf{x}) \|\mathbf{grad}(h(\mathbf{x}, t))\| k(\mathbf{x})$$

Par conservation de la masse d'eau, le flux $d\phi(\mathbf{x})$ est égal en tout point \mathbf{x} du tube de courant : c'est une grandeur invariante sur le tube, de valeur $d\phi_0$. Finalement la perméabilité $k(\mathbf{x})$ en un point \mathbf{x} du tube de courant vaut

$$k(\mathbf{x}) = \frac{d\phi_0}{ds(\mathbf{x}) \|\mathbf{grad}(h(\mathbf{x}, t))\|} \Rightarrow k(\mathbf{x}) = A F(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

où A est une constante pour le tube de courant et $F(\mathbf{x})$ une fonction inversement proportionnelle à l'épaisseur du tube et au gradient de charge.

Pour établir cette expression il a fallu disposer d'un "tube de courant infiniment fin" pour que les variations de la perméabilité, ou du gradient, puissent être considérées comme négligeables sur l'épaisseur du tube. Ainsi $k(\mathbf{x})$ dépend du rapport de deux quantités infiniment petites, tendant vers 0 avec l'épaisseur du tube : $d\phi_0$ et $ds(\mathbf{x})$. Qu'advient-il de ce rapport lorsque l'épaisseur du tube tend vers 0, donc lorsque le tube tend vers une ligne de courant ?

Le raisonnement employé ici ne permet pas ce passage à la limite. Dans la section 4.1, une approche plus rigoureuse montre que la relation 2.1 demeure valable sur chaque ligne de courant.

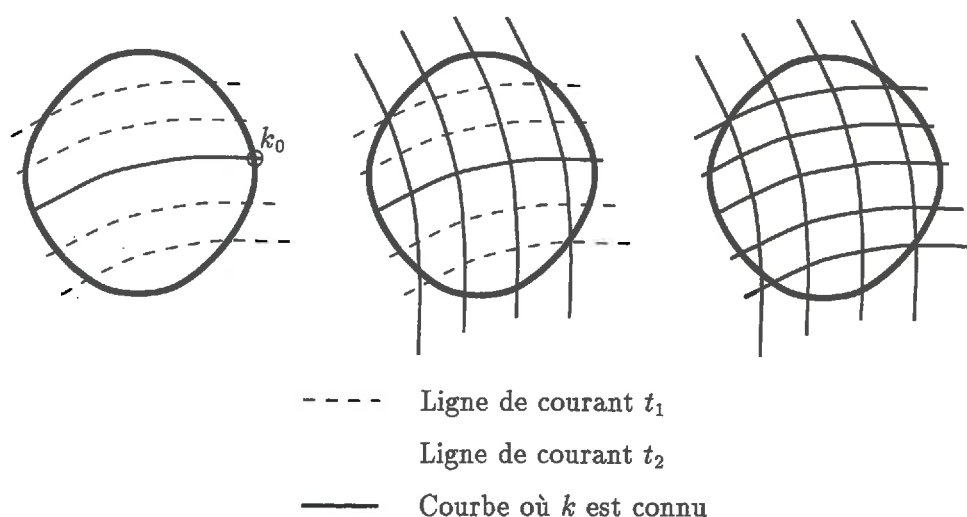


FIG. 2.1 - Grâce au croisement des lignes de courant aux dates t_1 et t_2 , le champ de perméabilité ne dépend que d'une seule constante k_0 .

2.1.2 Complémentarité des différentes dates

L'équation de diffusivité (1.2) et la connaissance de la charge $h(\mathbf{x}, t_1)$ en tout point permettent de calculer la perméabilité $k(\mathbf{x})$ en tout point. Celle-ci dépend, sur chaque ligne de courant, d'une fonction $F(\mathbf{x})$, calculable à partir du champ de charge, et d'une constante arbitraire A . Cette constante est fixée si on connaît k en un point de cette ligne de courant. Pour déterminer l'ensemble des constantes inconnues, donc le champ de perméabilité k , il suffit de connaître k sur une courbe qui recoupe toutes les lignes de courant.

Si les lignes de courant aux différentes dates se croisent suffisamment, le champ de perméabilité ne dépend plus que d'une seule constante, comme le montre l'exemple suivant. Sur le dessin de la figure 2.1, les lignes de courant de l'écoulement aux dates t_1 et t_2 se croisent. La connaissance de la valeur k_0 de la perméabilité en un point d'une ligne de courant à la date t_1 permet de connaître la perméabilité sur cette même ligne de courant. Comme celle-ci croise les lignes de courant à la date t_2 , ses valeurs de perméabilité permettent de connaître le champ de perméabilité dans tout le domaine. Finalement, la perméabilité est connue partout à partir de la seule valeur k_0 .

La constante k_0 correspond à une constante multiplicative arbitraire, impossible à déterminer à partir de la seule connaissance du champ de charge $h(\mathbf{x}, t)$, car le champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$, multiplié par une constante C , vérifie toujours l'équation de diffusivité (1.2):

$$\operatorname{div}(C k \mathbf{grad}(h)) = C \operatorname{div}(k \mathbf{grad}(h)) = 0$$

Le raisonnement présenté ici suppose, pour simplifier, qu'une ligne de courant en une date croise toutes les lignes de courant de l'autre date. Le paragraphe 4.2.5 montre que cette condition un peu forte n'est pas nécessaire.

2.1.3 Caractéristiques du problème inverse

L'étude des relations entre le champ de charge hydraulique et le champ de perméabilité permet de retrouver les 3 difficultés caractéristiques du problème inverse.

Instabilité

Les relations, qui relient le champ de perméabilité aux champs de charge, s'appuient sur les lignes de courant, obtenues à partir des gradients de charge. Or le calcul de gradients, comme toute dérivation, est un calcul réputé instable. Une petite erreur sur les mesures de charge produit de grandes erreurs sur les gradients.

Une autre instabilité vient des zones de faibles gradients. Dans une telle zone, une faible erreur de calcul de gradient peut changer radicalement l'orientation d'une ligne de courant, donc les calculs de perméabilité.

Non-existence

Pour un seul écoulement, le paragraphe 2.1.1 a montré l'existence de solutions au problème inverse. L'information apportée par plusieurs écoulements complique le calcul des perméabilités. Pour chaque écoulement, en effet, il existe des relations de type (2.1). Le nombre de ces équations augmente donc avec le nombre d'écoulements. Pourtant, le nombre d'inconnues, c'est-à-dire les valeurs de perméabilité, reste le même.

Ainsi, le système algébrique dont les inconnues sont les valeurs de perméabilité possède plus d'équations que d'inconnues. Il est algébriquement surdéterminé. (Voir le paragraphe 4.1.4 pour plus de détails). Dans ce cas, les incertitudes dans les mesures de charge et les approximations dans les calculs, qui en pratique sont inévitables, entraînent la non-existence de solutions au problème inverse.

Non-unicité

Pour un seul écoulement, il existe une infinité de champs de perméabilité possibles, qui diffèrent entre eux d'une constante par ligne de courant. Pour plusieurs écoulements, nous venons de voir que l'indétermination peut être réduite à une unique constante inconnue, si les lignes de courant se croisent suffisamment. Les solutions du problème inverse ne sont donc pas uniques.

2.1.4 Description d'une méthode de résolution du problème inverse

La méthode proposée dans cette thèse tente de résoudre les 3 difficultés du problème inverse. Elle se décompose en plusieurs étapes.

1. Dans un premier temps, le champ de charge est interpolé à partir des mesures de charge, puis les gradients sont calculés. Cette étape d'interpolation est confrontée à la principale difficulté du problème inverse, son instabilité. C'est en effet le calcul du gradient qui est cause de l'instabilité.

Comme dans un grand nombre de méthodes, l'instabilité est prise en compte par des techniques de **régularisation**. La particularité de la méthode proposée ici est de ne faire porter le critère de régularisation que sur le champ de charge calculé, et non pas sur le champ de perméabilité. L'interpolation du champ de charge régularisé est réalisée par un krigeage avec effet de pépite, technique de filtrage classique en géostatistique.

La régularisation du champ de charge aborde une question cruciale, relative au problème inverse : qu'est-il raisonnable de récupérer comme perméabilités, à partir d'un nombre fini de mesures de charge ? Il s'avère que les perméabilités calculables à partir des mesures

de charge ne sont pas des perméabilités locales, mais des perméabilités équivalentes, relatives à des supports dont la taille est proche de la distances entre les mesures.

Cette phase de krigeage est traitée au chapitre 3.

2. La méthode proposée ici est une méthode directe, qui résout explicitement l'équation du problème inverse (1.4) pour chaque date. Pour ce faire, elle utilise une méthode de suivi des lignes de courant : la section 5.1 montre comment construire un maillage qui s'appuie sur des lignes équipotentielles et sur les lignes de courant d'un écoulement ; la section 5.2 montre comment calculer les perméabilités à partir d'égalités de flux sur le maillage précédent.
3. La non-existence éventuelle de solution est due à un nombre d'équations trop grand pour le nombre d'inconnues, lorsque le champ de charge est connu en plusieurs dates. Il est classique d'employer alors une méthode de moindres carrés. Cette méthode est décrite au chapitre 4. L'annexe A montre, par une analyse mathématique détaillée, que la méthode des moindres carrés est numériquement stable : ses solutions convergent lorsque la discrétisation s'affine. Elle peut donc être discrétisée dans les applications numériques. Cette discrétisation est décrite en détails dans la section 5.2.
4. Les solutions du problème inverse ne sont pas déterminées de façon unique. Elles dépendent déjà d'une constante multiplicative, qui peut être facilement prise en compte. Si de plus les écoulements aux différentes dates ne se croisent pas suffisamment, les perméabilités dépendent alors d'une constante inconnue sur chaque ligne de courant. Cette nouvelle indétermination fait diverger les solutions.

Quelques critères sont proposés pour détecter cette indétermination, puis une méthode est proposée pour y remédier : elle consiste à imposer des valeurs de perméabilité au début de chaque ligne de courant.

L'indétermination est abordée de manière théorique au paragraphe 4.2.5, puis dans les applications numériques aux sections 5.3 et 5.4.

La description, dans les prochains chapitres, de la méthode proposée, s'appuie sur des exemples numériques, construits à partir des exemples du **domino** et du **disque** décrits ci-dessous.

Dans ces exemples, les champs de charge sont calculables analytiquement. Ils sont peu réalistes, car ils sont très éloignés des champs de charge réels d'un barrage, mais ils possèdent plusieurs avantages. Ils permettent en effet de connaître la charge en tout point sans recourir à une interpolation. En outre, ils dépendent d'un petit nombre de paramètres, ce qui permet de construire facilement de nombreux cas différents.

Des exemples plus réalistes seront construits au chapitre 6 par des calculs numériques avec une méthode d'éléments finis.

2.1.5 Exemple du domino

L'exemple du domino est un cas particulier de champ de charge compatible avec un milieu dont le champ de perméabilité est factorisé sous la forme $k(x, z) = k_1(x) k_2(z)$.

Proposition 2.1 *Sur un champ de perméabilité factorisé du type $k(x, z) = k_1(x) k_2(z)$, les champs de charge de la forme $h_1(x, z) = h_1(x) = A \int_{x_0}^x \frac{du}{k_1(u)}$ et $h_2(x, z) = h_2(z) =$*

$A \int_{z_0}^z \frac{du}{k_2(u)}$ sont solutions de l'équation d'écoulement (1.2).

Démonstration Pour un champ de charge, qui représente un écoulement horizontal (dans le sens des x), de la forme $h_1(x, z) = h_1(x)$, l'équation d'écoulement dans un milieu factorisé s'écrit :

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad}(h_1)) = k_2(z) \frac{d}{dx} \left(k_1(x) \frac{dh_1}{dx}(x) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(k_1(x) \frac{dh_1}{dx}(x) \right) = 0$$

Cette équation se résout par $h_1(x) = A \int_{x_0}^x \frac{du}{k_1(u)}$. Par symétrie des variables x et z , il en est de même d'un écoulement vertical de la forme $h_2(x, z) = h_2(z)$. ■

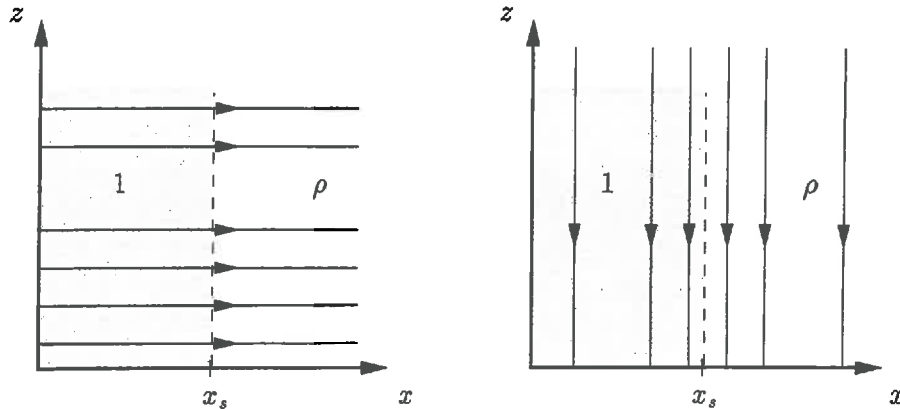


FIG. 2.2 - Exemple du domino à 2 composantes. Les écoulements sont représentés par des lignes de courant. A gauche, écoulement horizontal : $h_1(x, z) = h_1(x)$. A droite, écoulement vertical : $h_2(x, z) = h_2(z)$.

L'exemple du domino (voir figure 2.2) est construit en prenant $k(x, z) = 1$ si x est inférieur à x_s , $k(x, z) = \rho$ sinon. Les solutions analytiques sont alors de la forme :

$$h_1(x) = \begin{cases} h_1 + \rho \alpha (x - x_s) & \text{si } x < x_s \\ h_1 + \alpha (x - x_s) & \text{si } x > x_s \end{cases} \quad h_2(z) = h_2 + \beta z$$

Dans un exemple de type factorisé, il n'est possible de calculer analytiquement que deux types d'écoulement, dans le sens horizontal et dans le sens vertical, qui font donc un angle de 90 degrés entre eux. L'exemple du disque fournit des écoulements qui font entre eux un angle choisi a priori.

2.1.6 Exemple du disque

L'exemple du disque (voir figure 2.3) est construit à partir d'un milieu séparé en 2 composantes : un disque de perméabilité k_i plongé dans une matrice de perméabilité k_e .

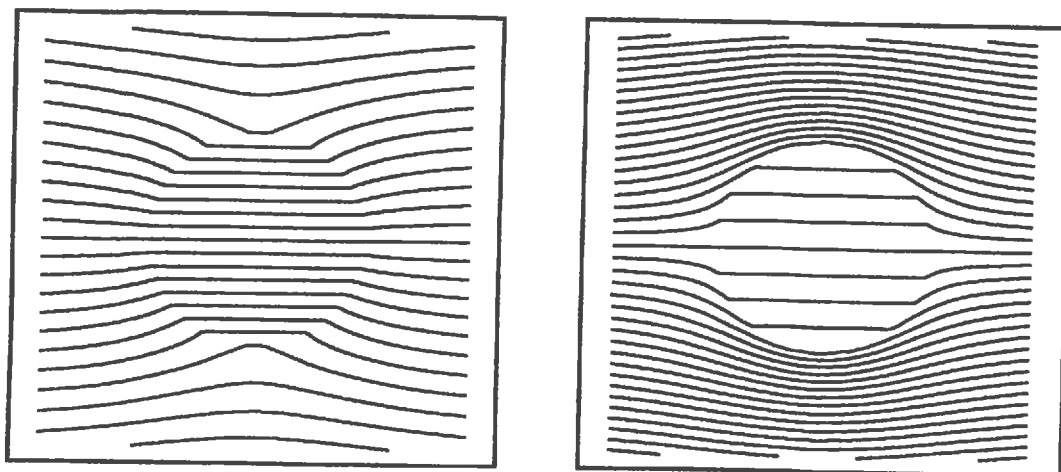


FIG. 2.3 - Exemple du disque. Les écoulements sont représentés par des lignes de courant. A gauche, le rapport des perméabilités $\rho = k_i/k_e=4$. A droite, $\rho=0.25$.

Proposition 2.2 Soit un milieu constitué d'un disque de centre 0 , de rayon R et de perméabilité k_i , plongé dans une matrice de perméabilité k_e . Le champ de charge, donné par

$$h(x, z) = \begin{cases} (\alpha x + \beta z) \frac{2k_i}{k_e + k_i} & \text{à l'intérieur du disque} \\ (\alpha x + \beta z) \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + z^2} \frac{k_e - k_i}{k_e + k_i}\right) & \text{à l'extérieur du disque} \end{cases}$$

est compatible avec ce milieu. Il possède un gradient macroscopique de composantes α et β .

Démonstration Pour un milieu de perméabilité constante k_0 , à l'intérieur ou à l'extérieur du disque, l'équation d'écoulement devient :

$$\operatorname{div}(k_0 \operatorname{grad}(h(x, t))) = k_0 \Delta h = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta h = 0$$

la fonction proposée vérifie cette équation à l'intérieur et à l'extérieur du disque. Elle est continue sur la circonférence. Le flux surfacique $k \operatorname{grad}(h) \cdot n$ est également continu sur la circonférence. Le champ proposé est bien compatible avec le milieu.

Lorsque $(x^2 + z^2)$ tend vers l'infini, les composantes du gradient tendent vers α et β . ■

Les paramètres de cet exemple sont le centre et le rayon du disque, le rapport de perméabilités $\rho = \frac{k_i}{k_e}$ et les composantes α et β du gradient macroscopique.

2.1.7 Représentation graphique des résultats

Dans les chapitres suivants, la méthode proposée est illustrée par un certain nombre d'applications numériques, qui pour la plupart, admettent un même système de représentation graphique. Ce système est le suivant :

- Une figure d'écoulement, comme la figure 2.4, est un maillage construit sur les lignes de courant et sur les lignes équipotentielles du potentiel de charge hydraulique. Le sens

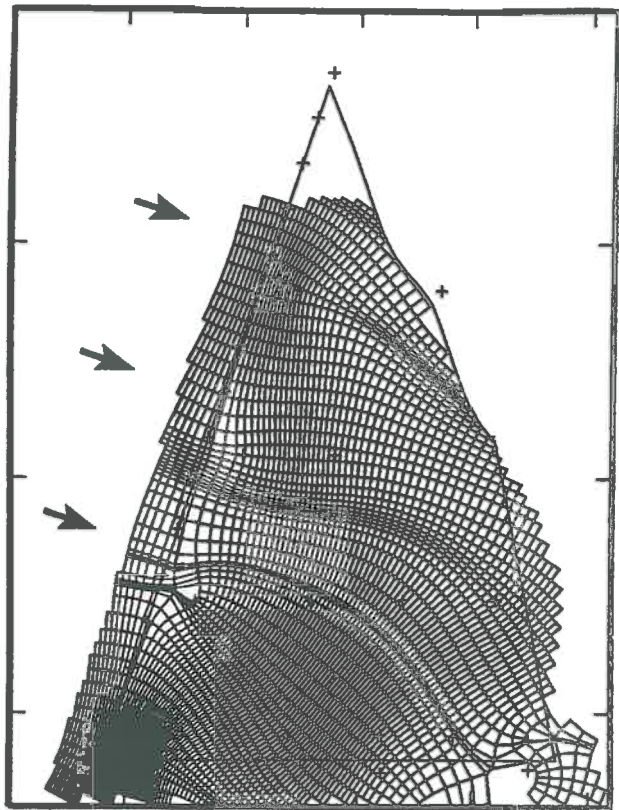


FIG. 2.4 - Maillage d'un écoulement : le sens de l'écoulement est indiqué par des flèches, les lignes de courant (resp. équipotentiellles) sont parallèles (resp. orthogonales) à ces directions.

de l'écoulement est indiqué par des flèches, les lignes de courant (resp. équipotentiellles) sont parallèles (resp. orthogonales) à ces directions. Les limites du domaine saturé dans le noyau sont indiquées par des lignes : les surfaces amont et aval, la surface de base et la surface libre. La forme de cette dernière varie avec le champ de charge de chaque écoulement.

- Le logarithme des perméabilités est estimé sur les cellules de la grille donnée par la figure 2.5, dont la forme est trapézoïdale pour modéliser le noyau d'un barrage. Sur la figure, la grille comprend 30×45 cellules, mais dans les applications, ce nombre varie.
- Les champs de perméabilité calculés par inversion sont représentés par les lignes d'isovaleur de leur logarithme. Ils peuvent être représentés dans le système d'axes du barrage. Pour mieux voir les détails, la grille peut être redressée sous forme d'une grille rectangulaire. La figure 2.6 montre les deux représentations.

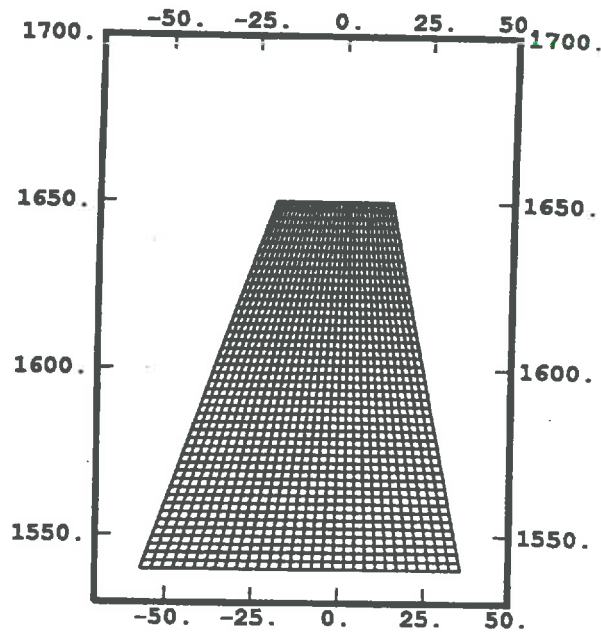


FIG. 2.5 - Grille trapézoïdale modélisant la forme du noyau.

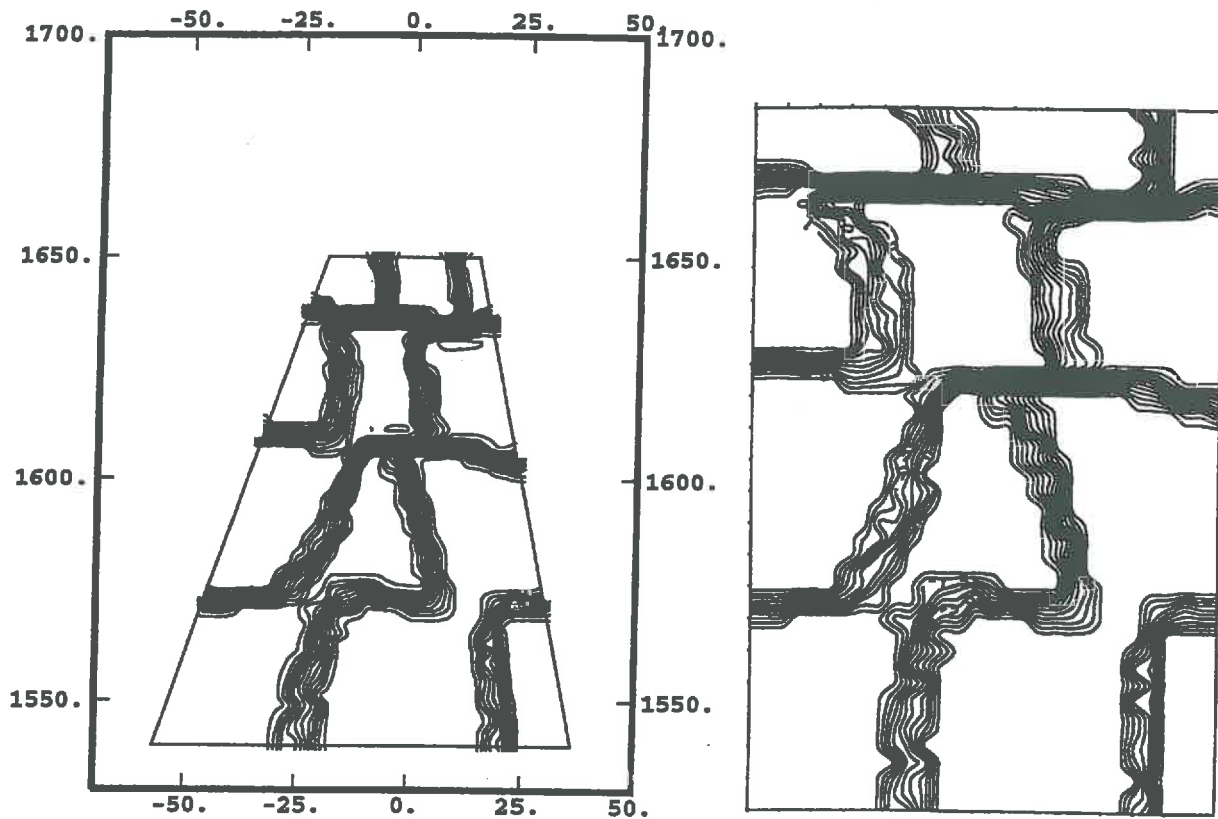


FIG. 2.6 - A gauche, champ de perméabilité représenté dans le système d'axes du barrage. A droite, le même champ de perméabilité est représenté sur une grille redressée. Dans les deux cas, le champ est représenté par les lignes d'isovaleur de ses logarithmes.

Chapitre 3

Interpolation de la charge par krigeage

Résumé du chapitre

Ce chapitre montre comment interpoler les mesures de charge hydraulique. Il aborde le difficile problème de l'instabilité du problème inverse.

- La section 3.1 montre que, pour garantir la stabilité du calcul inverse, l'interpolation de la charge doit être régularisée. Cette régularisation est comparée à un changement d'échelle, qui transforme les perméabilités locales en perméabilités équivalentes.
- La section 3.2 montre comment réaliser par krigeage une interpolation régularisée de la charge.
- La section 3.3 propose d'utiliser le modèle spline plaque mince pour l'interpolation de la charge.

Le calcul inverse du champ de perméabilité dépend du champ de charge complet, et surtout de ses dérivées. Or, dans la pratique, la charge n'est mesurée qu'en un nombre fini de points. Il faut donc interpoler le champ de charge $h(\mathbf{x}, t)$ sur tout le domaine, puis calculer ses dérivées.

Cette interpolation n'est pas propre à la méthode proposée ici : les méthodes de résolution du problème inverse, qu'elles soient directes ou indirectes, doivent toutes réaliser cette interpolation. Elles procèdent par des splines ou des polynômes, de manière implicite pour les méthodes qui utilisent les éléments finis ou les différences finies, ou de manière explicite pour les méthodes qui nécessitent le suivi des lignes de courant.

Cette interpolation est une phase cruciale de la résolution du problème inverse. Elle est en effet confrontée à la difficulté majeure du problème inverse : son instabilité.

3.1 Approche régulatrice et perméabilité équivalente

3.1.1 Conséquences numériques de l'instabilité

L'instabilité liée à la résolution du problème inverse est facile à constater empiriquement : dans le calcul direct du champ de charge $h(\mathbf{x})$ à partir d'un champ de perméabilité k et de conditions aux limites, une variation appréciable dk du champ de perméabilité ne produit qu'une faible variation dh du champ de charge. Inversement, par calcul inverse, une faible variation dh du champ de charge peut être imputable à de grandes variations du champ de perméabilité.

Dans de nombreuses méthodes de résolution décrites dans la section bibliographique 1.2, la paramétrisation (ou discrétisation) du champ de perméabilité doit tenir compte de cette instabilité.

Dans ces méthodes en effet, le champ de perméabilité est modélisé pour ne dépendre que d'un nombre fini de paramètres, qui doivent être estimés par le calcul inverse. Cette paramétrisation consiste généralement à diviser le champ de perméabilité en plusieurs zones de perméabilité constante. Les paramètres correspondent alors aux valeurs constantes de perméabilité. La paramétrisation peut aussi prendre des formes différentes, les paramètres peuvent être les valeurs de quelques points sur lesquels s'appuie une méthode d'interpolation.

La stabilité ou l'instabilité d'un problème est directement reliée à la paramétrisation. Pour un problème stable, lorsque la discrétisation s'affine, c'est-à-dire lorsque la paramétrisation augmente, la qualité de la solution trouvée s'améliore et converge vers la solution théorique. C'est le cas par exemple du calcul direct d'un champ de charge par des méthodes d'éléments finis ou de différences finies.

Au contraire, pour un problème instable comme le problème inverse, la qualité de l'estimation des paramètres se détériore lorsque la paramétrisation augmente. Un certain nombre d'articles montrent en effet que le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de données disponibles. Si le nombre de paramètres est trop grand, la solution diverge. Diverses méthodes évoquées dans la section bibliographique 1.2 ont été employées pour déterminer d'une part la forme optimale de la paramétrisation et d'autre part le nombre de paramètres admissibles.

3.1.2 Régularisation

Pour remédier à l'instabilité du problème inverse, d'autres méthodes que celles qui limitent le degré de paramétrisation ont été proposées. Elles reposent sur le principe de **régularisation**

de Tikhonov [44], dont voici une brève description.

Dans un problème instable, une imprécision de mesure ou une erreur de calcul peut engendrer de grandes perturbations sur les résultats du calcul. Pour éviter cela, la méthode de régularisation d'une part tient compte d'une erreur de mesure sur les données, et d'autre part exige du résultat de calcul une certaine régularité. Ainsi, lors du calcul d'un champ de perméabilité k , les valeurs de charge h_m sont supposées mesurées avec une certaine précision δ . Le champ de perméabilité k estimé ne devra pas être tel que le champ de charge résultant h_k coïncide avec les mesures de charge : $h_k = h_m$, mais tel que le champ de charge résultant soit proche des mesures de charge avec la précision δ : $|h_k - h_m| \leq \delta$. En contrepartie, la solution devra être la plus régulière possible.

Les méthodes qui limitent le nombre de paramètres pour assurer la stabilité du calcul agissent déjà dans ce sens puisque le champ de perméabilité modélisé par un petit nombre de paramètres est régulier. Mais le champ résultant n'est pas égal aux mesures : $h_k \neq h_m$. Les méthodes de régularisation sont plus générales, plus souples et permettent d'intégrer une information a priori. C'est pourquoi elles sont fréquemment utilisées.

Elles se présentent sous la forme de la recherche d'un champ de perméabilité k qui minimise un critère $J_\lambda(k)$, sous la forme :

$$J_\lambda(k) = J_1(k) + \lambda J_2(k)$$

$J_1(k)$ est un critère qui exprime la différence entre les mesures de charge h_m et les valeurs h_k du champ de charge h_k , associé aux perméabilités k . $J_2(k)$ est un critère de **régularité** ou **terme de pénalité**, qui pénalise les solutions trop irrégulières. Le paramètre λ est un poids qui fixe le compromis entre une bonne restitution des mesures de charge et la régularité de la solution. Il dépend du choix des critères J_1 et J_2 et de la précision des mesures.

Tout l'art des méthodes de régularisation consiste à bien choisir le terme de pénalité $J_2(k)$. C'est à travers J_2 qu'une information a priori peut être introduite. En général, dans les applications, J_2 pénalise l'écart entre le champ de perméabilité k obtenu et un champ de perméabilité k_0 régulier, donné a priori. De plus, il est possible d'introduire dans J_2 une corrélation spatiale des perméabilités, sous forme du choix d'une norme.

3.1.3 Pénalité sur la perméabilité

Le terme de pénalité assure la régularité de la solution du problème inverse. Mais sur quoi cette régularité porte-t-elle ? Il paraît naturel qu'elle porte sur le résultat final du problème inverse, c'est-à-dire sur le champ de perméabilité.

C'est un point de vue adopté dans de nombreux articles. En fait, dans ces articles, la pénalité ne porte pas uniquement sur la perméabilité car, soit les conditions aux limites sur la charge sont supposées connues, soit elles sont inconnues et elles participent au terme de pénalité. Dans tous les cas, les conditions aux limites sur la charge équivalent à une régularisation du champ de charge. En effet, d'après les équations d'écoulement, les valeurs de charge minimale et maximale sont situées en bordure du domaine. La charge est ainsi plus variable aux limites qu'à l'intérieur du domaine.

La proposition 3.2 à venir montre que le terme de pénalité ne doit pas porter uniquement sur la perméabilité, mais aussi sur la charge ; si le terme de pénalité porte uniquement sur la perméabilité, le calcul inverse risque de donner des valeurs de perméabilité sans rapport avec les mesures de charge lorsque le nombre de paramètres est trop élevé.

Cette proposition s'appuie sur la proposition 3.1 suivante, dont le caractère paradoxal sera commenté au paragraphe 3.1.4.

Proposition 3.1 *Pour un champ de perméabilité k_0 donné a priori, quelles que soient les mesures de charge h_m en nombre fini, il existe un champ de charge h_{k_0} , compatible avec le champ de perméabilité k_0 , et dont les valeurs aux points de mesure coïncident avec les mesures h_m .*

Démonstration La démonstration est facile pour un champ de perméabilité constant k_0 . Dans ce cas, tout champ de charge h_{k_0} , compatible avec le champ de perméabilité constant k_0 , vérifie l'équation de diffusion (1.2):

$$\operatorname{div}(k_0 \operatorname{grad}(h_{k_0})) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_0 \operatorname{div}(\operatorname{grad}(h_{k_0})) = k_0 \Delta h_{k_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h_{k_0} = 0$$

Les fonctions compatibles avec le champ de perméabilité constant sont donc les fonctions harmoniques. Comme il existe une base de polynômes harmoniques, dont les valeurs en un nombre fini de points sont indépendantes, il existe un polynôme dont les valeurs aux points de mesures sont égales aux mesures de charge h_m et qui vérifie l'équation d'écoulement.

La démonstration dans le cas général est beaucoup plus difficile, mais le principe est le même: les champs de charge compatibles avec le champ k_0 forment un espace vectoriel de dimension infinie (qui correspond à l'ensemble des conditions aux limites sur la charge), alors que les valeurs prises par la charge en un nombre fini de points forment un espace vectoriel de dimension finie, donc infiniment moins riche. ■

Proposition 3.2 *Si le terme de pénalité $J_2(k)$ ne pénalise que l'écart entre la perméabilité obtenue k et une perméabilité régulière k_0 , donnée a priori, le résultat du calcul inverse k tend vers la perméabilité k_0 lorsque le nombre de paramètres augmente.*

Démonstration D'après la proposition 3.1, il existe un champ de charge h_{k_0} qui passe par les points de mesure, donc le critère $J_1(k_0)$ est minimal, puisqu'il mesure l'écart entre les mesures h_m et le champ résultant h_{k_0} . Le critère $J_2(k)$ est minimal pour k_0 puisqu'il mesure la différence entre le champ k et k_0 . Ainsi, le champ de perméabilité k_0 minimise le critère global $J_\lambda(k)$ pour toute valeur du paramètre λ . Le champ de perméabilité k_0 donné a priori est donc solution de la minimisation.

Ceci n'est valable que pour le problème continu. Le problème numérique est discrétisé avec un nombre fini de paramètres. Comme le champ de charge h_{k_0} compatible avec k_0 risque d'être fort irrégulier, il faut une discrétisation fine, donc un grand nombre de paramètres, pour le reproduire. A mesure que le nombre de paramètres augmente, l'approximation du champ de charge h_{k_0} s'améliore et la solution du calcul inverse approche du champ de perméabilité k_0 donné a priori. ■

3.1.4 Régularité nécessaire de la charge

La proposition 3.1 est paradoxale. Elle montre en effet que pour n'importe quel champ de perméabilité k_0 il existe mathématiquement un champ de charge h_{k_0} dont les valeurs aux points de mesure coïncident avec les mesures h_m . Ce résultat semble annoncer que le champ

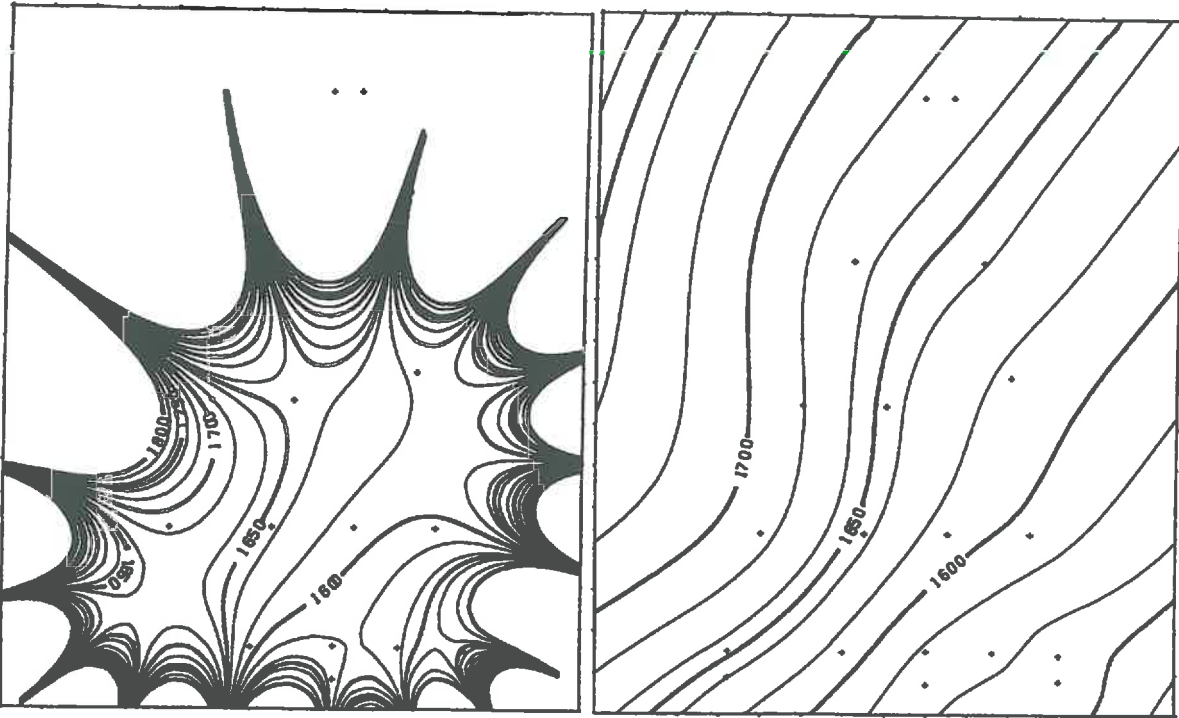


FIG. 3.1 - A gauche, interpolation des mesures de charge par une fonction spline harmonique ; c'est un écoulement compatible avec un champ de perméabilité constant, mais qui est très irrégulier. A droite, interpolation par un modèle de krigeage usuel.

de perméabilité k n'est pas relié aux mesures de charge, car celles-ci sont prises en un nombre fini de points. Ceci signifierait que le calcul inverse des perméabilités à partir des mesures de charge est impossible, ce qui est bien-sûr absurde. Cela soulève toutefois un problème qui fait intervenir la notion de régularisation.

La figure 3.1 illustre le caractère absurde de la proposition 3.1. Des mesures de charge hydraulique sont interpolées par un champ de charge h_{k_0} compatible avec un champ de perméabilité k_0 constant. La fonction interpolatrice h_{k_0} a été construite pour être la plus régulière possible, c'est une fonction spline harmonique. Elle est pourtant très irrégulière.

En fait, le champ de charge h_{k_0} de la proposition 3.1 est construit comme un contre-exemple et ne répond qu'à des contraintes mathématiques. Il doit vérifier deux conditions a priori physiquement incompatibles : être égal aux données mesurées h_m aux points de mesure et vérifier l'équation de diffusion pour un champ de perméabilité quelconque k_0 . Il existe certes mathématiquement, mais les conditions imposées sont trop antagonistes pour qu'il soit régulier comme devrait l'être un champ de charge.

La condition de régularité est une contrainte physique supplémentaire que doit vérifier le champ de charge. Or il est impossible à un champ de charge, qui passe par les mesures h_m , de vérifier l'équation de diffusivité (1.2) pour un champ de perméabilité k_0 quelconque, tout en restant régulier. C'est donc la régularité du champ de charge qui relie le champ de perméabilité aux mesures de charge, donc qui permet le calcul inverse.

3.1.5 Pénalité sur la charge

Dans la résolution numérique du problème inverse, le champ de perméabilité est modélisé à partir d'un nombre fini de paramètres. La modélisation s'affine lorsque ce nombre augmente. Mais le problème inverse est instable. Lorsque le nombre de paramètres augmente, le résultat du calcul inverse devient irrégulier en absence de régularisation ; il tend vers un champ de perméabilité indépendant des mesures de charge si la régularisation porte uniquement sur la perméabilité. Un moyen de stabiliser les calculs lorsque le nombre de paramètres augmente, tout en conservant la relation de dépendance entre les perméabilités calculées et les mesures de charge, est d'imposer des conditions de régularité sur le champ de charge.

La résolution analytique du problème inverse (voir chapitre 2) montre que, dans le calcul des perméabilités, le champ de charge n'intervient que par les valeurs de son gradient. C'est par ce calcul de gradient que le problème inverse est instable car toute dérivation est réputée être un problème instable, comme le montre l'exemple classique suivant :

Exemple Soit f une fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Les fonctions définies par $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2x)$ admettent pour dérivée $g'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2x)$. Elles approchent de f lorsque n tend vers l'infini car $\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - g_n(x)| = \frac{1}{n}$ mais leur dérivée s'éloigne de f' car $\max_{x \in [0, 2\pi]} |f'(x) - g'_n(x)| = n$. ■

Pour dériver numériquement une fonction f , connue par ses valeurs f_i en un nombre fini de points x_i , il est classique de recourir aux méthodes de régularisation. Pour cela, les valeurs f_i de la fonction f sont supposées connues avec une certaine précision : $f_i = f(x_i) + \varepsilon_i$. Les valeurs f_i de la fonction f sont interpolées par une fonction dérivable f^* en tenant compte des erreurs de mesure ε_i . La fonction f^* doit minimiser un critère $J_\lambda(\tilde{f})$, portant sur une classe de fonctions dérivables \tilde{f} , et qui s'écrit :

$$J_\lambda(\tilde{f}) = J_1(\tilde{f}) + \lambda J_2(\tilde{f})$$

$J_1(\tilde{f})$ est un critère qui mesure la différence aux points x_i entre les mesures f_i et les valeurs $\tilde{f}(x_i)$ et qui peut s'écrire : $J_1(\tilde{f}) = \sum_i |\tilde{f}(x_i) - f_i|^2$. Le terme de pénalité $J_2(\tilde{f})$ pénalise les solutions trop irrégulières. Pour un problème de dérivation, il s'écrit généralement au moyen d'une norme quadratique sur \tilde{f} . La fonction d'interpolation f^* est alors une spline de lissage (voir Laurent [24]). Les dérivées de la fonction f^* fournissent une estimation de la dérivée de f .

Le krigeage, présenté dans la section 3.2 suivante, permet d'obtenir une spline de lissage pour réaliser ce calcul de gradient.

3.1.6 Perméabilité équivalente

La régularisation de la charge, qui est introduite pour des raisons numériques (remédier aux instabilités de calcul du problème inverse), trouve une interprétation physique avec le concept de perméabilité équivalente. Il faut auparavant rappeler les notions d'émergence de la loi de Darcy et de composition des perméabilités, qui sont étudiées dans Matheron [27].

A l'échelle microscopique, les écoulements en milieu poreux sont régis par les lois classiques des écoulements de fluides, les lois de Navier-Stokes. Comme le milieu poreux est d'une

grande complexité, ils sont impossibles à décrire. A l'échelle macroscopique, la loi de Darcy (1.1), constatée expérimentalement, permet de décrire l'écoulement, en résumant la complexité microscopique du milieu poreux par un paramètre, la **perméabilité**. La constatation expérimentale de la loi de Darcy, qui résume à l'échelle macroscopique les lois de Navier-Stokes, est appelée **émergence** de la loi de Darcy.

La perméabilité est une propriété relative à un volume de terrain suffisamment grand pour permettre l'émergence de la loi de Darcy, mais en même temps suffisamment petit pour que ce soit une propriété locale par rapport à l'échelle de travail (de Marsily [26]). La perméabilité est donc définie *par* l'émergence de la loi de Darcy *pour* une certaine échelle. Mais la loi de Darcy peut émerger à plusieurs échelles différentes. Il existe ainsi plusieurs définitions de la perméabilité possibles, qui dépendent de l'échelle de travail.

Les variations d'une perméabilité définie à petite échelle peuvent être résumées globalement par une perméabilité définie à une plus grande échelle. La loi de Darcy émerge à grande échelle à partir de la loi de Darcy à petite échelle, de la même façon que la loi de Darcy émerge à partir des lois de Navier-Stokes. Ce passage des perméabilités d'une petite échelle à une grande échelle est la **composition des perméabilités**. La perméabilité à grande échelle, qui résume les variations de la perméabilité à petite échelle, s'appelle la **perméabilité équivalente**.

Le changement d'échelles consiste à passer d'un point de vue à un autre. Du point de vue local, les variations locales de la charge sont prises en considération. Elles révèlent les variations de la perméabilité à petite échelle, qui est irrégulière. Du point de vue global, seules comptent les variations à grande échelle de la charge. Les perméabilités correspondantes, c'est-à-dire les perméabilités équivalentes, sont régulières. Ainsi le changement d'échelles correspond-il à une régularisation qui lisse les variations locales de la charge.

De la même manière, une interpolation de la charge, à partir de mesures ponctuelles, régularise la charge en supprimant ses variations locales. Elle réalise ainsi un changement d'échelles d'un niveau local à un niveau global. A partir de la charge régularisée par interpolation, le calcul inverse des perméabilités fournit donc un champ de perméabilités équivalentes, plus régulier que le champ des perméabilités locales.

Remarque En général une perméabilité est un tenseur. Si le milieu peut être considéré comme localement isotrope, elle peut alors être représentée par un scalaire. Mais dans la composition des perméabilités, les perméabilités équivalentes obtenues à partir de perméabilités scalaires peuvent fort bien ne pas rester scalaires, et vice versa. La méthode de résolution du problème inverse proposée ici repose sur l'hypothèse de perméabilités scalaires. Comme elle interpole la charge, ce ne sont pas les perméabilités ponctuelles qui doivent être supposées scalaires, mais les perméabilités équivalentes.

3.1.7 Régularisation de la charge et support des perméabilités équivalentes

Les notions de "petite échelle" et "grande échelle", employées jusqu'à présent pour décrire le changement d'échelles, sont très vagues. Il faut les préciser maintenant.

Dans la régularisation de la charge, les oscillations sont supprimées sur les intervalles dont la taille est inférieure à une **taille de régularisation**, caractéristique de l'échelle de régularisation. Cette taille de régularisation de la charge, qui accompagne un changement d'échelles, peut être reliée d'une part aux volumes sur lesquels sont calculées les perméabilités équivalentes, et d'autre part à une interpolation de la charge.

Pour étudier la composition des perméabilités, en effet, un volume de milieu poreux, ou **support**, est souvent isolé par la pensée, et son champ de perméabilité est résumé par une perméabilité équivalente. Les variations locales de la charge sont ainsi négligées dans le support. La taille de cette régularisation de la charge correspond donc à la taille du support.

D'autre part, la régularisation liée à l'interpolation de la charge est telle qu'entre les points de mesure, il n'y a pas d'oscillation. La taille de régularisation correspond donc à la distance entre les points de mesure. Ainsi, le champ de charge obtenu par calcul inverse, après une interpolation, sera un champ de perméabilité équivalente dont la taille de support est du même ordre de grandeur que la distance entre les points de mesure.

3.2 Régularisation par krigeage

Le krigeage est le moyen utilisé ici pour réaliser une interpolation régularisée du champ de charge. Ses propriétés élémentaires, qui se trouvent dans Matheron [28] ou Chauvet [6], sont rappelées maintenant.

3.2.1 Fonctions aléatoires

Soit $h(\mathbf{x})$ une fonction dont les valeurs h_α sont connues en N points de mesure \mathbf{x}_α , repérés par l'indice $\alpha = 1 \dots N$. Le krigeage permet de calculer l'interpolation $h^*(\mathbf{x})$ de la fonction au point \mathbf{x} sous la forme d'une combinaison linéaire de ses valeurs :

$$h^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda^\alpha(\mathbf{x}) h_\alpha \quad (3.1)$$

Pour réaliser ce calcul, la géostatistique émet plusieurs hypothèses.

1. La fonction $h(\mathbf{x})$ est supposée être la **réalisation** d'une **fonction aléatoire** $H(\mathbf{x})$ d'espérance $\mathbf{E}[H(\mathbf{x})] = m(\mathbf{x})$ et de covariance $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{Cov}[H(\mathbf{x}), H(\mathbf{y})]$.
2. Pour limiter le choix des fonctions $m(\mathbf{x})$ et $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la fonction aléatoire est supposée **stationnaire** : l'espérance est constante, $m(\mathbf{x}) = m$ et la fonction de covariance peut s'écrire $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Dans de nombreux cas, la fonction $h(\mathbf{x})$ présente une dérive et ne peut pas être modélisée par une fonction stationnaire. L'hypothèse stationnaire est alors remplacée par l'hypothèse **intrinsèque** (Matheron [30]), qui s'appuie sur une base finie de polynômes.

Les polynômes du plan \mathbb{R}^2 de degré inférieur ou égal à k sont combinaisons linéaires d'une base de L fonctions polynômes $f^l(\mathbf{x})_{l=1 \dots L}$ (Les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, par exemple, sont combinaisons linéaires des 3 polynômes : $1, x, z$). Une **Combinaison linéaire autorisée d'ordre k** est un ensemble de poids λ^α , attribués à des points \mathbf{x}_α , et qui vérifient : $\sum_{\alpha=1}^N \lambda^\alpha f^l(\mathbf{x}_\alpha) = 0$ pour toute fonction f^l de la base. Elle **filtre** les polynôme jusqu'au degré k .

Une **Fonction aléatoire intrinsèque d'ordre k (FAIk)** $H(\mathbf{x})$ est une fonction aléatoire, caractérisée par une fonction $K(\mathbf{x})$, appelée **covariance généralisée**, et qui vérifie :

$$\mathbf{E}\left[\sum_{\alpha} \lambda^\alpha H(\mathbf{x}_\alpha)\right] = 0 \quad \mathbf{E}\left[\left\{\sum_{\alpha} \lambda^\alpha H(\mathbf{x}_\alpha)\right\}^2\right] = \sum_{\alpha, \beta} \lambda^\alpha K(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) \lambda^\beta$$

pour toute combinaison linéaire autorisée d'ordre k .

Si $H(\mathbf{x})$ est une FAIk et si les A_i sont des variables aléatoires alors $H(\mathbf{x}) + \sum_i A_i f^i(\mathbf{x})$ est une autre FAIk de même fonction de covariance généralisée. Cela signifie que les FAIk sont indéterminées à un polynôme près. Ce polynôme appelé **dérive** permet à la FAIk de n'être pas stationnaire et représente une tendance à grande échelle.

Le **krigeage** permet d'estimer la charge $h(\mathbf{x})$ à partir des N mesures h_α prises aux points \mathbf{x}_α . Pour cela, la variable aléatoire $H(\mathbf{x})$ est estimée par une combinaison linéaire des N variables aléatoires $H_\alpha = H(\mathbf{x}_\alpha)$:

$$H^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda^\alpha(\mathbf{x}) H_\alpha$$

telle que l'erreur $H(\mathbf{x}) - H^*(\mathbf{x})$ soit une combinaison linéaire autorisée.

Les poids de krigeage $\lambda^\alpha(\mathbf{x})$ sont calculés pour minimiser la variance de l'erreur de krigeage $\mathbf{E}\{[H(\mathbf{x}) - H^*(\mathbf{x})]^2\}$. Ils sont obtenus en résolvant le **système de krigeage** suivant, écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & f_\alpha^s \\ f_\beta^l & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda^\beta(\mathbf{x}) \\ \mu_s(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \\ f^l(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_{\alpha\beta} = K(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) \\ f_\alpha^l = f^l(\mathbf{x}_\alpha) \end{cases}$$

3.2.2 Dérivation par krigeage

La thèse de A. Dong [11] présente les liens entre dérivation et krigeage. Pour dériver la charge h , la fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$ est supposée dérivable. Si $H(\mathbf{x})$ est une FAIk, les composantes de son gradient, définies par :

$$G_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x} H(\mathbf{x}) \quad G_z(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial z} H(\mathbf{x})$$

sont des FAI($k-1$), caractérisées par les covariances généralisées :

$$K_{xx}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\mathbf{x}) \quad K_{zz}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} K(\mathbf{x})$$

obtenues par dérivation de la covariance généralisée K de H . Les covariances généralisées croisées K_x et K_z , entre H et respectivement G_x et G_z , sont aussi données par dérivation de K :

$$K_x(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x} K(\mathbf{x}) \quad K_z(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial z} K(\mathbf{x})$$

Ces expressions montrent que, pour pouvoir dériver une FAIk, il faut pouvoir dériver deux fois sa covariance généralisée.

Le **krigeage** permet d'estimer le gradient de charge. Pour cela, les variables aléatoires $G_x(\mathbf{x})$ ou $G_z(\mathbf{x})$ sont estimées par les combinaisons linéaires :

$$G_x^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_x^\alpha(\mathbf{x}) H_\alpha \quad G_z^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_z^\alpha(\mathbf{x}) H_\alpha$$

Les poids de krigeage sont calculés en résolvant les **systèmes de krigeage** suivants, écrits sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & f_\alpha^s \\ f_\beta^l & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_x^\beta(\mathbf{x}) \\ \mu_{x,s}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \\ \frac{\partial}{\partial x} f^l(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & f_\alpha^s \\ f_\beta^l & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_z^\beta(\mathbf{x}) \\ \mu_{z,s}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_z(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \\ \frac{\partial}{\partial z} f^l(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Dans les équations de krigeage, pour kriger la charge ou pour kriger ses dérivées, la matrice de gauche est toujours la même, seul change le second membre en fonction de l'estimateur cherché. Le second membre pour le krigeage des dérivées s'obtient par dérivation du second membre du krigeage de la charge. Par linéarité des expressions, le krigeage de la dérivée est égal à la dérivée du krigeage,

$$\frac{\partial}{\partial x} H^*(\mathbf{x}) = G_x^*(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial}{\partial z} H^*(\mathbf{x}) = G_z^*(\mathbf{x})$$

Le krigeage **commute** avec la dérivation.

3.2.3 Forme duale du krigeage

La fonction d'interpolation $h^*(\mathbf{x})$ qui s'écrit $h^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda^\alpha(\mathbf{x}) h_\alpha$, peut aussi s'écrire sous sa forme **duale** (Matheron[31]):

$$h^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N b^\alpha K(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}) + \sum_{l=1}^L c_l f^l(\mathbf{x})$$

où les coefficients b^α et c_l sont les solutions du **système dual**:

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & f_\alpha^s \\ f_\beta^l & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b^\beta \\ c_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette forme présente plusieurs avantages. D'un point de vue pratique, elle permet de grandes économies de calcul. Il suffit en effet d'inverser une fois le système dual et de calculer les coefficients b^α et c_l . A partir de ces coefficients, les estimations de la charge ou de ses dérivées peuvent être calculées en tout point sans inverser de nouveaux systèmes.

D'un point de vue théorique, la forme duale donne l'interpolateur $h^*(\mathbf{x})$ comme une combinaison linéaire des N fonctions $K(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x})$ et des L fonctions $f^l(\mathbf{x})$. Ses propriétés mathématiques en découlent. Cette forme permet notamment un calcul simple des dérivées de $h^*(\mathbf{x})$.

Pour qu'une fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$ soit dérivable, il faut que sa covariance généralisée $K(\mathbf{x})$ soit deux fois dérivable. En revanche, pour que l'interpolateur $h^*(\mathbf{x})$ soit dérivable, il suffit que les fonctions $K(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x})$, donc que la covariance généralisée K , soient une seule fois dérivables. Ainsi, une fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$ non dérivable peut admettre un interpolateur $h^*(\mathbf{x})$ dérivable. C'est le cas d'une fonction aléatoire admettant la covariance généralisée $|\mathbf{x}|^2 \ln |\mathbf{x}|$, dérivable une seule fois. L'interpolateur correspondant à cette covariance est appelé fonction spline plaque mince.

3.2.4 Régularisation par krigeage

Le paragraphe 3.1.5 a montré que la dérivation à partir de mesures ponctuelles, lorsqu'elle est régularisée au moyen d'une forme quadratique, peut être assimilée à une spline de lissage. Or G. Matheron dans [32] a montré l'équivalence formelle entre les splines et le krigeage. La régularisation peut donc s'exprimer avec le formalisme du krigeage, comme dans l'article de G. Wahba [45] ou la thèse de C. Daly [9].

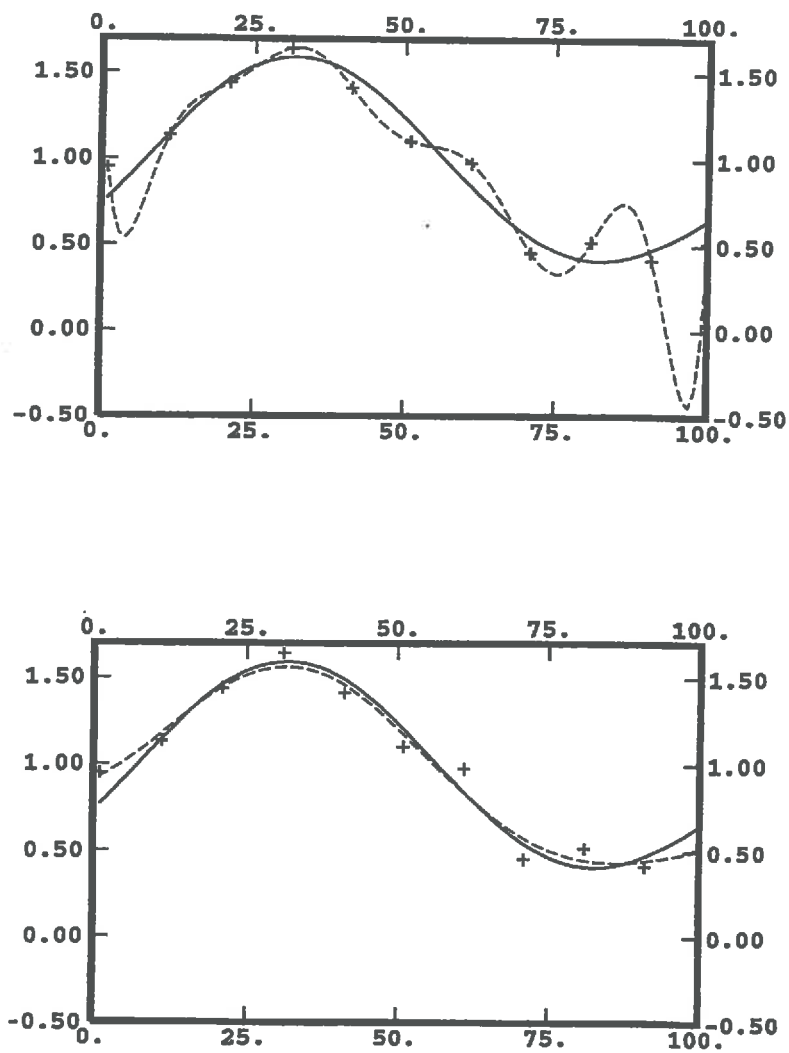


FIG. 3.2 - En haut : le krigeage (pointillé) d'une fonction aléatoire régulière (trait plein), par la covariance correspondante, est irrégulier si les mesures (croix) sont bruitées. En bas : il faut modéliser le bruit pour obtenir un krigeage régulier.

En géostatistique, il est reconnu dangereux de modéliser une variable physique par une fonction aléatoire trop régulière. Les raisons de ce danger sont exposées en annexe B. L'exemple de la figure 3.2 montre une fonction aléatoire régulière de variance 1. Cette fonction est mesurée en 11 points avec une erreur, simulée par un effet de pépite de variance 0.01. Le krigeage avec la seule covariance régulière est très irrégulier, car le modèle est trop régulier pour les données.

Avant de procéder à un krigeage, il est capital de modéliser les irrégularités des données à kriger. Classiquement, pour kriger une variable pour laquelle le degré de régularité n'est pas spécifié a priori, on suppose la fonction aléatoire intrinsèque d'ordre 0, on calcule des **variogrammes**, qu'on modélise en étudiant soigneusement leur comportement à l'origine (voir Matheron [28]). C'est ainsi que dans une étude géostatistique classique, le modèle est adapté aux variables à kriger.

Dans le cas d'une dérivation, le modèle de fonction aléatoire est forcément régulier puisqu'il est dérivable. Le krigeage risque d'être instable si les données sont plus irrégulières que le modèle. Pour le régulariser, la partie irrégulière des données est supposée être une erreur de mesure. Pour chaque mesure, l'erreur est modélisée par une variable aléatoire B_α de moyenne nulle et de variance $\sigma_{B,\alpha}^2$. Cette erreur est supposée indépendante de la charge $H(\mathbf{x})$ et des autres mesures. Pour ne pas multiplier le nombre des paramètres du modèle, et en absence de toute information objective sur l'incertitude de mesure, la variance $\sigma_{B,\alpha}^2$ en tout point de mesure \mathbf{x}_α est supposée la même, σ_B^2 . Dans ce cas, l'erreur de mesure est un **effet de pépite** ou **bruit blanc**.

Chaque mesure est ainsi modélisée par la variable aléatoire $M_\alpha = H_\alpha + B_\alpha$. Le système de krigeage s'en trouve légèrement modifié. La seule modification porte sur la matrice de krigeage. Elle s'écrit désormais :

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} + \sigma_B^2 \delta_{\alpha\beta} & f_\alpha^s \\ f_\beta^l & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'exemple de la figure 3.2 montre combien le krigeage est régularisé par cette opération.

Remarque Pour une constante A , les deux covariances généralisées K et $A K$ produisent le même krigeage ; de même pour les deux covariances $K + \sigma_B^2 \delta$ et $A K + A \sigma_B^2 \delta$, où $\sigma_B^2 \delta$ désigne l'effet de pépite. La valeur de l'effet de pépite n'est donc pas absolue, mais relative au modèle choisi pour modéliser la charge. Si la charge est modélisée arbitrairement, rien ne permet de relier le paramètre effet de pépite σ_B^2 à une erreur de mesure physiquement constatable.

3.2.5 Les deux rôles de l'effet de pépite

L'effet de pépite, qui régularise le krigeage lorsque les modèles sont plus réguliers que les données, modélise une erreur de mesure. Mais il modélise aussi certaines hautes fréquences du champ de charge.

En effet, le modèle pour le krigeage de la charge est choisi de la façon suivante : un certain nombre de modèles théoriques de fonction aléatoire sont comparés aux mesures de charge. Le modèle qui correspond le mieux aux variations spatiales des mesures est choisi. (En pratique, la comparaison utilise des outils structuraux tels que les variogrammes ou les validations croisées).

Mais la distance qui sépare les données est supérieure au pas d'échantillonnage. Il n'est donc pas possible d'accéder aux variations locales du champ de charge, c'est-à-dire aux hautes

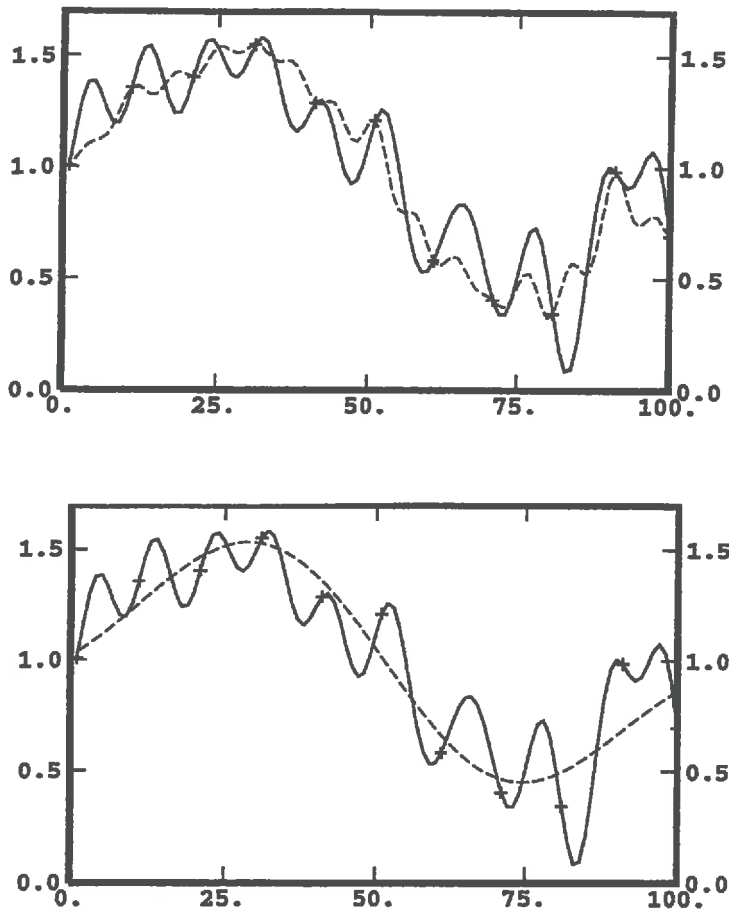


FIG. 3.3 - Réalisation (trait continu) d'une fonction aléatoire composée de basses et hautes fréquences, échantillonnée en 11 points (croix). En haut, krigeage tenant compte des hautes fréquences. En bas, krigeage incorporant les hautes fréquences dans l'effet de pépite.

fréquences du champ réel de charge. (En traitement du signal, ce résultat est connu sous le nom de théorème de Shannon). Le comportement à l'origine du modèle théorique, ne peut pas être ajusté correctement aux données. Certaines hautes fréquences de la charge, supérieures à la fréquence d'échantillonnage, peuvent ainsi être assimilées à des irrégularités et modélisées par un effet de pépite.

L'exemple de la figure 3.3 montre la réalisation d'une fonction aléatoire composée de hautes et de basses fréquences. Elle est échantillonnée sur 11 points. A partir de ces mesures, deux krigeages sont possibles, un krigeage qui tient compte de toutes les fréquences de la fonction, et un krigeage qui fait passer les hautes fréquences de la fonction dans l'effet de pépite. Dans la pratique, compte tenu du pas d'échantillonnage, les hautes fréquences de la fonction aléatoire sont inaccessibles. Le second modèle de krigeage paraîtra plus naturel que le premier, dont les irrégularités à petite échelle semblent alors arbitraires.

L'effet de pépite modélise donc à la fois un bruit de mesure et des hautes fréquences de la charge qui ne peuvent pas être prises en compte par le modèle de krigeage de la charge. Il est bien-sûr impossible de séparer, pour un effet de pépite donné, ces deux contributions de nature différente. Il n'y a donc pas d'espoir de faire correspondre les valeurs du paramètre

effet de pépité avec les valeurs physiques d'une erreur de mesure.

3.3 Modélisation de la charge

Dans un krigeage, les résultats dépendent fortement du modèle choisi. Le choix du modèle est l'étape déterminante du krigeage. Il dépend non seulement de l'adéquation aux données disponibles, mais aussi de la finalité du krigeage. Dans le cas de la méthode de résolution du problème inverse proposée ici, le krigeage n'est qu'une étape intermédiaire. Il sert au calcul de gradient, pour reconstituer les écoulements par suivi des lignes de courant.

L'étude qui suit montre qu'il est impossible d'inférer un modèle pour un krigeage de gradient à partir d'un nombre fini de mesures ponctuelles. Cette inférence impossible est illustrée par l'échec de la validation croisée. Il est ensuite montré que le modèle **spline plaque mince**, bien qu'il ne soit pas toujours adapté aux données, est le plus apte au calcul de gradient pour le suivi des lignes de courant.

3.3.1 Validation croisée

Pour ajuster un modèle de krigeage à des données, la Géostatistique propose, entre autres, le calcul de variogrammes expérimentaux et la validation croisée. Le calcul d'un variogramme expérimental n'est pas possible ici car il n'a de sens que pour des données sans dérive. Or la charge dans un barrage possède une dérive puisqu'elle décroît de l'amont vers l'aval. La validation croisée est le moyen utilisé dans la suite pour ajuster les modèles.

La validation croisée consiste à choisir, parmi une gamme de modèles théoriques, qui dépendent d'un petit nombre de paramètres, le modèle et les paramètres qui minimisent un certain **critère**. Il existe plusieurs critères possibles. Les trois critères proposés ici sont construits de manière similaire.

Chaque mesure M_α est krigée par les autres mesures, ce qui fournit la valeur M_α^* . Le modèle de krigeage fournit une estimation σ_α^2 de la variance de l'erreur $M_\alpha - M_\alpha^*$. Classiquement, deux critères sont proposés,

$$C_1 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (M_\alpha - M_\alpha^*)^2 \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{\sum_{\alpha} \sigma_\alpha^{-2}} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{M_\alpha - M_\alpha^*}{\sigma_\alpha} \right)^2$$

Le critère C_1 mesure simplement l'erreur moyenne du krigeage, alors que le critère C_2 renorme l'erreur de krigeage par l'écart type prévu par le modèle. Enfin, dans [45], G. Wahba propose un troisième critère :

$$C_W = \frac{N}{(\sum_{\alpha} \sigma_\alpha^{-2})^2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{M_\alpha - M_\alpha^*}{\sigma_\alpha} \right)^2$$

Les krigeages sont inchangés si le modèle est multiplié par une constante. Les trois critères respectent cette indétermination : ils sont normés pour filtrer une constante multiplicative. Cette constante, filtrée par ces critères, peut être évaluée par d'autres techniques.

Les modèles proposés pour la validation croisée sont les suivants ; avec a un paramètre

d'échelle et $h_a = \frac{h}{a}$,

$$1: \text{ sphérique intégré } \begin{cases} \frac{Aa^4}{16} \left[\frac{1}{4}h_a^4 - \frac{8}{75}h_a^5 + \frac{8}{1225}h_a^7 \right] & \text{si } h_a \leq 1 \\ \frac{Aa^4}{16} \left[\frac{2}{5}h_a^2 \ln(h_a) + \frac{3}{35} \ln(h_a) + \frac{1}{75}h_a^2 + \frac{669}{4900} \right] & \text{si } h_a \geq 1 \end{cases}$$

2: gaussien $A \exp(-h_a^2)$
 3: puissance Ah^α avec $2 < \alpha < 4$
 4: plaque mince $Ah^2 \ln(h)$

Ces modèles possèdent un autre paramètre, le degré k de la FAI k , c'est-à-dire le degré du polynôme qui modélise la dérive. Comme la charge décroît de l'amont vers l'aval, un polynôme de degré 1 paraît une bonne modélisation de la dérive de la charge. Le choix d'une FAI1 pour modéliser le champ de charge a été confirmé par quelques validations croisées et par la visualisation des champs de charge obtenus par krigeage. Les modèles choisis désormais seront des FAI1.

3.3.2 Comparaison des critères

Les trois critères sont comparés sur un exemple. Deux modèles sont proposés pour kriger des mesures de charge hydraulique : un modèle de spline harmonique et le modèle spline plaque mince. Le modèle spline harmonique a été choisi car il produit des krigeages fort instables, à l'opposé de ce qui est souhaitable pour l'interpolation de la charge. Au contraire, le modèle spline plaque mince donne des krigeages plus réguliers. Les krigeages sont représentés sur la figure 3.4 par des lignes d'isovaleur. Il semble naturel, au vu de cette figure, que le modèle spline plaque mince soit beaucoup mieux adapté au krigeage que le modèle spline harmonique.

Les critères pour ces deux modèles sont donnés au tableau suivant :

modèle de krigeage	C_1	C_2	C_w
spline harmonique	8284	31.7	42.7
spline plaque mince	45	35.8	53.4

Seul le critère C_1 permet de détecter l'instabilité de l'interpolation par la fonction spline harmonique. C'est lui qui sera retenu dans les prochaines validations croisées.

3.3.3 Résultats de validation croisée

Le krigeage sert à reconstituer des lignes de courant à partir des mesures de charge hydraulique. L'efficacité de la validation croisée à proposer des modèles adaptés à ce problème, a été testée sur plusieurs jeux de données.

Les mesures de charge à l'origine des tests proviennent des champs de charge, proposés aux paragraphes 2.1.5 et 2.1.6, et qui sont connus sous forme analytique : l'exemple du domino et l'exemple du disque. La charge est échantillonnée avec plusieurs pas d'échantillonnage, ce qui fournit plusieurs jeux de données. Le modèle qui minimise le critère C_1 est recherché pour chaque jeu de données.

La validation croisée donne des résultats décevants. Les champs de charge obtenus avec les modèles retenus possèdent souvent des lignes de courant irrégulières, et peuvent même

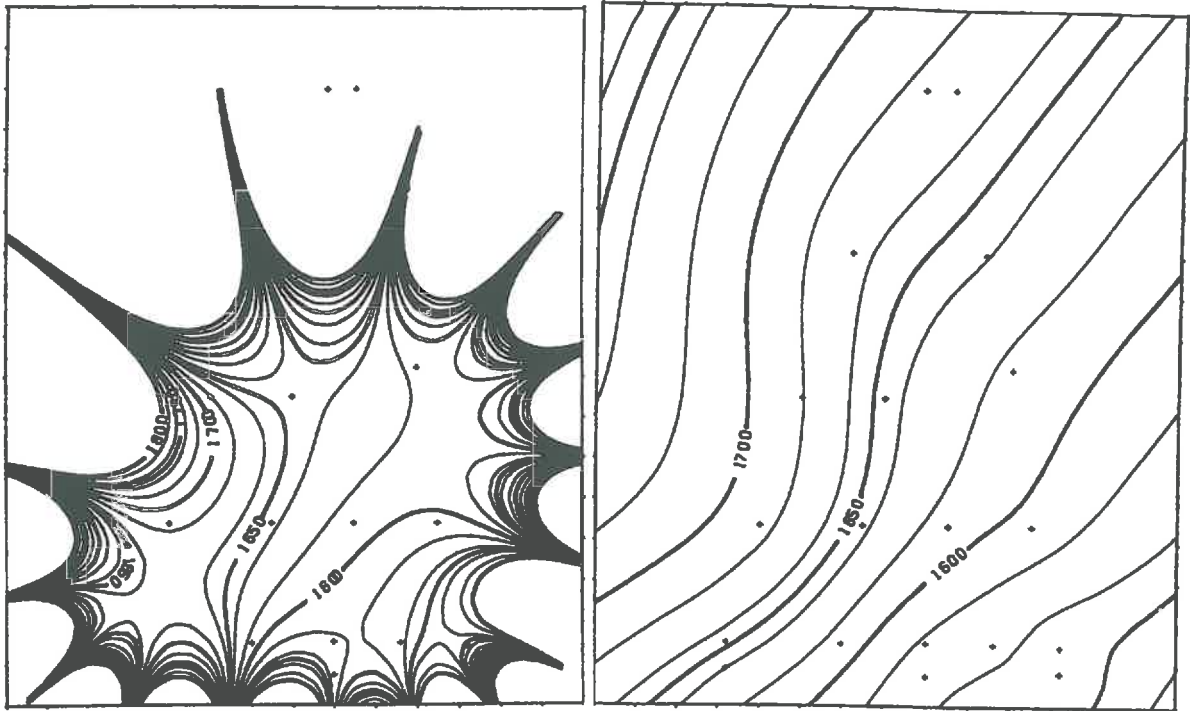


FIG. 3.4 - A gauche, interpolation des mesures de charge par une fonction spline harmonique ; à droite, interpolation par le modèle spline plaque mince.

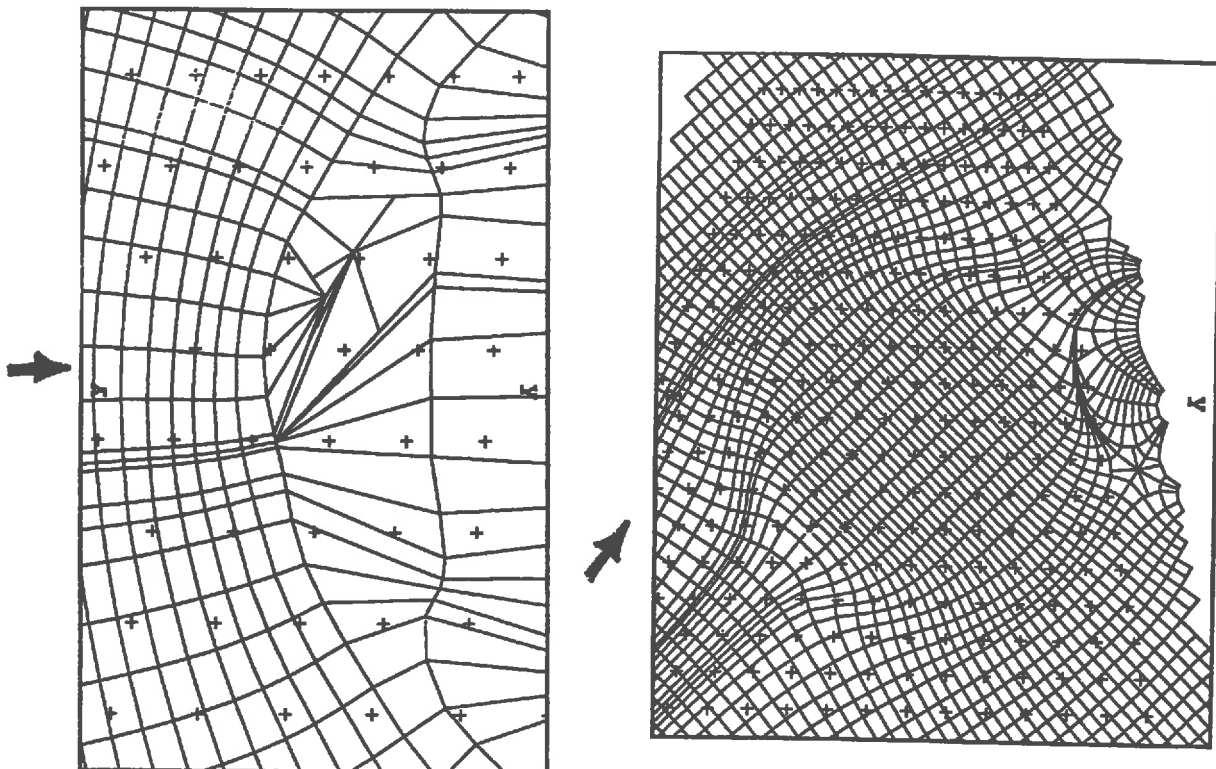


FIG. 3.5 - Deux exemples de champs de charge irréguliers obtenus après krigeage avec le modèle de la validation croisée. A gauche, les extrema sont situés au milieu de la zone d'échantillonnage ; à droite l'irrégularité est située juste à l'extérieur.

présenter des extrema de charge. Un extremum de charge est une singularité, en théorie inexistante, qui, lorsqu'elle existe, complique la structure de l'écoulement. La figure 3.5 montre deux de ces krigeages irréguliers. (Le système de représentation graphique des écoulements est exposé au paragraphe 2.1.7).

Les raisons suivantes peuvent expliquer pourquoi la validation croisée n'est pas adaptée au problème :

- Dans une validation croisée avec un échantillonnage régulier, tous les points sont krigés avec une configuration semblable, car les plus proches voisins sont toujours situés à une même distance, égale au pas d'échantillonnage. Les modèles ne sont testés que sur leur capacité à kriger des points situés à des distances proches du pas d'échantillonnage.
- Le krigeage est utilisé ici pour calculer des gradients, alors que la validation croisée porte sur des valeurs de charge et non pas sur des valeurs de gradient.

La validation croisée est inapte d'ajuster un modèle pour kriger des gradients. En fait, aucune méthode ne permet d'ajuster, sur un nombre fini de mesures, un modèle de krigeage de gradients, car la dérivabilité est une propriété locale, qui concerne les fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage. Cette conclusion rappelle certains résultats du paragraphe 3.1.5, qui montrent que le calcul de gradient est impossible à réaliser à partir de la seule information fournie par un nombre fini de mesures ; un calcul de gradient nécessite des hypothèses supplémentaires de régularité, qui sont invérifiables.

3.3.4 Modèle spline plaque mince

Dans les calculs de validation croisée, le modèle spline plaque mince obtenait très souvent le plus mauvais score. Pourtant les écoulements obtenus par interpolation avec ce modèle possèdent de bonnes propriétés. Les figures 3.6 et 3.7 comparent les écoulements obtenus avec le modèle retenu par la validation croisée et avec le modèle spline plaque mince. Le modèle spline plaque mince donne des écoulements plus réguliers.

Ce résultat n'est pas étonnant car le modèle spline plaque mince est un modèle construit pour donner des interpolations régulières. Un krigeage avec ce modèle correspond, en effet, en première approximation, à la forme que prendrait une plaque élastique obligée de passer par un certain nombre de points. La forme de cette plaque est la plus simple possible pour minimiser l'énergie élastique de déformation.

Le modèle spline plaque mince possède une régularité qui le rend adapté au calcul de gradient. Dans la suite, c'est le modèle qui sera utilisé pour les krigeages.

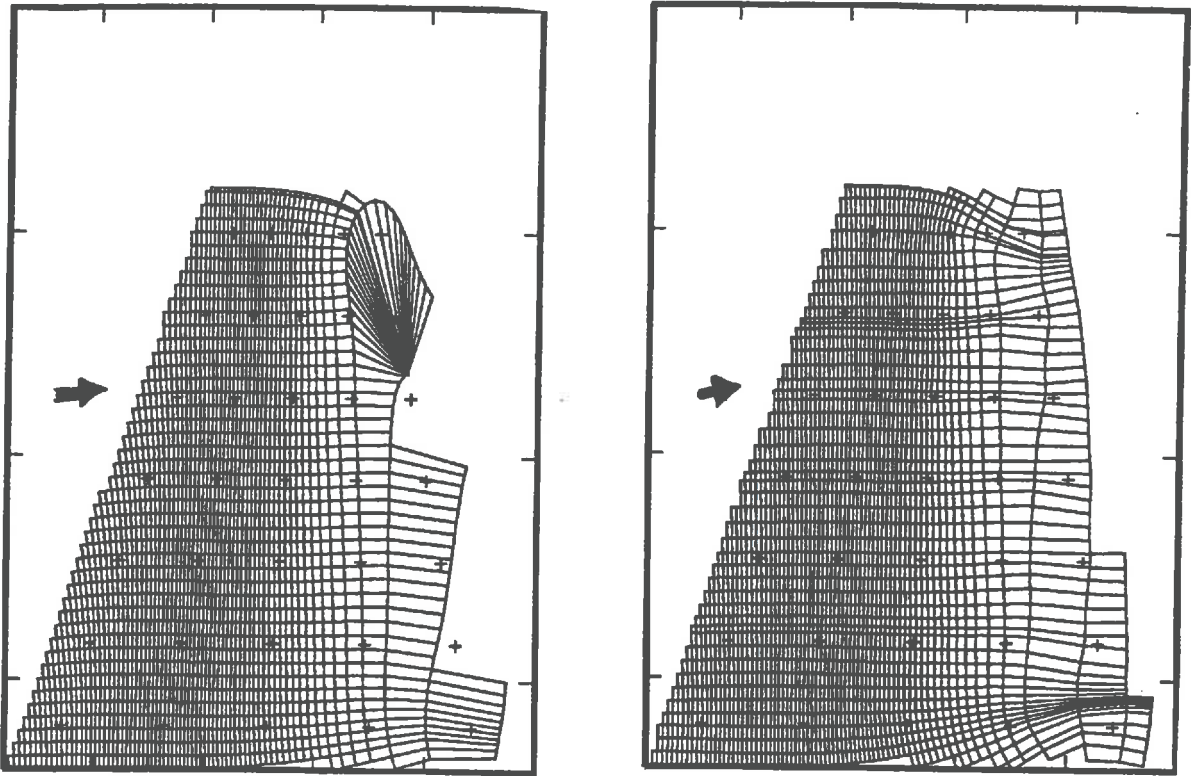


FIG. 3.6 - Comparaison des écoulements entre la restitution par krigage avec le modèle de la validation croisée (gauche) et le modèle spline plaque mince (droite). Exemple du domino.

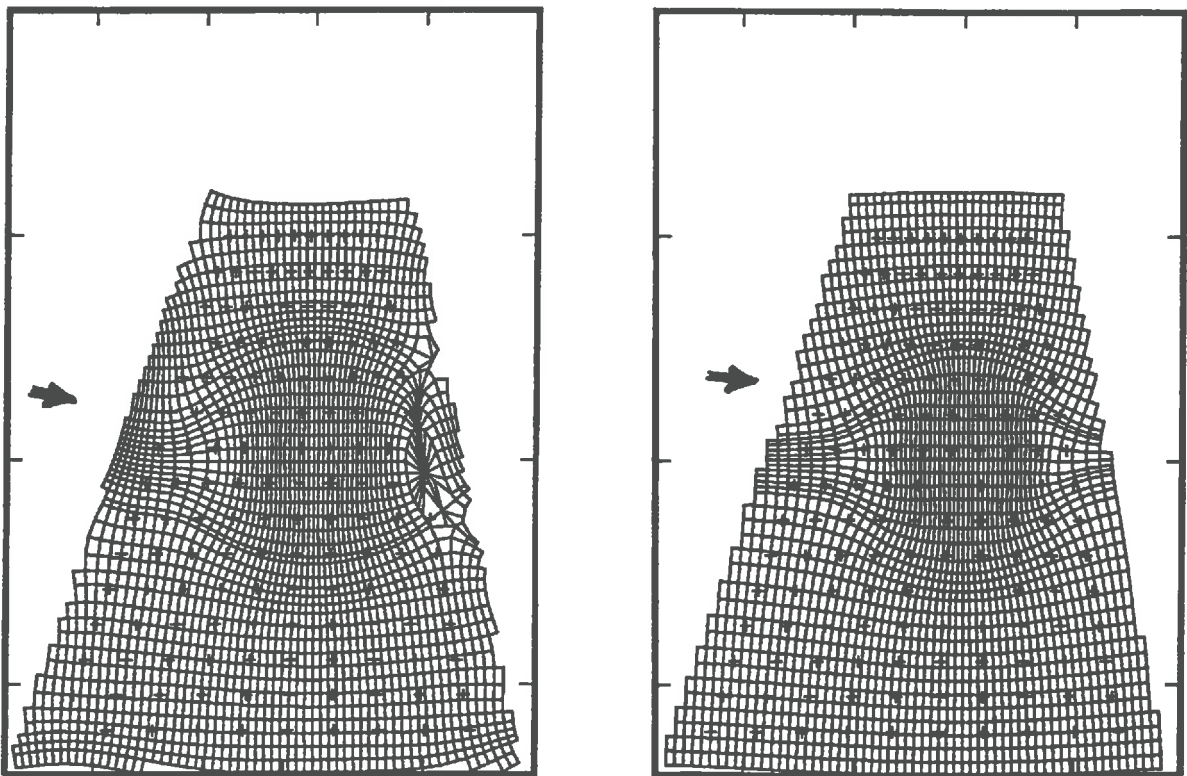


FIG. 3.7 - Comparaison des écoulements entre la restitution par krigage avec le modèle de la validation croisée (gauche) et le modèle spline plaque mince (droite). Exemple du disque.

Chapitre 4

Surdétermination

Résumé du chapitre

Ce chapitre traite de la surdétermination du problème inverse.

- La section 4.1 reprend de manière plus rigoureuse l'analyse intuitive du chapitre 2, Elle donne les expressions du calcul des perméabilités sur les lignes de courant, et aborde explicitement la surdétermination du problème inverse.
- La section 4.2 expose la méthode de moindres carrés, proposée pour réduire la surdétermination du problème inverse. Cet exposé n'est pas rigoureux. Les résultats ne sont véritablement démontrés qu'en annexe A.

4.1 Analyse mathématique du problème inverse

Pour les développements mathématiques à venir, il faut reprendre plus rigoureusement la présentation intuitive du chapitre 2, qui établit le calcul du champ de perméabilité à partir du champ de charge.

4.1.1 Dérivation le long des lignes de courant

Pour simplifier les calculs suivants, nous supposons le champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$ dérivable, et le champ de charge $h(\mathbf{x})$ dérivable deux fois. En fait, la perméabilité peut n'être pas continue, comme dans les exemples proposées aux paragraphes 2.1.5 et 2.1.6.

L'équation de diffusivité (1.4) sous la forme :

$$\mathbf{grad}(h).\mathbf{grad}(k) + k \Delta h = 0$$

est une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre par rapport à la variable perméabilité $k(\mathbf{x})$. De façon classique (Bass [2]), cette équation peut se résoudre en faisant appel aux notions d'intégrale première et de système caractéristique. La notion physique de **dérivation le long d'une ligne de courant** utilise implicitement ce formalisme mathématique sans s'y référer explicitement, ce qui évite une trop grande abstraction.

Mathématiquement, une ligne de courant $\xi(s)$, paramétrée par un paramètre s , est un chemin parallèle aux gradients de charge. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \text{une équation différentielle} \quad & \xi'(s) = \mathbf{grad}(h(\xi(s))) \alpha(s) = \mathbf{grad}(h) \alpha(s) \quad (4.1) \\ \text{et un point de départ} \quad & \xi(s_0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

La fonction $\alpha(s)$ est une fonction, toujours de même signe, qui exprime la proportionnalité entre la vitesse de parcours $\xi'(s)$ de la ligne de courant et le gradient de charge. Elle dépend du paramétrage s de la ligne de courant.

Soit $f(\mathbf{x})$ une fonction de la coordonnée spatiale \mathbf{x} . Le long d'une ligne de courant ξ elle se transforme en fonction du paramètre s par $f(s) = f(\xi(s))$. Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(s) &= \mathbf{grad}(f(\xi(s))).\xi'(s) \\ &= \mathbf{grad}(f).\mathbf{grad}(h) \alpha(s) \quad \text{d'après (4.1)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La fonction h peut être considérée suivant deux points de vue. C'est d'abord une fonction de la coordonnée \mathbf{x} . C'est aussi un paramétrage admissible des lignes de courant. La charge est en effet décroissante le long d'une ligne de courant car celle-ci est dirigée dans le sens opposé aux gradients de charge. La fonction $h(\mathbf{x})$, transformée en fonction du paramètre h le long d'une ligne de courant $\xi(h)$ paramétrée par h , vérifie $h(h) = h(\xi(h)) = h$. Elle peut se dériver au moyen de (4.2) :

$$\frac{d}{dh} h = 1 = \mathbf{grad}(h).\mathbf{grad}(h) \alpha(h) = \|\mathbf{grad}(h)\|^2 \alpha(h)$$

Cette égalité donne la valeur de la fonction $\alpha(h)$, ce qui fournit, avec (4.2), la proposition suivante :

Proposition 4.1 La dérivée d'une fonction f le long d'une ligne de courant paramétrée par h est donnée par la relation :

$$\frac{d}{dh} f(h) = \frac{\mathbf{grad}(h) \cdot \mathbf{grad}(f)}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2}$$

4.1.2 Equation différentielle le long d'une ligne de courant

Proposition 4.2 L'équation de diffusivité (1.2), avec la perméabilité $k(\mathbf{x})$ comme inconnue,

$$\operatorname{div}(k(\mathbf{x}) \mathbf{grad}(h(\mathbf{x}))) = 0$$

est équivalente à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dh} k(h) = -k(h) \frac{\Delta h}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2}(h) \quad (4.3)$$

sur toutes les lignes de courant $\xi(h)$.

Démonstration Il suffit de développer l'équation (1.2), de la diviser par $\|\mathbf{grad}(h)\|^2$, puis de reconnaître la dérivée de k le long de $\xi(h)$ donnée par la proposition (4.1) :

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(k \mathbf{grad}(h)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{grad}(h) \cdot \mathbf{grad}(k) + k \Delta h = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{grad}(h) \cdot \mathbf{grad}(k)}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2} = -\frac{k \Delta h}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dh} k(h) = -\frac{k \Delta h}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2} \quad \text{pour toute ligne de courant } \xi(h) \end{aligned}$$

■

La fonction $\frac{\Delta h}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2}(\mathbf{x})$ dépend des dérivées de la charge $h(\mathbf{x})$. C'est une fonction connue du paramètre h le long d'une ligne de courant $\xi(h)$. Sur chaque ligne de courant l'équation différentielle (4.3) s'intègre en :

$$k(h) = A \exp \left(- \int_{h_0}^h \frac{\Delta h}{\|\mathbf{grad}(h)\|^2}(\eta) d\eta \right) = A F(h) \quad (4.4)$$

où A est une constante arbitraire d'intégration. $A > 0$ car une perméabilité est toujours positive. Cette équation est équivalente à l'équation (2.1) obtenue précédemment de façon non rigoureuse sur un tube de courant infiniment fin. Cette équivalence fournit une interprétation physique pour la fonction $F(h)$, qui est ainsi inversement proportionnelle à l'écartement des lignes de courant et au gradient de charge.

4.1.3 Equation fonctionnelle

Pour une date t donnée, il existe une fonction continue u telle que l'équation d'une ligne de courant s'écrive $u(\mathbf{x}, t) = u_0$; la valeur constante u_0 de la fonction $u(\mathbf{x}, t)$ permet d'indiquer la ligne de courant. D'après (4.4), un champ de perméabilité compatible avec la charge $h(\mathbf{x}, t)$ à la date t peut s'écrire :

$$k(h) = A F(h)$$

La fonction $F(h)$, dépendant du paramètre h de la ligne $u(\mathbf{x}, t) = u_0$ à la date t , doit en toute rigueur s'écrire $F(h, u_0, t)$. Mais un point \mathbf{x} quelconque de l'espace est univoquement défini par une ligne de courant d'indice u_0 et un paramètre h sur cette ligne de courant. La fonction F peut donc s'écrire $F(\mathbf{x}, t)$.

La constante A est arbitraire pour chaque date t , sur chaque ligne de courant, qui peut être indiquée au moyen de $u(\mathbf{x}, t)$. C'est donc une fonction $a(., .)$ arbitraire dépendant des deux variables ligne de courant $u(\mathbf{x}, t)$ et temps t . Finalement, un champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$ compatible avec la charge $h(\mathbf{x}, t)$ à la date t vérifie l'équation fonctionnelle :

$$k(\mathbf{x}) = a(u(\mathbf{x}, t), t) F(\mathbf{x}, t) \quad (4.5)$$

La fonction F est calculée à partir de la charge $h(\mathbf{x}, t)$ à la date t ; la fonction $a(., .)$ traduit l'arbitraire laissé sur la détermination du champ de perméabilité à partir de la charge $h(\mathbf{x}, t)$ pour la seule date t .

4.1.4 Surdétermination

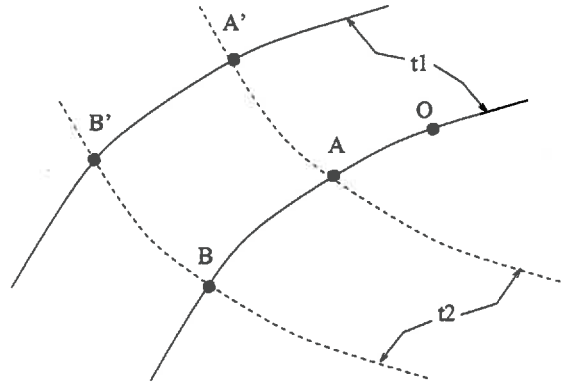


FIG. 4.1 - Quadrilatère porté par des lignes de courant de la date t_1 (trait continu) et de la date t_2 (trait pointillé).

Soient les écoulements aux dates t_1 et t_2 de la figure 4.1. Le quadrilatère (A, B, B', A') est tel que pour la date t_1 les points A et B (respectivement A' et B') soient sur la même ligne de courant, et que pour la date t_2 les points A et A' (respectivement B et B') soient sur la même ligne de courant. L'égalité (4.5) peut s'écrire aux points A, A', B, B' et aux dates t_1 et t_2 :

$$\begin{cases} k(\mathbf{x}_A) = a(u(\mathbf{x}_A, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_A, t_1) = a(u(\mathbf{x}_A, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_A, t_2) \\ k(\mathbf{x}_B) = a(u(\mathbf{x}_B, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_B, t_1) = a(u(\mathbf{x}_B, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_B, t_2) \\ k(\mathbf{x}_{A'}) = a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_{A'}, t_1) = a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_{A'}, t_2) \\ k(\mathbf{x}_{B'}) = a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_1), t_1) F(\mathbf{x}_{B'}, t_1) = a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_2), t_2) F(\mathbf{x}_{B'}, t_2) \end{cases} \quad (4.6)$$

Les constantes arbitraires $a(., .)$ pour les points d'une même ligne de courant sont égales,

ce qui fournit les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 a(u(\mathbf{x}_A, t_1), t_1) = a(u(\mathbf{x}_B, t_1), t_1) = a_1 & \text{car } A \text{ et } B \text{ sont sur une même ligne de} \\
 & \text{courant à la date } t_1. \\
 a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_1), t_1) = a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_1), t_1) = a_2 & \text{car } A' \text{ et } B' \text{ sont sur une même ligne de} \\
 & \text{courant à la date } t_1. \\
 a(u(\mathbf{x}_A, t_2), t_2) = a(u(\mathbf{x}_{A'}, t_2), t_2) = a_3 & \text{car } A \text{ et } A' \text{ sont sur une même ligne de} \\
 & \text{courant à la date } t_2. \\
 a(u(\mathbf{x}_B, t_2), t_2) = a(u(\mathbf{x}_{B'}, t_2), t_2) = a_4 & \text{car } B \text{ et } B' \text{ sont sur une même ligne de} \\
 & \text{courant à la date } t_2.
 \end{array}$$

Les constantes $a_1 \dots a_4$, introduites pour simplifier l'écriture, sont les 4 inconnues du système linéaire à 4 équations (4.6), qui peut se récrire sous la forme :

$$\begin{cases}
 a_1 F(\mathbf{x}_A, t_1) - a_3 F(\mathbf{x}_A, t_2) = 0 \\
 a_1 F(\mathbf{x}_B, t_1) - a_4 F(\mathbf{x}_B, t_2) = 0 \\
 a_2 F(\mathbf{x}_{A'}, t_1) - a_3 F(\mathbf{x}_{A'}, t_2) = 0 \\
 a_2 F(\mathbf{x}_{B'}, t_1) - a_4 F(\mathbf{x}_{B'}, t_2) = 0
 \end{cases} \quad (4.7)$$

La solution mathématique $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ du système n'est pas physiquement acceptable car elle correspond à une perméabilité nulle sur les lignes de courant passant par les points A, B, A', B' aux dates t_1 et t_2 . Le système est donc dégénéré; son déterminant est nul :

$$F(\mathbf{x}_A, t_1) F(\mathbf{x}_B, t_2) F(\mathbf{x}_{A'}, t_2) F(\mathbf{x}_{B'}, t_1) - F(\mathbf{x}_A, t_2) F(\mathbf{x}_B, t_1) F(\mathbf{x}_{A'}, t_1) F(\mathbf{x}_{B'}, t_2) = 0$$

Cette égalité montre que la fonction F , pour deux dates t_1 et t_2 ne peut pas être quelconque. Si une erreur, aussi faible soit-elle, se glisse dans son calcul, le déterminant du système (4.7) n'est plus nul et la seule solution mathématiquement admissible est $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, qui est physiquement inacceptable.

La donnée des charges $h(\mathbf{x}, t_1)$ et $h(\mathbf{x}, t_2)$ en deux dates t_1 et t_2 conduit à un problème fonctionnel surdéterminé. Pour plus de 2 dates la surdétermination est plus grande encore.

4.2 Méthode des moindres carrés

Le champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$, compatible avec le champ de charge $h(\mathbf{x}, t)$, vérifie l'équation fonctionnelle (4.5). Or celle-ci est surdéterminée pour plusieurs dates : la moindre erreur commise sur le calcul de la fonction $F(\mathbf{x}, t)$ transforme l'équation fonctionnelle de telle sorte qu'elle n'admet plus que la fonction $k(\mathbf{x}) \equiv 0$ comme solution, ce qui est physiquement inadmissible. La méthode des moindres carrés permet de garantir une solution au problème. Elle consiste à chercher, parmi un ensemble de fonctions, celles qui approchent "au mieux" l'équation fonctionnelle. Le terme "au mieux" sera précisé mathématiquement dans la suite.

4.2.1 Passage en logarithme

L'équation de diffusivité (1.2) est invariante par multiplication du champ de perméabilité par une constante. Les écoulements qu'elle gouverne sont plus sensibles aux rapports de perméabilités entre deux zones qu'à leurs différences. Le problème physique sous-jacent est donc multiplicatif.

Le passage par les logarithmes, qui transforme les rapports en différences, change le problème multiplicatif en un problème additif et rend naturelle l'utilisation de la méthode des moindres carrés, qui minimise des différences. Avec $g(\mathbf{x}) = \ln(k(\mathbf{x}))$, $b(.,.) = \ln(a(.,.))$ et $v(\mathbf{x}, t) = \ln(F(\mathbf{x}, t))$, l'équation fonctionnelle (4.5) devient :

$$g(\mathbf{x}) = b(u(\mathbf{x}, t), t) + v(\mathbf{x}, t) \quad (4.8)$$

avec g une fonction inconnue dépendant des seules coordonnées d'espace, $b(.,.)$ une fonction arbitraire de deux variables et v une fonction calculée à partir du champ de charge.

4.2.2 Passage des fonctions à l'algèbre

La méthode des moindres carrés remplace le point de vue fonctionnel par un point de vue algébrique. Ce passage classique consiste à se placer dans un espace de Hilbert L^2 , c'est-à-dire un espace de fonctions de carré sommable (Rudin [41]). L'espace de Hilbert adapté au problème inverse est défini maintenant.

Soit Ω un domaine borné sur lequel les perméabilités doivent être calculées ; soit, pour une fonction quelconque $f(\mathbf{x}, t)$, dépendant des coordonnées d'espace et du temps, la norme définie par :

$$\|f\|^2 = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

La sommation porte sur M dates t_1, \dots, t_M , auxquelles la charge $h(\mathbf{x}, t)$ est connue.

Soit, pour deux fonctions bornées en norme $f_1(\mathbf{x}, t)$ et $f_2(\mathbf{x}, t)$, le produit scalaire associé à la norme et défini par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (4.9)$$

L'espace H des fonctions bornées en norme, dépendant des coordonnées d'espace et du temps, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire ainsi défini. Il contient les sous-espaces suivants

- l'espace G des fonctions $g(\mathbf{x})$, invariantes dans le temps, donc dépendant des seules coordonnées spatiales.
- l'espace B des fonctions constantes sur les lignes de courant. La caractérisation mathématique des fonctions de cet espace demande quelques précautions utiles pour les développements mathématiques qui suivent.

Les lignes de courant, obtenues à partir des champs de charge $h(\mathbf{x}, t)$, ne sont définies que dans un domaine saturé, caractérisé par des pressions positives ($h(x, z, t) > z$), et dont la forme évolue au cours du temps. De plus il est possible pour certaines dates de ne pas connaître la charge $h(\mathbf{x}, t)$ dans tout le milieu saturé. Pour une date t , les lignes de courant ne sont donc connues que sur un sous-domaine Ω_t de Ω .

Sur le sous-domaine Ω_t , une fonction de B est constante sur les lignes de courant et prend la forme $b(u(\mathbf{x}, t), t)$; sur le domaine complémentaire $\Omega \setminus \Omega_t$, elle n'est pas déterminée et peut prendre n'importe quelles valeurs.

Avec ces nouvelles définitions, l'équation fonctionnelle (4.8), définie à partir de la fonction $v(\mathbf{x}, t)$, prend la forme du problème $\mathcal{P}_1(v)$. Dans la suite la fonction $v(\mathbf{x}, t)$ est remplacée par une fonction $f(\mathbf{x}, t)$ arbitraire, qui peut désigner aussi bien la fonction $v(\mathbf{x}, t)$ elle-même qu'une de ses approximations.

Problème $\mathcal{P}_1(f)$ Recherche, pour une fonction f donnée, des fonctions g de G qui peuvent s'écrire sous la forme

$$g = b + f \quad \text{où } b \text{ est une fonction de } B.$$

Ce problème peut être défini pour n'importe quelle fonction $f(\mathbf{x}, t)$, mais il admet rarement de solution car il est surdéterminé. Il est, de plus, instable car, le plus souvent, pour une fonction f infiniment proche de la fonction v , ce problème n'admet pas de solution. La méthode des moindres carrés consiste à trouver un problème $\mathcal{P}_2(f)$ qui englobe le problème $\mathcal{P}_1(f)$ et qui admette une solution pour toute fonction f .

4.2.3 Minimisation des résidus

Soit $f(\mathbf{x}, t)$ une fonction quelconque de H , donnée a priori. Deux fonctions g et b quelconques de G et B permettent de définir une **fonction résidu** ε_{gb} par :

$$\varepsilon_{gb}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}) - b(u(\mathbf{x}, t), t) - f(\mathbf{x}, t)$$

Le problème $\mathcal{P}_1(f)$ est la recherche des fonctions qui annulent la fonction résidu, mais il n'admet pas de solution pour toutes les fonctions f . Il est remplacé par un problème $\mathcal{P}_2(f)$ qui ne vise pas à annuler mais seulement à minimiser la fonction résidu :

Problème $\mathcal{P}_2(f)$ Soit, pour une fonction f de H donnée, la **fonctionnelle** $J(g, f)$ définie sur l'ensemble des fonctions g de G par

$$J(g, f) = \min_{b \in B} \|\varepsilon_{gb}\|^2 = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$$

Le minimum $J_0(f)$ de cette fonctionnelle, défini par $J_0(f) = \min_{g \in G} J(g, f)$ est appelé **résidu**.

Le problème \mathcal{P}_2 est la recherche des fonctions g_0 de G qui atteignent ce minimum :

$$J(g_0, f) = J_0(f) = \min_{g \in G} \left(\min_{b \in B} \|g - b - f\|^2 \right)$$

Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ a été construit de sorte que son résidu $J_0(f)$ s'annule si et seulement si le problème $\mathcal{P}_1(f)$ admet des solutions, auquel cas les solutions des deux problèmes coïncident. Il s'agit bien d'un prolongement du problème $\mathcal{P}_1(f)$.

4.2.4 Application du Théorème des projections

La minimisation contenue dans le problème $\mathcal{P}_2(f)$ peut s'exprimer simplement au moyen de projections. Cette nouvelle formulation est très commode, d'une part pour la mise en œuvre numérique, d'autre part pour une étude mathématique de la méthode. La notion de projection est définie maintenant.

Les projections sont définies sur un espace de Hilbert H dont les fonctions considérées plus haut sont des éléments. Les lettres x, y , etc., perdent leur sens de coordonnées d'espace et peuvent désigner des éléments arbitraires de H .

Les théorèmes 4.1 et 4.2 suivants regroupent les principaux résultats concernant les projections (voir [1]). Leur formulation rigoureuse utilise, outre la notion d'espace orthogonal définie ici, les concepts d'espace fermé et de continuité qui sont rappelés en annexe A. Ici, les projections seront utilisées sans que les hypothèses d'application rigoureuse des théorèmes soient vérifiées. En annexe A les démonstrations sont reprises soigneusement.

Définition 4.1 Soit F un sous-espace vectoriel de H . L'orthogonal de F , noté F^\perp , est le sous-espace vectoriel contenant les éléments x qui vérifient $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout élément y de F . F^\perp est fermé.

Théorème 4.1 (des projections) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Pour tout élément x de H , il existe un unique élément dans F , noté $\Pi_F(x)$ tel que

$$\|x - \Pi_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\| \quad (4.10)$$

$\Pi_F(x)$, appelé *projection* de x sur F , est caractérisé par

$$\langle \Pi_F(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } F. \quad (4.11)$$

L'opérateur Π_F , défini sur H à valeurs dans F (donc dans H), est appelé *projecteur* de l'espace F . C'est un opérateur continu. Soit Π_{F^\perp} le projecteur de F^\perp . Tout élément x peut être décomposé suivant F et son orthogonal F^\perp , au moyen de leurs projecteurs respectifs, par :

$$x = \Pi_F(x) + \Pi_{F^\perp}(x) \quad \text{avec} \quad \|x\|^2 = \|\Pi_F(x)\|^2 + \|\Pi_{F^\perp}(x)\|^2$$

et l'équation de projection (4.10) peut s'écrire

$$\min_{y \in F} \|x - y\| = \|\Pi_{F^\perp}(x)\| \quad (4.12)$$

Théorème 4.2 Soient E et F deux sous-espaces fermés tels que $E \subset F$. Leurs projecteurs vérifient : $\Pi_F \circ \Pi_E = \Pi_E \circ \Pi_F = \Pi_E$

Les théorèmes 4.1 et 4.2 permettent de reformuler le problème $\mathcal{P}_2(f)$ sous la forme de la proposition suivante. Celle-ci présente les mêmes résultats que le théorème A.11 du paragraphe A.3.6, mais ici, la démonstration n'est pas rigoureuse puisqu'elle omet de parler d'espaces fermés.

Proposition 4.3 Les fonctions g_0 de G solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ sont les solutions de l'équation (4.13) et de l'équation caractéristique du problème inverse (4.14) :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) \quad (4.13)$$

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G. \quad (4.14)$$

Démonstration La fonctionnelle $J(g, f)$ est définie par $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$. D'après la formule (4.12) du théorème 4.1 des projections, avec $F = B$ et $x = f - g$, elle peut se récrire $J(g, f) = \|\Pi_{B^\perp}(f - g)\|^2$. Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ est donc la recherche des fonctions g_0 qui vérifient :

$$\|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g_0)\| = \min_{g \in G} \|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g)\|$$

Le théorème des projections peut de nouveau s'appliquer, avec cette fois, $F = \Pi_{B^\perp}(G)$ et $x = \Pi_{B^\perp}(f)$, ce qui donne :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)} \circ \Pi_{B^\perp}(f)$$

Or, comme $\Pi_{B^\perp}(G)$ est inclus dans B^\perp et d'après le théorème 4.2, $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)} \circ \Pi_{B^\perp} = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}$; les solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ sont donc les fonctions g_0 de G qui vérifient l'équation (4.13).

D'après l'équation caractéristique (4.11) de la projection de $\Pi_{B^\perp}(f)$ sur $\Pi_{B^\perp}(G)$, pour tout élément $\Pi_{B^\perp}(g)$ de $\Pi_{B^\perp}(G)$,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)} \circ \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ &= \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique (4.14). ■

4.2.5 Espace des indéterminations

D'après l'équation (4.13), deux solutions g_1 et g_2 du problème $\mathcal{P}_2(f)$ vérifient

$$\Pi_{B^\perp}(g_1) = \Pi_{B^\perp}(g_2) \Leftrightarrow \Pi_{B^\perp}(g_1 - g_2) = 0 \Leftrightarrow g_1 - g_2 \in B$$

Comme elles appartiennent à G , leur différence $g_1 - g_2$ appartient à $B \cap G$. Deux solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ diffèrent donc entre elles d'un élément quelconque de l'espace $B \cap G$. Cet espace est appelé **espace des indéterminations**. Quelles sont les fonctions qui composent cet espace ?

Une fonction de $B \cap G$ est invariante dans le temps car elle appartient à G ; elle est constante sur chaque ligne de courant $u(x, t)$ pour toute date t car elle appartient à B . Elle prend donc une seule valeur sur les ensembles de lignes de courant des différentes dates qui se croisent. La recherche de la forme des fonctions de l'espace $B \cap G$ consiste donc à repérer les zones sur lesquelles les lignes de courant se croisent et où, par conséquent, ces fonctions sont constantes.

Cela conduit à diviser le domaine Ω , sur lequel sont recherchées les perméabilités, en plusieurs zones indépendantes entre elles, c'est-à-dire telles que chaque ligne de courant n'appartienne qu'à une seule zone. Comme aucune ligne de courant n'appartient à deux zones différentes, les valeurs prises par les fonctions de $B \cap G$ sont indépendantes sur chaque zone et le problème est divisé en autant de sous-problèmes que de zones.

Les zones indépendantes peuvent être rangées en trois types différents :

1. Sur une zone du premier type, une ligne de courant d'un écoulement croise toujours des lignes de courant d'un autre écoulement. Sur une telle zone, deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin construit à partir de morceaux de lignes de courant. Une fonction de l'espace des indéterminations, constante sur toutes les lignes de courant, est donc constante sur une zone du premier type.

Sur l'exemple de la figure 4.2, les lignes de courant se croisent dans tout le domaine Ω à l'exception de la diagonale, qui divise le domaine en 2 zones de type 1. L'espace des indéterminations est donc l'espace à 2 dimensions des fonctions constantes sur chaque zone.

2. Les lignes de courant d'une zone de deuxième type ne croisent aucune ligne de courant d'un autre écoulement. Il s'agit, soit de zones sur lesquelles les lignes de courant des différents écoulements sont parallèles, soit de zones qui ne sont recouvertes que par des lignes de courant d'un seul écoulement.

Sur les zones du deuxième type, les fonctions de l'espace $B \cap G$ peuvent prendre une valeur arbitraire sur chaque ligne de courant, donc peuvent prendre une infinité de valeurs arbitraires.

3. Il peut enfin exister des zones qui ne sont jamais recouvertes par les lignes de courant d'aucun écoulement. Sur ces zones, l'indétermination est totale, les fonctions de l'espace des invariants peuvent prendre n'importe où n'importe quelle valeur. Dans la pratique, ces zones sont éliminées des calculs, si bien qu'il ne subsiste que des zones des deux premiers types.

L'exemple de la figure 4.3 illustre la division du domaine Ω en zones de plusieurs types. Il comporte deux écoulements pour les dates t_1 et t_2 . Les domaines Ω_{t_1} et Ω_{t_2} , sur lesquels les écoulements sont connus, sont deux rectangles différents. Le domaine Ω est identique au domaine Ω_{t_1} . Les lignes de courant pour les dates t_1 et t_2 divisent le domaine Ω en 3 sous-domaines : sur Ω_1 les lignes de courant de la date t_1 ne croisent aucune ligne de courant de la date t_2 , c'est une zone de type 2 ; sur Ω_2 les lignes de courant d'une date croisent les lignes de courant de l'autre date, c'est une zone de type 1 ; sur Ω_3 les lignes de courant des 2 dates sont parallèles, c'est une zone de type 2. L'espace des indéterminations est composé des fonctions constantes sur Ω_2 et constantes sur chaque ligne de courant de Ω_1 et Ω_3 .

La dimension de l'espace des indéterminations $B \cap G$ dépend du type des zones qui divisent le domaine Ω . Si le domaine Ω n'est composé que de zones du premier type, $B \cap G$ est l'espace des fonctions constantes sur chaque zone et sa dimension est donc égale au nombre des zones. S'il existe au moins une zone du deuxième type, la dimension de $B \cap G$ est alors infinie.

Dans le cas, déjà évoqué, où les lignes de courant se croisent toutes, il n'y a qu'une seule zone du premier type, ce qui correspond à un espace $B \cap G$ de dimension 1. L'indétermination correspond à une constante multiplicative sur le champ de perméabilité $k(\mathbf{x})$.

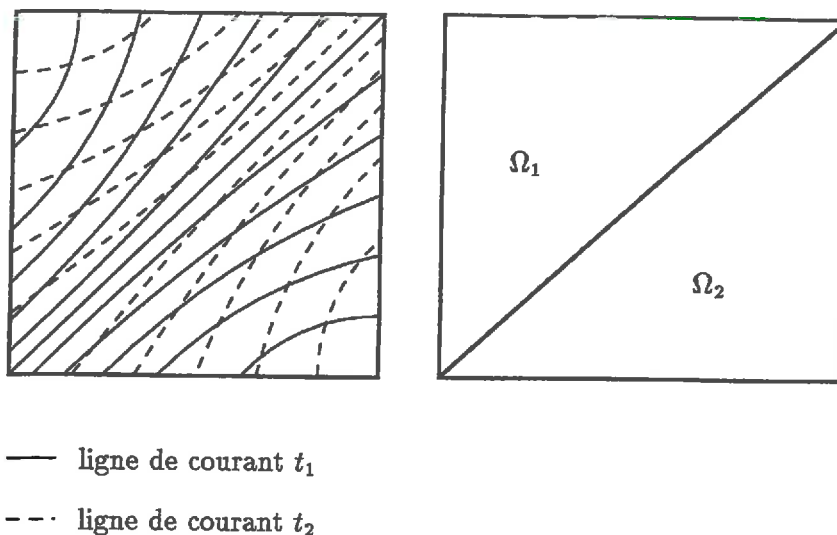


FIG. 4.2 - Les lignes de courant de la date t_1 (trait continu) croisent les lignes de courant de la date t_2 (pointillés) sur tout le domaine sauf sur la diagonale qui sépare le domaine en deux zones Ω_1 et Ω_2 .

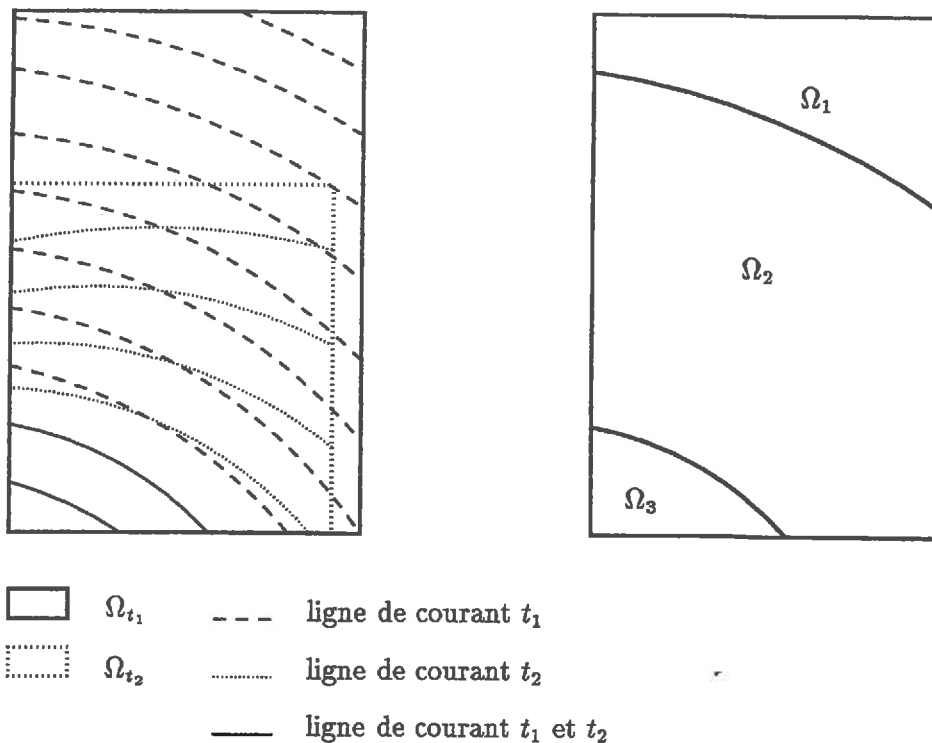


FIG. 4.3 - Les lignes de courant pour les 2 dates divisent le domaine en 3. L'espace $B \cap G$ des indéterminations est composé des fonctions constantes sur Ω_2 et constantes sur chaque ligne de courant de Ω_1 et Ω_3 .

Chapitre 5

Résolution numérique

Résumé du chapitre

Ce chapitre présente un algorithme pour résoudre de manière directe l'équation du problème inverse, et pour appliquer la méthode de moindres carrés, décrite au chapitre 4. Il évoque ensuite les conséquences de l'indétermination du problème inverse sur les résultats numériques et propose d'y remédier.

- La section 5.1 propose un algorithme pour construire un maillage qui s'appuie sur les lignes de courant et les lignes équipotentielles de l'écoulement.
- La section 5.2 montre comment discrétiser la méthode des moindres carrés.

Les deux premières sections sont plutôt techniques. Elles peuvent être survolées, sans dommage pour le reste de l'exposé.

- La section 5.3 montre comment caractériser numériquement l'indétermination du problème inverse.
- La section 5.4 propose une variante de la méthode d'inversion, la méthode d'inversion dite conditionnelle, pour remédier à l'indétermination du problème inverse.

Choix d'une méthode de résolution

La méthode des moindres carrés repose sur la résolution explicite, pour chaque date t , de l'équation de diffusivité 1.2 sous la forme de l'équation fonctionnelle (4.8) :

$$g(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, t) + v(\mathbf{x}, t)$$

où g est le logarithme de la perméabilité $k(\mathbf{x})$, b une fonction arbitraire, constante sur les lignes de courant, et v une fonction donnée par calcul.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir numériquement cette équation fonctionnelle. Une première méthode pourrait consister à résoudre par une méthode d'éléments finis ou de différences finies l'équation de diffusivité (1.2), écrite pour le log-perméabilité g , sous la forme d'une équation aux dérivées partielles de degré 1 :

$$\mathbf{grad}(g) \cdot \mathbf{grad}(h) = -\Delta h \quad (5.1)$$

De nombreux auteurs ont employé ces méthodes numériques dans les approches directes. Pourtant, les méthodes d'éléments finis ou de différences finies sont surtout adaptées aux équations aux dérivées partielles elliptiques de degré 2. Peuvent-elles être appliquées en toute rigueur aux équations de degré 1 ?

P. Lesaint [25] a étudié la résolution d'une équation aux dérivées partielles de degré 1 par une méthode d'éléments finis. Pour que les solutions convergent (c'est-à-dire pour que la méthode ait un sens), il fait une hypothèse, qui, dans le cas de l'équation (5.1), s'écrit :

$$\text{il existe } c_0 > 0 \text{ telle que } \Delta h \geq c_0$$

Cette hypothèse, mathématiquement requise, n'a aucun sens physique pour le problème étudié et ne peut pas être vérifiée a priori. Ce résultat me fait douter de la possibilité d'utiliser proprement les méthodes d'éléments finis ou de différences finies.

C'est pourquoi je préfère résoudre l'équation (5.1) par une méthode de suivi des lignes de courant.

5.1 Maillage d'un potentiel

La résolution de l'équation du problème inverse (1.4) par suivi des lignes de courant passe par la construction d'un maillage, qui s'appuie sur les lignes équipotentielles et sur les lignes de courant du potentiel de charge $h(\mathbf{x})$, défini sur un domaine Ω . Cette construction présente quelques difficultés : en théorie, dans un barrage, la charge ne peut pas admettre d'extrema, car ceux-ci correspondent à des sources ou à des puits. En fait, à cause d'erreurs commises dans l'interpolation des mesures de charge, ces extrema peuvent exister. Ils doivent être pris en compte, ce qui complique le maillage.

Les notions introduites dans cette section sont exposées en détail dans le livre de Hirsch et de Smale [19].

5.1.1 Structure d'un écoulement

Dans la suite $h(\mathbf{x})$ ne désigne plus uniquement la charge d'un écoulement, mais un potentiel quelconque, qui peut notamment atteindre des extrema. Une **ligne de courant** est une ligne tangente aux gradients de potentiel. Elle part d'un point de potentiel élevé appelé **source**

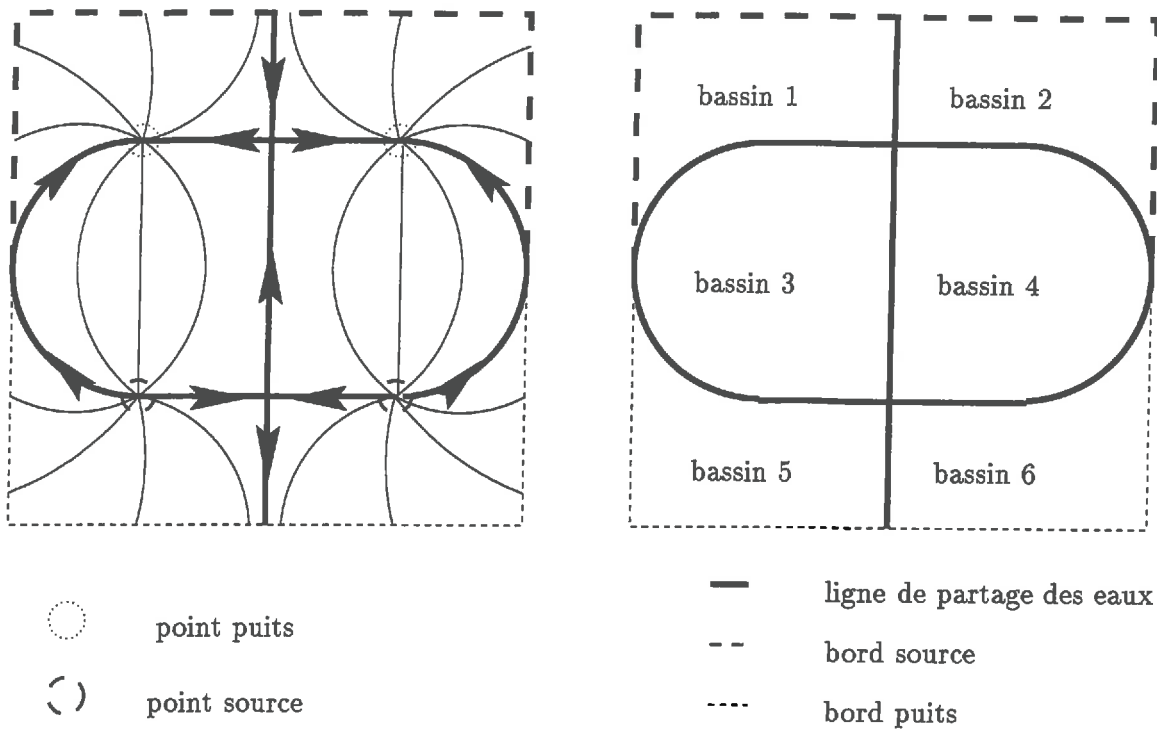


FIG. 5.1 - L'écoulement est divisé en 6 bassins, séparés par des lignes de partages des eaux. Dans chaque bassin, les lignes de courant partent d'un puits et aboutissent à une source. L'écoulement comporte 2 points source, 2 points puits, 2 bords source et 2 bords puits.

et se dirige vers un point de potentiel faible appelé **puits**. Elle est donc dirigée dans le sens opposé aux gradients. Un **écoulement** regroupe l'ensemble des lignes de courant.

Un écoulement peut être divisé en plusieurs sous-écoulements indépendants entre eux, et appelés **bassins**. Dans chaque bassin, les lignes de courant partent d'une même source et aboutissent à un même puits. La source (resp. le puits) correspond soit à un point à l'intérieur du domaine Ω , soit à un bord du domaine. Les bassins sont séparés entre eux par des lignes de courant limite appelées **lignes de partage des eaux**. Sur l'exemple de la figure 5.1, l'écoulement est divisé en 6 bassins, et comporte 2 points source, 2 points puits, 2 bords source et 2 bords puits.

Les lignes de partage des eaux jouent un rôle capital pour le maillage d'un potentiel car elles permettent de diviser l'écoulement en bassins. Elles peuvent être obtenues grâce à l'étude des **singularités** du potentiel.

5.1.2 Singularités

Il existe des singularités à l'intérieur et sur le bord du domaine Ω . A l'intérieur du domaine, les points singuliers sont les points de gradients nuls. Leurs propriétés sont déterminées au

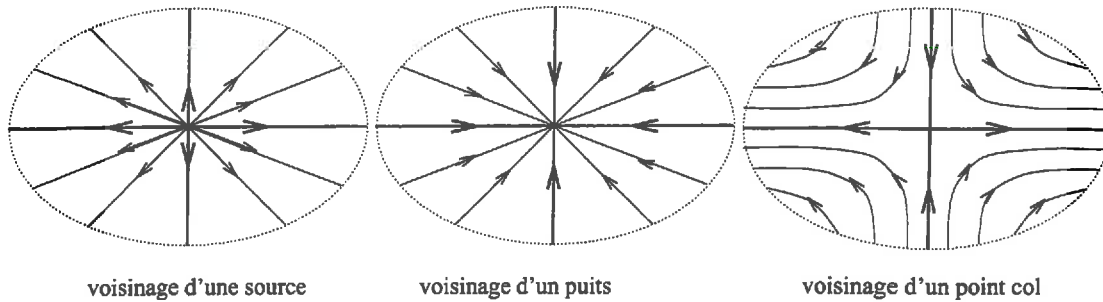


FIG. 5.2 - Comportement des lignes de courant au voisinage d'une source, d'un puits et d'un point col. Les flèches sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

moyen de la matrice des dérivées secondes appelée **Hessien** de h .

$$H(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{(\partial y)^2} \end{pmatrix}$$

Le Hessien est une matrice symétrique. Elle se diagonalise dans une base formée par 2 **directions principales** orthogonales, et possède deux valeurs propres réelles. Les singularités peuvent se classer en trois types, suivant les valeurs propres du Hessien :

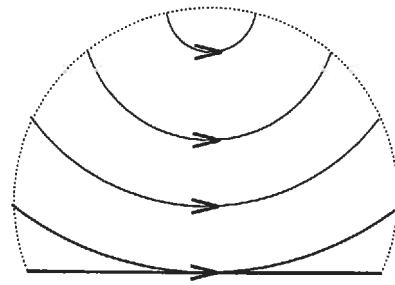
1. Si les 2 valeurs propres sont négatives, la singularité est un maximum de potentiel. C'est un point source.
2. Si les 2 valeurs propres sont positives, la singularité est un minimum de potentiel. C'est un point puits.
3. Si les valeurs propres sont de signes opposés la singularité est un **point col**.

Le comportement des lignes de courant au voisinage d'une singularité est très différent suivant le type de la singularité, comme l'indique la figure 5.2. Les lignes de courant au voisinage d'un extremum de potentiel convergent toutes vers la singularité : soit elles partent toutes de la source, soit elles aboutissent au puits. Au contraire, les lignes de courant d'un point col s'écartent toutes de ce point à l'exception de 4 lignes, portées par les directions principales du Hessien. Ces lignes de courant, qui passent par le point col sont des lignes de partage des eaux.

Sur les bords, il existe des singularités équivalentes aux points col, et appelées aussi **point col**. Comme le montre la figure 5.3, ces points sont caractérisés par un gradient de potentiel tangent au bord et une ligne de courant en ce point dirigée vers l'intérieur du domaine. Mathématiquement, ces conditions s'écrivent :

$$\mathbf{n}^\top \cdot \text{grad}(h(\mathbf{x})) = 0 \quad \mathbf{n}^\top \cdot H(h) \cdot \text{grad}(h(\mathbf{x})) > 0$$

où H est le Hessien de h et \mathbf{n} la normale intérieure. Les 2 lignes de courant qui passent par ce point col sont des lignes de partage des eaux.



Bord parallèle à l'écoulement
équivalent d'un point col

FIG. 5.3 - Point col sur le bord : la ligne de courant est tangente et dirigée vers l'intérieur du domaine.

Les lignes de partage des eaux sont toutes les lignes qui passent par un point col, à l'intérieur ou sur le bord du domaine. Elles partent d'un bord ou d'un point source et aboutissent dans un bord ou un point puits. La procédure suivante permet donc de diviser un écoulement en bassins :

- La procédure commence par la recherche dans le domaine Ω des points singuliers, donc des points de gradient nul. En ces points le Hessian est calculé, puis diagonalisé. Si le point est un point col, les 4 lignes de partage des eaux qui l'atteignent sont alors calculées. Elles sont dirigées suivant les directions principales. Elles se calculent en remontant les potentiels jusqu'à un point source ou à un bord source ; puis en descendant les potentiels jusqu'à un point puits ou à un bord puits.
- Les points col sont ensuite calculés sur les bords. Les lignes de partage des eaux, qui partent de ces points sont calculées comme pour les points col de l'intérieur du domaine.
- Le calcul des lignes de partage des eaux est ainsi terminé. L'écoulement peut être modélisé comme un **graphe** dont les lignes de partage des eaux sont les **chemins**, et dont les sources et les puits sont les **sommets**. L'analyse du graphe permet de repérer les différents bassins.

5.1.3 Calcul des lignes de courant

L'élément de base d'un maillage du potentiel est la ligne de courant. D'une part les lignes de partage des eaux, qui séparent les bassins, sont des lignes de courant. D'autre part les lignes de courant permettent de mailler chaque bassin. Le calcul des lignes de courant s'effectue de la façon suivante.

D'après le paragraphe 4.1.1, une ligne de courant ξ est un chemin paramétré par un paramètre η . Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \text{une équation différentielle (4.1)} \quad & \xi'(\eta) = \text{grad}(h(\xi(\eta))) \alpha(\eta) \\ \text{et un point de départ} \quad & \xi(\eta_0) = x_0 \end{aligned}$$

Elle peut être paramétrée par les valeurs du potentiel $h(\mathbf{x})$, c'est-à-dire que le paramètre η vérifie : $h(\xi(\eta)) = \eta$. Dans ce cas, d'après la proposition 4.1, il suffit de poser $\alpha(\eta) = \frac{1}{\|\text{grad}(h(\xi(\eta)))\|^2}$ et $\eta_0 = h(\mathbf{x}_0)$ dans la définition de la ligne de courant.

Dans les calculs numériques, une ligne de courant est calculée en résolvant numériquement l'équation différentielle. A cause des erreurs de calcul, le paramètre η ne vérifie plus la relation $h(\xi(\eta)) = \eta$ de façon exacte. Les calculs numériques réajustent à chaque étape l'adéquation entre le paramètre et le potentiel.

Le maillage proposé s'appuie non seulement sur les lignes de courant, mais aussi sur les lignes équipotentielles. Pour cela, dans les calculs numériques, les lignes de courant sont discrétisées pour des valeurs du paramètre η régulièrement espacées :

$$\eta_k = h_0 + i dh$$

qui correspondent à des valeurs du potentiel régulièrement espacées. Cette discrétisation permet de disposer simultanément d'un réseau de lignes de courant, et d'un réseau de lignes équipotentielles.

Le maillage d'un bassin consiste à calculer un certain nombre de lignes de courant, situées dans un bassin. Ce calcul est récurrent : à partir d'une ligne déjà calculée, la ligne suivante est calculée à une certaine distance, qui ne doit pas dépasser une valeur fixée. Le calcul commence au bord du bassin, à partir d'une ligne de partage des eaux, et se poursuit de proche en proche dans tout le bassin, jusqu'à en atteindre la limite, qui est soit une seconde ligne de partage des eaux, soit un bord du domaine.

5.1.4 Exemple de maillage

La méthode de maillage d'un potentiel est illustrée par le maillage d'un potentiel donné. La figure 5.4 montre le maillage et décompose sa structure. Il est construit à partir des lignes de partage de eaux, représentées en pointillé. Les singularités sont représentées par des symboles.

5.2 Discrétisation

La méthode de maillage présentée ci-dessus est le point de départ d'une approximation numérique de l'équation fonctionnelle 4.8 :

$$g(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, t) + v(\mathbf{x}, t)$$

Cette approximation est décrite maintenant.

5.2.1 Discrétisation des espaces B et G

Dans l'algorithme proposé, les espaces de fonctions B et G de dimension infinie, sont remplacés par des espaces de dimension finie.

Espace G_a

L'espace G est l'ensemble des fonctions invariantes dans le temps. Dans la pratique, une fonction g de G est approchée par une fonction constante sur les cellules d'une grille régulière

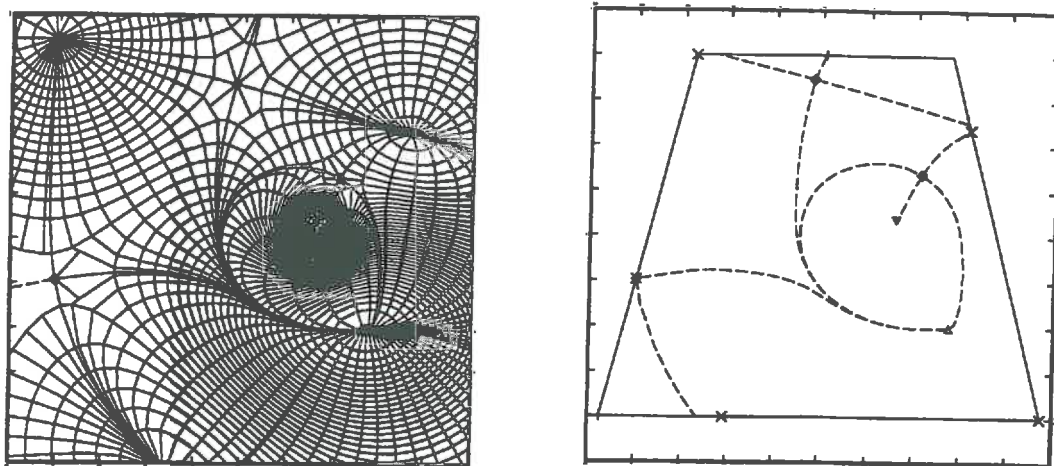


FIG. 5.4 - A gauche, exemple d'un potentiel maillé par des lignes de courant et des lignes équipotentielles. Les éléments caractéristiques du maillage sont représentés sur la figure de droite. Bord=trait continu, ligne de partage des eaux=trait pointillé. Singularité dans le domaine : source= \triangle , puits= ∇ , col= \diamond . Singularité sur le bord : col= $*$.

donnée a priori. Pour la cellule n , soit e_n la fonction indicatrice de la cellule, soit g^n la valeur constante sur la cellule. L'approximation s'écrit $g(\mathbf{x}) \approx \sum_n g^n e_n(\mathbf{x})$. L'espace d'approximation est noté G_a .

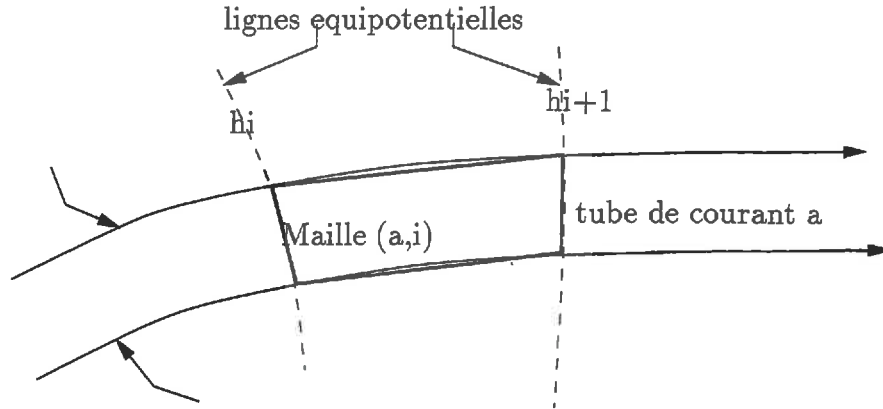
Tube de courant

Le maillage, décrit en section 5.1, et qui s'appuie sur les lignes de courant et sur les lignes équipotentielles de la date t , constitue une nouvelle discrétisation de l'espace. Celle-ci respecte les caractéristiques de l'écoulement à la date t .

Les lignes de courant sont calculées par intégration numérique d'une équation différentielle portant sur les gradients de charge. Elles sont indicées par α . Un **tube de courant**, indicé par α , est l'ensemble des points \mathbf{x} compris entre les deux lignes de courant d'indice α et $\alpha + 1$. Dans la pratique, les lignes de courant sont choisies pour que le tube de courant α n'excède pas une certaine épaisseur.

Maille

Un tube de courant est parcouru par le paramètre charge hydraulique h . Soient h_i des valeurs de h régulièrement espacées, c'est-à-dire telles que la différence $h_{i+1} - h_i = dh$ soit constante. La **maille** indicée par (i, α) est l'ensemble des points \mathbf{x} du tubes de courant α dont les valeurs de charge vérifient $h_i < h(\mathbf{x}, t) < h_{i+1}$. La maille (i, α) est en fait approchée par un quadrilatère dont les sommets sont les intersections des lignes de courant α et $\alpha + 1$, et des lignes équipotentielles $h(\mathbf{x}, t) = h_i$ et $h(\mathbf{x}, t) = h_{i+1}$. Le tube de courant α est constitué de l'ensemble des mailles (i, α) , pour un indice α fixé.



Une maille (i, α) , qui repose sur les caractéristiques de l'écoulement à la date t , doit en fait être indiquée par le triplet (i, α, t) . La fonction $\epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau)$, indicatrice de la maille (i, α, t) , est définie par :

$$\epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = t, \text{ et si } \mathbf{x} \text{ appartient à la maille } (i, \alpha, t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fonction $f(\mathbf{x}, \tau)$, dépendant des variables d'espace \mathbf{x} et de temps τ est approchée par :

$$f(\mathbf{x}, \tau) \approx \sum_t \sum_\alpha \sum_i f^{i,\alpha,t} \epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau)$$

Espace B_a

L'espace B est approché par l'espace B_a , de dimension finie, des fonctions constantes sur chaque tube de courant (t, α) . Les fonctions de B_a , caractérisées par une valeur unique $b^{\alpha,t}$ sur chaque tube de courant, s'écrivent :

$$b(\mathbf{x}, \tau) = \sum_t \sum_\alpha \sum_i b^{\alpha,t} \epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_t \sum_\alpha b^{\alpha,t} \eta_{\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{avec} \quad \eta_{\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_i \epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau)$$

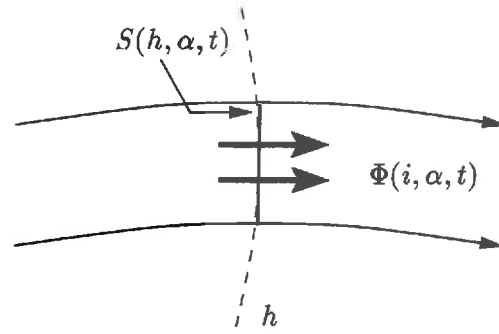
Les fonctions $\eta_{\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau)$ sont les indicatrices des tubes de courant (α, t) et forment une base de B_a .

5.2.2 Conservation du flux

Une section orthogonale $S(h_0, \alpha, t)$ d'un tube de courant (α, t) , définie pour une valeur h_0 du paramètre h , est l'ensemble des points \mathbf{x} du tube (α, t) qui vérifient $h(\mathbf{x}, t) = h_0$. Le flux d'eau $\Phi(h_0, \alpha, t)$ qui traverse cette section s'écrit

$$\Phi(h_0, \alpha, t) = - \int_{S(h_0, \alpha, t)} k(\mathbf{x}) \mathbf{grad}(h)(\mathbf{x}, t) \cdot d\sigma(\mathbf{x})$$

où $d\sigma(\mathbf{x})$ est l'élément d'intégration normal de la section.



Pour une date t , la perméabilité $k(\mathbf{x})$ peut être approchée par une fonction de valeur constante $k^{i,\alpha,t}$ sur chaque maille (i, α, t) . Le flux $\Phi(i, \alpha, t)$ traversant la surface $S(h, \alpha, t)$, avec $h = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$, peut ainsi être approché par :

$$\Phi(i, \alpha, t) \approx -k^{i,\alpha,t} \int_{S(h,\alpha,t)} \mathbf{grad}(h)(\mathbf{x}, t) \cdot d\sigma(\mathbf{x}) \approx -k^{i,\alpha,t} I_{h,\alpha,t}$$

où $I_{h,\alpha,t}$ est une approximation de l'intégrale $\int_{S(h,\alpha,t)} \mathbf{grad}(h)(\mathbf{x}, t) \cdot d\sigma(\mathbf{x})$. Dans les programmes $I_{h,\alpha,t}$ est calculé par une intégrale de Simpson.

Par conservation du flux dans le tube (α, t) , pour toute maille i , le flux $\Phi(i, \alpha, t)$ est égal à une constante $A_{\alpha,t}$, ce qui s'écrit :

$$A_{\alpha,t} \approx -k^{i,\alpha,t} I_{h,\alpha,t} \quad \Rightarrow \quad k^{i,\alpha,t} \approx A_{\alpha,t} \frac{1}{-I_{h,\alpha,t}} \quad (5.2)$$

L'expression (5.2) correspond à la version discrétisée de l'équation fonctionnelle (4.5) :

$$k(\mathbf{x}) = a(u(\mathbf{x}, t), t) F(\mathbf{x}, t)$$

Par identification des deux expressions, la fonction $v(\mathbf{x}, t) = \ln(F(\mathbf{x}, t))$ à projeter est approchée par une fonction $\nu(\mathbf{x}, t)$ de valeur constante $v^{i,\alpha,t} = -\ln(|I_{i,\alpha,t}|)$ sur chaque maille (i, α, t) , ce qui s'écrit : $v(\mathbf{x}, \tau) \approx \nu(\mathbf{x}, \tau) = \sum_t \sum_\alpha \sum_i v^{i,\alpha,t} \epsilon_{i,\alpha,t}(\mathbf{x}, \tau)$.

5.2.3 Domaine et produit scalaire

Certaines mailles du maillage sont retirées pour les raisons suivantes :

1. Les équations qui servent au calcul du problème inverse ne sont valables que sous la surface libre. Les mailles ne sont conservées que si la pression en ses 4 sommets dépasse 3 m. (Prendre 3 m au lieu de 0 m constitue une marge de sécurité).
2. L'intégrale $I_{i,\alpha,t}$ s'annule dans deux cas. Soit le gradient s'annule, soit l'épaisseur du tube de courant s'annule. Dans les deux cas, un manque de précision sur la valeur du gradient ou sur l'épaisseur du tube conduit à de grandes imprécisions sur le résultat du calcul. Pour remédier à ces instabilités une maille est retirée si les valeurs du gradient ou si l'épaisseur du tube sont trop faibles.

Si une maille est retirée au milieu d'un tube de courant les deux parties situées de part et d'autre de la maille sont considérées comme deux tubes de courant indépendants.

Pour chaque date t , le domaine Ω_t de définition des fonctions correspond à l'intersection de la grille avec les mailles restantes.

Remarque Le produit scalaire, défini pour deux fonctions f_1 et f_2 de H , par l'expression (4.9):

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

était adapté aux développements théoriques, mais pas aux calculs numériques des projections sur l'espace B^\perp , car les lignes de courant ne sont pas définies sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$. Il peut être remplacé par le produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

qui ne change pas les équations de projections, comme le montre la démonstration suivante :

Démonstration Soit D l'espace des fonctions qui prennent n'importe quelles valeurs sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$ et s'annulent sur le domaine Ω_t . Son orthogonal D^\perp est l'espace des fonctions qui prennent n'importe quelles valeurs sur le domaine Ω_t et s'annulent sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$. La projection d'une fonction $f(\mathbf{x}, t)$ sur D^\perp consiste à multiplier la fonction $f(\mathbf{x}, t)$ par l'indicatrice $1_{\Omega_t}(\mathbf{x}, t)$ du domaine Ω_t :

$$\Pi_{D^\perp}(f) = f(\mathbf{x}, t) \times 1_{\Omega_t}(\mathbf{x}, t)$$

Le produit scalaire des projections sur D^\perp de deux fonctions f_1 et f_2 ,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{D^\perp}(f_1), \Pi_{D^\perp}(f_2) \rangle &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) 1_{\Omega_t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \langle f_1, f_2 \rangle_2 \end{aligned}$$

est égal au produit scalaire de ces deux fonctions au sens du produit scalaire défini par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

L'équation caractéristique du problème inverse (4.14),

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G$$

ne fait intervenir que des fonctions déjà projetées sur l'espace B^\perp . D est un sous-espace de B car les fonctions de B prennent des valeurs arbitraires sur le domaine $\Omega \setminus \Omega_t$. D'après le théorème 4.2, comme $B^\perp \subset D^\perp$, $\Pi_{B^\perp} = \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}$. L'équation caractéristique du problème inverse, qui peut ainsi s'écrire, pour tout élément g de G :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{D^\perp} \circ \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle_2 &= \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle_2 \end{aligned}$$

est donc inchangée si le produit scalaire défini par l'expression (4.9) est remplacé par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. ■

NB Dans la suite, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ce qui ne porte pas à confusion puisque ces produits scalaires sont équivalents pour le problème inverse.

5.2.4 Régularisation du système de projection

L'équation caractéristique du problème inverse discrétisé d'inconnue $g_0 \in G_a$:

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_a \quad \langle \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle \quad (5.3)$$

est une équation linéaire singulière (qui admet plusieurs solutions). Les éléments de son noyau $B_a \cap G_a$ sont de trois types :

- Une cellule n de la grille telle que $\Pi_{B_a^\perp}(e_n) = 0$, c'est-à-dire une cellule qui, pour aucune date t , n'intersecte le domaine Ω_t . Une telle cellule, facile à détecter, est retirée des calculs d'inversion de perméabilité.
- L'espace C des fonctions constantes est inclus dans $B_a \cap G_a$. En effet il est engendré par la fonction constante 1 qui peut s'écrire aussi bien $1 = \sum_n e_n$ que $1 = \sum_{t,\alpha} \eta_{t,\alpha}$, ce qui montre son appartenance aux deux espaces G_a et B_a .
- En pratique il n'existe pas d'autres éléments appartenant à $B_a \cap G_a$: pour qu'un tel élément existe, il faudrait qu'il puisse se décomposer simultanément suivant les bases (e_n) et $(\eta_{t,\alpha})$, c'est à dire que ce soit une fonction constante sur les cellules de la grille et les mailles du maillage. Pour cela il faudrait que certaines cellules de la grille coïncident avec les mailles du maillage. Cette situation, envisageable en théorie, est exclue en pratique.

En dehors des cellules de grille non recouvertes par l'écoulement, et qui sont retirées des calculs, le noyau $B_a \cap G_a$ se restreint à l'espace à une dimension des constantes, C . L'équation du problème inverse peut être régularisée au moyen du lemme A.9 sous la forme de l'équation caractéristique régularisée, qui admet une unique solution : pour tout élément g de G_a ,

$$\langle \Pi_{B_a^\perp}(g_0), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle + \langle \Pi_C(g_0), \Pi_C(g) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle \quad (5.4)$$

Remarque Notons le paradoxe suivant : quel que soit l'espace $B \cap G$ des indéterminations, l'espace discrétisé $B_a \cap G_a$ se restreint à l'espace C à une dimension. Ceci signifie que, même si le problème inverse admet plusieurs constantes indéterminées, le problème discrétisé n'admet qu'une unique constante indéterminée. La section 5.3 suivante montre que le processus de discrétisation fixe arbitrairement les valeurs des autres constantes inconnues.

5.2.5 Calcul des termes de l'équation caractéristique discrétisée

La solution g_0 du problème inverse régularisé se décompose sous la forme $g_0 = \sum g^n e_n$. Comme les cellules e_n forment une base de G_a , l'équation caractéristique régularisée (5.4) s'écrit sous forme du système caractéristique régularisé : pour tout m ,

$$\sum_n g^n (\langle \Pi_{B_a^\perp}(e_n), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle + \langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle) = \langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle \quad (5.5)$$

Numériquement, les termes de ce système sont tous calculés à partir des volumes $\langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$ des intersections d'une cellule n avec une maille (i, α, t) , ainsi que des valeurs

$v^{i,\alpha,t}$ de ν sur une maille. Les formules qui permettent de calculer les termes du système sont les suivantes :

1. Le volume d'une maille (i, α, t) : $\|\epsilon_{i,\alpha,t}\|^2 = \sum_n \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.
2. Le volume d'un tube de courant (α, t) : $\|\eta_{\alpha,t}\|^2 = \sum_i \|\epsilon_{i,\alpha,t}\|^2$.
3. Le volume de l'intersection d'une cellule n avec un tube de courant (α, t) :
 $\langle e_n, \eta_{\alpha,t} \rangle = \sum_i \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.
4. Le terme $\langle \Pi_{B_a^\perp}(e_n), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle = \langle e_n, e_m \rangle - \sum_t \sum_\alpha \frac{\langle e_n, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle e_m, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2}$
5. le volume d'une cellule n : $\|e_n\|^2 = \sum_{i,\alpha,t} \langle e_n, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.
6. le terme $\langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle = \frac{\|e_n\|^2 \|e_m\|^2}{\sum_k \|e_k\|^2}$.
7. le produit scalaire $\langle \nu, \eta_{\alpha,t} \rangle = \sum_i v^{i,\alpha,t} \|\epsilon_{i,\alpha,t}\|^2$
8. le produit scalaire $\langle \nu, e_m \rangle = \sum_t \sum_\alpha \sum_i v^{i,\alpha,t} \langle e_m, \epsilon_{i,\alpha,t} \rangle$.
9. Le terme $\langle \Pi_{B_a^\perp}(\nu), \Pi_{B_a^\perp}(e_m) \rangle = \langle \nu, e_m \rangle - \sum_t \sum_\alpha \frac{\langle \nu, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle e_m, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2}$

Démonstration Par définition, le volume $V(n)$ d'une cellule n , d'indicatrice e_n , vaut :

$$\begin{aligned} V(n) &= \sum_t \int_{\Omega_t} e_n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \langle e_n, 1 \rangle \\ &= \sum_t \int_{\Omega_t} e_n^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \|e_n\|^2 \end{aligned}$$

car, comme e_n est une indicatrice, $e_n = e_n^2$. De même, le volume d'une maille (i, α, t_1) vaut $\langle \epsilon_{i,\alpha,t_1}, 1 \rangle = \|\epsilon_{i,\alpha,t_1}\|^2$. Comme $1 = \sum_n e_n = \sum_{i,\alpha,t_1} \epsilon_{i,\alpha,t_1}$, les formules 1. et 5. s'en déduisent.

Un tube de courant (α, t_1) est la somme des mailles (i, α, t_1) qui le composent, $\eta_{\alpha,t} = \sum_i \epsilon_{i,\alpha,t}$ ce qui donne les formules 2. et 3.. La décomposition de la fonction $\nu = \sum_{t,\alpha,i} v^{i,\alpha,t} \epsilon_{i,\alpha,t}$ sur les mailles fournit les formules 7. et 8..

Comme les indicatrices $\eta_{\alpha,t}$ des tubes de courant sont orthogonales, la projection d'une fonction f sur B_a , c'est-à-dire suivant les tubes de courant, vaut :

$$\Pi_{B_a}(f) = \sum_{t,\alpha} \frac{\langle f, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2} \eta_{\alpha,t}$$

Donc, pour deux fonctions f_1 et f_2 ,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B_a}(f_1), \Pi_{B_a}(f_2) \rangle &= \sum_{t,\alpha} \frac{\langle f_1, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle f_2, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2} \\ \Leftrightarrow \langle \Pi_{B_a^\perp}(f_1), \Pi_{B_a^\perp}(f_2) \rangle &= \langle f_1, f_2 \rangle - \sum_{t,\alpha} \frac{\langle f_1, \eta_{\alpha,t} \rangle \langle f_2, \eta_{\alpha,t} \rangle}{\|\eta_{\alpha,t}\|^2} \end{aligned}$$

ce qui donne les formules 4. et 9..

La projection de e_n sur l'espace C engendré par la fonction 1 vaut :

$$\Pi_C(e_n) = \frac{\langle e_n, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 \Rightarrow \langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle = \frac{\langle e_n, 1 \rangle \langle e_m, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{\|e_n\|^2 \|e_m\|^2}{\sum_k \|e_k\|^2}$$

C'est la formule 6..

■

5.3 Caractérisation numérique de l'indétermination

5.3.1 Quasiparallélisme

Les résultats qui précèdent soulèvent un paradoxe. Dans le cas d'un unique écoulement, l'indétermination correspond à une constante par tube de courant, donc il existe une infinité de paramètres inconnus indépendants. Dans le cas où les lignes de courant de deux écoulements se croisent, les informations apportées par les deux écoulements se complètent, ce qui réduit à une seule constante l'indétermination. Supposons maintenant deux écoulements presque identiques mais dont les lignes de courant se croisent quand même. Comment procéder au calcul inverse ?

Une première approche consiste à appliquer rigoureusement les résultats théoriques : comme les lignes de courant se croisent, l'indétermination se limite à une constante multiplicative inconnue sur le champ de perméabilité obtenu. Cette approche peut être dangereuse, et escamoter une partie de l'indétermination en fixant la plupart des constantes inconnues à une valeur arbitraire, sans que l'utilisateur prenne conscience de cet arbitraire. En effet, deux procédés d'interpolation différents, ou une légère incertitude de mesure, peuvent ainsi produire arbitrairement des champs de charge dont les lignes de courant, quoique semblables, se croisent, et réduire ainsi arbitrairement l'indétermination à une seule constante multiplicative.

Une seconde approche, plus pragmatique, considère que, pour deux écoulements trop proches, l'information apportée par l'un ne peut pas compléter celle apportée par l'autre et réduire l'indétermination à une seule constante. Les deux écoulements sont vus alors comme un seul écoulement et l'indétermination correspond à une constante inconnue par ligne de courant.

Lorsque les lignes de courant des différents écoulements, sans être parallèles, peuvent être considérées comme telles, elles sont dites **quasiparallèles**. Cette notion de **quasiparallélisme** est floue. A partir de plusieurs écoulements, comment savoir si il y a ou non quasiparallélisme, c'est-à-dire si l'information apportée par les différents écoulements est suffisamment riche pour réduire l'indétermination ? Nous présentons ici deux tests pour répondre à cette question.

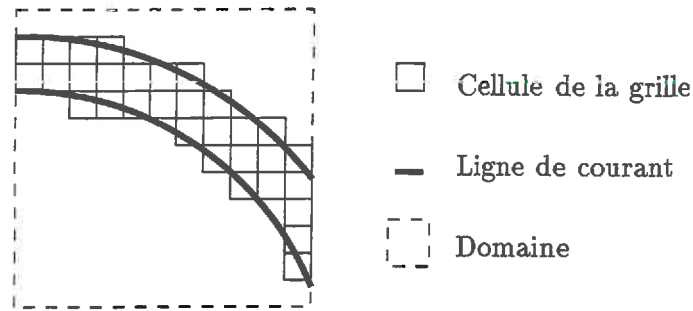


FIG. 5.5 - Approximation d'un tube de courant par des cellules d'une grille régulière.

5.3.2 Espace des indéterminations pour une seule date

Avant d'aborder le quasiparallélisme, examinons déjà le cas d'un seul écoulement, où l'indétermination correspond à une infinité de constantes.

Le paragraphe 5.2.4 évoque le problème suivant : la solution numérique du problème inverse est toujours unique à une constante multiplicative près. Ceci signifie que toutes les constantes indéterminées du problème inverse (à l'exception d'une constante multiplicative sur tout le domaine) sont fixées par le processus de discrétisation.

Comment les valeurs des constantes inconnues sont-elles fixées? Soit g_0 une solution du problème inverse. En théorie, $g_0 + b$ est également solution si b est une fonction constante sur une ligne de courant ($b \in B$). En fait, à cause de la discrétisation, l'approximation g_a d'une solution est donnée sur une grille régulière. La fonction b peut également être approchée par un élément de la grille g_b comme sur la figure 5.5, mais l'approximation n'est pas parfaite car les cellules n'épousent pas exactement la forme du tube de courant. Ainsi, du point de vue de la discrétisation, $g_a + g_b$ n'est pas équivalent à g_a , alors qu'en théorie $g_0 + b$ est équivalent à g_0 .

L'infinité des constantes indéterminées disparaît donc lors de la discrétisation pour des raisons géométriques : suivant la géométrie de la grille, certains tubes de courant sont approchés mieux que d'autres par les cellules de la grille. Un arbitraire géométrique fixe donc l'indétermination.

Ce résultat reste valable pour plusieurs écoulements, quel que soit le nombre (fini ou infini) de constantes indéterminées.

5.3.3 Convergence des solutions discrétisées

Nous venons de voir que l'indétermination peut être fixée par la géométrie de la grille sur laquelle sont calculés les résultats, donc par la discrétisation adoptée. Que se passe-t-il lorsque cette discrétisation s'affine? Le théorème A.12 de l'annexe A permet de répondre à cette question. On en déduit un test pour étudier le quasiparallélisme.

Une solution g du problème inverse se décompose en deux termes, suivant les espaces $(B \cap G)^\perp$ et $B \cap G$:

$$g = g_0 + g_B$$

Le terme $g_0 \in (B \cap G)^\perp$ est commun à toutes les solutions. Le terme g_B appartient à l'espace des indéterminations $B \cap G$. Il correspond à la partie non déterminée de la solution. Pour une discrétisation donnée (notée par l'indice a), le problème inverse admet une unique solution

discrétisée g_a . Cette solution peut également se décomposer suivant les espaces $(B \cap G)^\perp$ et $B \cap G$ sous la forme :

$$g_a = g_0(a) + g_B(a)$$

Quelle est le comportement des suites $g_0(a)$, $g_B(a)$ et g_a lorsque les discrétisations a s'affinent ? Le théorème A.12 montre que la suite $g_0(a)$ converge vers g_0 . Pour le cas de la suite $g_B(a)$, deux cas sont à considérer :

- Les écoulements sont tels que l'indétermination se limite à une unique constante (additive sur le champ de log-perméabilité). Cela signifie que pour toute discrétisation a , la partie indéterminée $g_B(a)$ est une constante. Cette constante est nulle car le système d'équations du problème discrétisé est régularisé (voir paragraphe 5.2.4). Ainsi $g_B(a) = 0$ pour toute discrétisation a , donc la suite des solutions discrétisées g_a converge vers g_0 .
- L'indétermination correspond à une infinité de constantes. Nous avons vu que la géométrie de la discrétisation fixe arbitrairement les valeurs de ces constantes, ce qui signifie que la partie indéterminée $g_B(a)$ des solutions discrétisées est complètement arbitraire. La suite $g_B(a)$ a toutes les chances de diverger, et par là d'entraîner la divergence de la suite g_a .

La divergence des solutions discrétisées est donc un signe qui montre que l'indétermination ne se limite pas à une unique constante.

Cette divergence est illustrée sur les exemples suivants, construits à partir du modèle du domino, présenté au paragraphe 2.1.5 : un milieu, divisé par une frontière verticale, est de perméabilité constante à droite et à gauche de cette frontière. Il existe un écoulement dont les lignes de courant sont horizontales et un écoulement dont les lignes de courant sont verticales.

Le premier exemple est construit avec uniquement un écoulement horizontal. L'indétermination correspond alors à une constante par ligne de courant horizontale. L'inversion est calculée pour les deux discrétisations 10×15 et 30×45 (figure 5.6). La solution pour la discrétisation la plus fine (30×45) est ramenée par moyenne à une grille 10×15 pour être comparée à la solution de la grille 10×15 . La différence entre les deux solutions (figure 5.7) prend des valeurs arbitraires sur les lignes de courant horizontales, donc sur l'espace $B \cap G$.

Dans le second exemple, un écoulement vertical est ajouté à l'écoulement horizontal. L'indétermination se limite alors à une unique constante. De nouveau, les solutions sont calculées pour les discrétisations 10×15 et 30×45 (figures 5.8). La différence des solutions (figure 5.7) est presque nulle, ce qui indique la convergence des solutions du problème inverse.

Ces résultats fournissent un test pour étudier le quasiparallélisme. Soient des écoulement différents, mais presque parallèles. Sont-ils suffisamment complémentaires pour restreindre l'indétermination à une unique constante ? Il suffit, pour répondre à cette question, de calculer la solution pour deux discrétisations différentes. Si les deux solutions diffèrent trop, cela signifie que l'indétermination correspond à une constante par ligne de courant.

5.3.4 Taille critique

En fait, la notion de quasiparallélisme est liée à la précision de la discrétisation. Des écoulements qui se croisent sont considérés comme parallèles pour des discrétisations grossières et comme différents pour des discrétisations fines. La figure 5.9 montre, pour illustrer cela, les lignes de courant de deux écoulements pour deux discrétisations différentes. Du point de vue

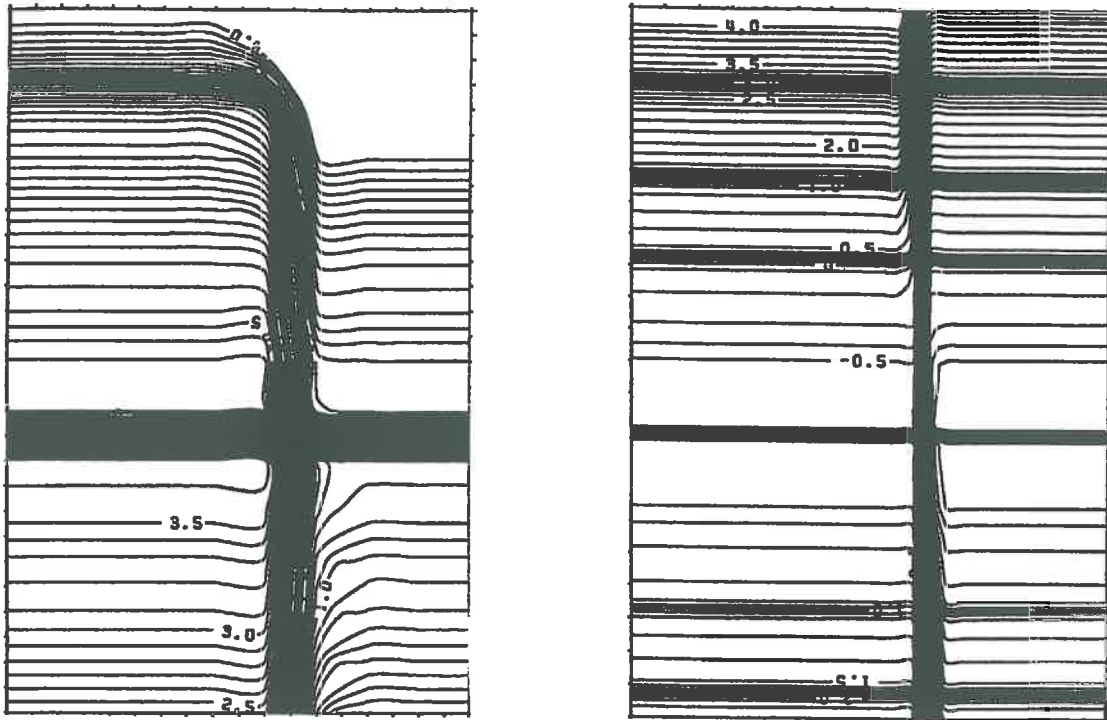


FIG. 5.6 - Solution du problème inverse pour le modèle du domino avec un seul écoulement horizontal. A gauche discrétisation 10×15 . A droite discrétisation 30×45 .

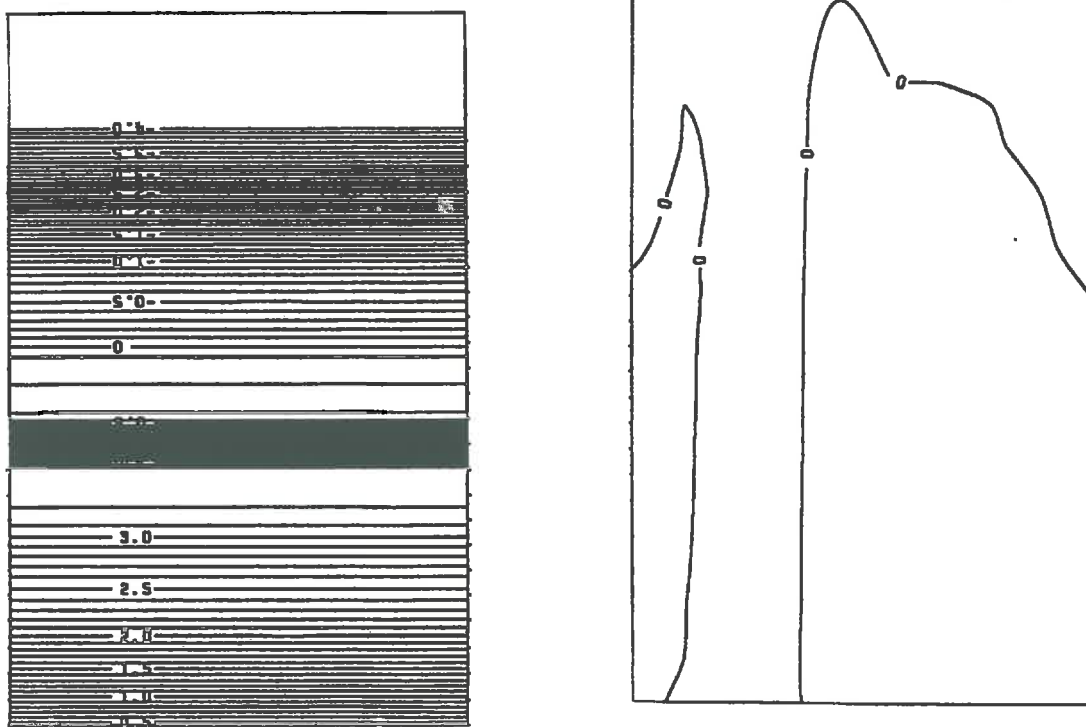


FIG. 5.7 - Différence entre les discrétisations 10×15 et 30×45 . A gauche un seul écoulement horizontal. A droite deux écoulements (horizontal et vertical). Les isolignes sont tracées pour les mêmes valeurs pour pouvoir comparer les deux figures. A droite la différence est presque nulle

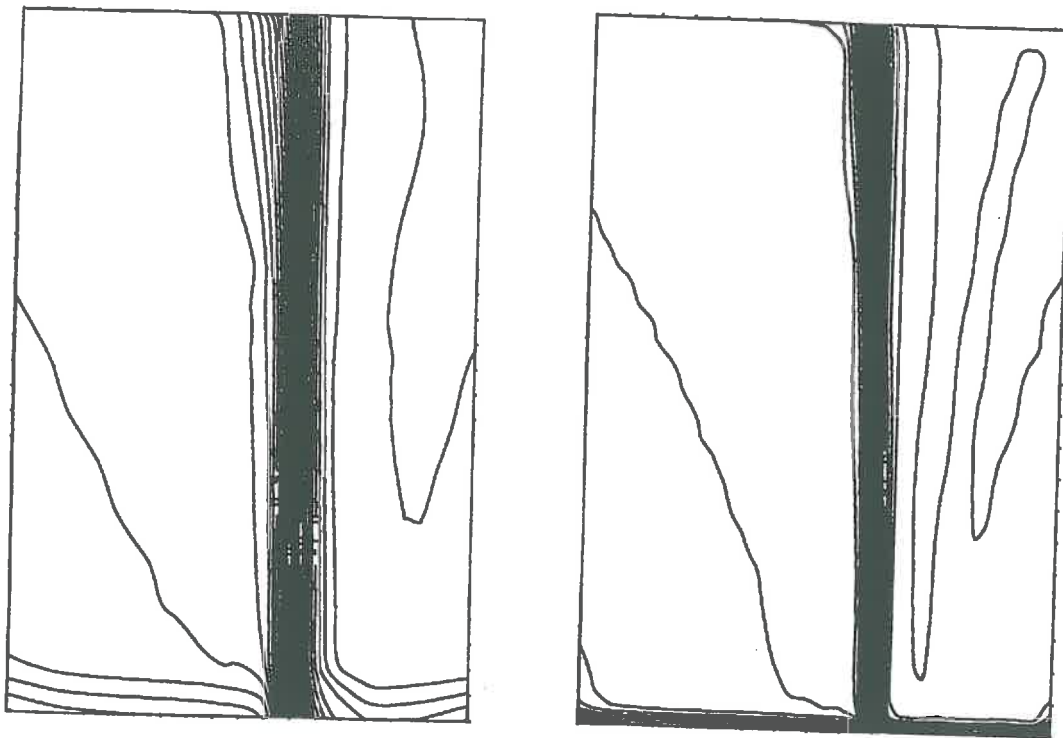


FIG. 5.8 - Solution du problème inverse pour le modèle du domino avec deux écoulements (horizontal et vertical). A gauche discrétisation 10×15 . A droite discrétisation 30×45 . Les solutions sont très semblables.

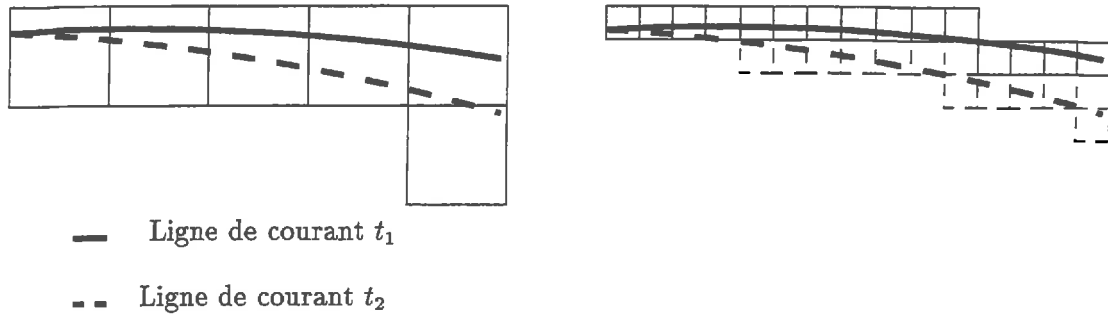


FIG. 5.9 - Les lignes de courant des deux écoulements sont identiques pour la discrétisation grossière (gauche) et différentes pour la discrétisation fine (droite).

de la discrétisation grossière, les écoulements sont parallèles, au contraire de la discrétisation fine.

Pour un jeu d'écoulements donné, il existe ainsi une **taille critique** pour la discrétisation, telle que les écoulements paraissent parallèles pour les discrétisations plus grossières et semblent se croiser pour les discrétisations plus fines. Du point de vue du problème inverse, les écoulements, pour les discrétisations plus fines que la taille critique, seront considérés apporter une information suffisamment riche pour réduire l'indétermination à une constante.

Pour des écoulements non-parallèles, la convergence des solutions discrétisées g_a a toujours lieu, mais cette convergence ne commence que pour les discrétisations plus fines que la taille critique. Lorsque la taille critique implique des discrétisations trop fines, cela signifie physiquement que les écoulements ne peuvent pas être considérés comme différents.

5.3.5 Calculs d'éléments propres

Il existe un second test pour savoir si, pour une discrétisation donnée, les écoulements sont suffisamment complémentaires. Il repose sur des résultats dont les démonstrations sont présentés en annexe C

Le lemme C.1 montre que le réel δ , défini par l'expression mathématique :

$$\delta = \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right)$$

caractérise l'indétermination du problème inverse. Il est en effet compris entre 0 et 1 ($0 \leq \delta \leq 1$) et vérifie $\delta > 0$ si l'indétermination correspond à une unique constante, $\delta = 0$ sinon.

Numériquement, le calcul du réel δ peut être approché par un calcul d'éléments propres. La définition suivante rappelle ce que sont les éléments propres d'une matrice :

Définition 5.1 Soit M une matrice de taille $N \times N$. Un **vecteur propre** y de \mathbb{R}^N est défini par la relation $M y = \lambda y$ où λ est un scalaire associé à y appelé **valeur propre**. L'ensemble des valeurs propres de M est appelé **spectre** de M .

Soit M la matrice, dont les composantes sont définies par :

$$M_{n,m} = \frac{\langle \Pi_{B^\perp}(e_n), \Pi_{B^\perp}(e_m) \rangle + \langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle}{\|e_m\| \|e_n\|}$$

avec les notations du paragraphe 5.2.5. Cette matrice correspond en fait à la matrice du système caractéristique régularisé (5.5), mais dont les termes sont normés par les quantités $\|e_n\|$. Les valeurs propres de M sont des réels positifs. Le lemme C.4 montre que λ_a , la plus petite valeur propre de M , est une approximation par valeur supérieure du réel δ . La valeur propre λ_a tend en effet vers δ lorsque la discrétisation s'affine.

5.3.6 Exemples

Les exemples présentés ici montrent que la valeur de δ , approchée numériquement par λ_a , exprime le parallélisme entre les écoulements d'un problème inverse. δ diminue en effet à mesure que les écoulements deviennent parallèles.

Les exemples sont construits de la façon suivante : un milieu est composé d'un disque de perméabilité constante plongée dans une matrice de perméabilité constante. Il est possible de calculer théoriquement des champs de charge, d'orientation variable, compatibles avec ce milieu. (Les formules théoriques sont données au paragraphe 2.1.6). A partir de ces écoulements, les perméabilités du milieu sont calculées sur une grille de 30×45 (soit 1350 cellules) et le spectre est étudié.

Les calculs sont réalisés d'abord avec un seul écoulement, ce qui est équivalent à deux écoulements parallèles, puis avec deux écoulements dont les directions font entre elles un angle de respectivement 10, 30 et 45 degrés. Ces calculs fournissent les spectres des figures 5.10 à 5.13, et montrent ainsi l'évolution du spectre en fonction de l'angle entre les deux écoulements.

Le spectre présente une grande différence lorsque les lignes de courant se croisent franchement (figure 5.13) et lorsqu'au contraire elles sont parallèles (figure 5.10). Entre ces deux cas extrêmes, le spectre varie progressivement de l'un à l'autre pour un angle de 10, puis 30 degrés. Les premières valeurs propres de chaque spectre, λ_a , données par le tableau suivant, montrent de même une évolution continue en fonction de l'angle :

angle (degrés)	0	10	30	45
λ_a	0.001	0.003	0.016	0.050

Les exemples montrent qu'il n'existe pas de discontinuité du spectre et de δ entre les cas où les lignes de courant sont parallèles et ceux où elles sont presque parallèles. La valeur de λ_a est grande lorsque les écoulements se croisent franchement, et diminue jusqu'à ce qu'ils deviennent parallèles. Elle quantifie ainsi le non-parallélisme des écoulements, donc la plus ou moins grande richesse apportée par les différents écoulements.

Notons de plus que pour des écoulements parallèles (angle de 0 degré) δ est nul en théorie, alors que λ_a vaut ici 0.001. Cette erreur d'approximation est étudiée au paragraphe suivant.

5.3.7 Second test

La valeur de δ est approchée par λ_a avec une **erreur d'approximation** ε_a définie par :

$$\varepsilon_a = \lambda_a - \delta$$

Cette quantité, positive d'après le lemme C.4, exprime la précision de la discrétisation : plus la discrétisation est fine, plus l'erreur ε_a est faible.

Tester la condition $\delta \neq 0$ permet de savoir si l'indétermination d'un problème inverse se limite ou non à une unique constante. Mais la valeur de δ n'est connue qu'avec une erreur

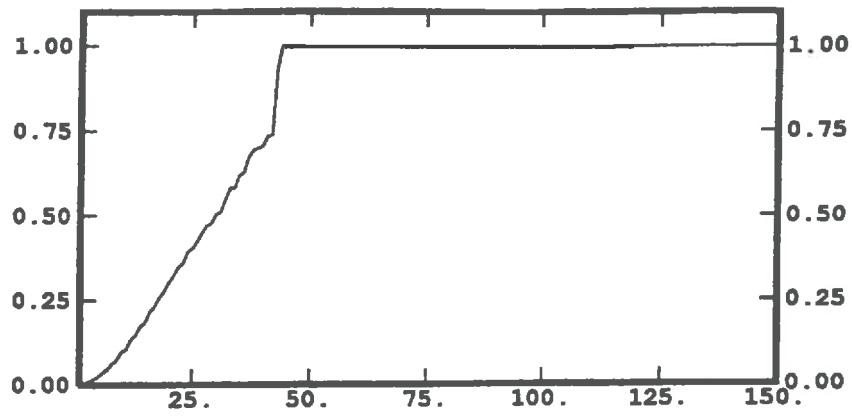


FIG. 5.10 - Spectre de Π_{B^\perp} pour un seul écoulement (0 degré).

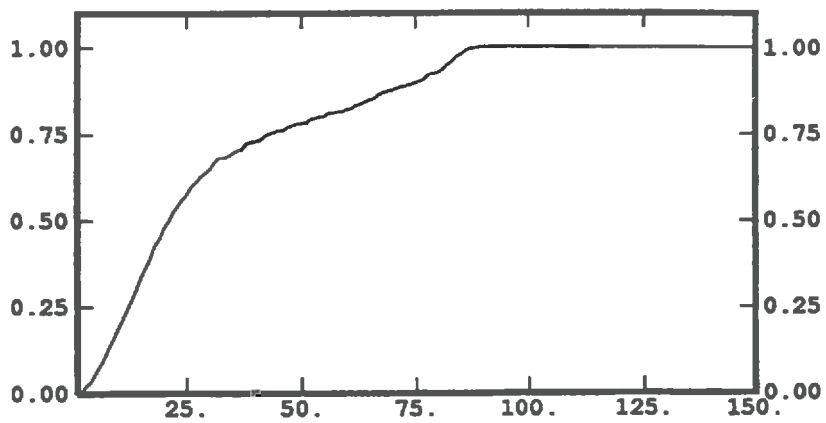


FIG. 5.11 - Spectre de Π_{B^\perp} pour 2 écoulements faisant un angle de 10 degrés.

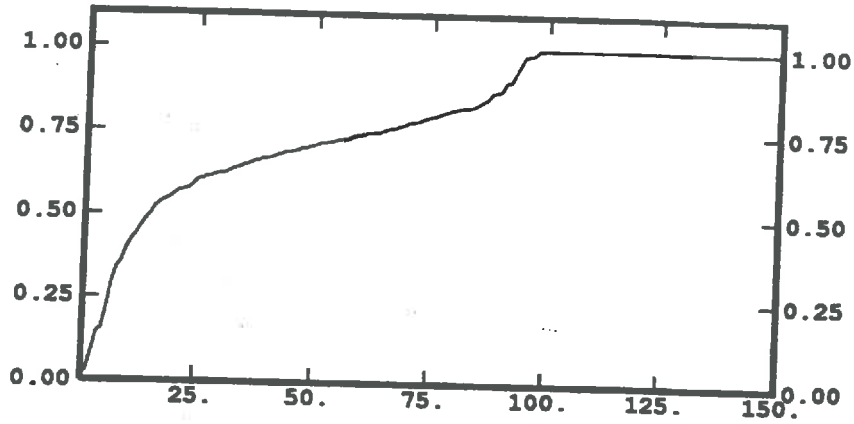


FIG. 5.12 - Spectre de $\Pi_{B_{\pm}}$ pour 2 écoulements faisant un angle de 30 degrés.

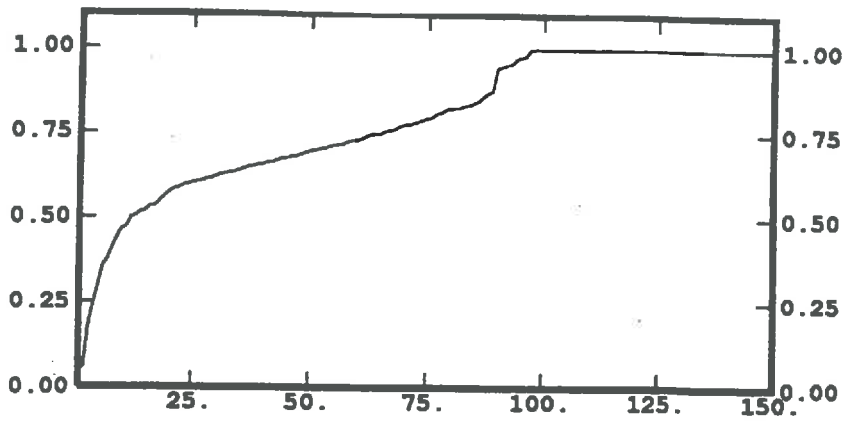


FIG. 5.13 - Spectre de $\Pi_{B_{\pm}}$ pour 2 écoulements faisant un angle de 45 degrés.

ε_a . Cela signifie que si δ est de faible valeur, il est masqué par l'erreur ε_a , ce qui empêche d'examiner la condition $\delta \neq 0$.

En fait, d'un point de vue numérique, l'important n'est pas d'examiner la nullité de δ , mais de savoir si son approximation λ_a peut être considérée comme non nulle, compte tenu de la précision de la discrétisation. Soit en effet un problème inverse défini par un jeu d'écoulements tel que δ soit non nul. Le paragraphe 5.3.4 montre que, pour les discrétisations plus grossières que la taille critique, tout se passe, pour le problème inverse discrétisé, comme si les écoulements étaient parallèles. Ce n'est que pour des tailles de discrétisation plus fines que la taille critique que l'indétermination se limite vraiment à une seule constante.

De la même façon, pour des discrétisations grossières, l'erreur ε_a masque δ . Lorsque la discrétisation s'affine, l'erreur ε_a diminue et met en évidence la non-nullité de δ . La taille critique pourrait ainsi être définie comme la taille de discrétisation pour laquelle δ est du même ordre de grandeur que l'erreur de discrétisation ε_a . Ainsi du point de vue numérique, l'indétermination se limite à une constante si λ_a est d'un ordre de grandeur supérieur à celui de l'erreur ε_a .

Dans la pratique, ε_a peut être estimée par λ_a^1 , la première valeur propre non nulle calculée avec un seul écoulement. En effet, pour un seul écoulement l'erreur de discrétisation ε_a^1 vaut $\varepsilon_a^1 = \lambda_a^1 - \delta^1 = \lambda_a^1$ car $\delta^1 = 0$, et d'autre part les erreurs de discrétisation ε_a et ε_a^1 dépendent avant tout de la finesse de la discrétisation, donc $\varepsilon_a^1 \approx \varepsilon_a$. Dans l'exemple proposé au paragraphe 5.3.6, avec une grille 30×45 , l'ordre de grandeur de l'erreur ε_a est donné par λ_a pour un angle de 0 degré, soit 0.001. La valeur de λ_a pour un angle de 10 degrés, 0.003 est à peine plus élevée: la discrétisation est proche de la taille critique. Pour les angles de 30 et 45 degrés, λ_a vaut respectivement 0.016 et 0.050: la discrétisation est plus fine que la taille critique.

L'examen de la première valeur propre peut être complété par celui des autres valeurs propres du spectre. Sur l'exemple présenté, le spectre pour un angle de 0 degré, c'est-à-dire dans le cas où l'indétermination ne se limite pas à une constante, présente un début parabolique absent des autres spectres. Notons enfin que, d'après la proposition ??, si $\delta = 0$ le vecteur propre correspondant à la valeur λ_a est l'approximation d'une fonction indéterminée, constante sur les lignes de courant de l'écoulement.

Remarque Les deux tests proposés reposent sur le principe suivant : l'important n'est pas la nature **exacte** de l'indétermination d'un problème inverse, mais de savoir si, **pour une discrétisation donnée**, l'indétermination se limite ou non à une unique constante. Dans ce cadre, des écoulements non parallèles sont considérés comme parallèles si la taille critique de discrétisation, au delà de laquelle l'indétermination se limite mathématiquement à une unique constante, est trop fine. L'appréciation du mot "trop" est liée à la physique du problème.

5.4 Problème inverse conditionnel

La méthode de résolution du problème inverse proposée jusqu'à présent suppose que les données de charge hydraulique sont la seule information disponible pour le calcul des perméabilités. Comment intégrer, comme information supplémentaire, la donnée de mesures de perméabilités? Ce nouveau problème inverse s'appelle **problème inverse conditionnel** par opposition au **problème inverse non-conditionnel**, sans données de perméabilités. La méthode de résolution proposée pour le problème inverse non-conditionnel s'adapte facilement

au problème conditionnel.

Le problème inverse conditionnel permet non seulement d'intégrer des mesures supplémentaires de perméabilité, mais offre aussi des moyens de s'affranchir de l'arbitraire lié à la géométrie de la discrétisation, dans le cas où l'indétermination ne se limite pas à une constante multiplicative.

5.4.1 Résolution théorique

Supposons les perméabilités connues par certaines mesures sur un sous-domaine Ω_d de Ω , de complémentaire $\Omega_i = \Omega \setminus \Omega_d$. La formulation du problème inverse conditionnel, conditionné par ces mesures, est semblable à celle du problème inverse vu précédemment : la recherche de solution ne se fait pas directement sur les perméabilités $k(\mathbf{x})$ mais sur leur logarithme $g(\mathbf{x}) = \ln(k(\mathbf{x}))$; elle passe par la minimisation d'une fonctionnelle impliquant la fonction $v(\mathbf{x}, t) = \ln(F(\mathbf{x}, t))$ (cf. paragraphe 4.2.1) et les espaces de fonctions B et G (cf. paragraphe 4.2.2).

La seule différence par rapport au cas précédent est la décomposition de l'espace G des fonctions invariantes dans le temps en 2 sous-espaces :

- G_d est l'espace des fonctions invariantes dans le temps définies sur Ω_d et nulles sur Ω_i .
- G_i est l'espace des fonctions invariantes dans le temps définies sur Ω_i et nulles sur Ω_d .

Une solution g de G se décompose en $g = g_d + g_i$ où $g_d \in G_d$ est la partie de la solution déjà connue par les mesures, et $g_i \in G_i$ la partie inconnue à déterminer par résolution du problème inverse. Le problème inverse conditionnel se formalise sous forme du problème $\mathcal{P}_4(v)$.

Problème $\mathcal{P}_4(v)$ Recherche, pour une fonction v donnée, des fonctions g de G telles que $g = g_d$ sur Ω_d et qui minimisent la fonctionnelle : $J(g, v) = \min_{b \in B} \|g - b - v\|^2 = \|\Pi_{B^\perp}(g - v)\|^2$

Le lemme suivant donne les propriétés des solutions de ce problème :

Lemme 5.1 *Il existe toujours des solutions au problème inverse conditionnel $\mathcal{P}_4(v)$, conditionné par les données g_d . Elles sont données par : $g_0 = g_d + g_i$ où la partie g_i inconnue de g_0 est solution de l'équation :*

$$\Pi_{B^\perp}(g_i) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_i)}(v - g_d) \quad (5.6)$$

ainsi que de l'équation caractéristique du problème inverse conditionnel :

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_i \quad \langle \Pi_{B^\perp}(g_i), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(v - g_d), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad (5.7)$$

Démonstration Une fonction g de G qui vaut g_d sur Ω_d s'écrit $g = g_d + g_2$ avec $g_2 \in G_i$. La fonctionnelle $J(g, v)$ peut aussi s'écrire $J(g, v) = \|\Pi_{B^\perp}(g_2) - \Pi_{B^\perp}(v - g_d)\|^2$. Elle doit être minimisée sur l'ensemble des fonctions g_2 de G_i . Finalement, les données du problème $\mathcal{P}_4(v)$ ressemblent aux hypothèses du théorème A.11, dans lequel v est remplacé par $v - g_d$ et G par G_i . Les résultats regroupés dans le théorème A.11 peuvent s'appliquer : il existe des solutions g_i de G_i qui minimisent la fonctionnelle $J(g, v)$. Elle sont solutions des deux équations (5.6) et (5.7). ■

5.4.2 Résolution numérique

Dans la discrétisation G_a de G , les cellules de la grille sont réparties en deux catégories :

- les cellules indicées par u , sur lesquelles le logarithme g_d des perméabilités est connu. Leurs indicatrices e_u forment l'espace G_{da} , approximation de l'espace G_d .
- les cellules indicées par n dont la valeur doit être calculée. Leurs indicatrices e_n forment l'espace G_{ia} , approximation de l'espace G_i .

A la différence du cas non-conditionnel, l'équation caractéristique discrétisée du problème inverse conditionnel, d'inconnue $g_i \in G_i$,

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_{ia} \quad \langle \Pi_{B_a^\pm}(g_i), \Pi_{B_a^\pm}(g) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\pm}(\nu - g_d), \Pi_{B_a^\pm}(g) \rangle \quad (5.8)$$

est une équation linéaire régulière, comme le montre le lemme suivant. Elle n'a donc pas besoin d'être régularisée.

Lemme 5.2 *L'équation caractéristique discrétisée du problème inverse conditionnel, d'inconnue $g_i \in G_i$,*

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_{ia} \quad \langle \Pi_{B_a^\pm}(g_i), \Pi_{B_a^\pm}(g) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\pm}(\nu - g_d), \Pi_{B_a^\pm}(g) \rangle$$

est une équation linéaire régulière.

Démonstration La différence entre deux solutions de l'équation (5.8) est une fonction g de G_{ia} qui vérifie $\Pi_{B_a^\pm}(g) = 0$, donc qui appartient à $B_a \cap G_{ia} \subset B_a \cap G_a = C$. Cette fonction g est constante dans toute le domaine Ω car appartenant à C et nulle sur les cellules de G_{da} car appartenant à G_{ia} . Elle est donc nulle, ce qui montre que l'équation (5.8) est régulière. ■

La solution g_0 du problème inverse régularisé se décompose sous la forme $g_0 = \sum g^n e_n + \sum g^u e_u$. Les composantes g^u sont les données conditionnantes, les composantes g^n les inconnues du système. Comme les fonctions indicatrices e_n forment une base de G_{ia} , l'équation caractéristique (5.8) s'écrit sous forme du système caractéristique conditionnel : pour tout indice m de G_{ia} ,

$$\sum_n g^n \langle \Pi_{B_a^\pm}(e_n), \Pi_{B_a^\pm}(e_m) \rangle = \langle \Pi_{B_a^\pm}(\nu), \Pi_{B_a^\pm}(e_m) \rangle - \sum_u g^u \langle \Pi_{B_a^\pm}(e_u), \Pi_{B_a^\pm}(e_m) \rangle \quad (5.9)$$

Les éléments de ce système ont déjà été calculés au paragraphe 5.2.5 pour le système caractéristique régularisé du problème inverse non-conditionnel.

5.4.3 Exemple

L'influence des données conditionnantes sur les résultats de l'inversion est illustrée sur un exemple, construit à partir du modèle du domino : un milieu, divisé par une frontière verticale, est de perméabilité constante à droite et à gauche de cette frontière. Il existe un écoulement dans ce milieu dont les lignes de courant sont horizontales. Avec ce seul écoulement, l'indétermination du problème inverse non-conditionnel correspond à une constante inconnue par ligne de courant. Lors de l'inversion, ces constantes sont arbitrairement fixées

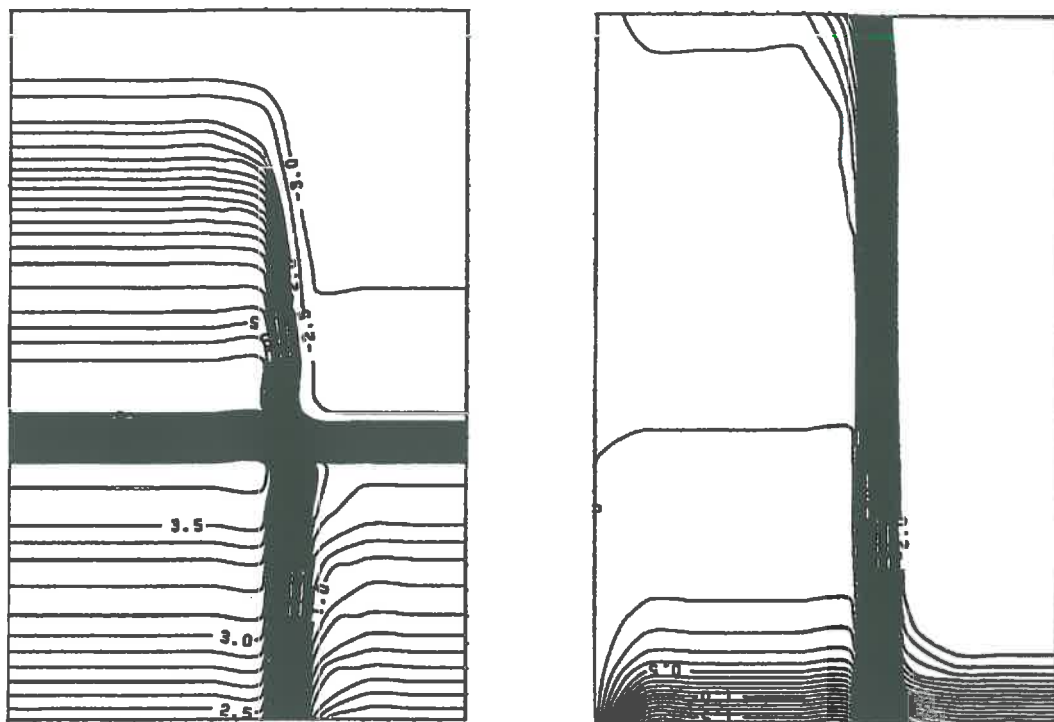


FIG. 5.14 - Solution du problème inverse pour le modèle du domino avec un écoulement horizontal. A gauche inversion non-conditionnelle. A droite inversion conditionnelle.

par la géométrie des espaces d'approximation. La figure 5.14 montre le résultat de l'inversion pour une grille 10×15 . En plus de la coupure verticale attendue, le résultat comporte des bandes horizontales, qui proviennent de l'indétermination.

Si maintenant l'inversion est conditionnée par des données de perméabilité sur une ligne verticale, qui croise toutes les lignes de courant, il n'y a plus d'indétermination. La figure 5.14 montre le résultat de l'inversion sur une grille 10×15 , conditionnée par la valeur $\ln(k) = 0$ sur le bord vertical gauche de la grille. Les données supplémentaires de perméabilités suppriment l'indétermination.

5.4.4 Fixer l'arbitraire du cas non conditionnel

Lorsque les écoulements ne se croisent pas suffisamment, l'indétermination du problème inverse correspond à une constante par ligne de courant. Numériquement, cette indétermination est fixée arbitrairement par la géométrie des espaces d'approximation. Dans l'exemple précédent (figure 5.14), cet arbitraire de nature géométrique masque une partie du résultat. Pour éviter cet effet indésirable, il est préférable de fixer l'indétermination à une valeur a priori plutôt que laisser à la géométrie des espaces d'approximations le soin de le faire. Il suffit pour cela

1. de trouver une courbe qui croise toutes les lignes de courant (le parement amont d'un barrage par exemple);

2. de fixer le logarithme de perméabilité des cellules situées sur cette courbe à une valeur a priori ($\ln(k) = 0$ par exemple) ;
3. puis de réaliser l'inversion conditionnelle, conditionnée par les données a priori.

Le résultat obtenu par une telle procédure ne correspond bien-sûr pas au vrai champ de perméabilité puisque que l'indétermination existe toujours. C'est simplement un résultat non parasité par des éléments indésirables de l'espace des indéterminations.

5.4.5 Représentation pratique des lignes de courant

Dans un cas où l'indétermination consiste en une constante par ligne de courant, fixer l'indétermination permet d'éviter de voir le résultat de calcul parasité par des fonctions indéterminées, dont les valeurs, fixées par la géométrie de la discrétisation, peuvent être particulièrement élevées. Pourtant, l'indétermination demeure. Les rapports de perméabilités retrouvés par calcul inverse n'ont de sens qu'entre des zones situées sur une même ligne de courant.

Ainsi, pour interpréter les calculs, il est intéressant de disposer, en plus du résultat d'inversion, d'une représentation des lignes de courant, discrétisée sur les cellules de la grille. Cette représentation s'obtient de la façon suivante :

1. trouver une courbe qui croise toutes les lignes de courant ;
2. indiquer les cellules situées sur cette courbe en leur attribuant la valeur d'un paramètre croissant le long de la courbe (une fonction affine par exemple) ;
3. chercher, par application du lemme 5.3, la fonction g de G_a la plus proche d'une fonction de B_a conditionnellement aux valeurs prises par le paramètre sur les cellules indicées.

Lemme 5.3 Soit g_d une fonction de G_{da} . La fonction de G_a la plus proche de l'espace B_a et telle que $g_0 = g_d$ pour les cellules conditionnantes, s'écrit $g_0 = g_d + g_i$ où la partie inconnue g_i de G_{ia} est solution de l'équation caractéristique :

$$\text{pour tout élément } g \text{ de } G_{ia} \quad \langle \Pi_{B_a^\perp}(g_i), \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle = - \langle \Pi_{B_a^\perp} g_d, \Pi_{B_a^\perp}(g) \rangle$$

Démonstration Une fonction g_0 de G_a , proche d'une fonction de B_a , et conditionnée par $g_0 = g_d$ sur les cellules conditionnantes, doit minimiser la fonctionnelle $J(g) = \min_{b \in B_a} \|g - b\|^2 = \|\Pi_{B_a^\perp}(g)\|^2$ sous la condition $g_0 = g_d$. Cette formulation coïncide avec le problème $\mathcal{P}_4(v)$ pour $v = 0$. La solution g_0 se décompose donc sous la forme $g_0 = g_d + g_i$ avec g_i solution de l'équation caractéristique proposée. ■

La fonction g ainsi trouvée, tout en appartenant à G_a , est proche d'une fonction de B_a : c'est presque une fonction constante sur les lignes de courant, qui vaut la valeur du paramètre sur chaque ligne. Ainsi, les lignes d'isovaleur de cette fonction pour différentes valeurs du paramètre sont-elles proches des lignes de courant.

La figure 5.15 illustre cette approximation avec l'exemple déjà utilisé (cf. paragraphe 5.4.3) du domino, pour un unique écoulement horizontal et une grille de 10×15 . La figure obtenue redonne bien des lignes de courant horizontales. Notons sur la gauche, où sont placées les

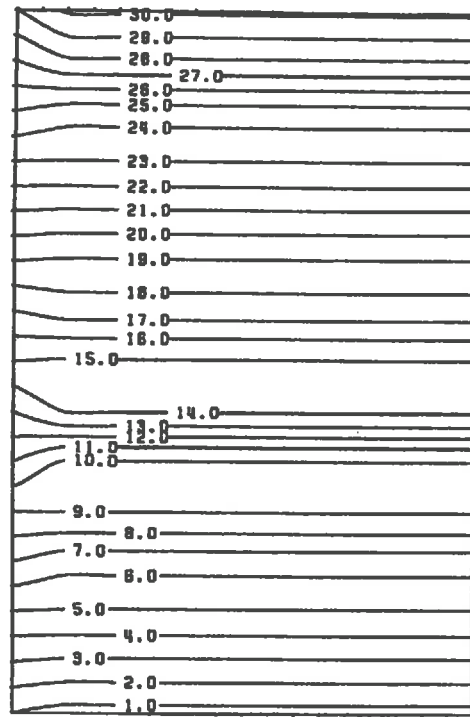


FIG. 5.15 - Représentation de lignes de courant pour le modèle du domino avec un écoulement horizontal.

données conditionnantes, un effet de bord qui provient de ce que l'épaisseur des cellules de la grille ne coïncident pas avec l'épaisseur des tubes de courant de la discrétisation de B_2 . Cet effet de bord, dû à la géométrie de l'approximation numérique, n'a pas d'effet sur le reste de la représentation.

Chapitre 6

Expériences numériques

Résumé du chapitre

Ce chapitre montre sur des exemples synthétiques les résultats de la méthode d'inversion proposée.

- La section 6.1 montre sur des exemples numériques comment ajuster le paramètre effet de pénalité du modèle.
- La section 6.2 montre pourquoi et comment employer la méthode d'inversion conditionnelle.
- La section 6.3 analyse l'influence du nombre de mesures et du bruit sur les résultats d'inversion.

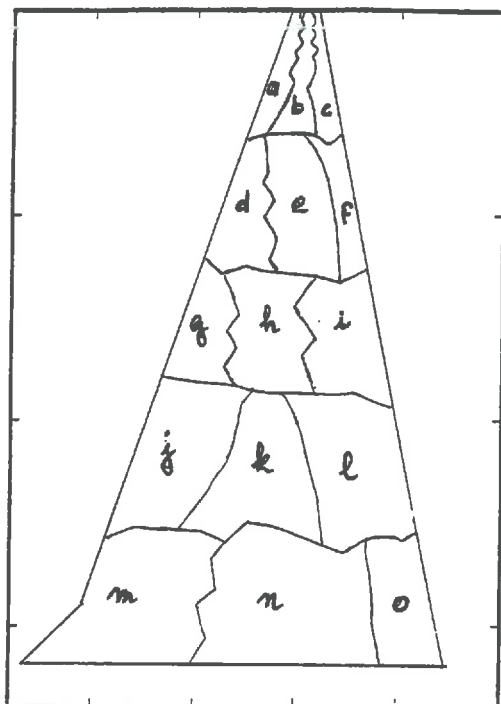


FIG. 6.1 - Zones de perméabilité constante des champs de perméabilités a priori.

La méthode d'inversion proposée est maintenant analysée à travers ses résultats numériques. Elle est appliquée pour cela à des mesures de charge synthétiques, calculées à partir de champs de perméabilité donnés a priori. Les champs de perméabilité obtenus par calcul inverse peuvent ainsi être comparés aux champs a priori.

6.1 Exemples numériques

Les paragraphes 2.1.6 et 2.1.5 proposent des champs de charge, donnés sous forme analytique, et compatibles avec un champ de perméabilité donné a priori. Ces exemples, très pratiques pour tester la méthode, sont peu réalistes. C'est pourquoi d'autres exemples plus réalistes ont été construits par la méthode des éléments finis.

6.1.1 Description des exemples

Les exemples numériques sont construits à partir d'un champ de perméabilité donné a priori, dont les valeurs sont constantes sur 15 zones, indicées de 'a' à 'o', et représentées sur la figure 6.1. Les champs de charge sont calculés par un logiciel d'éléments finis, NS2D, utilisé à l'EDF. Les calculs simulent un remplissage, une stabilisation, puis une vidange du barrage, sur une durée de 360 jours, c'est-à-dire pour 24 dates espacées de 15 jours. L'historique de la hauteur d'eau retenue dans le barrage est donné sur la figure 6.2.

Nous présentons ici deux exemples, appelés par la suite respectivement exemple 1 et exemple 2. Sur l'exemple 1, les perméabilités sont organisées par couches de valeur constante et croissante du bas vers le haut. Le rapport de perméabilités entre deux couches successives

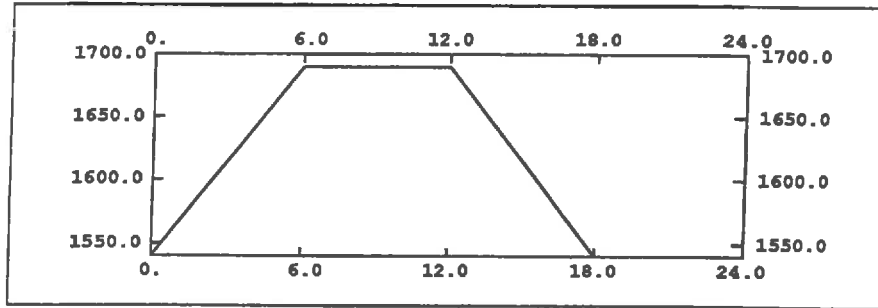


FIG. 6.2 - Scénario de remplissage du barrage.

vaut 5.6. Les valeurs zone par zone sont données dans le tableau suivant :

zones	valeurs
a b c	8.64 m/j
d e f	1.536 m/j
g h i	0.273 m/j
j k l	0.048 m/j
m n o	0.00864 m/j

Sur le second exemple, le champ de perméabilité a priori est un quadrillage dont les valeurs croissent suivant une diagonale. Les valeurs de perméabilité zone par zone sont données dans le tableau suivant :

zones	valeurs
a	8.64 m/j
b d	2.732 m/j
c e g	0.864 m/j
f h j	0.273 m/j
i k m	0.0864 m/j
l n	0.0273 m/j
o	0.00864 m/j

Le paragraphe 2.1.7 expose le système de représentation des résultats de la méthode d'inversion. Les champs de perméabilités sont calculés sur une grille de forme trapézoïdale. Pour mieux apprécier les résultats, la grille est redressée en une grille rectangulaire, et le champ de perméabilité est représenté par des lignes d'isovaleur de son logarithme.

Dans ce chapitre, pour comparer les résultats de calcul aux champs donnés a priori, le même système de représentation est utilisé : les valeurs de log-perméabilité des deux exemples sont projetées sur la grille de calcul, puis représentées par des isolignes (voir figure 6.3).

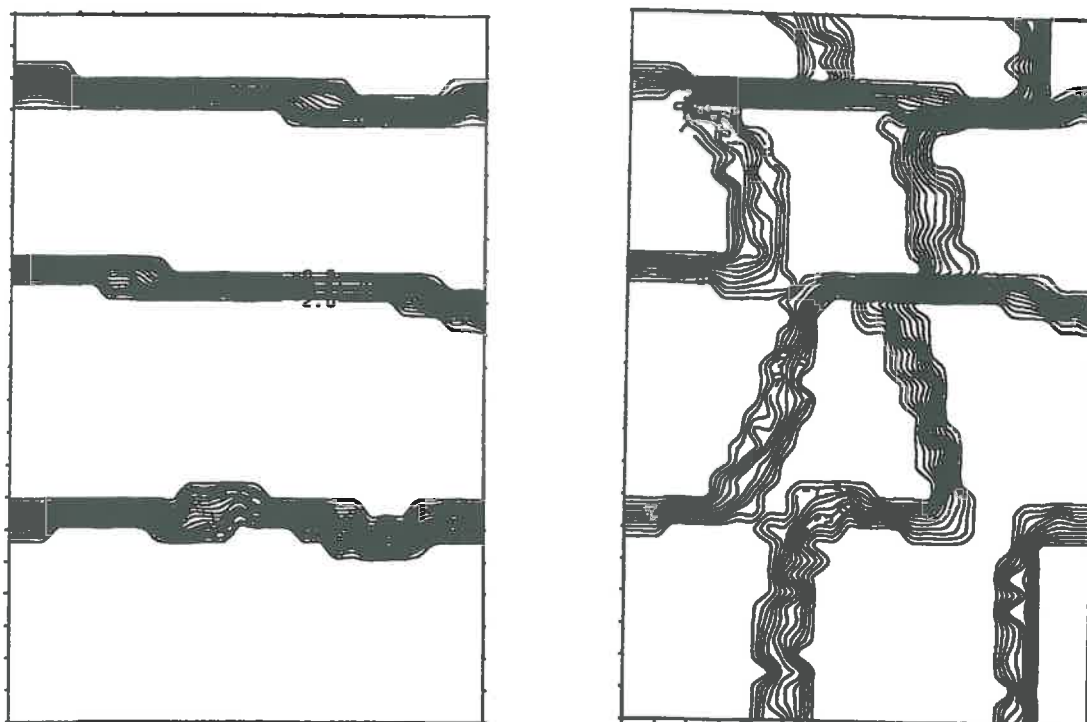


FIG. 6.3 - Représentation des champs de perméabilité a priori de l'exemple 1 (gauche) et 2 (droite). Les valeurs de leurs logarithmes sont projetées sur la grille de calcul, puis représentées par des isolignes.

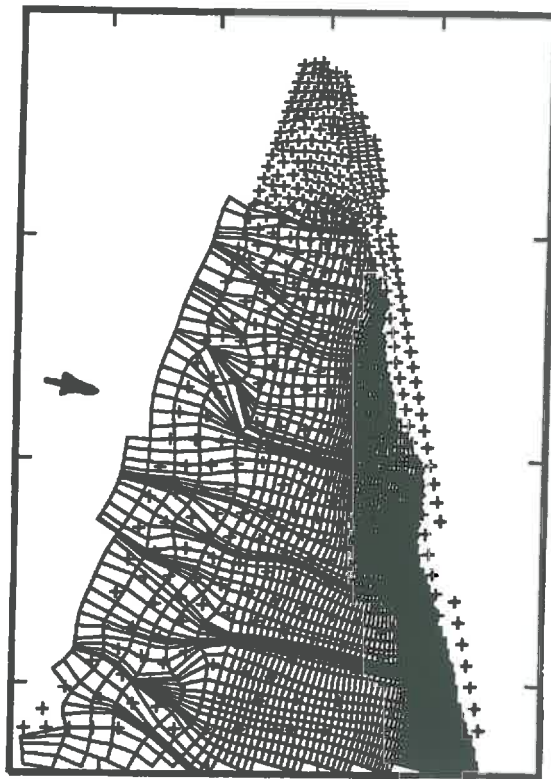


FIG. 6.4- Interpolation de la charge, pour la date 10 de l'exemple 2, avec un bruit de mesure de 1 m. La valeur 100 de l'effet de pépité est insuffisante, à cause des zones de faibles gradients.

6.1.2 Ajustement de l'effet de pépité

L'interpolation de la charge est régularisée pour tenir compte, d'une part d'une erreur de mesure, et d'autre part des variations à hautes fréquences de la charge. Le paramètre qui assure cette régularisation est l'effet de pépité. Rappelons qu'ici l'effet de pépité ne peut être interprété que comme un paramètre mathématique du modèle d'interpolation, et qu'il n'est pas possible de le ramener à une incertitude de mesure. Les valeurs qu'il prend dans la suite ne sont donc pas parlantes.

G. Wahba, dans [45], propose d'utiliser la validation croisée, décrite en section 3.3, pour ajuster le coefficient de régularisation. Dans notre cas, cette méthode n'est pas adaptée comme le montre l'exemple de la figure 6.4. Cet exemple est construit à partir de la date 10 de l'exemple numérique 2, pour lequel un bruit de mesure, d'écart type 1 m, est ajouté aux valeurs de charge synthétiques. La validation croisée, avec le critère C_1 (voir paragraphe 3.3.1), donne un effet de pépité de 37. La figure montre que même pour un effet de pépité de 100, l'écoulement n'est pas suffisamment régularisé.

Les raisons suivantes expliquent pourquoi la méthode de validation croisée est inadaptée à notre problème :

- Le krigeage, avec un effet de pépité donné, filtre le bruit de mesure comme une combinaison linéaire des données. Plus l'amplitude des données est grande, plus le bruit filtré est grand. Ainsi un même effet de pépité aura un effet filtrant plus fort dans les zones de forts gradients, où les données ont une forte amplitude, que dans les zones de faibles

gradients. Pour filtrer un même bruit, la validation croisée trouvera donc un effet de pépité faible dans les zones de forts gradients, et fort dans les zones de faibles gradients.

La validation croisée, qui suppose les données homogènes, réalise un compromis entre les zones de faibles gradients et les zones de forts gradients. L'effet de pépité obtenu aura donc un pouvoir filtrant trop fort dans les zones de forts gradients, et trop faible dans les zones de faibles gradients.

- Pour le problème inverse, l'interpolation de la charge sert à la détermination des lignes de courant. Or le suivi des lignes de courant est beaucoup plus sensible aux erreurs dans les zones de faibles gradients que dans les zones de forts gradients.

La validation croisée aura tendance à sous estimer l'effet de pépité nécessaire à la régularisation, car elle sous-estime sa valeur pour les zones de faibles gradients, qui sont les zones sensibles du problème inverse. Sur l'exemple de la figure 6.4, c'est en effet dans les zones de faibles gradients que l'effet de pépité, obtenu par validation croisée, est insuffisant.

6.1.3 Ajustement visuel

L'effet de pépité nécessaire pour régulariser les courbes est sous-estimé par la validation croisée. Comment peut-il être ajusté? Le seul moyen envisagé est de visualiser les lignes de courant obtenues après krigeage et d'apprécier leur régularité. Pour évaluer les conséquences de ce choix subjectif, il faut connaître l'influence du paramètre effet de pépité sur les résultats d'inversion.

Un bruit de 0.1 m a été rajouté sur les charges de l'exemple numérique 2. Par validation croisée, l'effet de pépité obtenu est nul. Les lignes de courant sont représentées aux figures 6.5 à 6.10 pour les valeurs d'effet de pépité de 0, 10, 100, 200, 500, 2000 et 10000.

Pour chaque valeur de l'effet de pépité de 100 à 10000, le champ de perméabilité peut être calculé par la méthode inverse. Pour chaque résultat d'inversion, la moyenne du logarithme de perméabilité est ensuite calculée sur chaque zone de perméabilité constante, ce qui fournit les rapports de perméabilités entre zones voisines, donnés dans le tableau suivant :

Rapports dans une même couche horizontale

Effet de pépité	100	200	500	2000	1000	rapport théorique
rapport d-e	3.35	2.36	2.59	3.06	3.32	3.16
rapport e-f	4.62	10.80	1.26	4.06	2.36	3.16
rapport g-h	2.66	2.27	2.25	1.90	1.35	3.16
rapport h-i	3.94	3.90	3.74	3.22	2.25	3.16
rapport j-k	3.46	3.35	3.35	3.13	2.59	3.16
rapport k-l	2.97	2.66	2.80	2.80	2.20	3.16
rapport m-n	3.71	3.78	3.97	4.26	4.10	3.16
rapport n-o	2.94	2.97	2.80	2.36	1.75	3.16

D'après les visualisations des écoulements, un effet de pépité de 100 semble adapté pour régulariser le krigeage de la charge. Les résultats de calcul montrent qu'effectivement cet effet de pépité restitue bien les perméabilités.

Le choix du coefficient de régularisation résulte d'un compromis : l'effet de pépité est fixé pour que le champ de charge soit ni trop, ni trop peu régulier. Ce choix présente toutefois une certaine souplesse. Sur l'exemple proposé, une fois la zone de grande irrégularité dépassée,

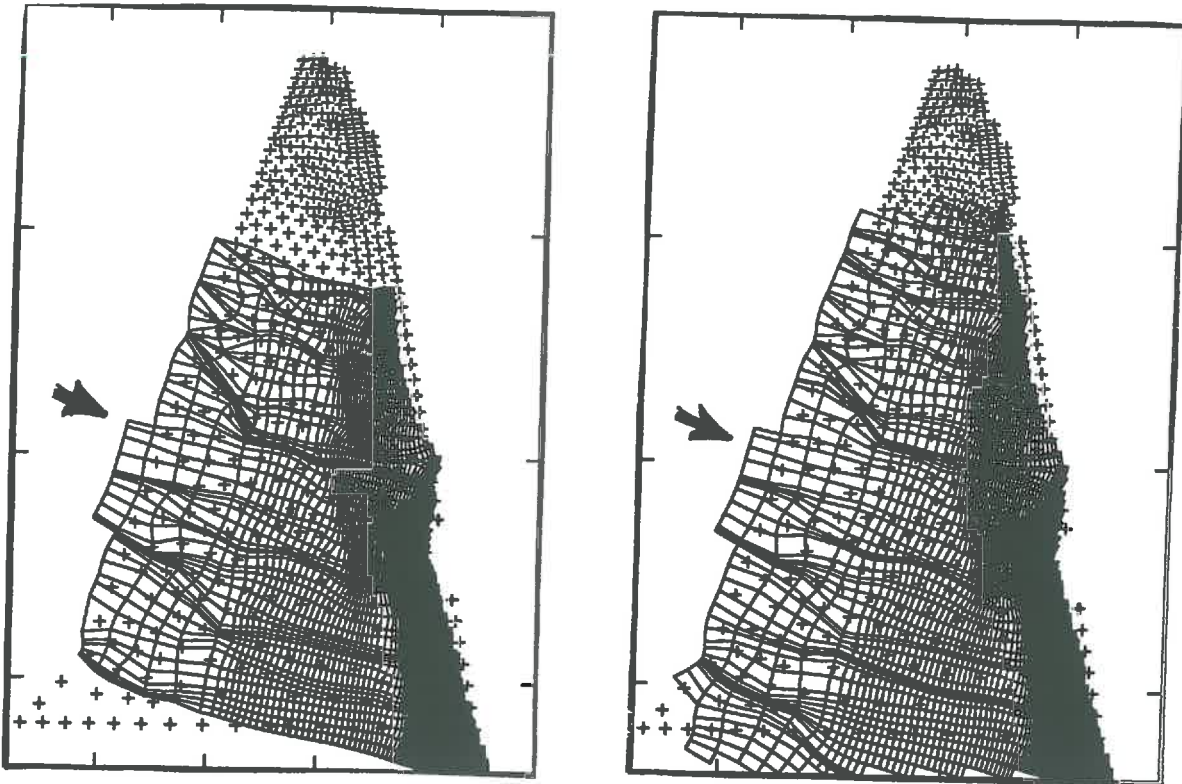


FIG. 6.5 - Sur l'exemple numérique 2, bruité par une erreur de mesure de 0.1 m, écoulement de la date 10 pour un effet de pépité de 0 (gauche) et 10 (droite).

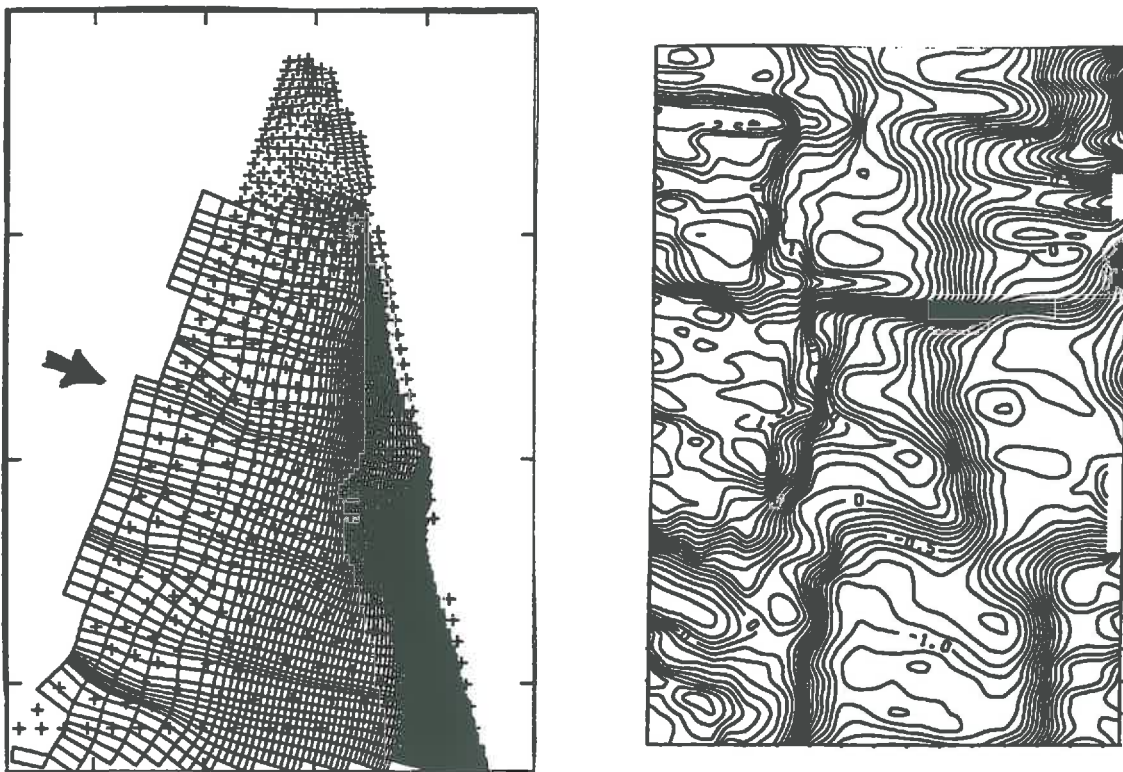


FIG. 6.6 - Sur l'exemple numérique 2, bruité par une erreur de mesure de 0.1 m, écoulement de la date 10 et perméabilités estimées pour un effet de pépité de 100.

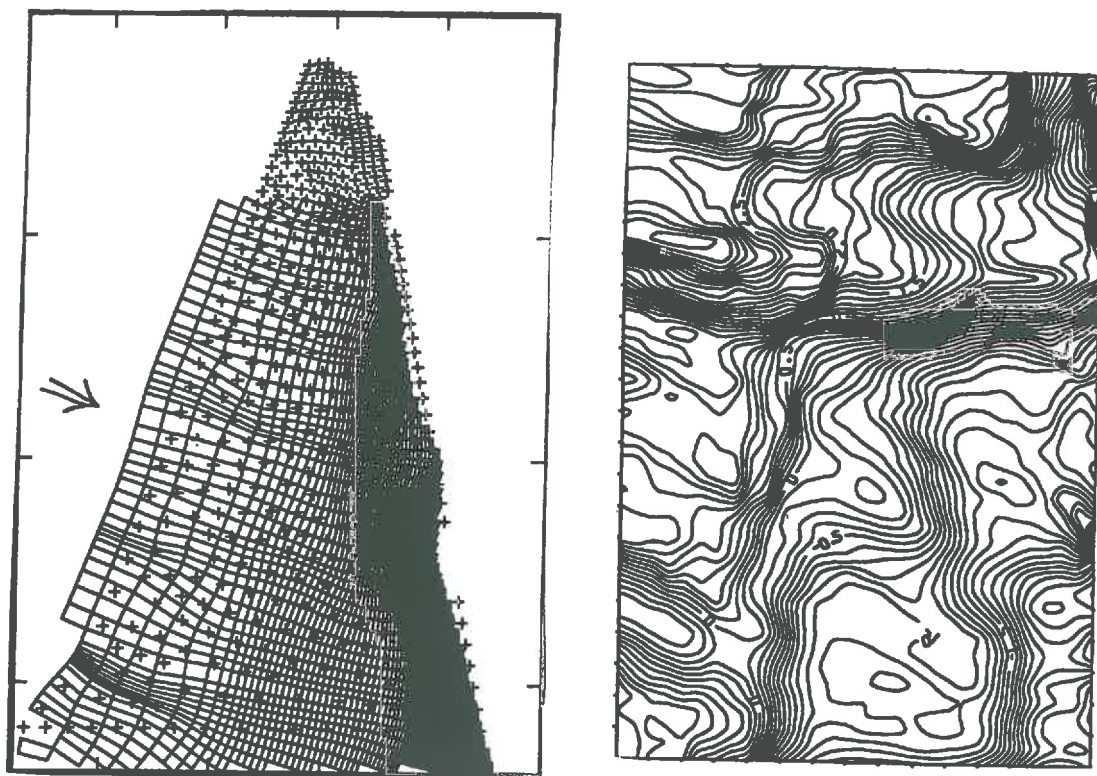


FIG. 6.7 - Sur l'exemple numérique 2, bruité par une erreur de mesure de 0.1 m, écoulement de la date 10 et perméabilités estimées pour un effet de pécipite de 200.

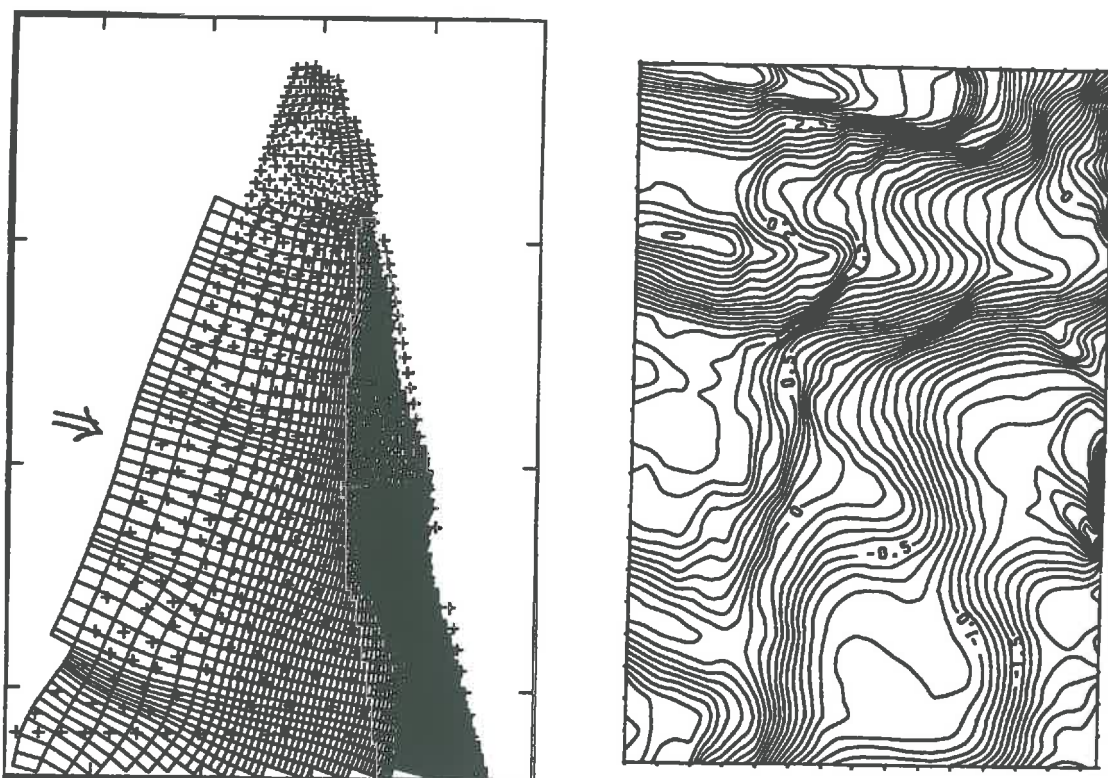


FIG. 6.8 - Sur l'exemple numérique 2, bruité par une erreur de mesure de 0.1 m, écoulement de la date 10 et perméabilités estimées pour un effet de pécipite de 500.

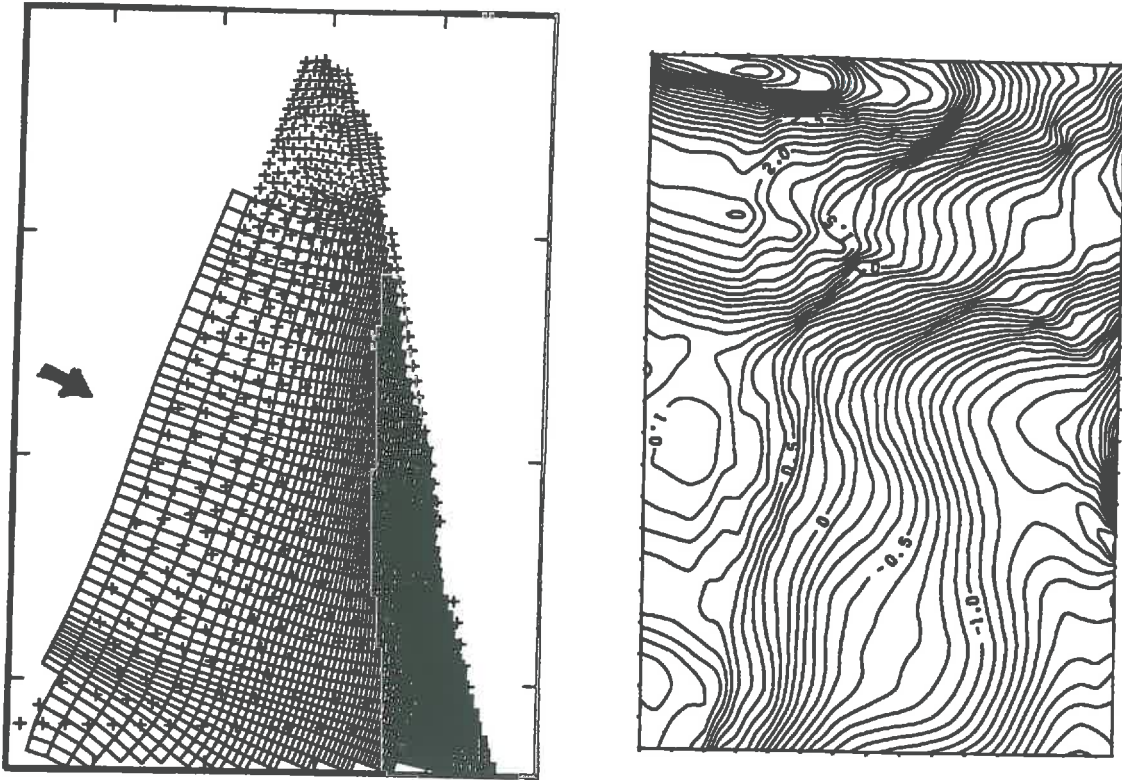


FIG. 6.9 - Sur l'exemple numérique 2, bruité par une erreur de mesure de 0.1 m, écoulement de la date 10 et perméabilités estimées pour un effet de pépité de 2000.

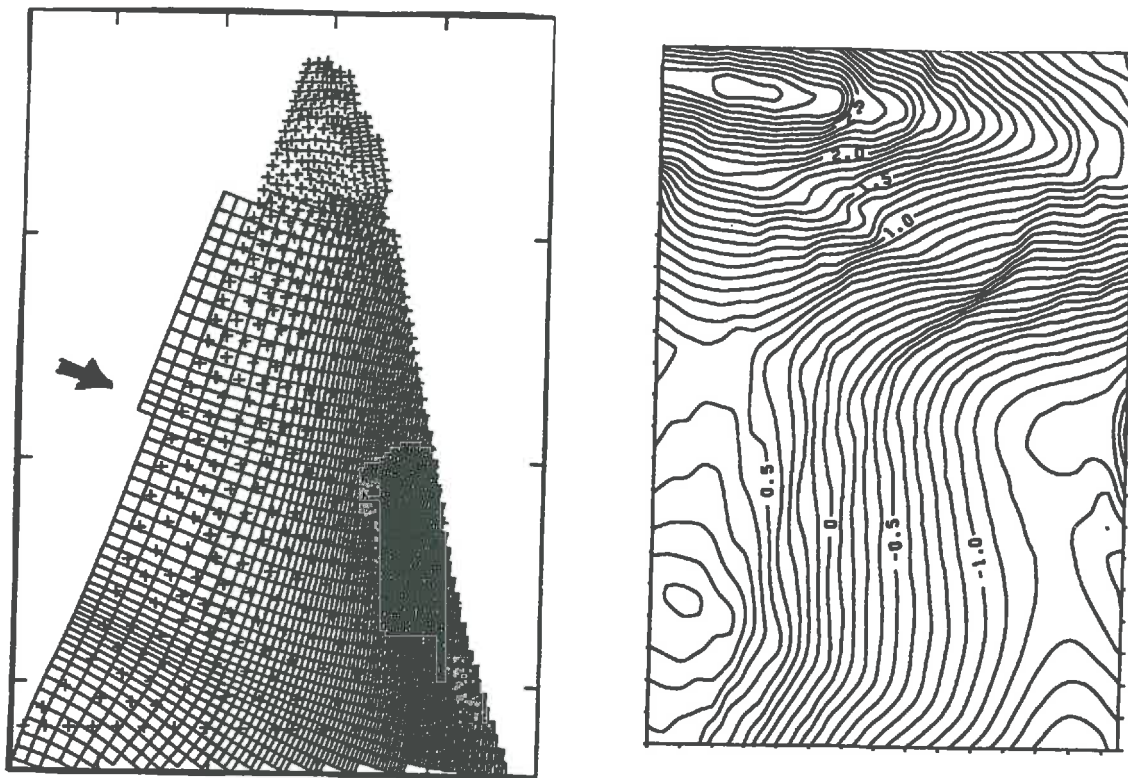


FIG. 6.10 - Sur l'exemple numérique 2, bruité par une erreur de mesure de 0.1 m, écoulement de la date 10 et perméabilités estimées pour un effet de pépité de 10000.

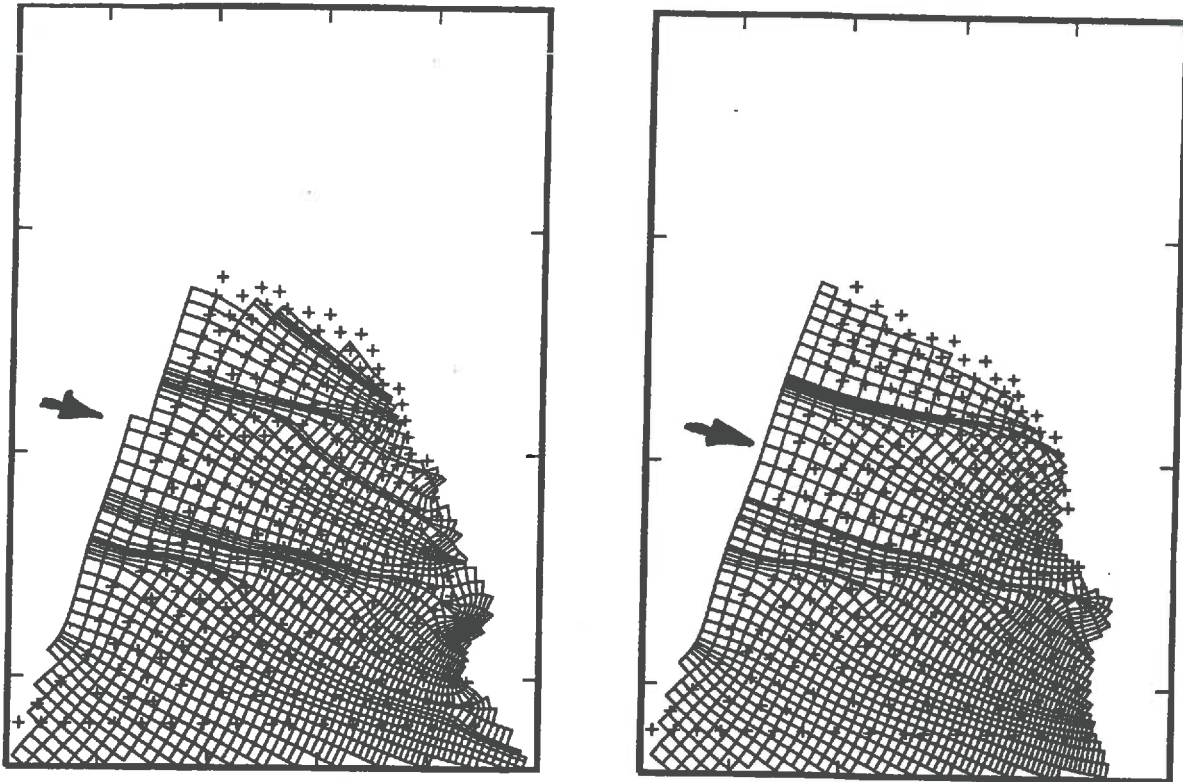


FIG. 6.11 - Ecoulements pour les dates 4 (gauche) et 14 (droite) de l'exemple 1. L'effet de pépite employé pour le krigage est nul. Les croix représentent les mesures.

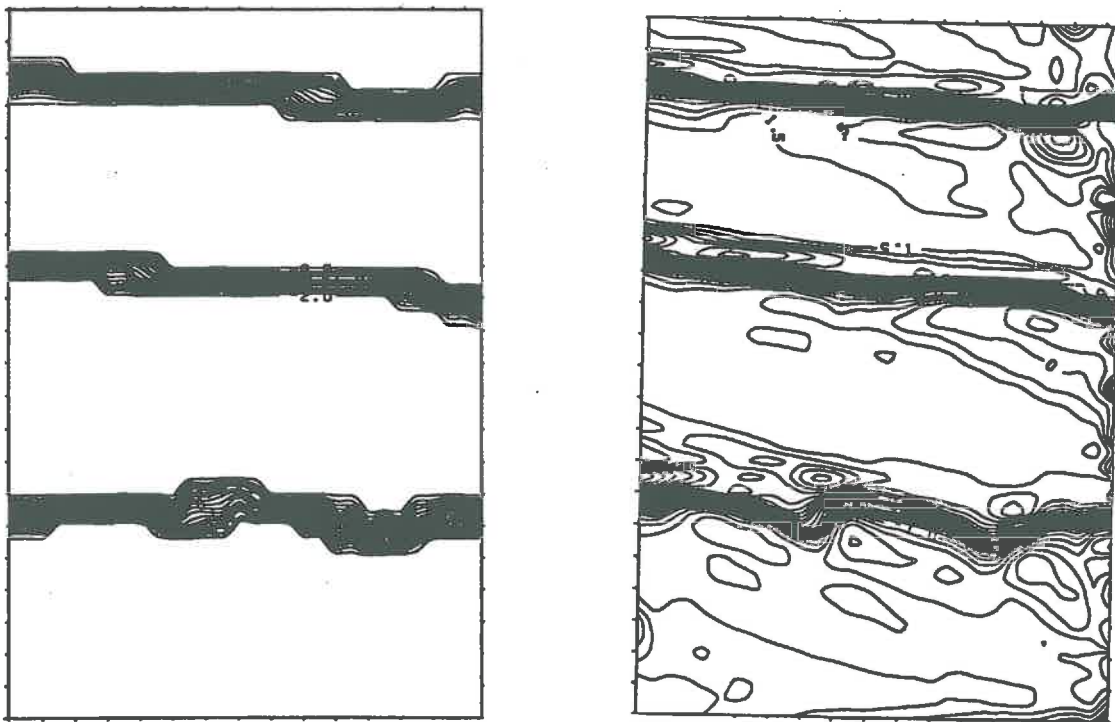


FIG. 6.12 - Logarithme de perméabilité de l'exemple 1. A gauche champ a priori, à droite, champ calculé par inversion.

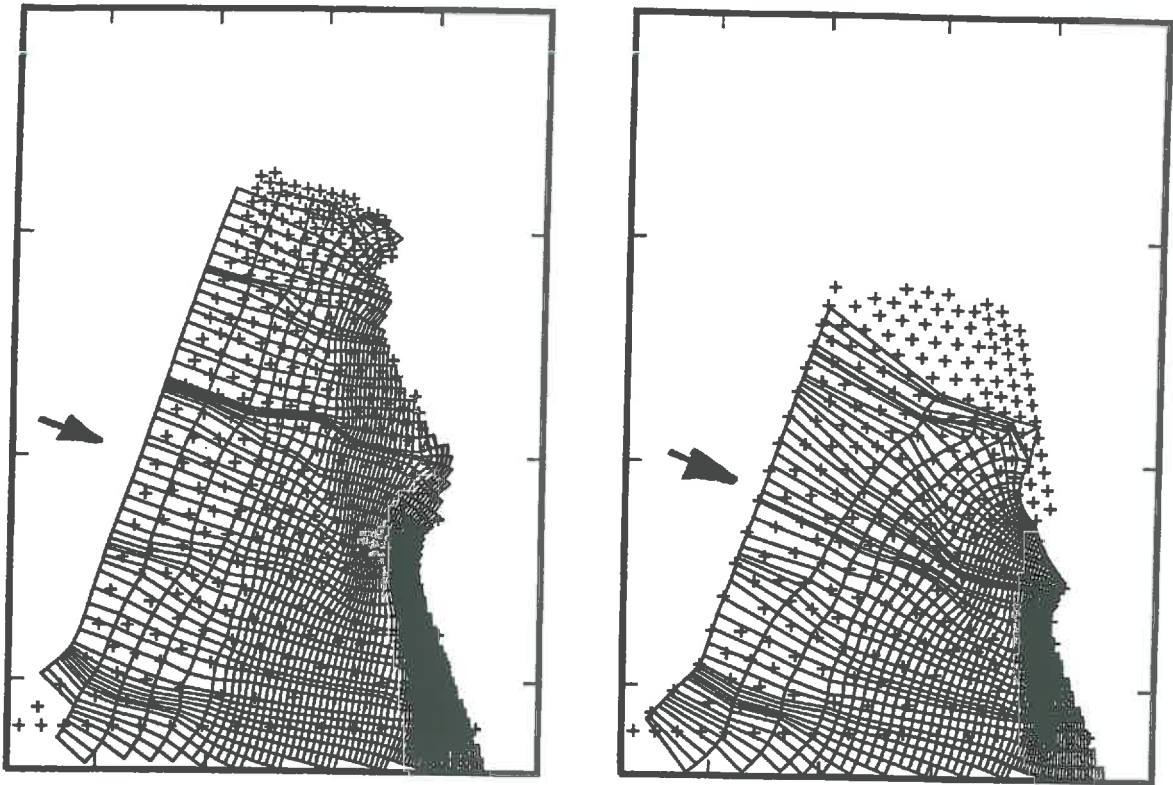


FIG. 6.13 - *Ecoulements pour les dates 5 (gauche) et 14 (droite) de l'exemple 2. L'effet de pénalité employé pour le krigeage est nul. Les croix représentent les mesures.*

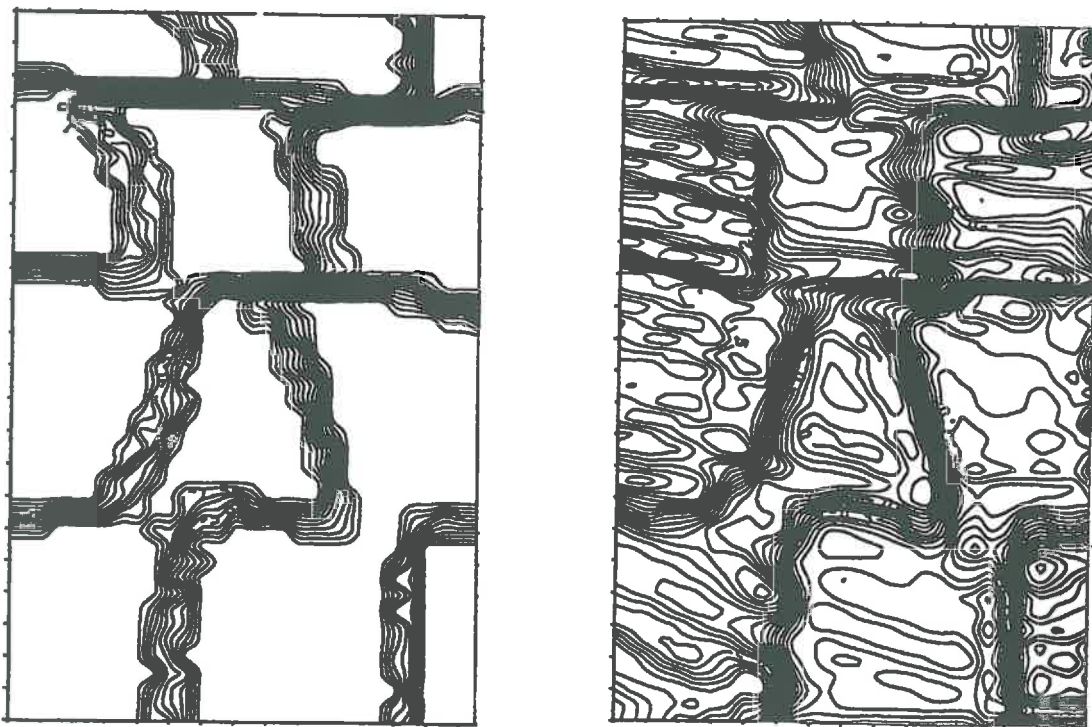


FIG. 6.14 - *Logarithme de perméabilité de l'exemple 2. A gauche champ a priori, à droite, champ calculé par inversion.*

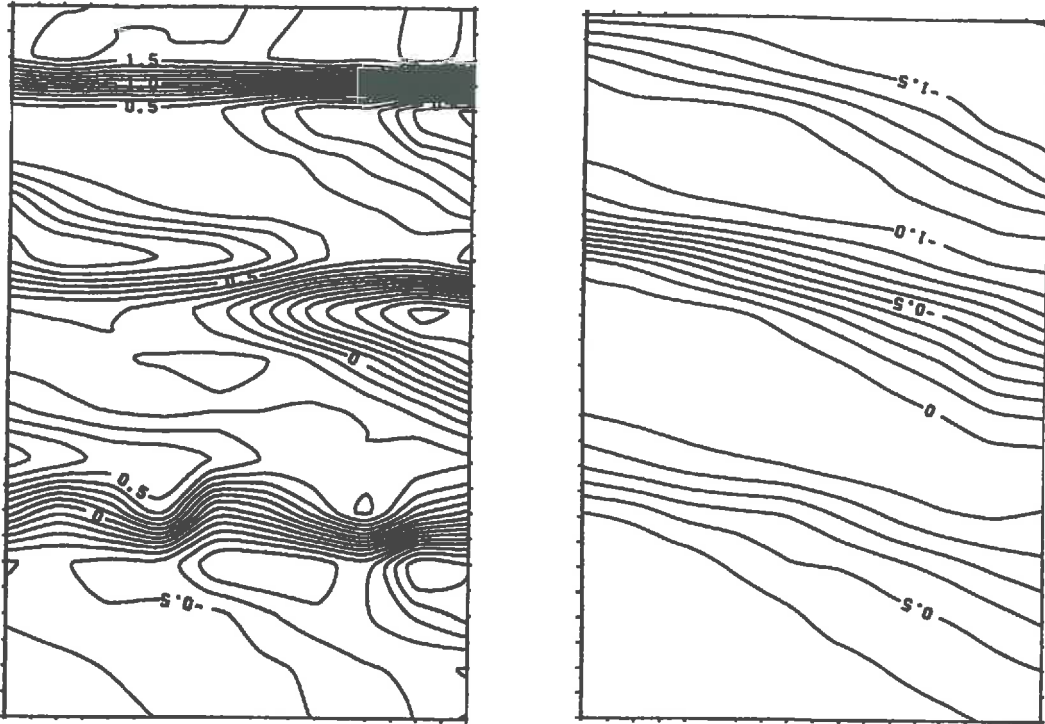


FIG. 6.15 - A gauche, logarithme de perméabilité de l'exemple 1 pour une grille 10×15 . A droite différence entre les résultats pour les grille 10×15 et 30×45 .

Les rapports de perméabilités sont bien estimés entre les plages d'une même couche horizontale. Les rapports entre les couches horizontales sont en revanche mal estimés. Les rapports des plages d-g, e-h, et f-i sont même inversés.

6.2.2 Solutions mal déterminées

Sur les exemples présentés, les rapports de perméabilités sont bien évalués dans le sens horizontal et mal évalués dans le sens vertical. Cela provient de ce que le calcul des rapports de perméabilités n'est possible que le long des lignes de courant. Dans les exemples présentés, les lignes de courant aux différentes dates sont peu différentes, comme le montrent les écoulements des figures 6.11 et 6.13, elles sont toutes dirigées dans le sens horizontal. Il y a donc une grande indétermination des rapports de perméabilités dans le sens vertical.

La méthode d'inversion des perméabilités associe les écoulements des différentes dates pour réduire éventuellement l'indétermination à une seule constante indéterminée. Mais il faut pour cela que les écoulements se croisent suffisamment, ce qui ne semble pas le cas ici. La section 5.3 propose quelques tests pour vérifier si les écoulements se croisent suffisamment pour réduire l'indétermination à une seule constante. Ces tests ont été effectués sur l'exemple 1.

- Si les écoulements se croisent suffisamment, les solutions convergent lorsque la grille de calcul s'affine. Dans le cas contraire, la différence entre les solutions pour deux discrétisations différentes correspond approximativement une fonction égale à une constante arbitraire par tube de courant.

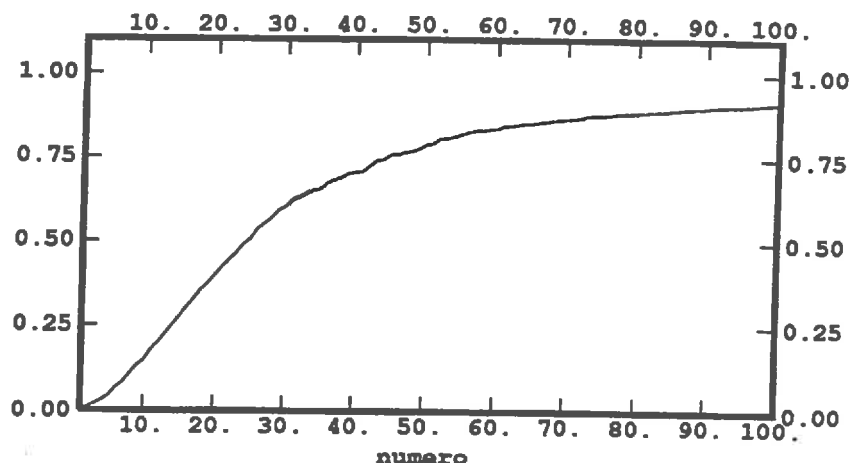


FIG. 6.16 - Spectre associé au calcul d'inversion.

Le logarithme des perméabilités du noyau est calculé pour deux discrétisations différentes de la grille de calcul : sur une grille 10×15 (figure 6.15) et sur une grille 30×45 (figure 6.12). Les valeurs de la grille 30×45 sont moyennées pour être comparées à celles de la grille 10×15 . La différence entre ces deux résultats (figure 6.15) montre une dérive dont les lignes d'isovaleur épousent presque la forme des lignes de courant de l'écoulement de la date 5. C'est une fonction égale à une constante arbitraire par tube de courant.

Cette divergence lorsque la grille de calcul s'affine indique que les écoulements ne sont pas suffisamment complémentaires pour limiter l'indétermination à une seule constante.

- Un deuxième test consiste à calculer les éléments propres associés à l'inversion. Les premières valeurs propres du spectre sont examinées. Si le spectre a un début parabolique, et que sa première valeur propre est faible, cela indique que les lignes courant ne se croisent pas suffisamment. C'est le cas ici. Le spectre (figure 6.16) a un début parabolique et sa première valeur propre est faible (0.008).

Ces tests confirment que les écoulements aux différentes dates ne se croisent pas suffisamment, et qu'en conséquence, les rapports de perméabilités sont mal évalués dans le sens vertical, orthogonal aux écoulements. Les mêmes calculs pourraient être réalisés sur l'exemple 2.

6.2.3 Inversion conditionnelle

Comme les différents écoulements ne sont pas suffisamment complémentaires, l'indétermination correspond à une constante par ligne de courant. Elle est arbitrairement fixée par la géométrie de la grille de calcul, et peut atteindre de grandes valeurs, qui masquent le résultat d'inversion. Pour contourner ce problème, la section 5.4 propose la méthode d'inversion conditionnelle. Cette méthode est appliquée à l'exemple 1.

Dans l'inversion conditionnelle, le résultat est conditionné par des valeurs de perméabilités à l'amont du barrage. Pour l'exemple 1, le champ de perméabilité est connu à l'avance, puisqu'il s'agit du champ de perméabilité a priori. Cela permet de fixer les valeurs à l'amont. Les logarithmes de perméabilité calculés par la méthode d'inversion conditionnelle sont donnés sur la figure 6.17. Les couches de perméabilités constantes sont bien restituées. Les rapports

de perméabilités entre les couches sont calculés et reportés au tableau suivant. Ils sont de bonne qualité.

couches	3-4	2-3	1-2
rapport estimé	5.99	5.31	5.47
rapport théorique	5.60	5.60	5.60

Les valeurs de perméabilité ne sont pas toujours connues. Dans un tel cas pourtant, donner des valeurs arbitraires permet de contrôler l'indétermination et l'empêche de masquer le résultat. La figure 6.18 montre les logarithmes de perméabilités calculés par la méthode d'inversion conditionnelle, avec pour condition amont : $\ln(k) = 0$.

Les valeurs de l'amont sont données pour éviter qu'une fonction déterminée arbitrairement par la géométrie de la grille ne masque la solution. Mais l'indétermination demeure, les rapports de perméabilités calculés n'ont de sens qu'entre des zones situées sur une même ligne de courant.

C'est pourquoi, il est important de connaître, en plus du résultat, la forme des lignes de courant, ce qui permet de mieux interpréter les calculs. Les lignes de courant sont représentées sur la figure 6.18.



FIG. 6.17 - Résultat d'inversion conditionnelle pour l'exemple 1. La condition amont est donnée à partir du champ de perméabilité a priori.

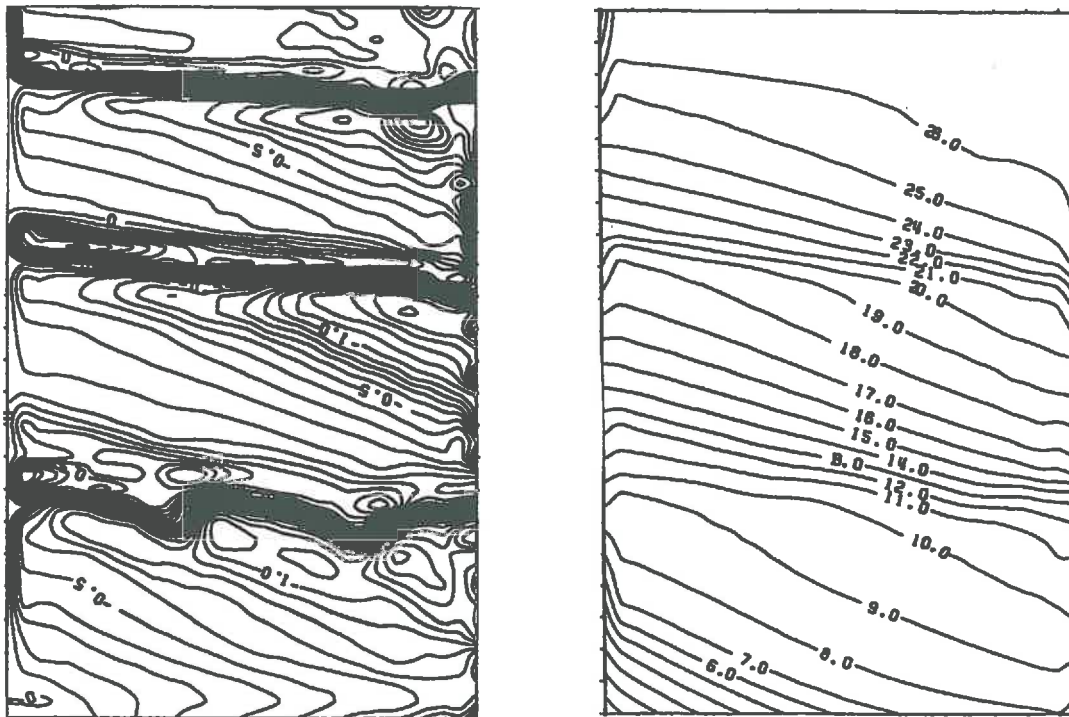


FIG. 6.18 - A gauche, résultat d'inversion conditionnelle pour l'exemple 1. La condition amont est : $\ln(k) = 0$. A droite, lignes de courant correspondantes.

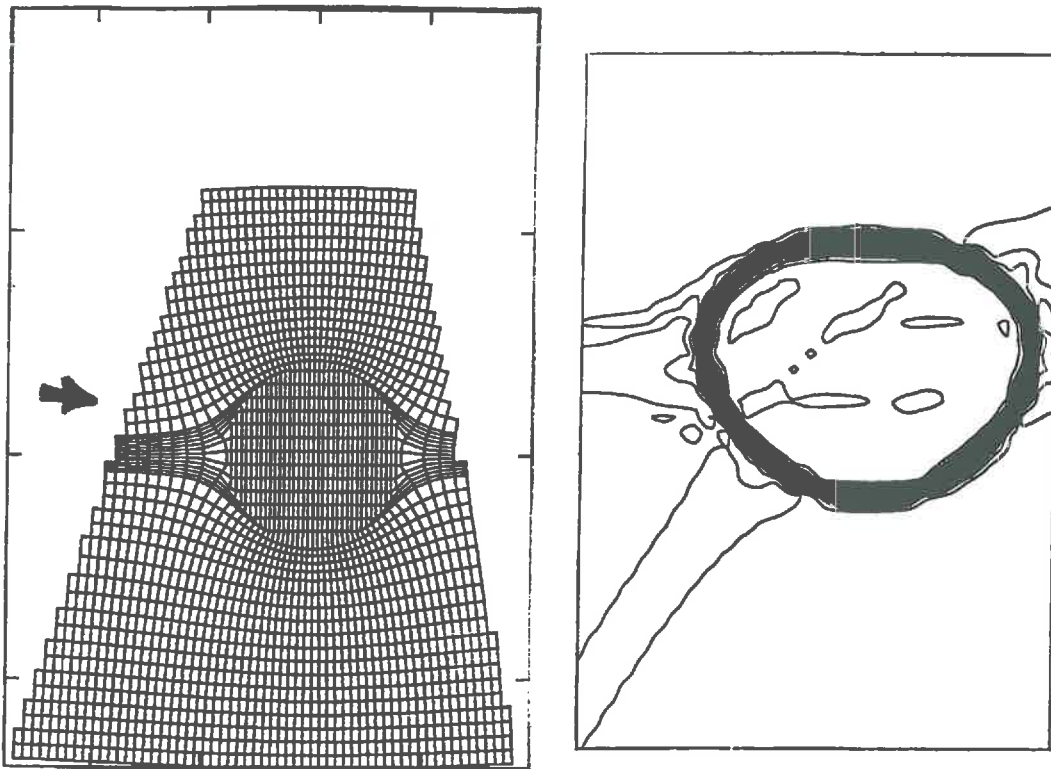


FIG. 6.19 - *Écoulement et perméabilités pour l'exemple du disque, $\rho=0.1$.*

6.3 Influence des différents paramètres

6.3.1 Écartement des lignes de courant

La figure 6.19 montre un écoulement construit avec les formules de l'exemple du disque (voir paragraphe 2.1.6). Le milieu poreux est constitué d'un disque de perméabilité k_i , plongée dans une matrice de perméabilité k_e . Sur l'exemple, $\rho = \frac{k_i}{k_e} = 0.1$.

L'exemple est caractéristique d'un milieu composé d'un obstacle peu perméable, inclus dans une matrice plus perméable : les lignes de courant s'écartent pour éviter l'obstacle. Le rapport d'épaisseur dans une tube de courant est comparable au rapport de perméabilité entre les deux milieux.

Une telle situation a deux conséquences sur le calcul des perméabilités par suivi des lignes de courant : d'une part les lignes de courant sont difficiles à suivre ; d'autre part, le calcul inverse repose sur les variations d'épaisseur des tubes de courant. Pour un tube de courant trop fin, comme les imprécisions numériques dépassent l'épaisseur du tube, le calcul des perméabilités perd beaucoup de précision.

L'exemple du disque permet d'étudier l'influence de l'écartement des lignes de courant sur le calcul inverse. Pour différentes valeurs du rapport ρ des perméabilités, deux champs de charge sont calculés analytiquement. Les écoulements font entre eux un angle de 45 degrés. La figure 6.19 montre, pour un rapport de $\rho = 0.1$, le logarithme du champ de perméabilité retrouvé. Sur tous les cas traités, les champs de perméabilité ressemblent à celui de la figure 6.19, avec une frontière franche entre les valeurs de perméabilité à l'intérieur et à l'ex-

térieur du disque. La moyenne des logarithmes de perméabilité est calculée dans le disque et à l'extérieur, ce qui permet d'estimer le rapport ρ de perméabilité et de le comparer à sa valeur théorique. Les résultats de comparaison sont reportés dans les tableaux suivants :

rapport $\frac{1}{\rho} = \frac{k_e}{k_i}$	rapport estimé
2	1.95
5	4.67
10	8.70
20	13.33
50	11.24
100	8.33

rapport : $\rho = \frac{k_i}{k_e}$	rapport estimé
10	9.974
100	93.7

Les tableaux montrent que l'écart est bien restitué lorsque la perméabilité k_i du disque est supérieure à celle de la matrice, k_e . Dans le cas contraire, $k_e > k_i$, il n'est possible de restituer le rapport de perméabilités que pour des rapports inférieurs à 10, donc pour une dilatation des lignes de courant inférieure à 10.

6.3.2 Influence de la discrétisation

L'effet de la discrétisation est maintenant étudié sur les champs de charge calculés numériquement. Un premier calcul inverse utilise toutes les valeurs de charge aux nœuds de la grille d'éléments finis. Puis les perméabilités sont calculées à partir des valeurs de charge les plus proches des nœuds d'une grille régulière. Le nombre de mesures diminue.

Exemple 1

Le modèle employé dans tous les cas est un spline plaque mince avec un effet de pépite nul. Les figures 6.20 à 6.23 montrent les écoulements ainsi que les perméabilités retrouvées par calcul inverse. La diminution du nombre de mesures lisse les lignes de courant. La répartition des perméabilités en couches horizontales de perméabilité constante se détériore avec la diminution du nombre des mesures.

Les 4 couches inférieures sont numérotées de 1 à 4 de bas en haut. Sur chaque couche horizontale, la moyenne du logarithme de perméabilité est calculée, ce qui permet de calculer le rapport de perméabilités entre deux couches voisines, donné au tableau suivant :

discrétisation	aucune	10×15	5×7	4×5	rapport théorique
rapport 3-4	5.58	3.74	3.06	1.14	5.60
rapport 2-3	3.63	2.56	2.36	1.13	5.60
rapport 1-2	4.01	3.22	2.56	1.16	5.60

L'exemple 1 n'est pas trop indéterminé, car les lignes de courant se croisent à l'intérieur de chaque couche, et assurent ainsi un bon rendu des couches de perméabilité constante. La diminution du nombre de mesures, qui lisse les lignes de courant, augmente ainsi le parallélisme entre les écoulements de toutes les dates, et finalement augmente l'indétermination de la solution. Par ailleurs, la diminution des mesures lisse les lignes de courant à la traversé de deux couches, ce qui diminue les rapports de perméabilités.

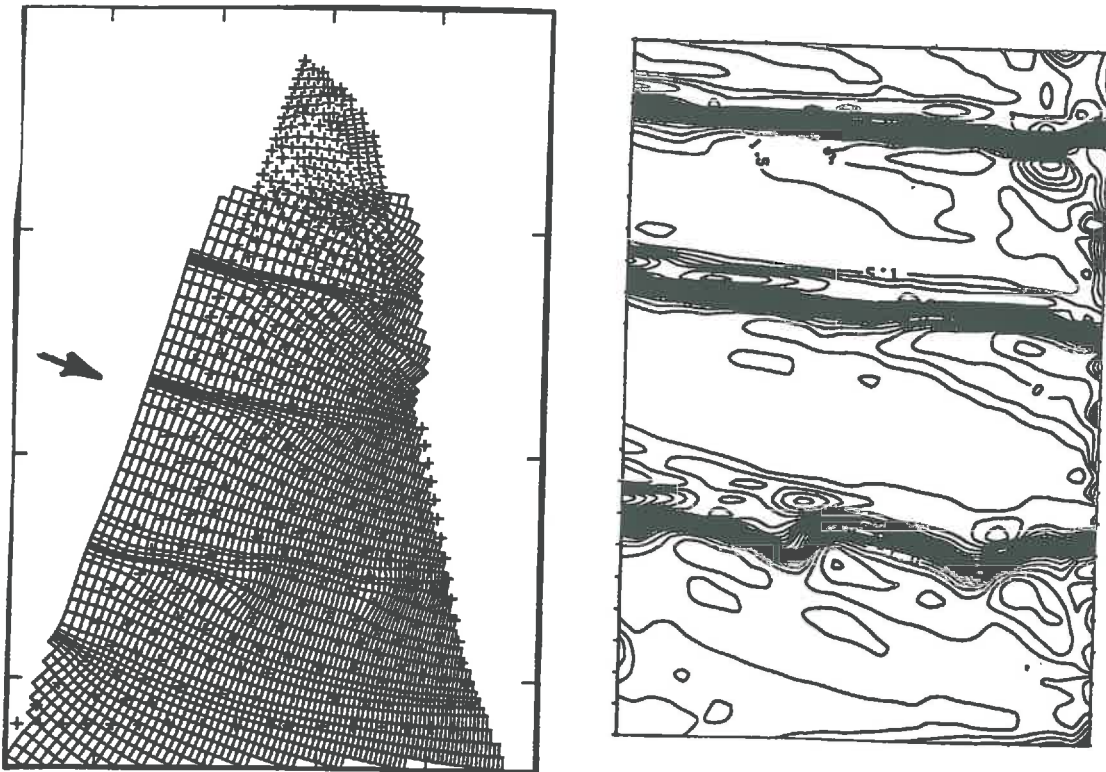


FIG. 6.20 - Ecoulement de la date 6 et perméabilités pour l'exemple numérique 1 avec l'ensemble des points.

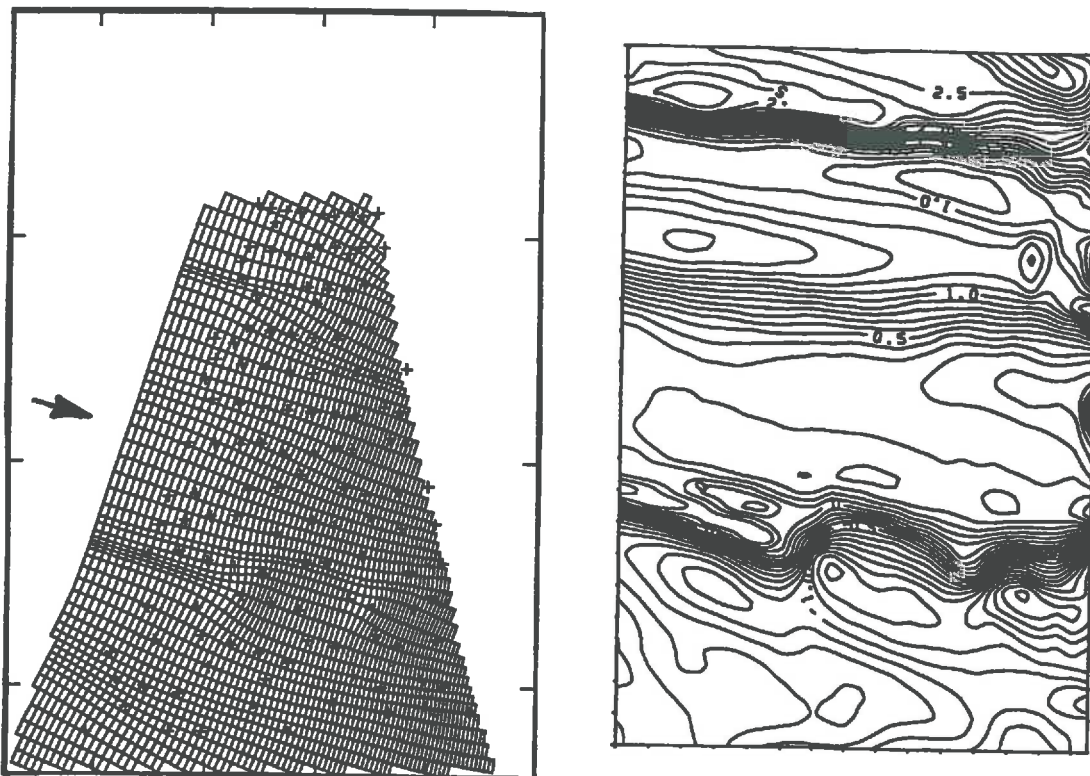


FIG. 6.21 - Ecoulement de la date 7 et perméabilités pour l'exemple numérique 1 avec discrétisation 10×15 .

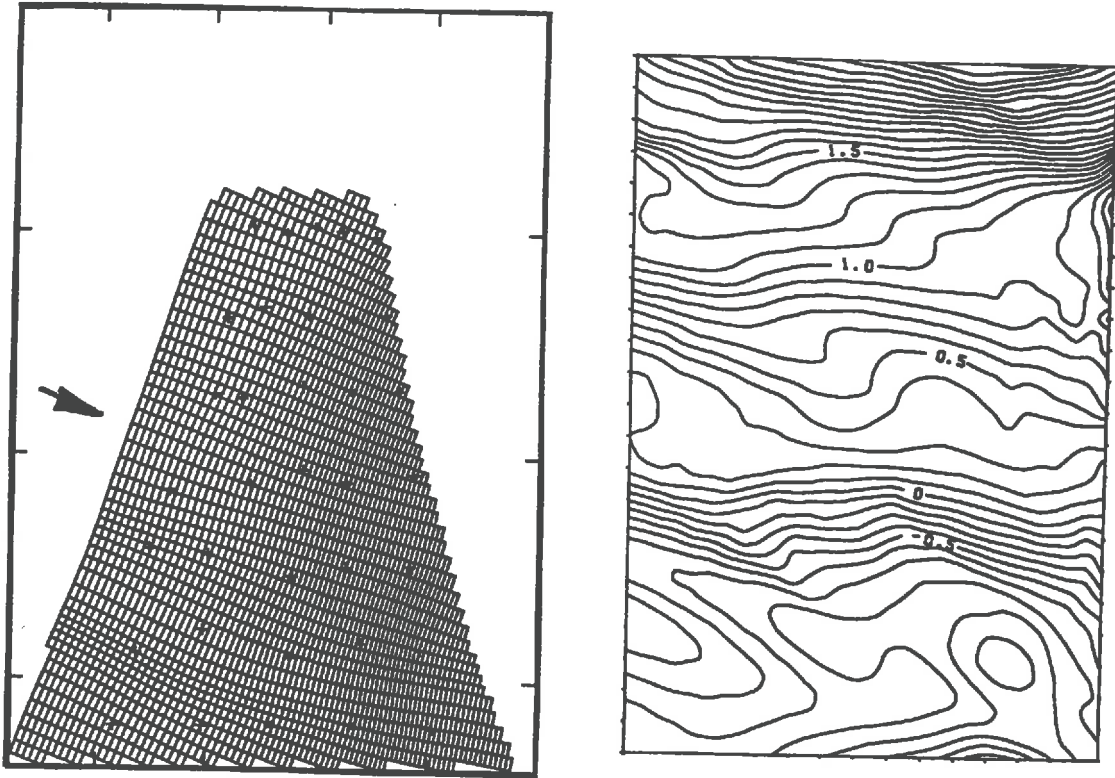


FIG. 6.22 - *Ecoulement de la date 7 et perméabilités pour l'exemple numérique 1 avec discrétisation 5×7 .*

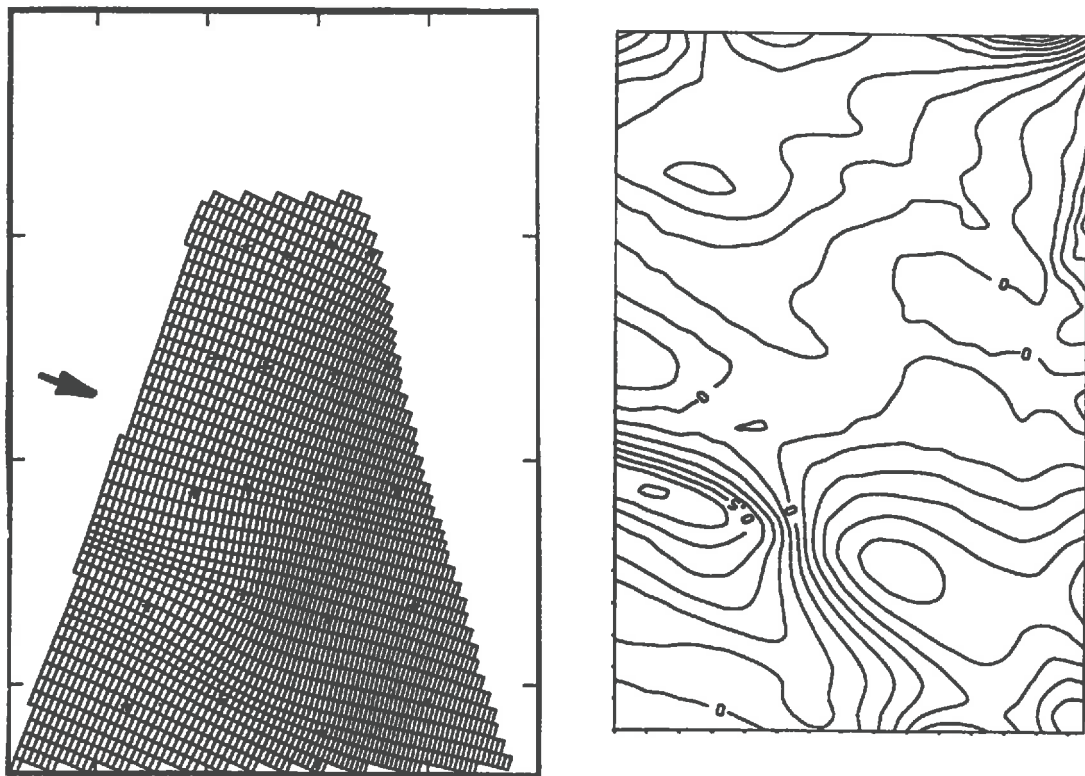


FIG. 6.23 - *Ecoulement de la date 7 et perméabilités pour l'exemple numérique 1 avec discrétisation 4×5 .*

Exemple 2

Le modèle employé dans tous les cas est un spline plaque mince avec un effet de pépite nul. Les figures 6.24 à 6.27 montrent comment la diminution des mesures lisse les lignes de courant. Elles montrent aussi les perméabilités retrouvées par calcul inverse. La répartition des perméabilités par plages de perméabilité constante se détériore avec la diminution du nombre des mesures. Sur chaque plage, la moyenne du logarithme de perméabilité est calculée, ce qui permet de calculer le rapport de perméabilités entre deux plages voisines, donné dans les tableaux suivants :

Rapports dans une même couche horizontale

discrétisation	aucune	10×15	5×7	4×5	rapport théorique
rapport d-e	3.35	3.71	4.06	3.49	3.16
rapport e-f	3.46	2.75	2.66	2.36	3.16
rapport g-h	2.92	2.75	1.82	1.13	3.16
rapport h-i	3.74	3.39	2.97	4.62	3.16
rapport j-k	3.10	2.77	3.60	2.41	3.16
rapport k-l	3.29	2.97	2.72	3.32	3.16
rapport m-n	3.86	3.49	3.63	6.75	3.16
rapport n-o	3.29	3.46	1.67	1.48	3.16

Rapports entre deux couches horizontales

discrétisation	aucune	10×15	5×7	4×5	rapport théorique
rapport d-g	0.89	1.22	2.69	1.21	3.16
rapport e-h	0.78	0.90	1.21	0.39	3.16
rapport f-i	0.84	1.12	1.35	0.76	3.16
rapport g-j	1.77	2.14	1.28	0.79	3.16
rapport h-k	1.88	2.16	2.53	1.70	3.16
rapport i-l	1.65	1.90	2.32	1.22	3.16
rapport j-m	2.27	1.99	1.97	0.32	3.16
rapport k-n	2.83	2.51	1.99	0.90	3.16
rapport l-o	2.83	2.92	1.22	0.40	3.16

Comme l'exemple 2 est très indéterminé, les rapports de perméabilités, entre couches horizontales, sont mal restitués. Ils ne sont donc pas affectés par la diminution du nombre de mesures.

Dans chaque couche horizontale en revanche, la diminution du nombre de mesures adoucit les transitions entre les zones de perméabilité constante. Comme l'annonce la section 3.1, les perméabilités calculées sont des perméabilités équivalentes, relatives à des supports du même ordre de grandeur que la distance entre les mesures. C'est pourquoi, lorsque le nombre de mesures diminue, le champ de perméabilité calculé est de plus en plus régulier.

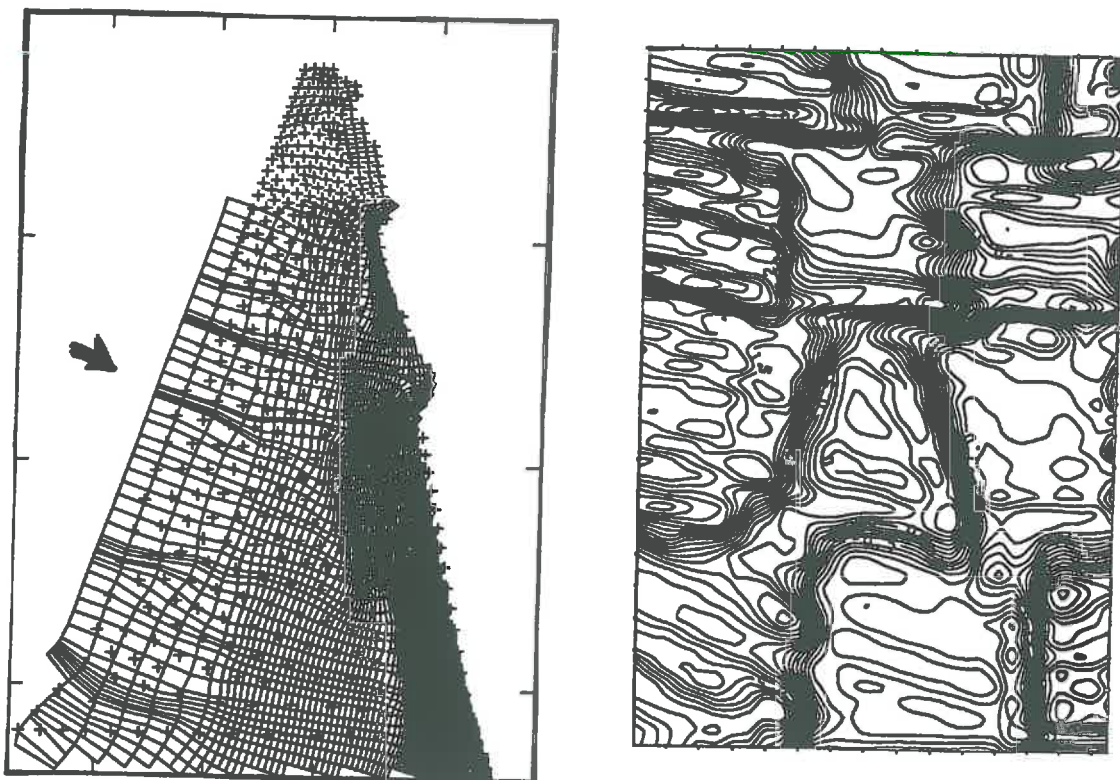


FIG. 6.24 - *Ecoulement de la date 6 et perméabilités pour l'exemple numérique 2 avec l'ensemble des points.*

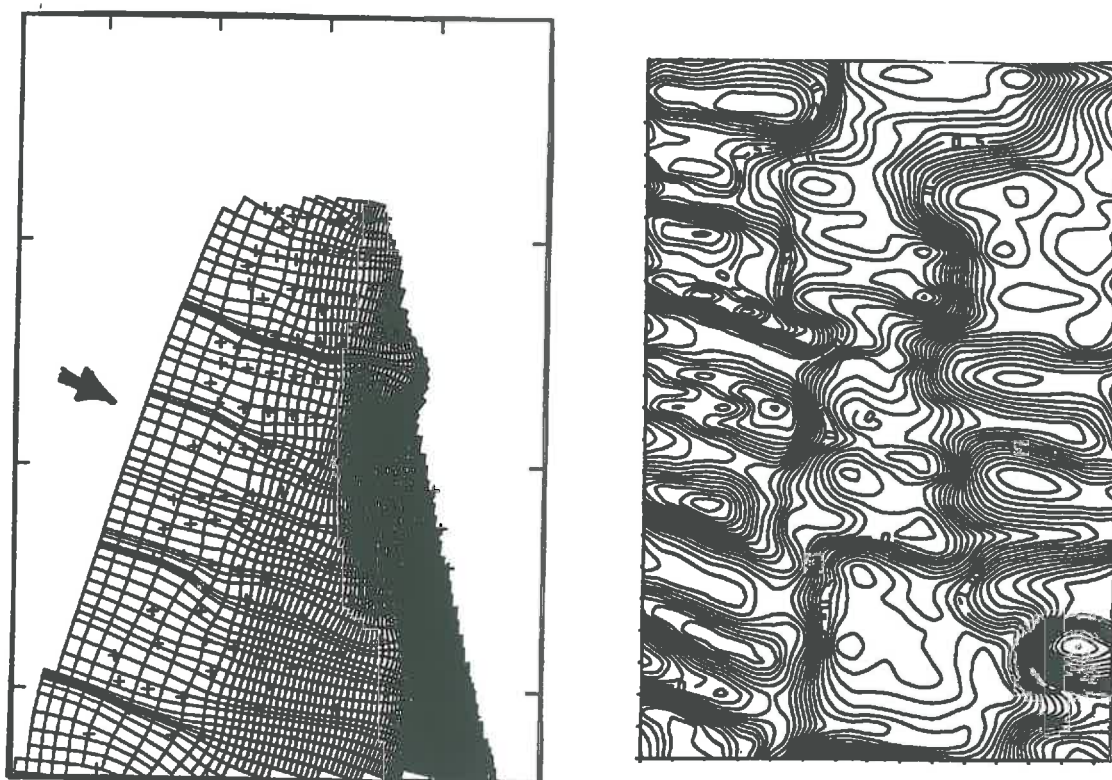


FIG. 6.25 - *Ecoulement de la date 6 et perméabilités pour l'exemple numérique 2 avec discrétisation 10×15 .*

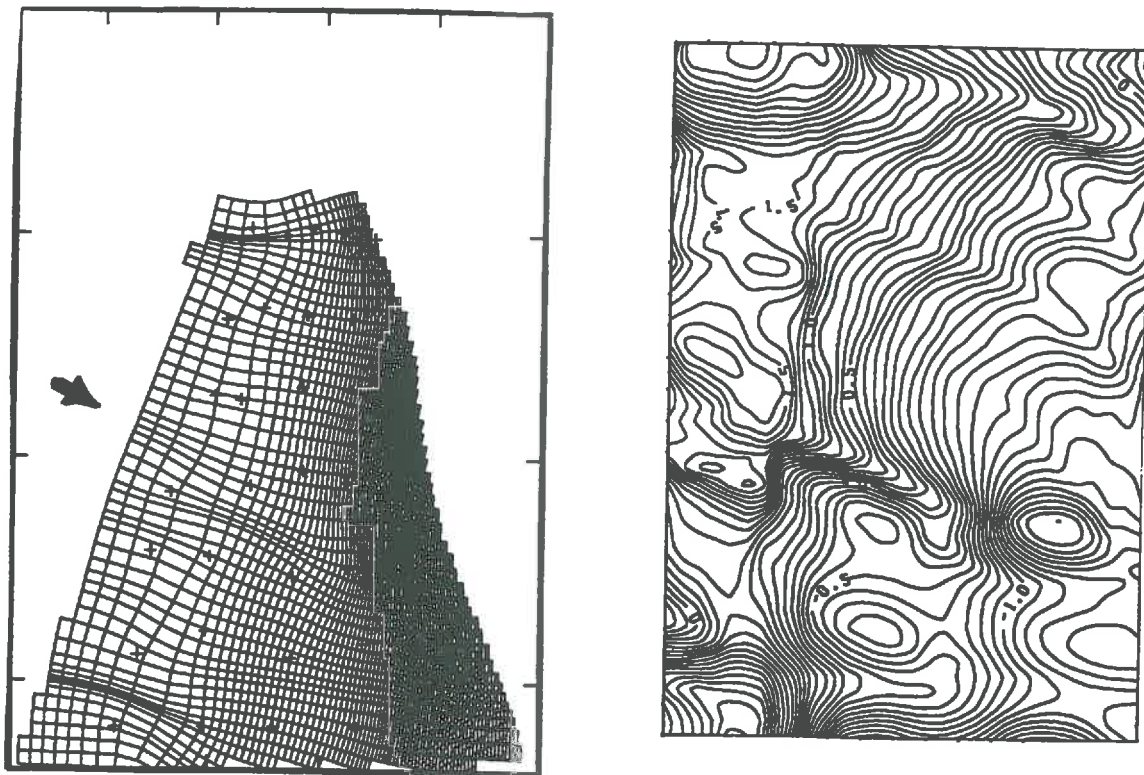


FIG. 6.26 - *Ecoulement de la date 6 et perméabilités pour l'exemple numérique 2 avec discrétisation 5×7.*

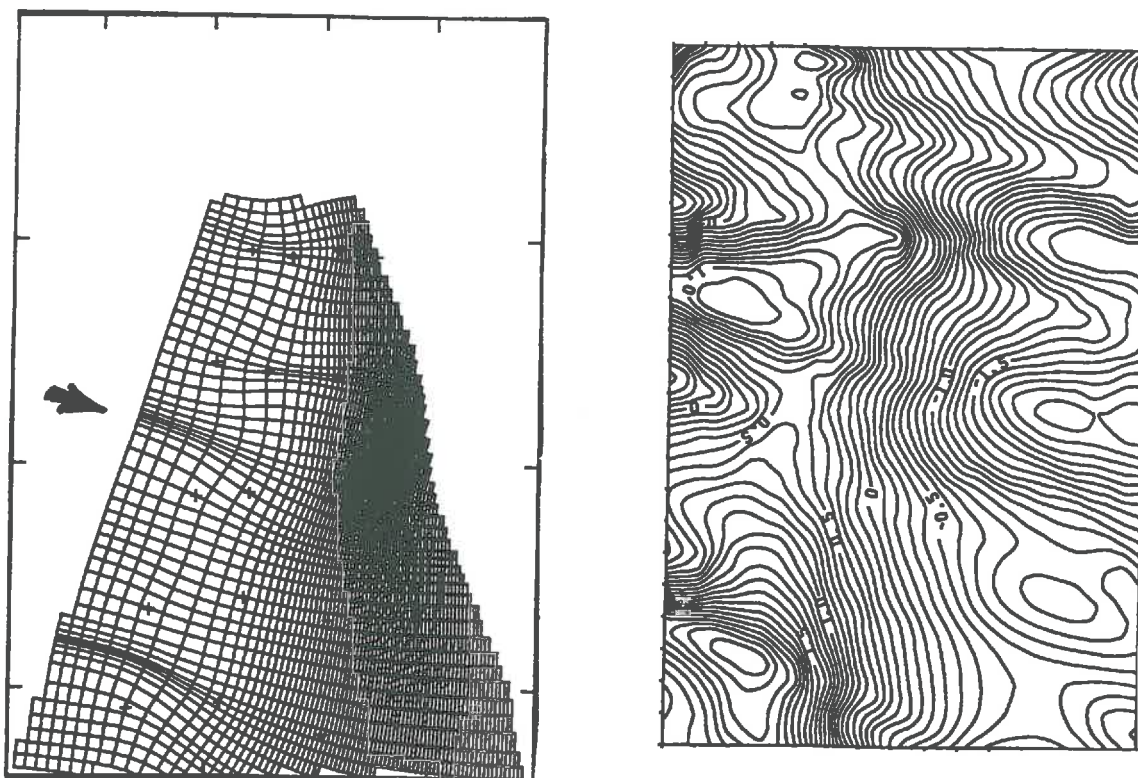


FIG. 6.27 - *Ecoulement de la date 6 et perméabilités pour l'exemple numérique 2 avec discrétisation 4×5.*

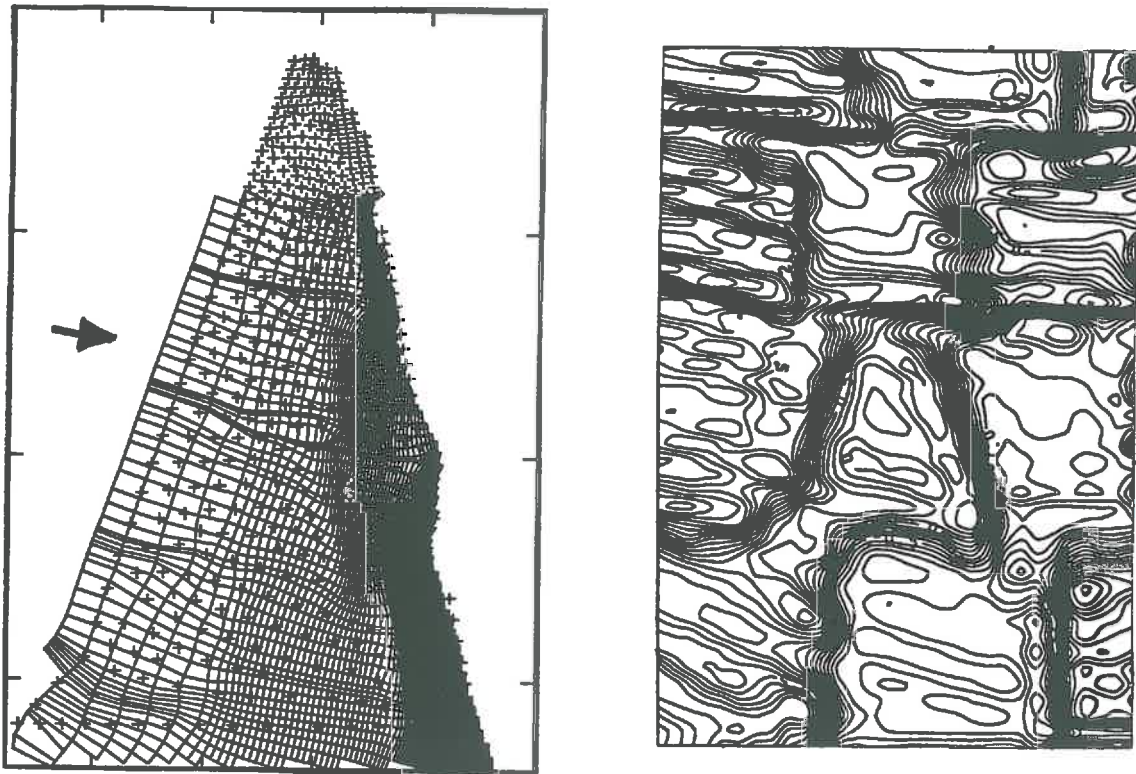


FIG. 6.28 - Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir de toutes les mesures de l'exemple 2.

6.3.3 Influence du bruit de mesure

L'influence du bruit de mesure sur la restitution des perméabilités est étudiée sur l'exemple numérique 2, avec deux discrétisations différentes : l'ensemble des nœuds de la grille d'éléments finis, puis une discrétisation suivant une grille 5×7 . Les mesures sont bruitées par un bruit d'écart type 0.1, 0.3 et 1 m. A chaque fois, l'effet de pénalité nécessaire au filtrage est ajusté visuellement sur les écoulements, et le champ de perméabilité est calculé par inversion sur le champ de charge filtré. Les écoulements et les champs de perméabilité obtenus sont représentés sur les figures 6.28 à 6.35.

Exemple numérique 2 avec l'ensemble des nœuds

bruit	effet de pénalité
0.0	0
0.1	100
0.3	300
1.0	1000

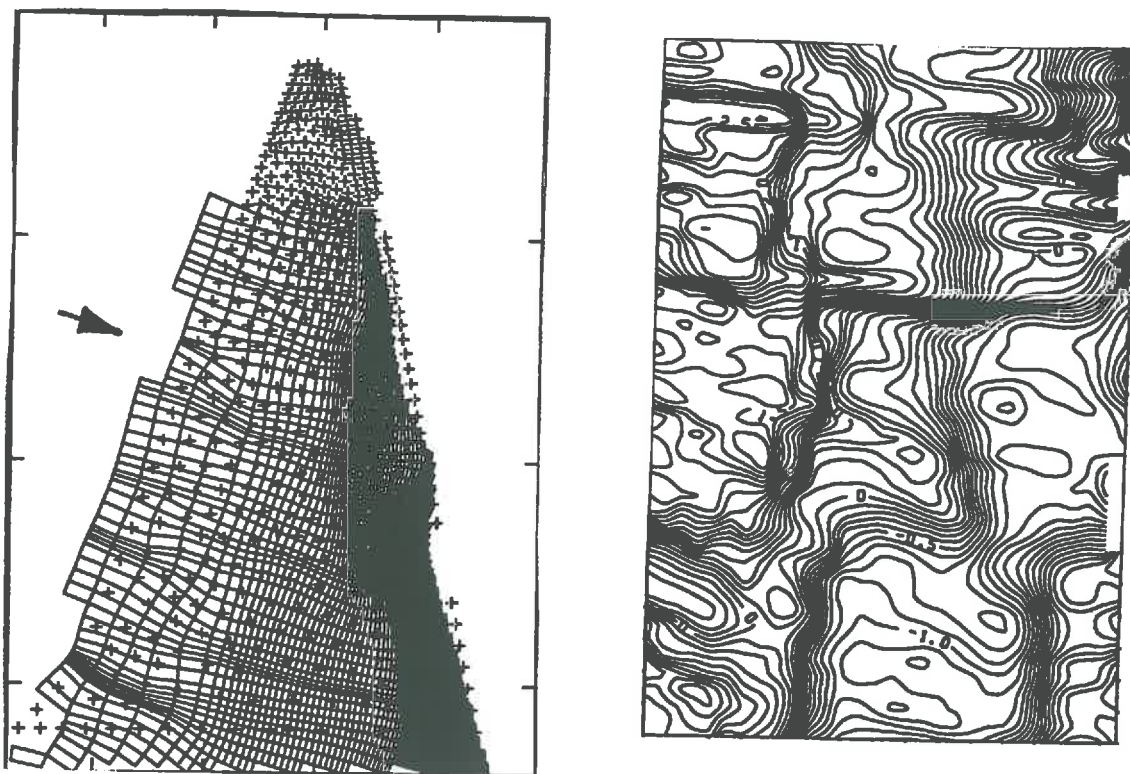


FIG. 6.29 - Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir de toutes les mesures de l'exemple 2 avec un bruit de 0.1.

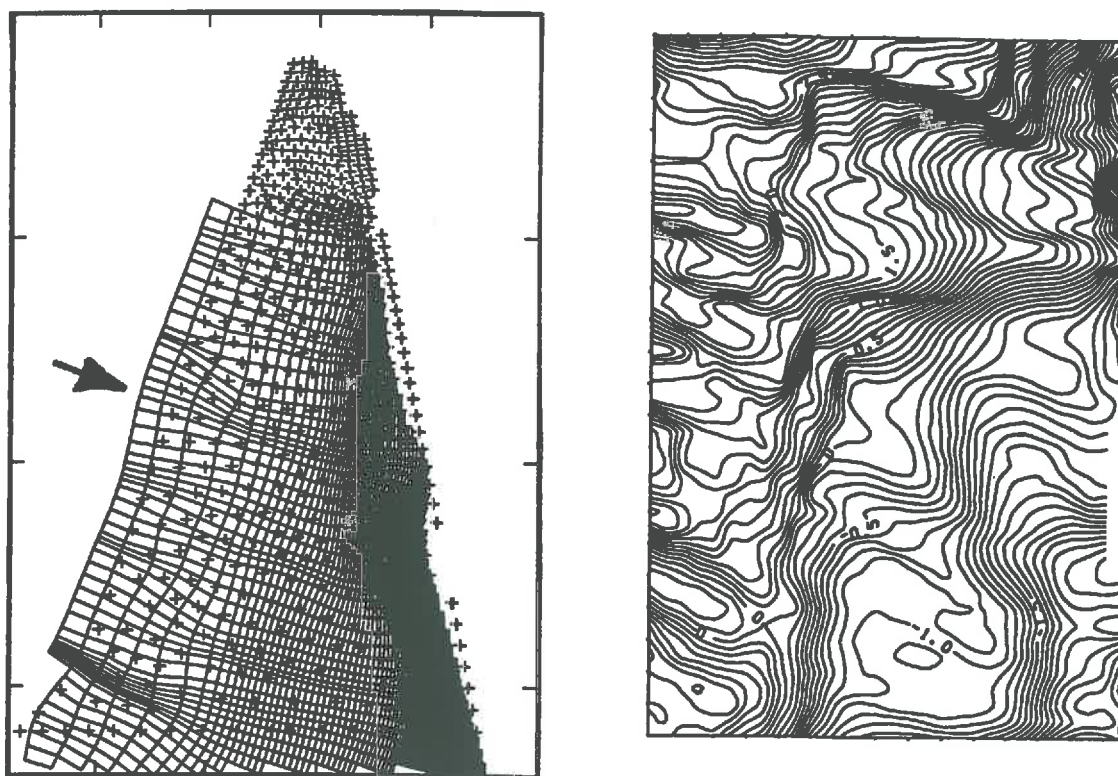


FIG. 6.30 - Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir de toutes les mesures de l'exemple 2 avec un bruit de 0.3.

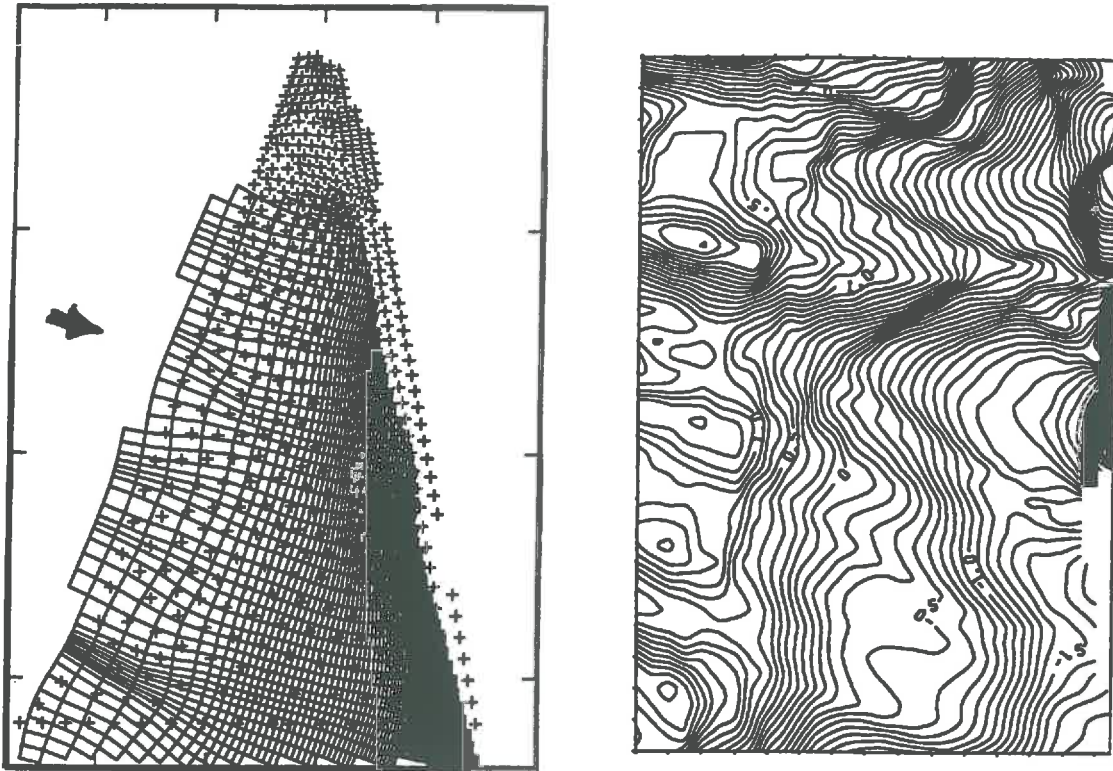


FIG. 6.31 - Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir de toutes les mesures de l'exemple 2 avec un bruit de 1.

Exemple numérique 2 pour une discrétisation 5×7

bruit	effet de pépite
0.0	74
0.1	114
0.3	148
1.0	216

Les résultats conduisent aux conclusions suivantes :

- Plus le bruit filtré est important, plus le champ de charge, ainsi que le champ de perméabilité calculé par inversion, sont réguliers. L'augmentation du bruit de mesure agit dans le même sens que la diminution du nombre de points : elle filtre les hautes fréquences de la charge et de la perméabilité.
- Le bruit de mesure a plus de conséquences sur une discrétisation fine, que sur une discrétisation grossière. En effet, pour la discrétisation comprenant l'ensemble des nœuds de la grille d'éléments finis, les écoulements obtenus avec les mesures non bruitées, et avec un bruit de 1 m ajouté aux mesures, sont différents (figures 6.28 et 6.31). Ce n'est plus le cas avec la discrétisation suivant une grille 5×7 (figures 6.32 et 6.35).

Le schéma de la figure 6.36 explique l'influence du filtrage du bruit. La charge est une fonction dérivable, régulière, donc ses hautes fréquences ont une faible amplitude. Un bruit

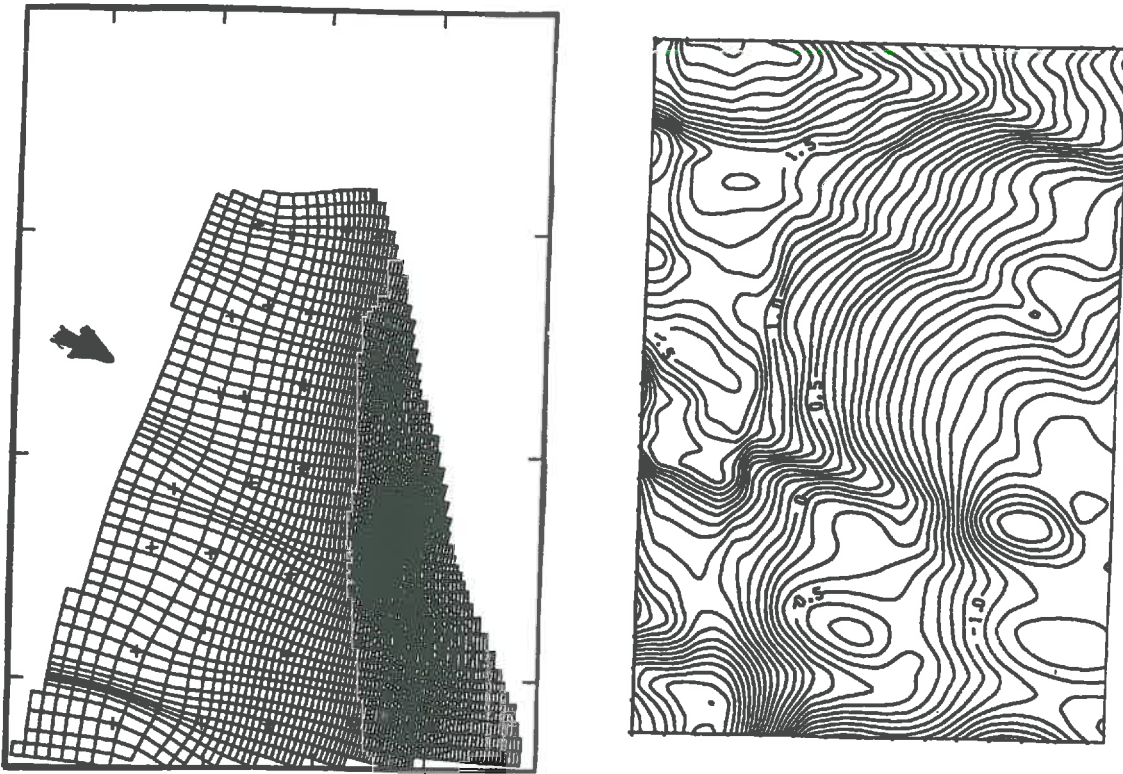


FIG. 6.32 - Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir des mesures de l'exemple 2 pour une discrétisation 5×7 .

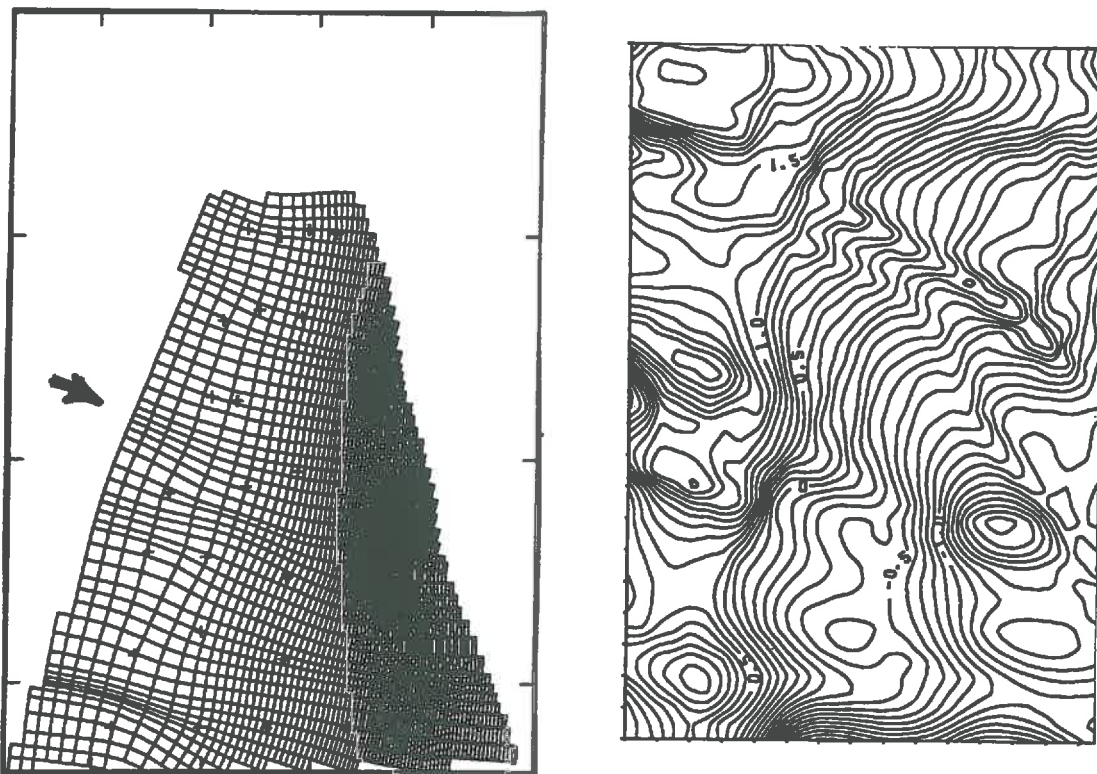


FIG. 6.33 - Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir des mesures de l'exemple 2 pour une discrétisation 5×7 et un bruit de 0.1.

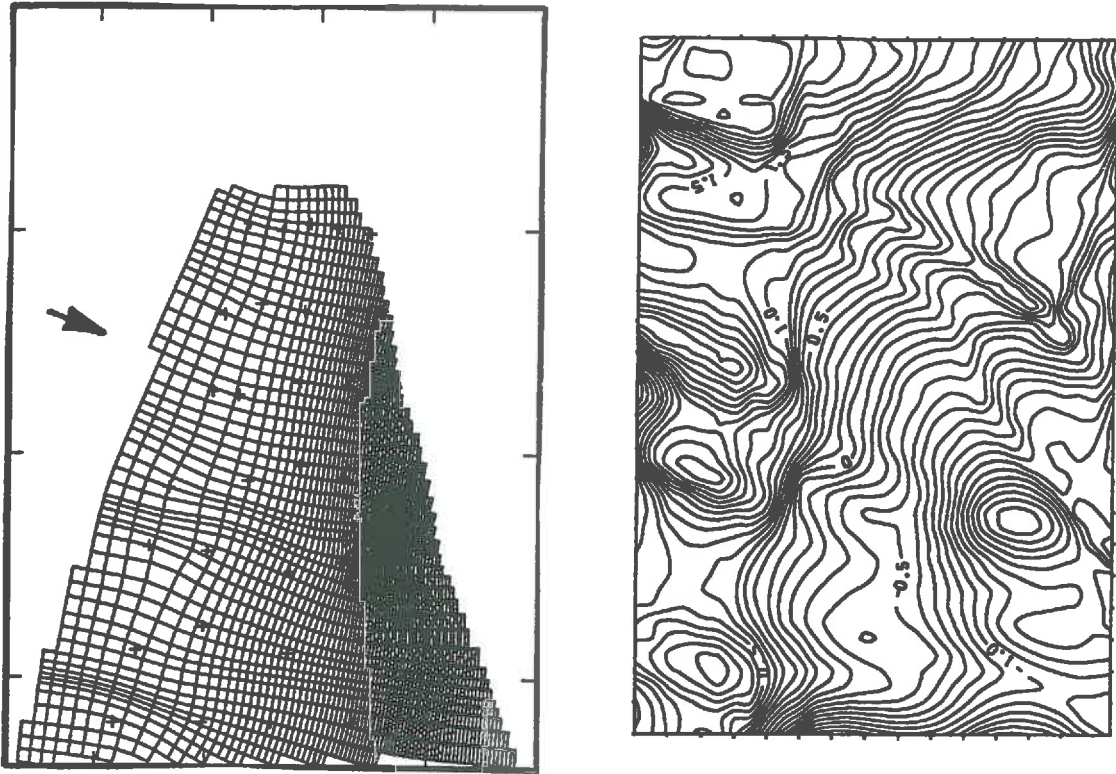


FIG. 6.34 - *Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir des mesures de l'exemple 2 pour une discrétisation 5×7 et un bruit de 0.3.*

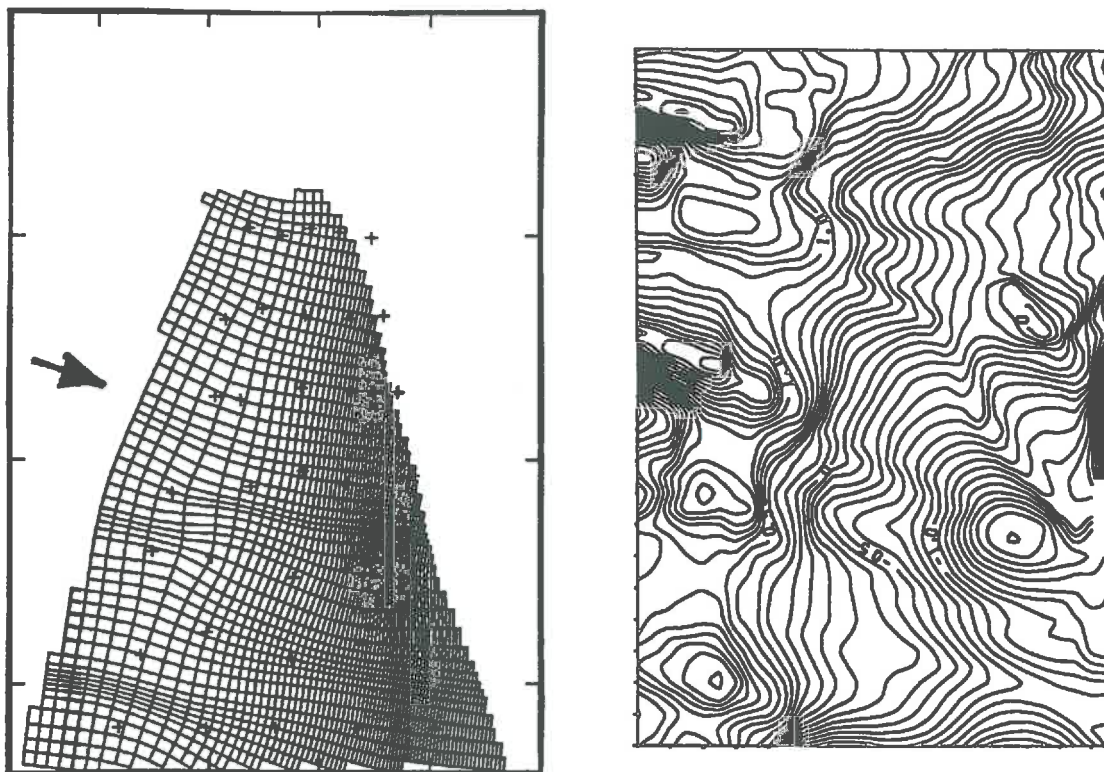


FIG. 6.35 - *Ecoulement de la date 10 et perméabilités estimées, reconstitués à partir des mesures de l'exemple 2 pour une discrétisation 5×7 et un bruit de 1.*

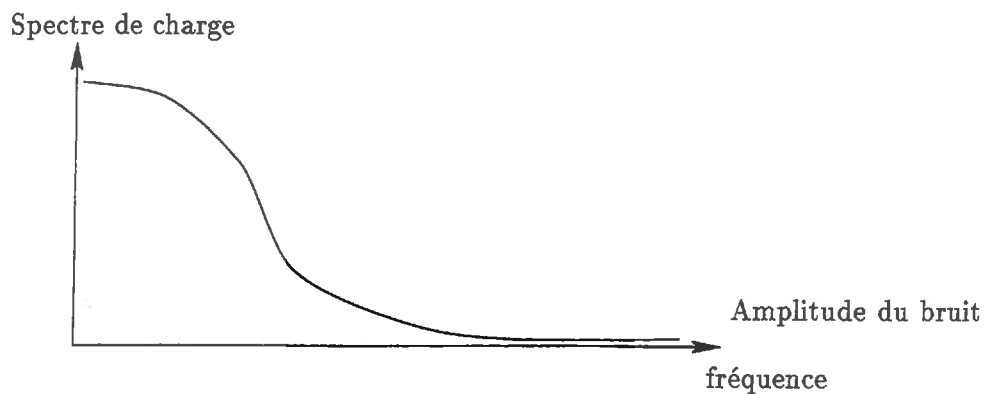


FIG. 6.36 - *Le spectre de la charge possède peu de hautes fréquences car la charge est régulière. Le bruit masque les fréquences de faible amplitude, donc les hautes fréquences.*

sur les données, masque les fréquences de la charge dont l'amplitude est inférieure à sa propre amplitude, il masque donc les hautes fréquences. Le filtrage du bruit agit comme un filtre qui élimine les hautes fréquences.

Il en résulte deux conséquences. D'une part, le filtrage d'un bruit est comparable à une diminution du nombre de mesures, puisque tous les deux filtrent les hautes fréquences. D'autre part, le bruit a moins d'influence sur des données très espacées : puisque les hautes fréquences sont déjà perdues, elles ne peuvent pas être filtrées une seconde fois. Cela correspond bien aux résultats constatés sur les exemples.

Chapitre 7

Application à un barrage

Résumé du chapitre

Ce chapitre applique la méthode d'inversion proposée aux données réelles, qui proviennent d'un barrage construit et géré par Electricité de France (EDF).

- La section 7.1 réalise une analyse critique des données, pour ne garder qu'une population homogène de mesures.
- La section 7.2 montre comment ne sélectionner que les mesures situées sous la surface libre.
- La section 7.3 montre l'application des méthodes d'inversion aux données du barrage.

7.1 Présentation des données

7.1.1 Provenance des mesures

Les données proviennent d'un profil du barrage en terre, décrit au paragraphe 1.1.1. Le profil est équipé de 29 cellules dont 19 dans le noyau (voir figure 7.1). Le nom d'une cellule permet de la repérer sur la figure 7.1 : les chiffres désignent approximativement la cote de pose ; les deux dernières lettres sont placées sur la figure à proximité de la cellule. La cellule 605n1, par exemple, est située à environ 1605 m d'altitude à coté des lettres "n1".

Ces cellules mesurent une pression interstitielle p qui est ramenée à une charge hydraulique par la transformation :

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

où ρ est la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et z la cote de pose de la cellule. En plus des mesures des cellules, la cote de retenue du barrage est également mesurée.

Les mesures sont disponibles en 473 dates, étalées sur 10 ans (de 1983 à 1992) à un rythme d'environ une mesure tous les 15 jours. Pour homogénéiser le temps, les dates sont exprimées en jours, l'origine étant arbitrairement fixée au 1^{er} janvier 1981. Dans le texte les dates sont données avec, entre parenthèses, leur conversion en nombre de jours. Les tableaux suivants permettent de repérer les années en fonction du nombre de jours et vice-versa :

date	01/01/81	01/01/82	01/01/83	01/01/84	01/01/85	01/01/86
nb de jours	0	365	730	1095	1461	1826
date	01/01/87	01/01/88	01/01/89	01/01/90	01/01/91	01/01/92
nb de jours	2191	2556	2922	3287	3652	4017

date	01/01/81	16/05/82	28/09/83	09/02/85	24/06/86
nb de jours	0	500	1000	1500	2000
date	06/11/87	20/03/89	02/08/90	15/12/91	28/4/93
nb de jours	2500	3000	3500	4000	4500

Les mesures de la cote de retenue (figure 7.2) montrent l'historique du barrage. Le remplissage de la retenue peut être décomposé en deux parties : une phase de mise en eau jusqu'au 01/01/88 ($j=2556$) et ensuite, une phase d'exploitation du barrage à des fins de production énergétique. La phase de mise en eau comporte un premier remplissage avec un long palier, une vidange et un second remplissage. La phase d'exploitation est composée de cycles annuels d'une vidange l'hiver et d'un remplissage l'été. Les pressions mesurées par les cellules répondent aux variations de cote de la retenue et reproduisent l'historique du barrage (voir par exemple les mesures de pression des cellules 575n1 et 605n2 sur les figures 7.3 et 7.4).

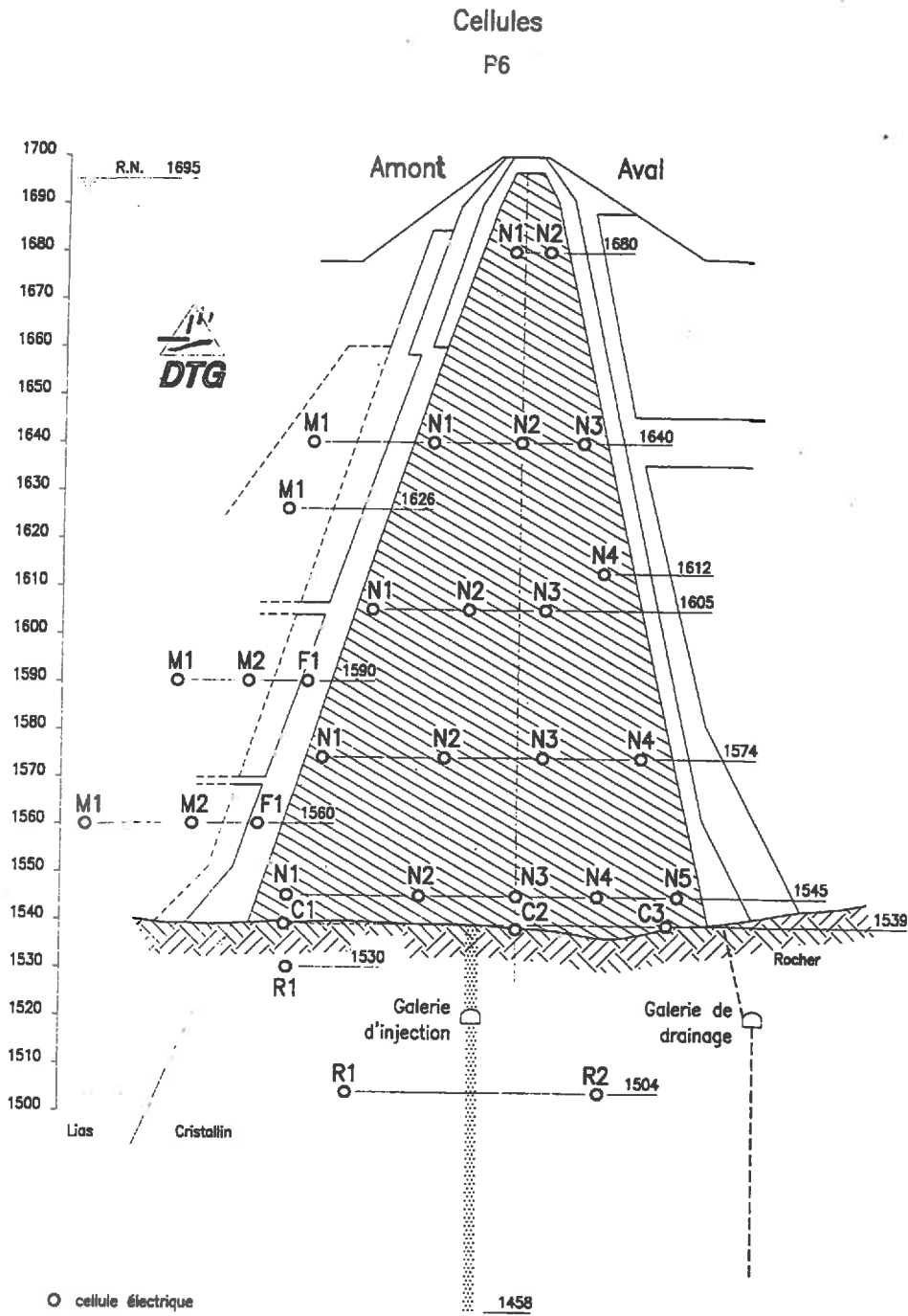


FIG. 7.1 - Emplacement des mesures sur le profil étudié. Document EDF.

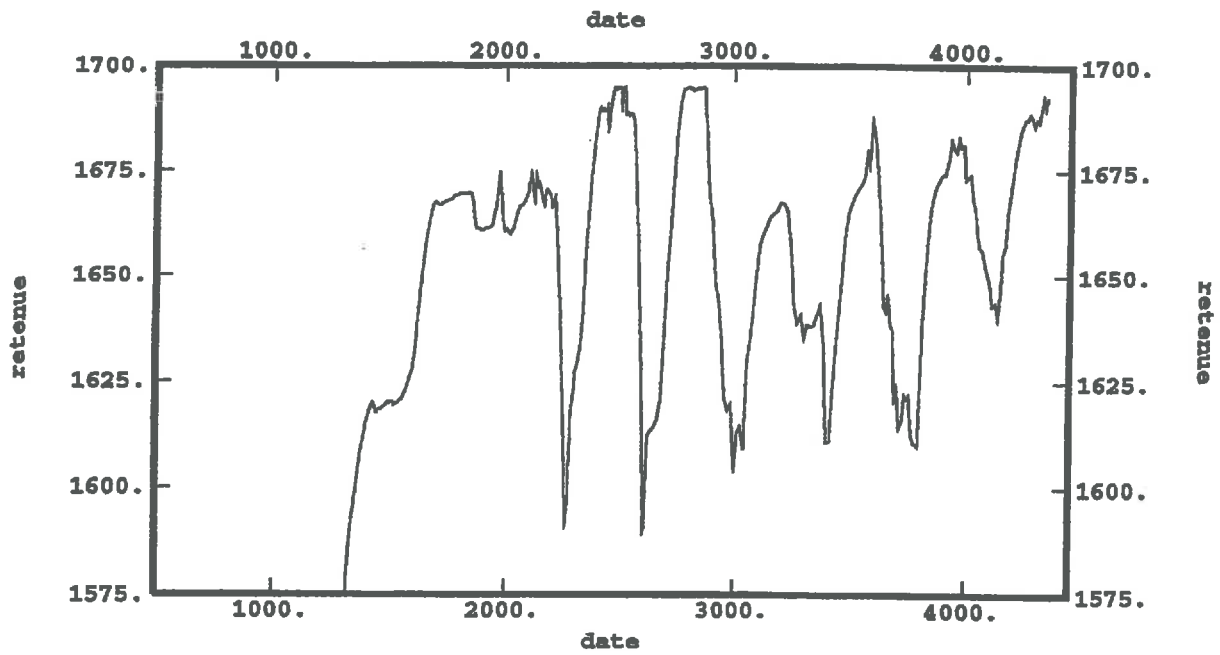


FIG. 7.2 - Mesures de la retenue du barrage.

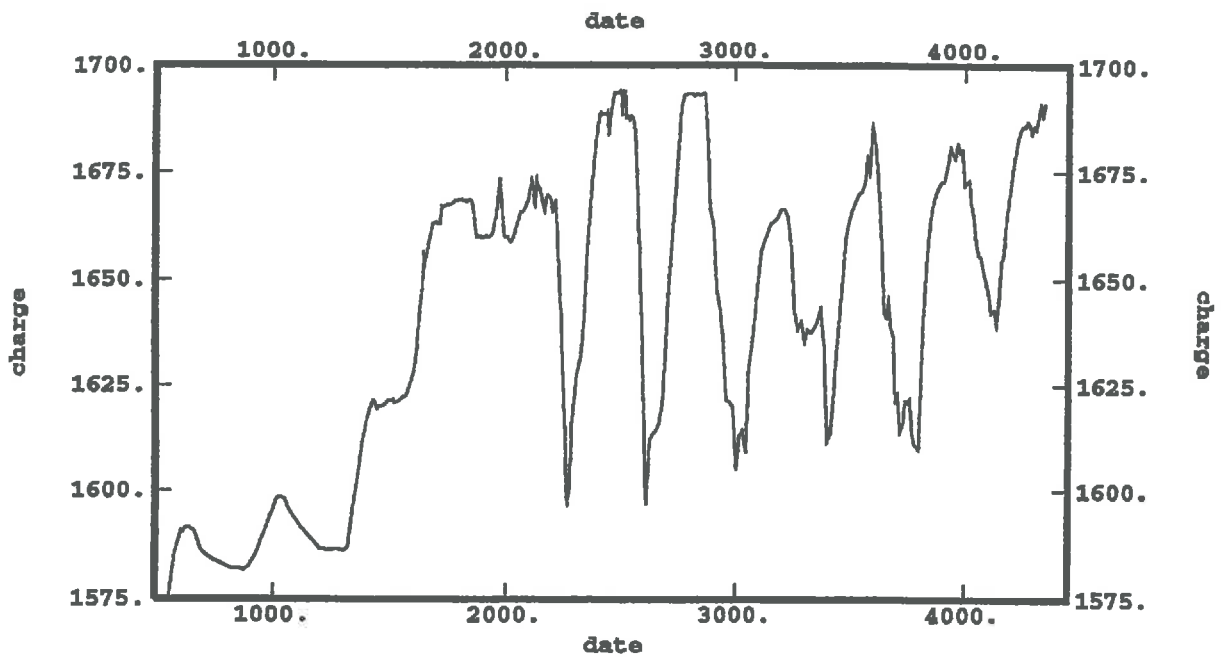
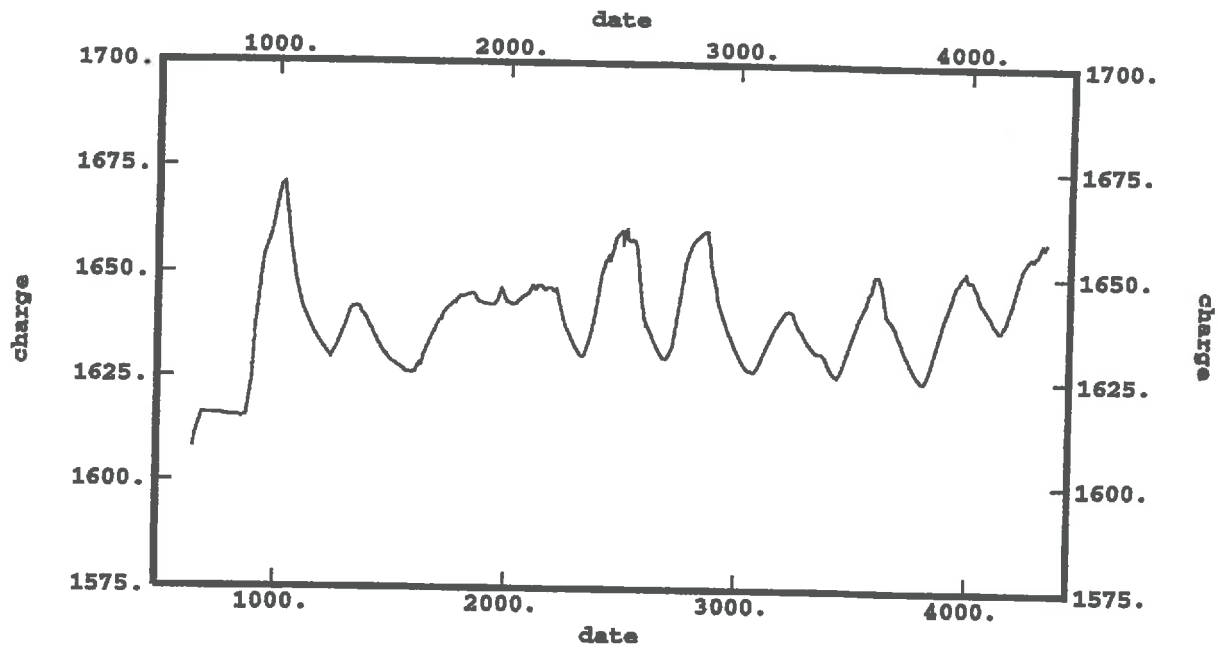
**Cellule 575n1**

FIG. 7.3 - Mesures de charge de la cellule 575n1.



Cellule 605n2

FIG. 7.4 - Mesures de charge de la cellule 605n2.

7.1.2 Régressions linéaires

Une première étude, menée avec les outils statistiques de base (moyennes, variances, régressions linéaires), a conduit à ne conserver que les dernières mesures disponibles. Les principales étapes de cette étude sont résumées ici.

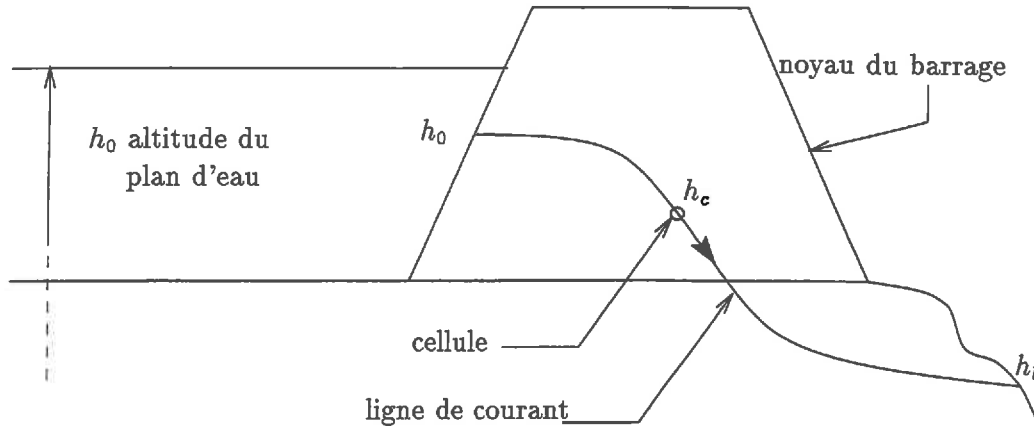


FIG. 7.5 - Ligne de courant passant par une cellule c , avec une charge h_0 à l'amont et une charge h_1 à l'aval.

Considérons un tube de courant très fin qui part de l'amont avec une charge h_0 , traverse le barrage, puis ressort à l'aval avec la charge h_1 . Soit x l'abscisse curviligne de ce tube, qui vaut 0 à l'amont et l à l'aval. Soient $e(x)$, $h(x)$ et $k(x)$ l'épaisseur du tube, la charge et la perméabilité au point d'abscisse x du tube. La conservation de la masse d'eau s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(e(x) k(x) \frac{dh}{dx}(x) \right) = 0$$

ce qui par intégration donne :

$$h(x) = h_1 \mu(x) + h_0 (1 - \mu(x)) \quad \text{avec} \quad \mu(x) = \frac{\int_0^x \frac{du}{e(u) k(u)}}{\int_0^l \frac{du}{e(u) k(u)}}$$

C'est une relation linéaire qui relie la charge de l'abscisse x aux charges amont et aval du tube. Les termes qui la composent dépendent en fait du temps. Ecrite pour une cellule d'abscisse x_c (figure 7.5), elle devient :

$$h_c(t) = h_1(t) \mu_c(t) + h_0(t) (1 - \mu_c(t)) \quad \text{avec} \quad h_c(t) = h(x_c, t) \quad \text{et} \quad \mu_c(t) = \mu(x_c(t), t)$$

La valeur $h_1(t)$ de la charge à l'aval du barrage peut être considérée comme constante : les mesures montrent que l'amplitude des variations de charge décroît vers l'aval. Pour les cellules de l'aval, cette amplitude est déjà négligeable devant les variations de cote de la retenue. La variance de la cellule 540n5, par exemple, vaut 5.6 m^2 contre 1510 m^2 pour la retenue amont. Les variations de charge à l'aval sont donc encore plus négligeables.

Le coefficient $\mu_c(t)$ exprime le taux de perte de charge entre l'amont et la cellule. Il dépend de la trajectoire (valeur des perméabilités rencontrées) et de l'épaisseur du tube de courant,

donc de la charge hydraulique dans tout le barrage, donc du temps. Supposons le constant, dans une première approximation, ce qui revient à négliger le déplacement des lignes de courant. Avec $a_c = 1 - \mu_c$ et $b_c = h_1 \mu_c$, la valeur de la charge h_c de la cellule dépend de façon affine de la cote de retenue sous la forme :

$$h_c(t) = h_0(t) a_c + b_c$$

ce qui suggère l'emploi de régressions linéaires entre les variables mesurées h_c et la charge amont h_0 .

Les nuages de corrélations, dessinés pour toutes les cellules et qui représentent les mesures de charge en fonction des mesures de la retenue, révèlent que les mesures se partagent en deux populations : les mesures prises avant et après le 30/07/87 ($j=2401$). La figure 7.6 montre un exemple de nuage de corrélation, pour la cellule 540c3. Les mesures de charge postérieures au 30/07/87 sont bien alignées avec les mesures de la retenue et forment une population homogène. En revanche, les mesures antérieures au 30/07/87 se détachent nettement des autres mesures.

La figure 7.7 montre que le 30/07/87, date de séparation des deux populations de mesures, se situe à la date où la retenue du barrage atteint pour la première fois sa cote maximale. Comment expliquer physiquement ce phénomène ? On peut penser que tant que la retenue du barrage n'est pas remplie complètement, les matériaux du barrage ne sont pas "mouillés" partout, leurs qualités hydrauliques (perméabilités) ne sont pas stabilisées. La période antérieure au 30/07/87 correspondrait donc, pour le barrage, à une longue période d'imbibition.

Quelle que soit l'explication appropriée de ce phénomène il est préférable de laisser de côté les premières mesures, ce qui réduit à 205 le nombre de dates pour lesquelles les mesures sont disponibles.

7.1.3 Restriction du domaine au seul noyau

L'étude des données par les régressions linéaires a aussi montré que les mesures des cellules placées à l'amont du noyau sont presque identiques à la cote de la retenue. Ceci provient de ce que les perméabilités dans le noyau sont beaucoup plus faibles que les perméabilités à l'extérieur. Il en résulte deux conséquences :

1. Les perméabilités du noyau ne sont pas homogènes à celles du reste du barrage, l'influence du reste du barrage au point de vue des écoulements peut être considéré comme négligeable. C'est une hypothèse classique. Les perméabilités ne seront donc étudiées que dans le noyau.
2. A l'amont du noyau, la charge varie très peu, contrairement à ce qui se passe dans le noyau. Les mesures de charge à l'amont et dans le noyau sont donc deux variables physiques différentes, elles ne forment pas une population homogène, ce qui peut gêner l'interpolation. Les mesures à l'amont du noyau sont donc supprimées et remplacées par une condition limite en bordure du noyau : le filtre à l'amont du noyau répartit la charge à une valeur quasiment égale à la cote de la retenue. Par la suite, ce filtre est discrétisé par un point tous les 10 m avec une mesure de charge égale à la cote de la retenue.

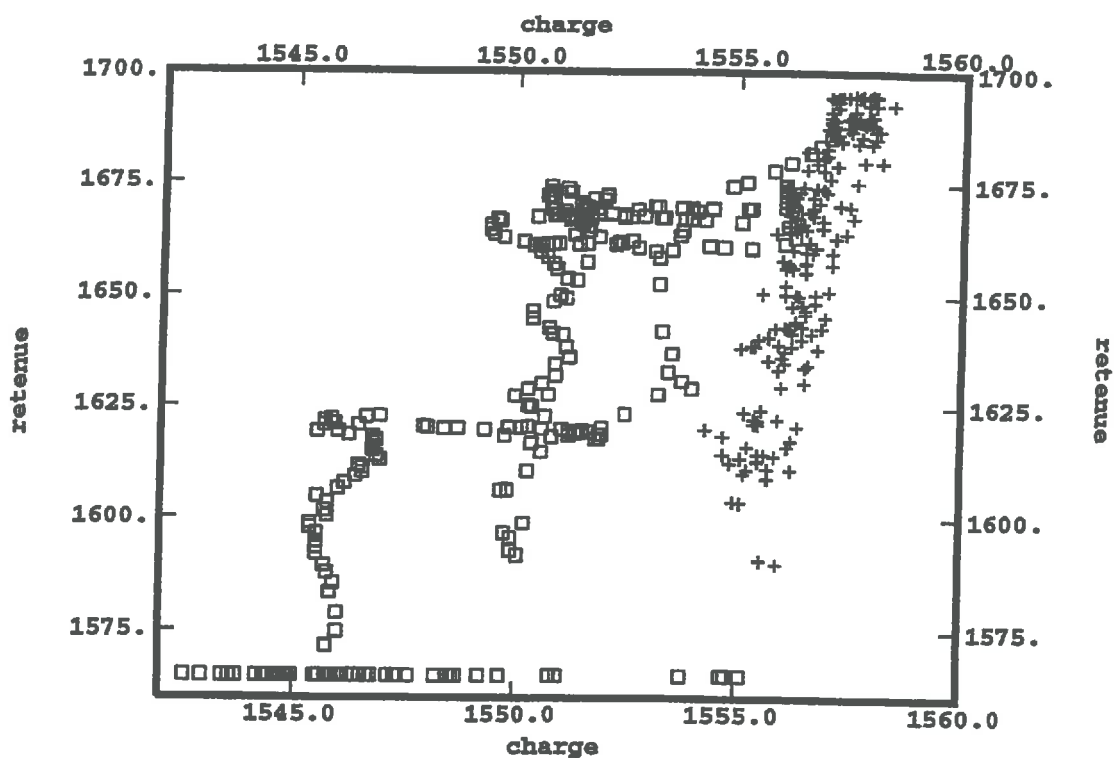


FIG. 7.6 - Nuage de corrélation entre les mesures de la cellule 540C3 et la cote de retenue. Les croix représentent les mesures postérieures au 30 Juillet 1987.

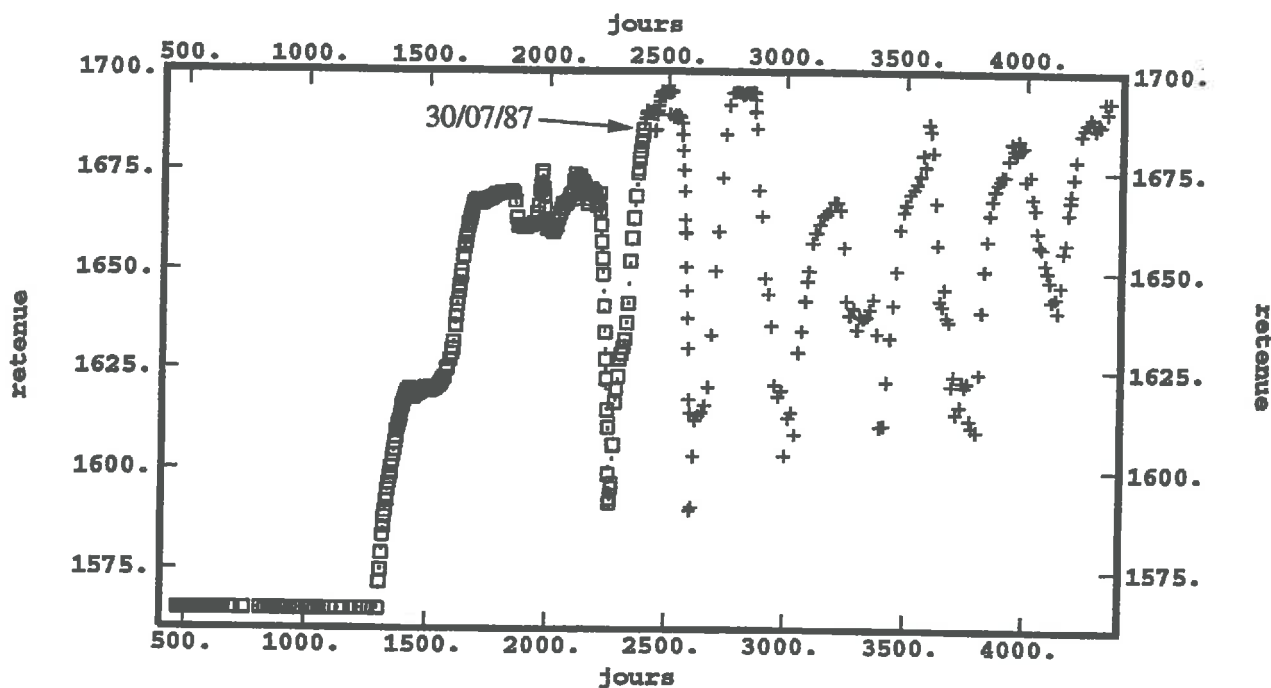


FIG. 7.7 - Cote de retenue en fonction du temps. Les croix représentent les mesures postérieures au 30 Juillet 1987.

7.1.4 Incertitudes de mesures

Les mesures disponibles sont de deux types : mesures de la cote de retenue du barrage, et mesures de charge délivrées par les mesures de pression. Ces mesures possèdent une certaine incertitude. L'incertitude relative aux cellules de pression provient de deux origines :

- Incertitude de la mesure pression. Les cellules de pression sont construites pour une certaine précision. Cette précision dépend des cellules et est évaluée à $\pm 13\text{cm}$ pour les cellules situées à la cote 1680, à $\pm 26\text{cm}$ entre 1605 et 1640 et à $\pm 52\text{cm}$ pour le reste. Il existe en outre une dérive thermique due à la différence entre la température d'étalonnage et la température de fonctionnement.
- Incertitude de la cote de pose de la cellule. Compte tenu de la précision de la pose et du tassement des matériaux, la cote de pose de la cellule est connue avec une incertitude de $\pm 50\text{cm}$.

L'analyse des données permet de retrouver cette incertitude de mesure pour les cellules situées en amont du noyau. Dans cette région, les pertes de charge sont négligeables, la charge hydraulique est donc presque égale à la cote de retenue. Les incertitudes de mesure sont alors révélées de la façon suivante :

- Dans les périodes où la cote de retenue est haute, une ligne de courant commence à l'amont du barrage, avec une charge égale à la retenue du barrage, puis traverse le barrage avec une charge de plus en plus faible. La charge en tout point décroît donc de l'amont vers l'aval pour les retenues hautes. La figure 7.8 montre que les mesures hautes de la cellule 590m2 sont supérieures à la cote de retenue. La figure 7.9 montre que les mesures hautes de la cellule 575n1 sont supérieures à celles des cellules 560f1 et 590f1 situées justes en amont. Ces contradictions sont révélatrices d'incertitudes liées aux appareils de mesure.
- Il existe quelques dates de faible retenue, pour lesquelles le flux, ne circule plus de l'amont vers l'aval, mais permet de libérer l'eau emmagasinée dans le haut du barrage. Ces périodes de flux inversé sont rares et influent peu sur les statistiques. La moyenne dans le temps des mesures de la cellule 590m2 vaut 1664.7 m contre 1663.8 m pour la cote de retenue amont. Le biais de l'incertitude de mesure atteint près d'un mètre pour cette cellule.
- Le barrage peut être vu comme un système dynamique qui répond aux variations de la retenue. Comme ces variations constituent la seule cause des variations de charge dans le barrage, et à cause des pertes de charge, l'amplitude des variations de charge doit décroître de l'amont vers l'aval. Ceci est confirmé par la plupart des mesures de charge. Ceci n'est pourtant plus vrai pour les cellules 560m1, 560m2, 590m2, 590f1, dont les variations sont plus importantes que celles de la retenue. Le tableau suivant montre en effet que, pour ces cellules, la variance de la charge, calculée sur une certaine période, est supérieure à la variance de la retenue. Ceci provient d'une incertitude de mesure.

cellule	560m1	560m2	590m2	590f1
nombre de dates	205	207	204	204
variance de la cellule	788.9	791.5	805.5	767.0
variance de la retenue	782.3	777.4	743.2	762.3

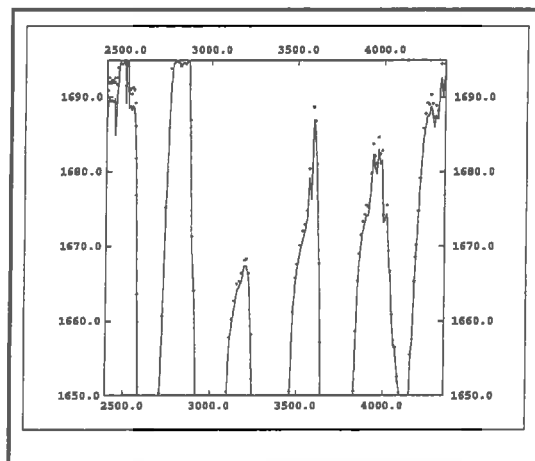


FIG. 7.8 - Les mesures de la cellule 590M2 (croix) sont supérieures à la cote de retenue du barrage (trait plein).

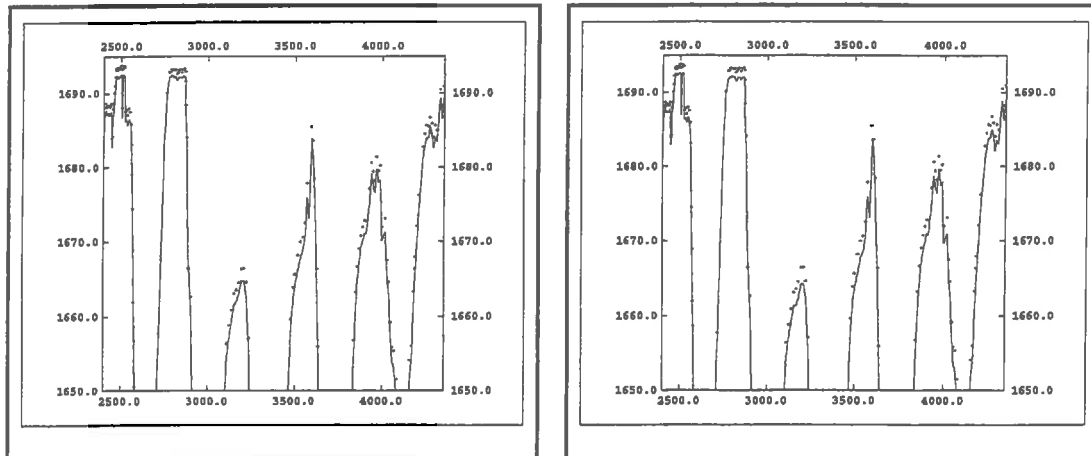


FIG. 7.9 - Les mesures de la cellule 575N1 (croix) sont supérieures à celles des cellules 560F1 et 590F1, qui sont situées juste en amont.

A l'amont du noyau, l'incertitude de mesure peut être observée. Elle peut atteindre jusqu'à 1 m comme sur la cellule 590m2. A l'intérieur du noyau, il n'est plus possible d'évaluer cette incertitude ; mais elle peut être supposée comparable à celle de l'amont.

L'incertitude de mesure de charge est une raison supplémentaire qui justifie que le domaine de recherche des perméabilités soit restreint au noyau. A l'extérieur du noyau, les variations de charge sont très faibles et sont masquées par l'incertitude de mesure. Dans ces conditions, il est impossible d'évaluer correctement le gradient de charge, donc de réaliser le calcul inverse.

7.2 Correction des données par convolution

La charge en milieu saturé et la charge en milieu non-saturé sont deux variables physiques très différentes, car si les équations vérifiées par la charge en milieu saturé sont linéaires, elles sont fortement non-linéaires en milieu non-saturé. Il n'est donc pas question de mélanger ces deux types de mesures dans une estimation par krigeage. Comme l'équation de diffusivité (1.2), qui sert à résoudre le problème inverse, n'est valable que dans le milieu saturé, les seules mesures de charge qui doivent intervenir dans les krigeages, lors de la résolution du problème inverse, sont les mesures du milieu saturé. Il faut donc pouvoir séparer les mesures du milieu saturé des autres mesures.

7.2.1 Des mesures de pression toujours positives

En théorie, les mesures de charge du milieu saturé sont caractérisées par des pressions positives. Or les cellules indiquent toutes des mesures de pression positives. Faut-il en conclure que les cellules sont toujours sous la surface libre et qu'il faut toutes les conserver ?

La figure 7.10 montre au 21/3/89 ($j=3001$) les valeurs de charge, estimées par krigeage avec les mesures de toutes les cellules, et représentées au moyen de courbes d'isovaleur. La surface libre est également calculée et représentée. Elle présente une curieuse allure et passe au plus près des 4 cellules du haut du barrage, car la pression en ces cellules, quoique positive, est presque nulle. Il semble que, comme la retenue amont est basse, les cellules devraient être en zone non-saturée, contrairement à ce qu'indique leur mesure. Pour le vérifier, les 4 cellules du haut sont retirées et la charge est de nouveau estimée par krigeage. L'allure de la surface libre (figure 7.10) paraît plus naturelle.

Il semble donc que les cellules de pression affichent toujours une pression positive, même en dehors de la zone saturée. La figure 7.11 montre les mesures de la cellule 680n1 en comparaison avec les mesures de la cote de retenue. L'échelle verticale est différente afin de superposer les 2 courbes. Les mesures de charge de la cellule 680n1 semblent être une réponse aux variations de cote de retenue, avec un effet retard. Il faut noter toutefois que les mesures de charge ne répondent en fait qu'aux valeurs hautes de la retenue. Pour les valeurs faibles, la charge décroît lentement avec une allure exponentielle, indépendamment des valeurs de la cote.

Après examen des mesures de charge de toutes les cellules, il semble d'une part que les cellules répondent aux sollicitations des variations de cote de retenue ; d'autre part, les cellules ne sont sensibles qu'aux mesures hautes de la retenue. Ceci peut s'expliquer par l'hypothèse suivante : pour des mesures hautes de la retenue, le milieu autour de la cellule est saturé, la cellule répond aux sollicitations de l'amont. Pour les cotes basses, le milieu n'est plus saturé, l'eau ne circule plus, et ne transmet donc plus les sollicitations de l'amont à la cellule ; la charge décroît alors exponentiellement. La réponse et la non-réponse aux sollicitations de

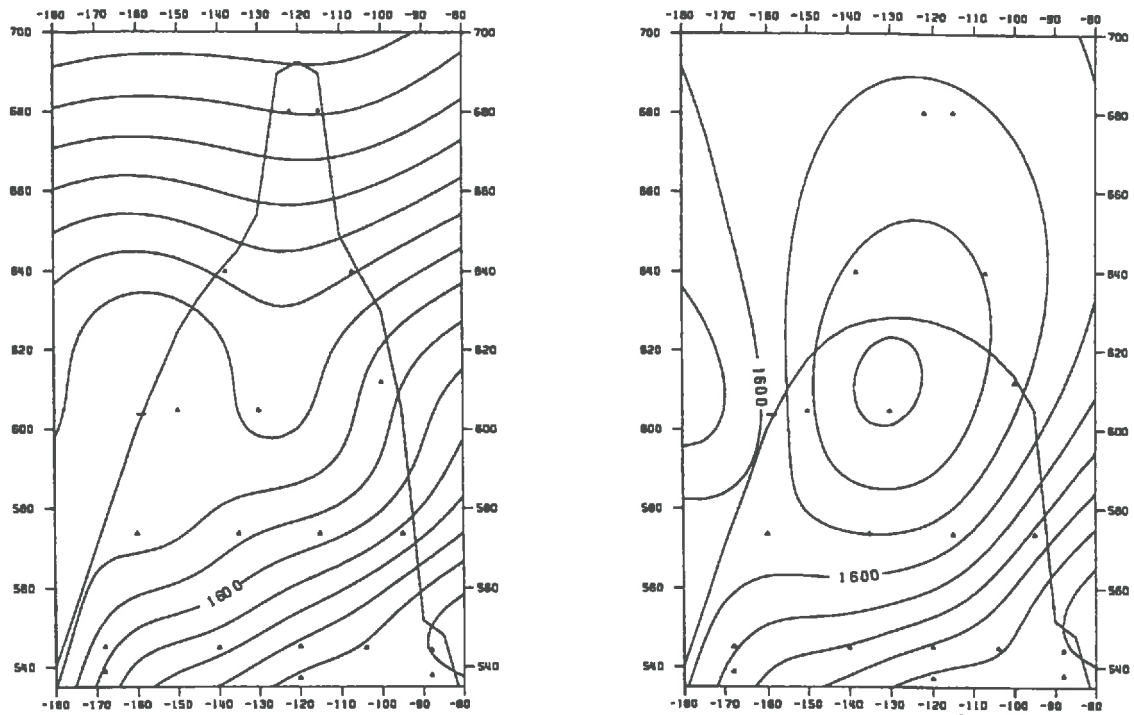


FIG. 7.10 - Au 12/3/89, lignes de charge constante tous les 10 m. A gauche, en tenant compte de toutes les mesures, à droite en retirant les mesures des 4 cellules du haut.

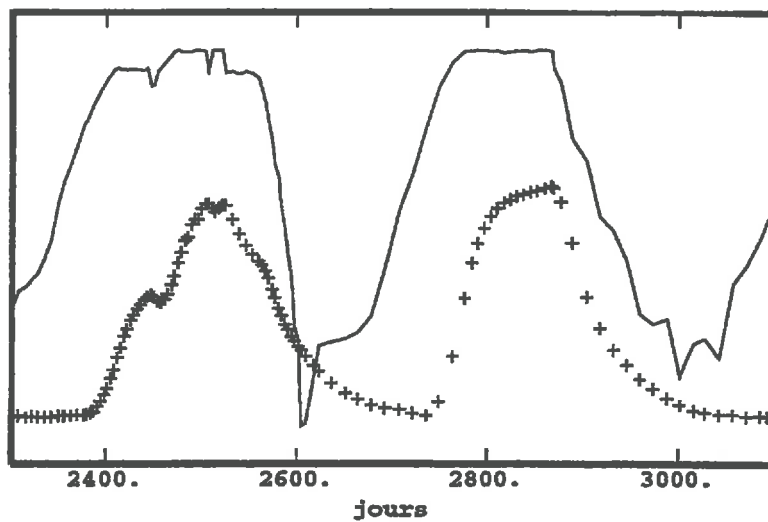


FIG. 7.11 - Cote de retenue (trait plein) et Mesures de charge de la cellule 680n1 (croix). Les échelles verticales sont différentes.

l'amont signifieraient donc que la cellule se trouve respectivement en milieu saturé et non-saturé. Cette hypothèse sera confortée par les calculs qui viennent, puis elle débouchera sur une méthode pour sélectionner, parmi les mesures de charge, celles qui sont prises en milieu saturé.

7.2.2 Hypothèse de Dupuit

Les ingénieurs d'EDF ont proposé un modèle de convolution pour interpréter les mesures de charge d'une cellule à partir des variations de la retenue du barrage. Leur modélisation s'appuie sur l'hypothèse de Dupuit.

Hypothèse de Dupuit Cette hypothèse permet de ramener l'équation de deux dimensions d'espace à une dimension. La charge $h(x, z, t)$ est sensée ne plus dépendre que d'une seule coordonnée : $h(x, t)$. L'équation de diffusivité (1.2) est transformée en équation de Dupuit par intégration sur la hauteur de la nappe libre :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(hk \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \omega \frac{\partial h}{\partial t}$$

où la hauteur d'eau h est mesurée à partir de la base de la nappe, et ω est la porosité de drainage du milieu (voir de Marsily [26] pour les détails). Si la perméabilité k est constante, l'équation de Dupuit devient :

$$\frac{k}{2\omega} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{puis, par linéarisation,} \quad \frac{kH}{\omega} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

où H est la hauteur moyenne de la nappe libre, h la charge hydraulique mesurée à partir de n'importe quel potentiel de référence. Cette équation a la forme de l'**équation de la chaleur** ou **équation de la diffusion**, avec un paramètre $a = \frac{kH}{\omega}$, inconnu a priori.

7.2.3 Modèle EDF de convolution

La convolution du modèle EDF, repose sur la forme des solutions de l'équation de la chaleur :

$$a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.1)$$

En un point d'abscisse x , la valeur de la solution $h(x, t)$ de l'équation (7.1), conditionnée en $x = 0$ par $h(0, t) = h_0(t)$ et en $x = +\infty$ par un débit nul, est donnée par :

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^t K_A(t - \tau) h_0(\tau) d\tau = K_A \star h_0 \quad \text{avec} \quad A = \frac{x^2}{2a} \quad \text{et} \quad K_A(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{A^2}{t}}$$

Le modèle EDF exploite cette forme pour exprimer les mesures de charge $h_c(t)$ d'une cellule, en fonction des mesures de la cote de la retenue $h_0(t)$ par la convolution :

$$h_c = K_A \star \phi(h_0)$$

où ϕ est un polynôme du quatrième degré qui transforme les mesures de la retenue avant la convolution. A priori, ce polynôme n'est justifié que par les bons résultats obtenus par cette modélisation. La constante A , inconnue, et les coefficients du polynôme sont ajustés par

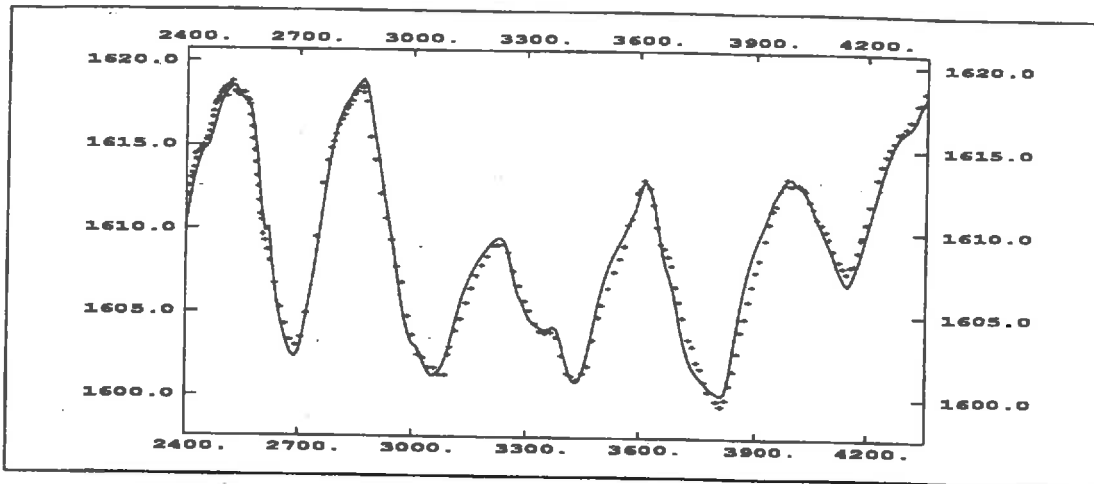


FIG. 7.12 - Estimations du modèle EDF (trait plein) sur les mesures de la cellule 575n3 (croix).

moindres carrés. Au moyen de ces 6 constantes inconnues, il est possible d'ajuster un modèle prédictif de bonne qualité, qui estime la valeur de charge mesurée par une cellule en fonction de l'historique de la retenue. La figure 7.12 montre par exemple la différence entre les mesures de la cellule 575n3 et leur estimation par le modèle EDF.

7.2.4 Modèle de convolution avec seuil

Le modèle EDF est avant tout un modèle prédictif, il a été conçu pour prédire les mesures des cellules de pression et détecter statistiquement les mesures atypiques (*outlayer*). Sa seule composante d'origine physique est la forme du noyau de convolution $K_A(t)$. Le polynôme ϕ n'a a priori pas de sens physique, ses coefficients sont simplement les paramètres d'ajustement d'une régression linéaire.

Pourtant, il est possible de modifier ce modèle, en remplaçant les considérations statistiques par des considérations physiques. Le nouveau modèle pourra ainsi intégrer l'hypothèse émise au paragraphe 7.2.1, suivant laquelle les mesures d'une cellule semblent ne répondre aux variations de la retenue que lorsque sa cote est haute. Il permettra alors de tester cette hypothèse. Pour cela, le polynôme ϕ est remplacé par les considérations physiques suivantes :

- Après avoir traversé le barrage sur une certaine longueur l , l'eau se trouve atteindre une certaine charge constante h_l . Cette condition aval remplace la condition en $x = +\infty$.
- La charge en une cellule ne répond aux variations de la cote de retenue $h_0(t)$ que si celle-ci est suffisamment haute, c'est-à-dire au dessus d'un certain seuil h_s .

Ces considérations correspondent à de nouvelles conditions limites pour l'équation de la chaleur (7.1): en $x = 0$, $h(0, t) = \max(h_0(t), h_s)$ et en $x = l$, $h(l, t) = h_l$ (voir figure 7.13). Celles-ci induisent de nouvelles solutions à l'équation de la chaleur, données par :

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^t S_{A,B}(t - \tau) \max(h_0(\tau), h_s) d\tau + \frac{A}{B} h_l = S_{A,B} * \max(h_0, h_s) + \frac{A}{B} h_l$$

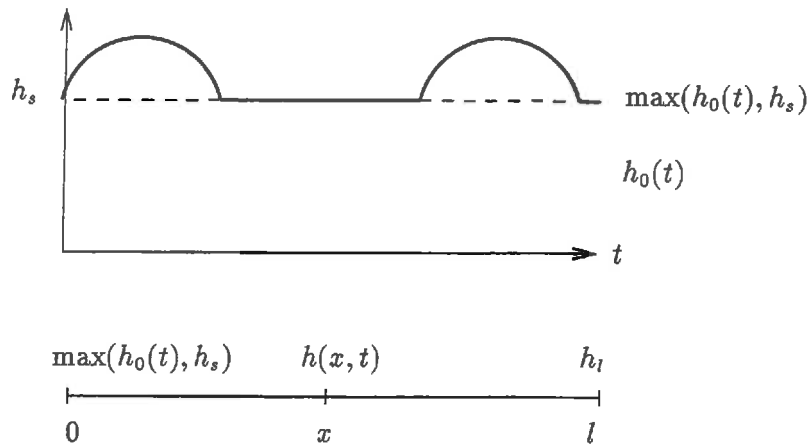


FIG. 7.13 - Signal d'entrée et conditions amont et aval des solutions de l'équation de la chaleur pour le modèle de convolution avec seuil.

avec $A = \frac{x}{2\sqrt{a}}$, $B = \frac{l}{2\sqrt{a}}$ et le noyau de convolution $S_{A,B}$ donné par les deux formules :

$$S_{A,B}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{2kB+A}(t) - K_{(2k+1)B-A}(t) = \frac{\pi}{2B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k A}{B}\right) k e^{-t \left(\frac{2\pi k}{B}\right)^2}$$

Ce modèle de convolution dépend de 4 paramètres : les paramètres A et B du noyau, la valeur du seuil h_s et une constante $\frac{A}{B}h_l$. Ces paramètres peuvent être ajustés par moindres carrés comme pour le modèle EDF. La figure 7.14, qui peut être comparée à la figure 7.12, montre l'ajustement de ce **modèle de convolution avec seuil**. Ce nouveau modèle donne des estimations presque aussi bonnes que celles du modèle EDF. La qualité des ajustements par le modèle avec seuil confirme l'hypothèse, suivant laquelle les mesures d'une cellule répondent aux variations de la retenue pour les seules cotes hautes.

Les deux modèles de convolution, le modèle EDF, construit statistiquement et le modèle avec seuil, construit physiquement, sont en fait très proches. La figure 7.15 montre par exemple, pour la cellule 640n3 le polynôme ϕ ajusté par moindres carrés. Ce polynôme approche la fonction représentée sur la même figure, caractérisée par une valeur de seuil h_s . Il en est de même de tous les polynômes ajustés. Appliquer un tel polynôme ϕ à une entrée h_0 revient à seuiller cette entrée à une valeur h_s : $\max(h_0, h_s)$. Ainsi, le seuil h_s , explicite dans le modèle avec seuil, est implicite dans le modèle EDF. L'hypothèse, suivant laquelle les mesures répondent aux variations de retenue pour les cotes hautes, est ainsi vérifiée par les ajustements des deux modèles.

7.2.5 Correction des données

Une cellule est estimée sortir du milieu saturé, non pas lorsque sa pression devient négative, mais lorsque ses mesures de charge cessent de répondre aux variations de la retenue. Les ajustements par le modèle de convolution avec seuil permettent de savoir quand la charge d'une cellule cesse de répondre aux variations de la retenue.

Pour cela il suffit d'ajuster les paramètres du modèle, dont le seuil h_s , puis d'estimer les mesures de charge avec ces paramètres, mais sans seuiller les mesures de la retenue par le seuil

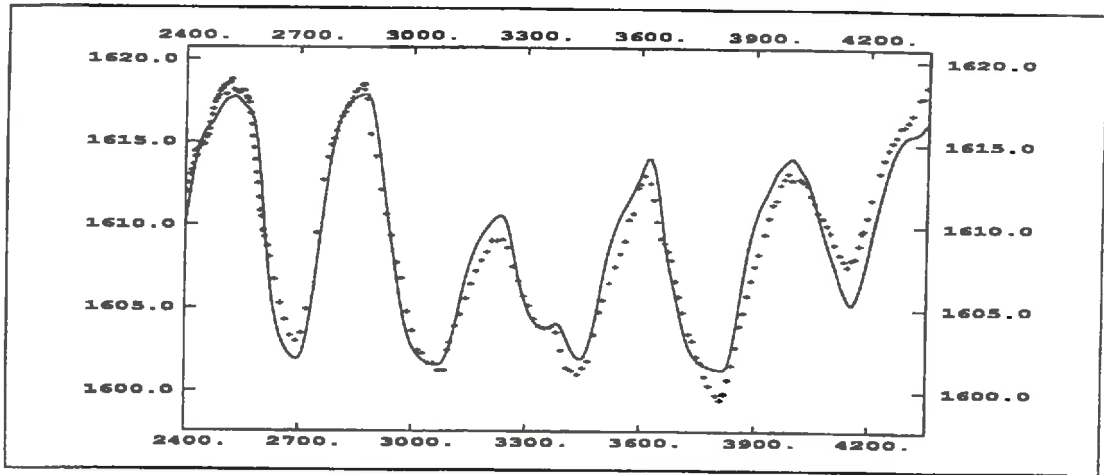


FIG. 7.14 - Estimations du modèle avec seuil (trait plein) sur les mesures de la cellule 575n3 (croix).

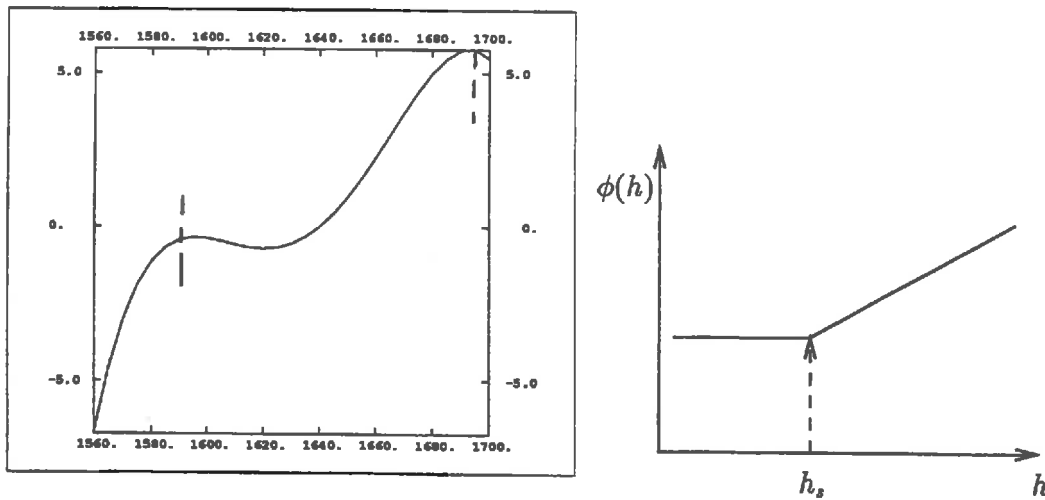


FIG. 7.15 - A Gauche : polynôme ϕ du modèle EDF pour la cellule 640n3. (Il n'est défini qu'entre les valeurs extrêmes de la cote de retenue, 1590 et 1695, indiquées par les deux traits pointillés). A droite : fonction avec seuil h_s .

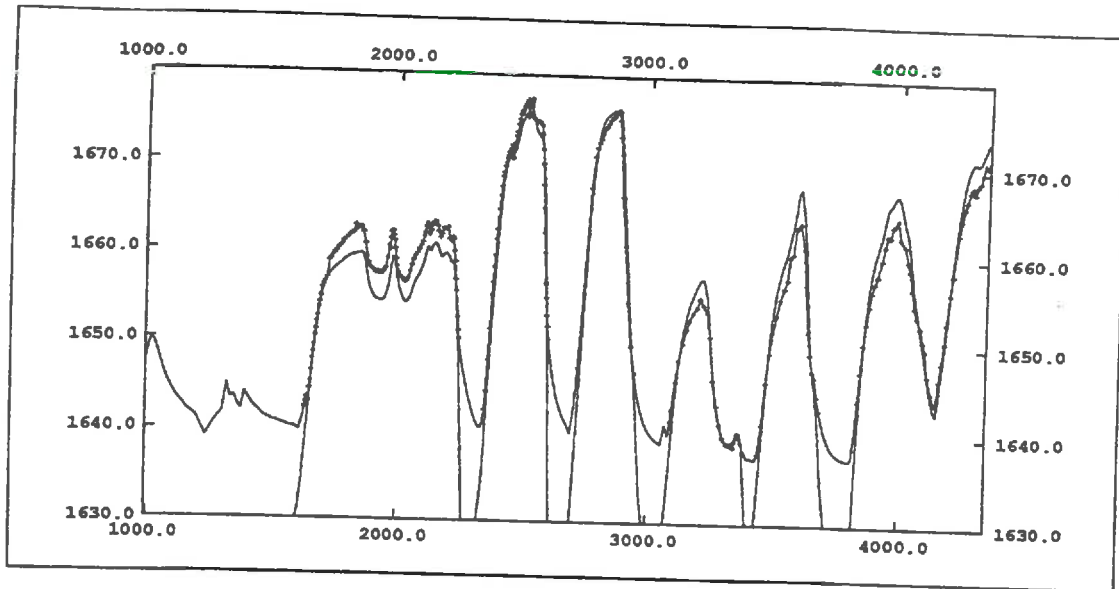


FIG. 7.16 - Mesures de charge de la cellule 640n1 et leurs estimations sans paramètre de seuil.

h_s . Ces estimations correspondent aux mesures que devrait donner la cellule si elle répondait toujours aux sollicitations de l'amont. La figure 7.16 montre les mesures de la cellule 640n1 et leurs estimations par le modèle sans valeur de seuil. Leur différence est présentée sur la figure 7.17. Cette différence montre de grands pics pour les valeurs basses de la retenue lorsque les mesures cessent de répondre aux sollicitations amont.

Il reste à définir une tolérance δ . Les mesures pour lesquelles la différence excède cette tolérance sont considérées comme ne répondant plus aux variations de la retenue, donc comme étant en milieu non-saturé. Elles sont retirées des données. Ainsi une partie des mesures des 4 cellules du haut du noyau, les cellules 640n1, 640n3, 680n1 et 680n2, ont-elles été retirées.

Remarque L'étude des variations, sur des périodes de temps différentes, des paramètres ajustés par moindres carrés, pour le modèle de régression (paragraphe 7.1.2), le modèle EDF (paragraphe 7.2.3) ou le modèle avec seuil (paragraphe 7.2.4) fournit une première idée de l'évolution des valeurs de perméabilité dans le barrage. C'est d'ailleurs à cet effet qu'on été construits le modèle de régression et le modèle EDF. Le modèle avec seuil, quant à lui, a plus pour vocation de détecter les mesures en milieu saturé.

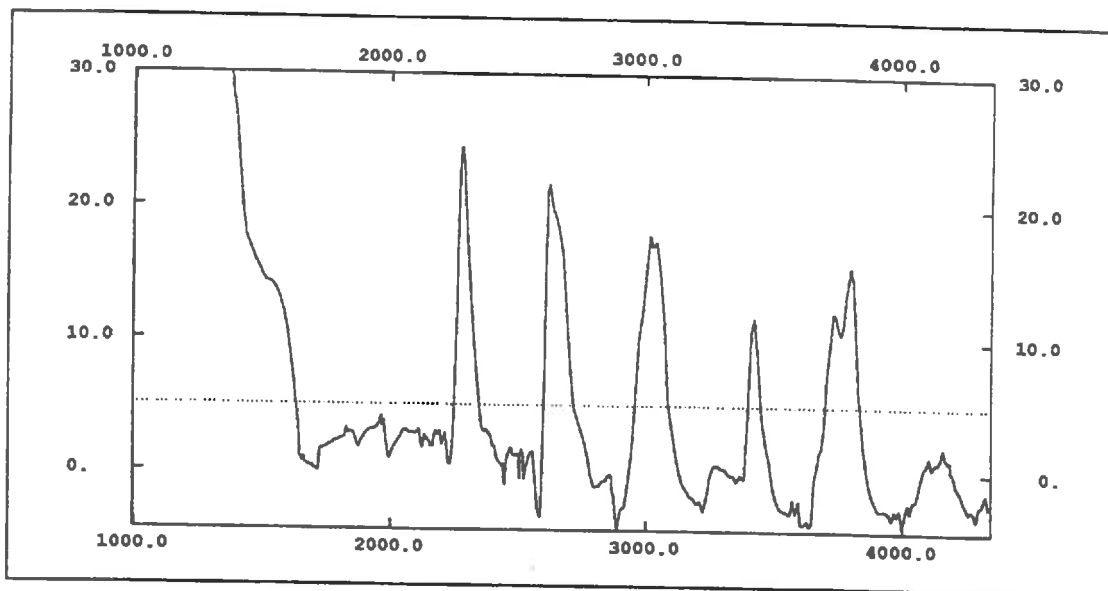


FIG. 7.17 - Différence entre les mesures de la cellule 640n1 et leurs estimations sans valeur de seuil. Le pointillé désigne la tolérance.

7.3 Résultats

La critique des données a écarté un certain nombre de mesures pour ne garder qu'une population homogène pour l'interpolation par krigeage. Les mesures écartées l'ont été pour trois raisons : la charge hydraulique se comporte différemment dans le noyau et à l'extérieur du noyau ; avant et après le 30/7/87 ; en milieu saturé et en milieu non-saturé. Une condition limite pour l'interpolation a été rajoutée à l'amont du noyau sous forme de mesures supplémentaires dont la valeur est égale à la cote de retenue du barrage. La critique des données a également fourni une évaluation de l'incertitude de mesure.

Les données de charge disponibles servent maintenant à estimer les perméabilités du noyau et à apprécier leur éventuelle évolution dans le temps, par la méthode de résolution du problème inverse étudiée aux chapitres précédents.

7.3.1 Calage de l'effet de pépite

Le modèle de krigeage choisi pour l'interpolation des données comporte un effet de pépite, dont le rôle est de régulariser les calculs de gradients, par nature instables. Physiquement cet effet de pépite rend compte de deux phénomènes différents :

1. de l'incertitude de mesure. D'après la critique des données, la charge est mesurée avec une incertitude, dont le biais, en moyenne sur l'ensemble des dates, peut atteindre 1 m.
2. des hautes fréquences de la charge. Les variations de charge sur des distances inférieures aux distances entre deux mesures, c'est-à-dire les hautes fréquences de la charge, sont perdues lors du krigeage. Le paragraphe 3.2.5 montre que le modèle de krigeage doit tenir compte de ces variations à haute fréquence, et peut les inclure dans l'effet de pépite.

Dans la résolution du problème inverse, la perte des hautes fréquences de la charge se traduit par une perte des hautes fréquences de la perméabilité. La perméabilité obtenue par calcul inverse a le statut d'une perméabilité équivalente relative à un support de taille proche de la distance entre deux mesures.

L'effet de pépite tient certes compte de l'incertitude de mesure et des hautes fréquences de la charge, mais d'après le paragraphe 3.2.5, sa valeur n'en dépend qu'indirectement. Il est donc presque impossible d'interpréter physiquement la valeur de l'effet de pépite, qu'il faut plutôt voir comme un paramètre mathématique du modèle.

En théorie, l'effet de pépite peut prendre une valeur différente en chaque point de mesure ; cette valeur est fonction de l'incertitude de mesure qui peut différer pour chaque cellule. Le modèle possède alors de nombreux paramètres. Pour simplifier la modélisation, les valeurs d'effet de pépite sont toutes fixées à une même valeur inconnue. En revanche, l'effet de pépite associé aux mesures de charge supplémentaires, placées sur la surface amont du noyau, est fixé à 0 car ces mesures tiennent lieu de condition limite.

D'après le chapitre sur le krigeage, la valeur du paramètre effet de pépite est fixée par visualisation des figures d'écoulement. Les figures 7.18 et 7.19 montrent pour le 30/7/87 ($j=2401$) les figures d'écoulement pour différentes valeurs de l'effet de pépite. (Le système de représentation graphique des écoulements est exposé au paragraphe 2.1.7). Il semble, au vu de ces figures, que la valeur 100 fournisse une figure d'écoulement suffisamment régulière, mais qui conserve une certaine structuration.

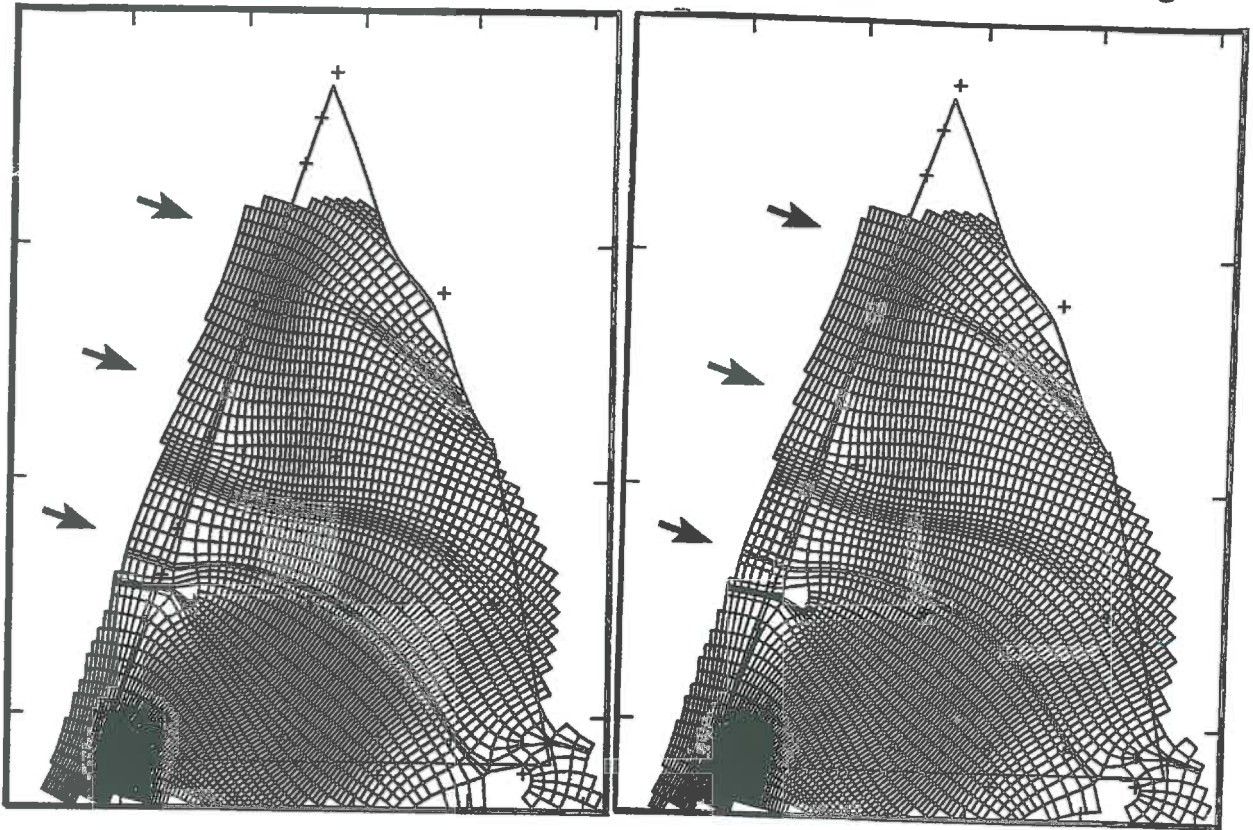


FIG. 7.18 - Ecoulement du 30/7/87. A gauche, effet de pépite=0. A droite, effet de pépite=20.

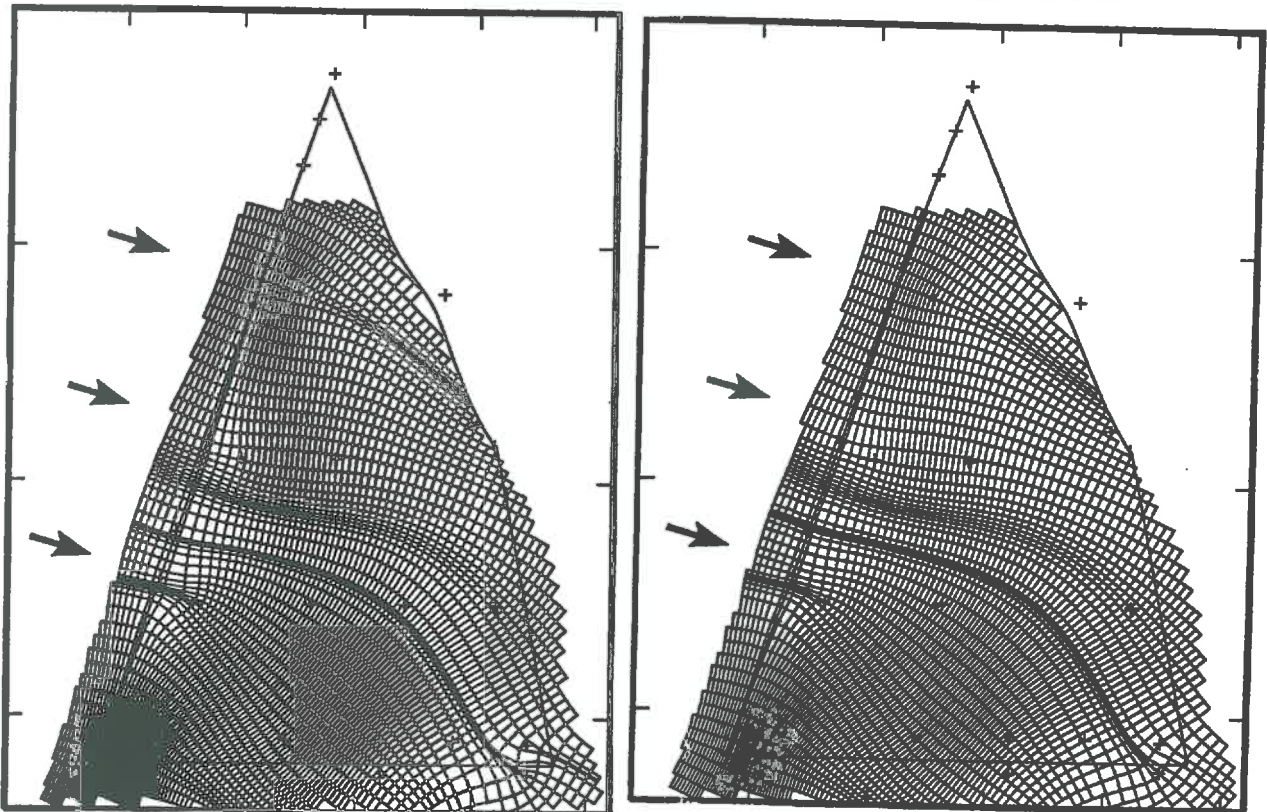


FIG. 7.19 - Ecoulement du 30/7/87. A gauche, effet de pépite=100. A droite, effet de pépite=200.

7.3.2 Exemples d'écoulements

Les figures 7.20 et 7.21 présentent des écoulements caractéristiques des différents types rencontrés.

L'écoulement du 30/7/87 ($j=2401$, figure 7.20), est caractéristique des écoulements les plus fréquents, ceux avec une cote de retenue haute. Un tel écoulement est caractérisé par des lignes de courant très régulières, presque parallèles, partant toutes de l'amont.

L'écoulement du 4/2/88 ($j=2590$, figure 7.20), est caractéristique des écoulements d'une vidange du barrage. La cote de retenue est basse ($h=1610$), les lignes de courant partent presque toutes du haut du barrage qui libère l'eau accumulée en période de haute retenue. Sur la surface amont se trouve un point singulier : le flux qui traverse la surface amont au dessus de ce point est dirigé vers l'amont, le flux qui traverse en dessous est dirigé vers l'aval.

L'écoulement du 2/5/88 ($j=2678$, figure 7.21), est caractéristique des écoulements des retenues basses, après une vidange. Il ressemble à un écoulement de vidange, mais la surface libre est plus basse. Le point singulier de la surface amont qui sépare les flux dirigés dans le sens amont et les flux dirigés dans le sens aval est haut : l'eau traverse normalement la surface amont en direction de l'aval. A l'aval du noyau, les flux sont dirigés du haut vers l'aval, le barrage continue de vider l'eau accumulée en retenue haute.

L'écoulement du 16/5/88 ($j=2692$, figure 7.21), est caractéristique des écoulements du remplissage à partir d'une retenue basse. Les flux sont de nouveau dirigés de l'amont vers l'aval, les lignes de courant redeviennent presque parallèles.

Les figures d'écoulements présentent parfois des extrema de charge à l'intérieur du noyau comme au 11/4/91 ($j=3752$, figure 7.22). Ces extrema se produisent pour les retenues basses, alors que les flux dans le barrage sont compliqués, et que le gradient est faible en certaines zones. En théorie, un maximum de charge correspond à une source, un minimum à un puits. Les extrema de charge pourraient signifier que l'écoulement n'est pas plan et que de l'eau circule entre les profils du barrage. En fait il est plus probable que les extrema soient produits par l'interpolation dans les zones de faible gradient, car le calcul du gradient y est incertain. Pour éviter d'ajouter des artefacts au calcul inverse des perméabilités, les zones de trop faible gradient sont retirées des calculs. Sur la figure 7.22, les mailles restantes correspondent au domaine impliqué dans le calcul.

7.3.3 Ecoulements quasi-parallèles

D'après les développements théoriques, un unique écoulement permet le calcul inverse des perméabilités avec une indétermination d'une constante par ligne de courant. Plusieurs écoulements peuvent réduire cette indétermination à une unique constante sur tout le domaine. Pour cela, ils doivent être complémentaires : leurs lignes de courant doivent se croiser suffisamment. S'ils ne sont pas complémentaires, l'indétermination supplémentaire est arbitrairement fixée, sur le résultat d'inversion, par la géométrie de la grille sur laquelle sont calculés les résultats.

Sur les écoulements du 30/7/87 et du 4/2/88, qui sont les plus différents possibles, les tests proposés en section 5.3 montrent que les différents écoulements dans le barrage sont peu complémentaires, si bien que l'indétermination consiste en une constante par ligne de courant. L'écoulement du 30/7/87 ($j=2401$, figure 7.20) est représentatif des écoulements à retenue haute pour lesquels les lignes de courant sont presque parallèles et dirigées de l'amont vers l'aval. L'écoulement du 4/2/88 ($j=2590$, figure 7.20) est représentatif des écoulements à

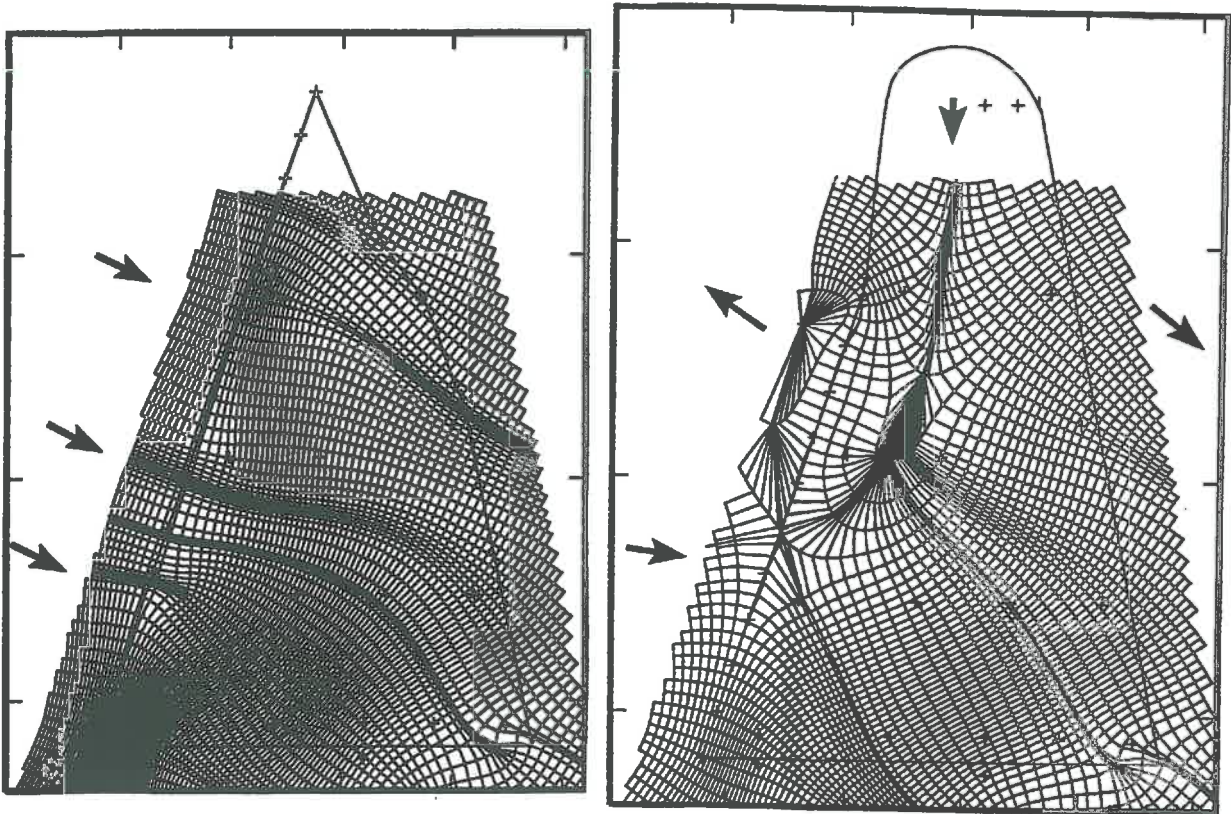


FIG. 7.20 - A gauche : écoulement du 30/7/87. A droite : écoulement du 4/2/88.

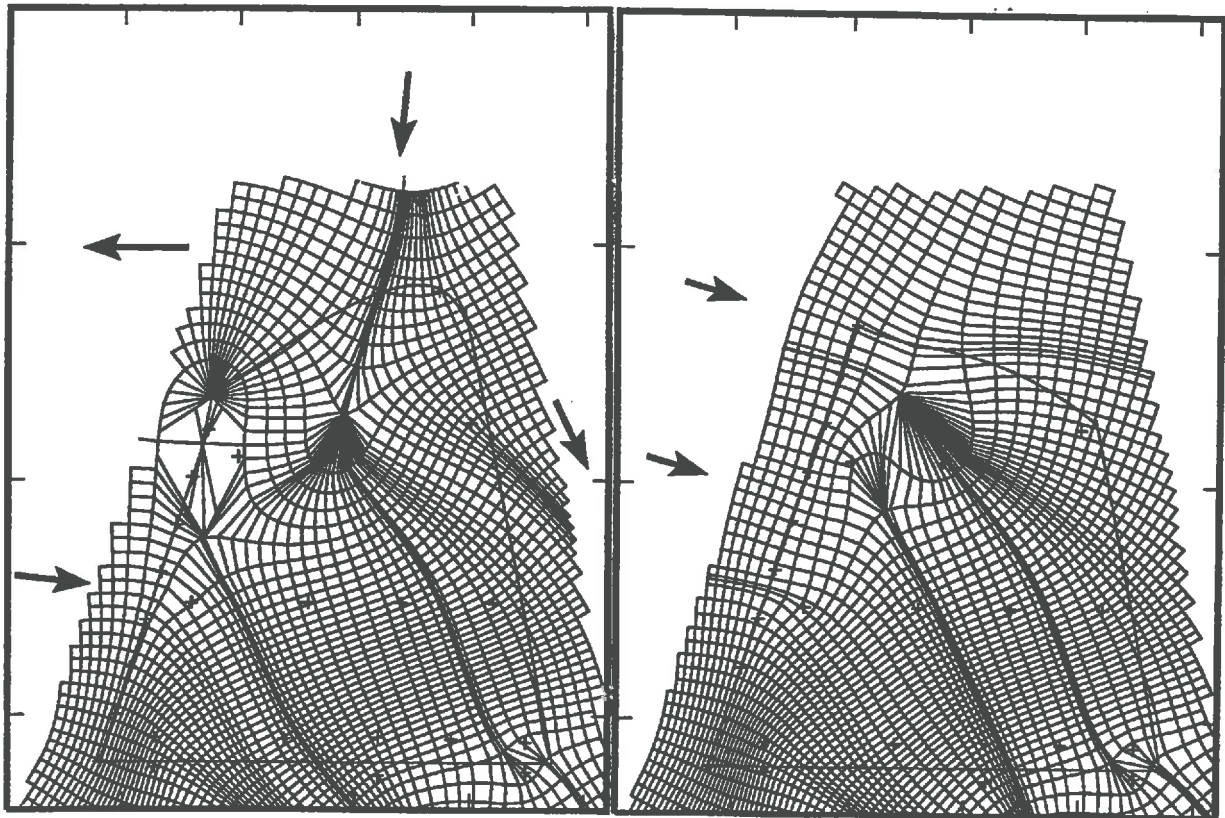


FIG. 7.21 - A gauche : écoulement du 2/5/88. A droite : écoulement du 16/5/88.

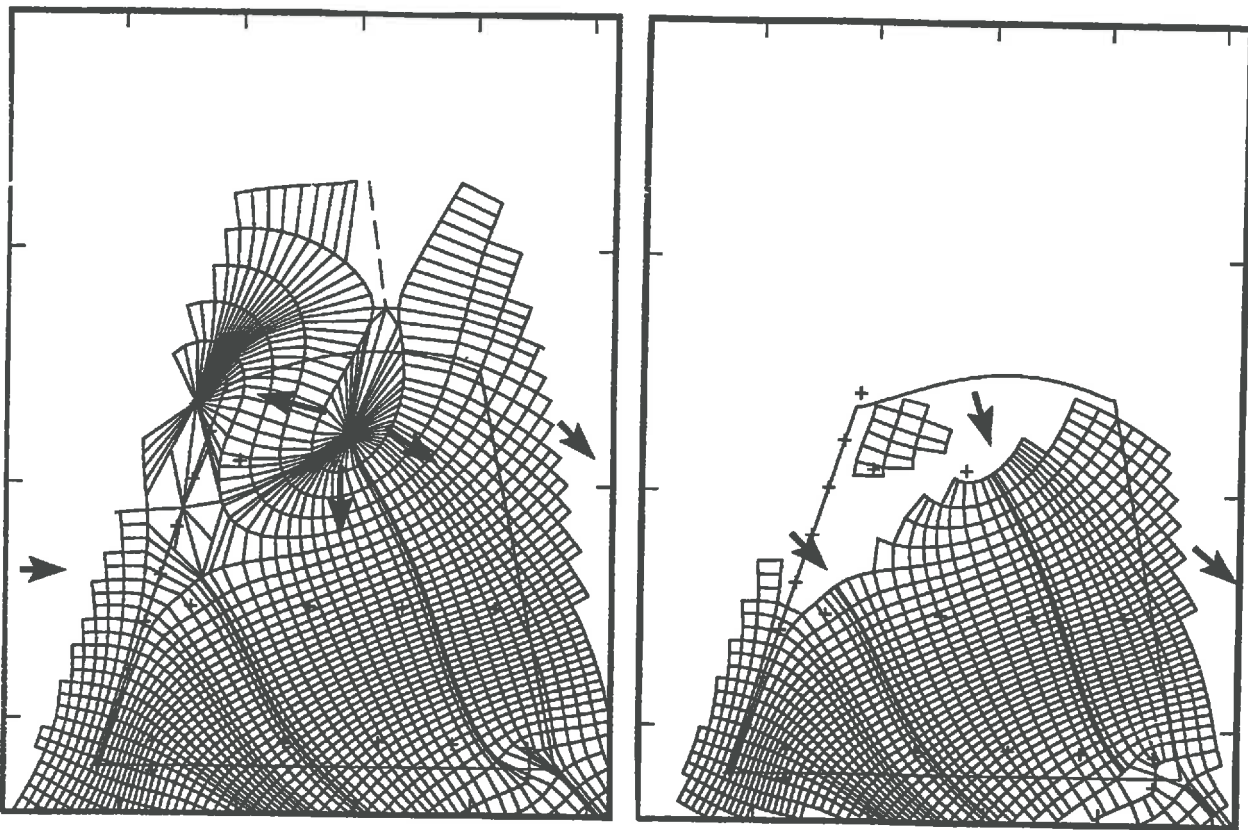


FIG. 7.22 - L'écoulement du 11/4/91 présente des extrema de charge (gauche). Les mailles de faible gradient sont supprimées (droite).

retenue basse où les lignes de courant partent principalement du haut du barrage qui vide l'eau accumulée vers l'amont comme vers l'aval.

La section 5.3 propose deux tests pour vérifier si les écoulements se croisent suffisamment pour réduire l'indétermination à une seule constante. Le premier test consiste à calculer le champ de perméabilité sur deux grilles différentes. Si la différence entre les deux résultats n'est pas presque nulle, les écoulements ne sont pas suffisamment complémentaires.

Le logarithme des perméabilités du noyau est calculé pour deux grilles dont la forme est donnée paragraphe 2.1.7, une grille 10×15 et une grille 30×45 (figure 7.23). Les valeurs de la grille 30×45 sont moyennées pour être comparées à celles de la grille 10×15 . La différence entre ces deux résultats (figure 7.24) montre une dérive, dont les lignes d'isovaleur épousent presque la forme des lignes de courant de l'écoulement de la date 30/7/87. C'est approximativement une fonction constante sur les lignes de courant de l'écoulement. Cela indique que les écoulements ne sont pas suffisamment complémentaires pour limiter l'indétermination à une seule constante.

Un second test, pour confirmer le premier consiste à calculer, les éléments propres associés à l'inversion : le spectre de la figure 7.25 a un début parabolique, et sa première valeur propre est faible (0.015). Ce spectre est caractéristique d'écoulements insuffisamment complémentaires.

D'après la section 5.3, si les écoulements ne sont pas suffisamment complémentaires, le vecteur propre correspondant à la première valeur propre est une approximation d'une fonction indéterminée, constante sur les lignes de courant. C'est le cas ici sur la figure 7.24. Le vecteur propre est même proportionnel à la différence des solutions calculées pour les deux grilles. Ceci confirme que l'indétermination liée aux calculs des perméabilités ne se limite pas à une seule constante.

La figure 7.26 montre pourquoi les deux écoulements ne sont pas complémentaires. Les mailles en milieu non-saturé et les mailles sur lesquelles le gradient de charge est trop faible ont été retirées. Il ne reste que la partie utile pour le calcul. Les deux figures d'écoulements sont en fait plutôt proches, surtout en ce qui concerne la partie aval et le bas de l'écoulement. C'est pourquoi l'indétermination ne peut être levée.

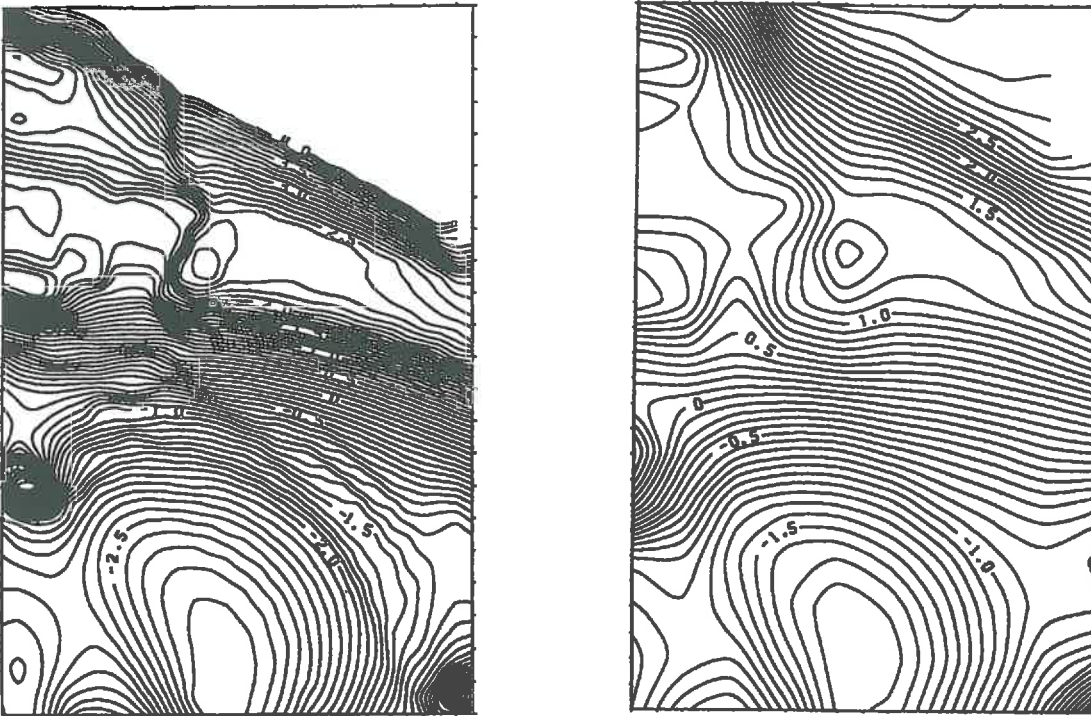


FIG. 7.23 - Logarithme des perméabilités obtenues à partir des écoulements du 30/7/87 et du 4/2/88 sur une grille 30×45 (gauche) et 10×15 (droite).

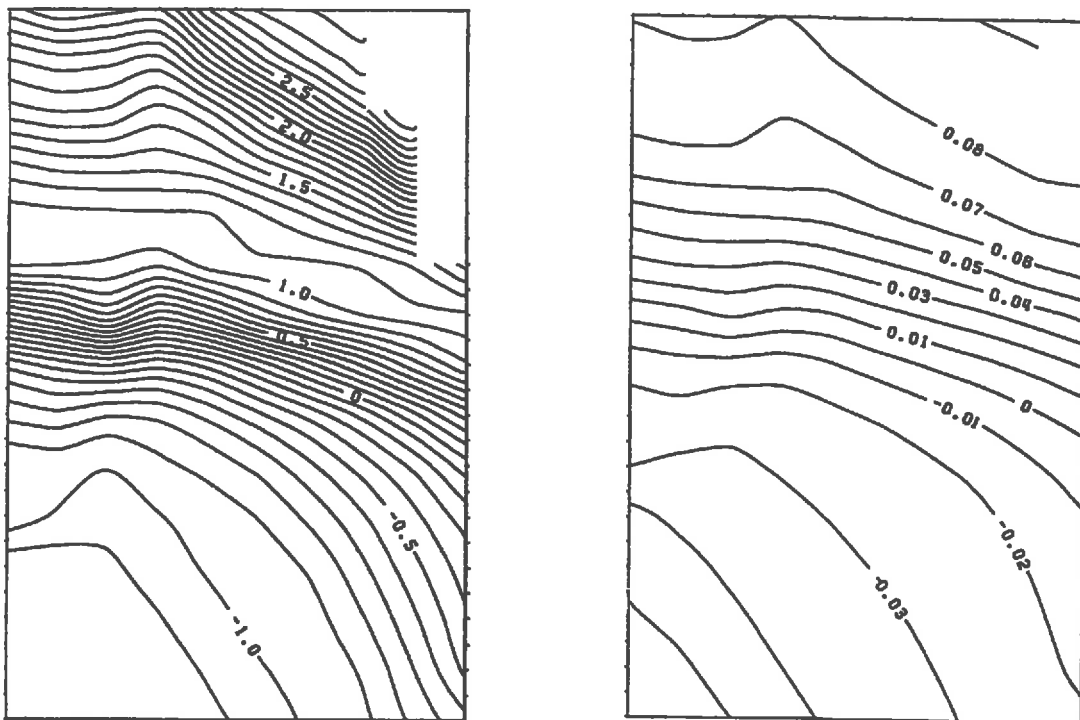


FIG. 7.24 - Différence des résultats obtenus pour les grilles 30×45 et 10×15 (gauche). Première fonction propre du calcul (droite).

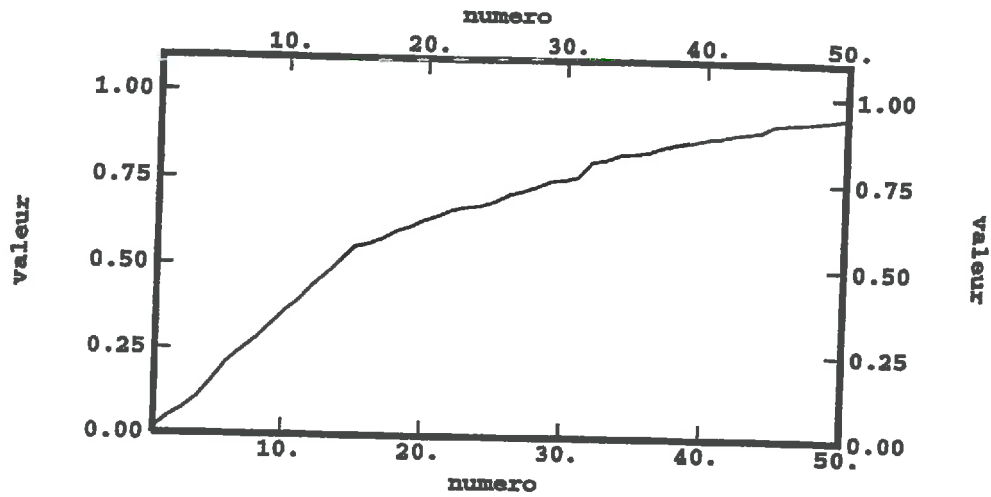


FIG. 7.25 - Spectre associé au calcul d'inversion.

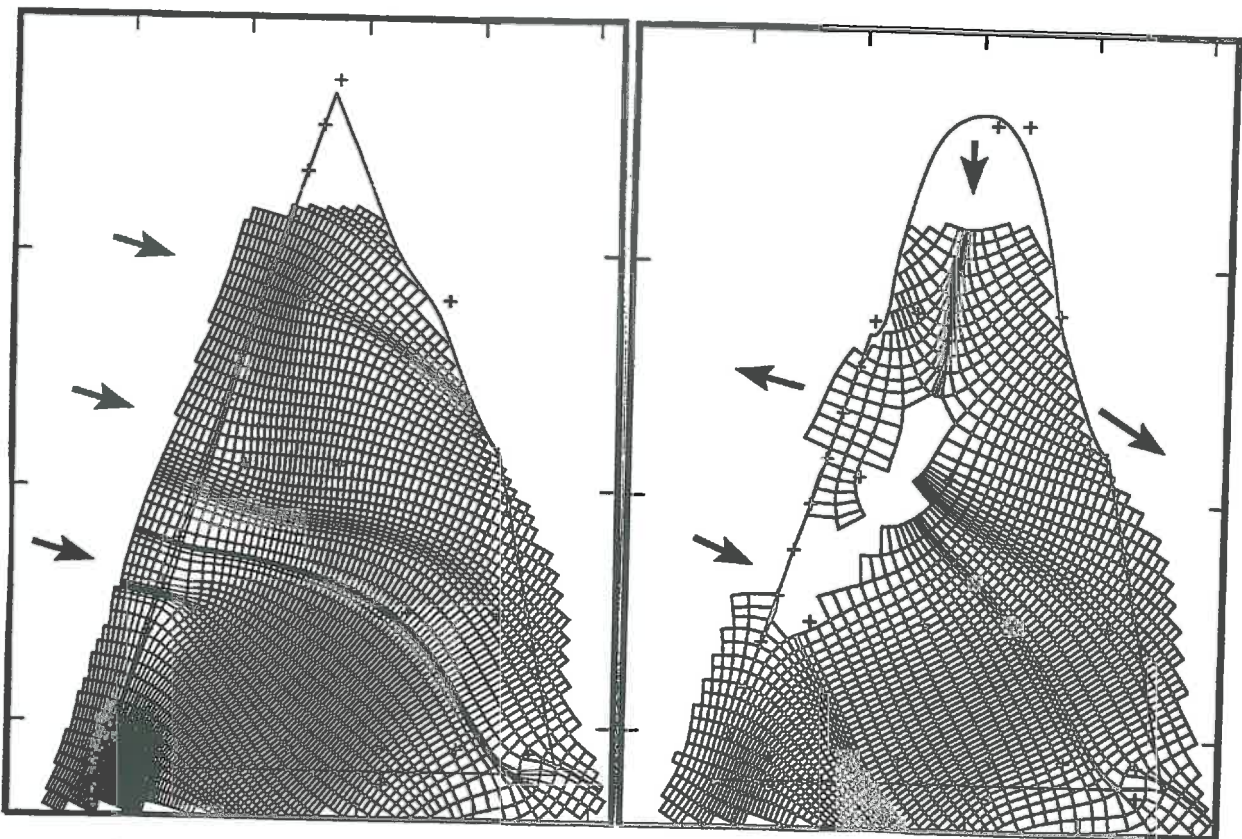


FIG. 7.26 - Ecoulements du 30/1/87 (gauche) et du 4/2/88 (droite). Par rapport à la figure 7.20, les mailles de faible gradient sont supprimées.

7.3.4 Analyse de l'évolution dans le temps des perméabilités

Les différents écoulements dans le barrage ne sont pas très complémentaires. L'indétermination consiste en une constante par ligne de courant, ce qui signifie que les rapports de perméabilités calculés n'ont de sens qu'entre zones situées sur les mêmes lignes de courant. Cette indétermination correspond à une fonction constante sur les lignes de courant, dont les valeurs, arbitrairement fixées par la géométrie de la grille de calcul, peuvent atteindre de grandes valeurs et masquer la solution.

La section 5.4 propose de fixer arbitrairement des valeurs de perméabilité pour fixer les valeurs de la fonction indéterminée et l'empêcher de masquer le résultat. L'inversion des perméabilité est conditionnée par la valeur $\ln(k) = 0$ à l'amont du barrage.

Pour l'inversion conditionnelle, un écoulement suffit au calcul d'inversion. Les perméabilités du noyau sont calculées chaque année à partir d'un écoulement avec une cote de retenue haute. Les dates choisies pour les calculs sont les 30/7/87, 5/9/88, 16/10/89, 12/11/90, 13/11/91, 7/9/92 (resp $j=2401, 2804, 3210, 3602, 3968, 4267$). La condition amont qui fixe l'indétermination reste arbitraire. Les rapports de perméabilités calculés n'ont de sens qu'entre des zones situées sur les mêmes lignes de courant. Pour interpréter les résultats il est bon de connaître, en plus du résultat, la forme des lignes de courant.

Les figures 7.27 à 7.32 montrent les écoulements ainsi que les résultats obtenus. Le champ de perméabilité est représenté par des lignes d'isovaleur de ses logarithmes, soit dans le système d'axe du barrage, soit en transformant la grille trapézoïdale en grille rectangulaire. La forme des lignes de courant est également représentée sur la grille transformée.

Les résultats montrent une hétérogénéité du champ de perméabilité. Les mêmes structures se retrouvent tous les ans. Comme les écoulements ont à peu près les mêmes lignes de courant, il est possible de comparer les résultats, et d'observer une éventuelle évolution des perméabilités dans le noyau.

Pour cette comparaison, les champs de log-perméabilité calculés aux différentes dates sont pris deux par deux, et leur différence est calculée. Sur ces différences, les statistiques élémentaires sont calculées. Le tableau suivant reporte les statistiques des différences les plus faibles, obtenues pour les couples de dates (30/7/87-16/10/89) et (5/9/88-7/9/92); et des différences les plus fortes obtenues pour les couples de dates (30/7/87-7/9/92) et (16/10/89-7/9/92):

dates	min	max	moyenne	variance
30/07/87-16/10/89	-2.3e-1	5.5e-1	6.1e-2	1.3e-2
05/09/88-27/09/92	-3.8e-1	2.1e-1	-2.6e-2	7.6e-3
30/07/87-27/09/92	-3.5e-1	1.2e+0	2.3e-1	9.8e-2
16/10/89-27/09/92	-8.1e-1	1.1e+0	1.6e-1	9.8e-2

Les figures 7.33 et 7.34 montrent les cartographies des différences respectivement les plus faibles et les plus fortes.

Ces résultats montrent que les perméabilités sont voisines pour chaque couple de dates (30/7/87-16/10/89) et (5/9/88-7/9/92), et qu'elles présentent plus de différences entre les dates des deux couples. Or les dates des deux couples sont chronologiquement alternées. La différence observée entre deux dates ne peut donc pas être imputée à une évolution systématique de perméabilité. La différence provient de ce que les tubes de courant ne sont pas complètement parallèles.

Les différences observées entre les différents résultats de calcul sont dues à plusieurs facteurs. La plus grande différence provient de la mauvaise coïncidence des lignes de courant.

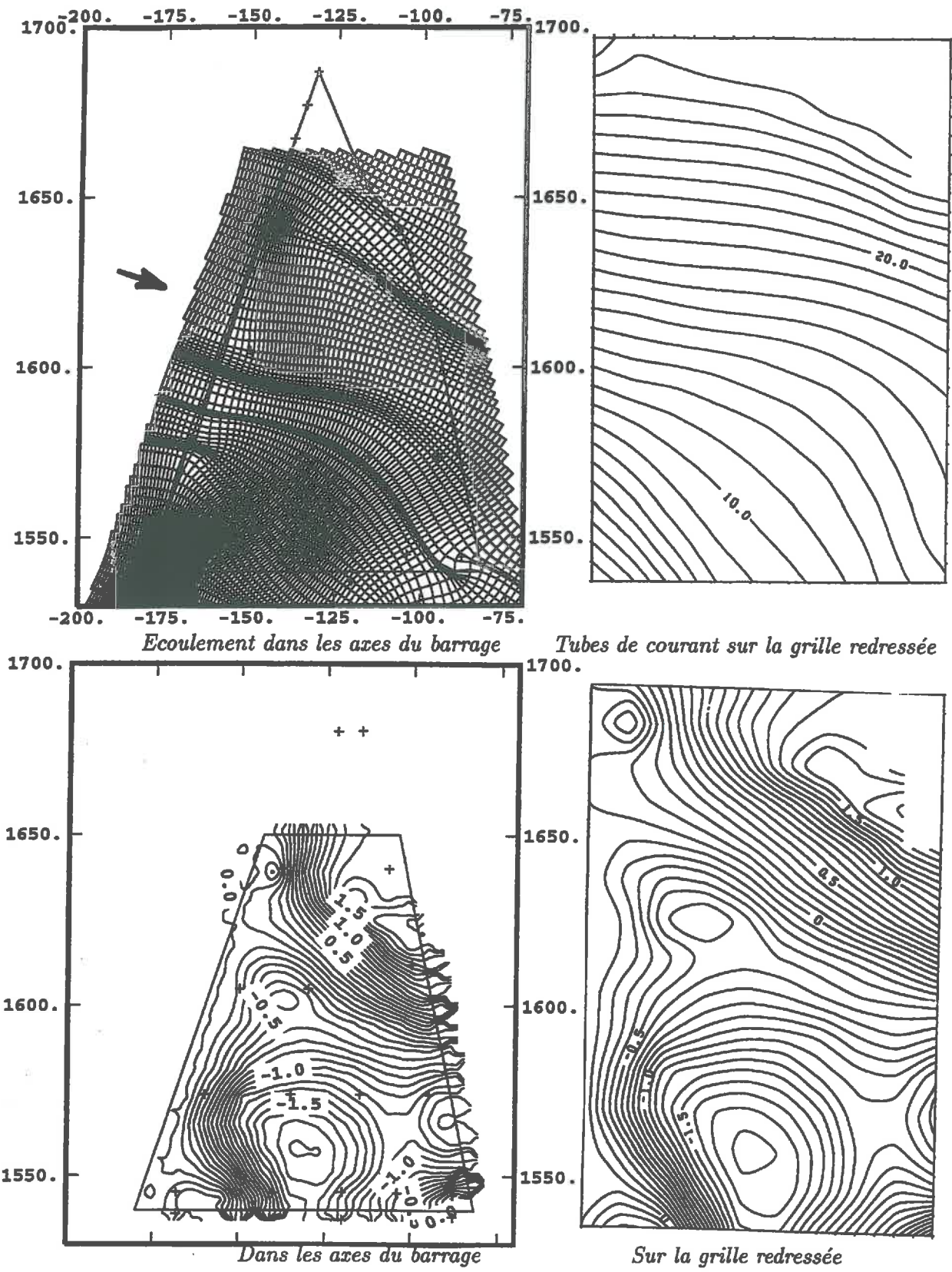


FIG. 7.27 - Résultats pour le 30/7/87. Logarithmes de perméabilité calculés avec la condition $\ln(k) = 0$ à l'amont.

7.3. Résultats

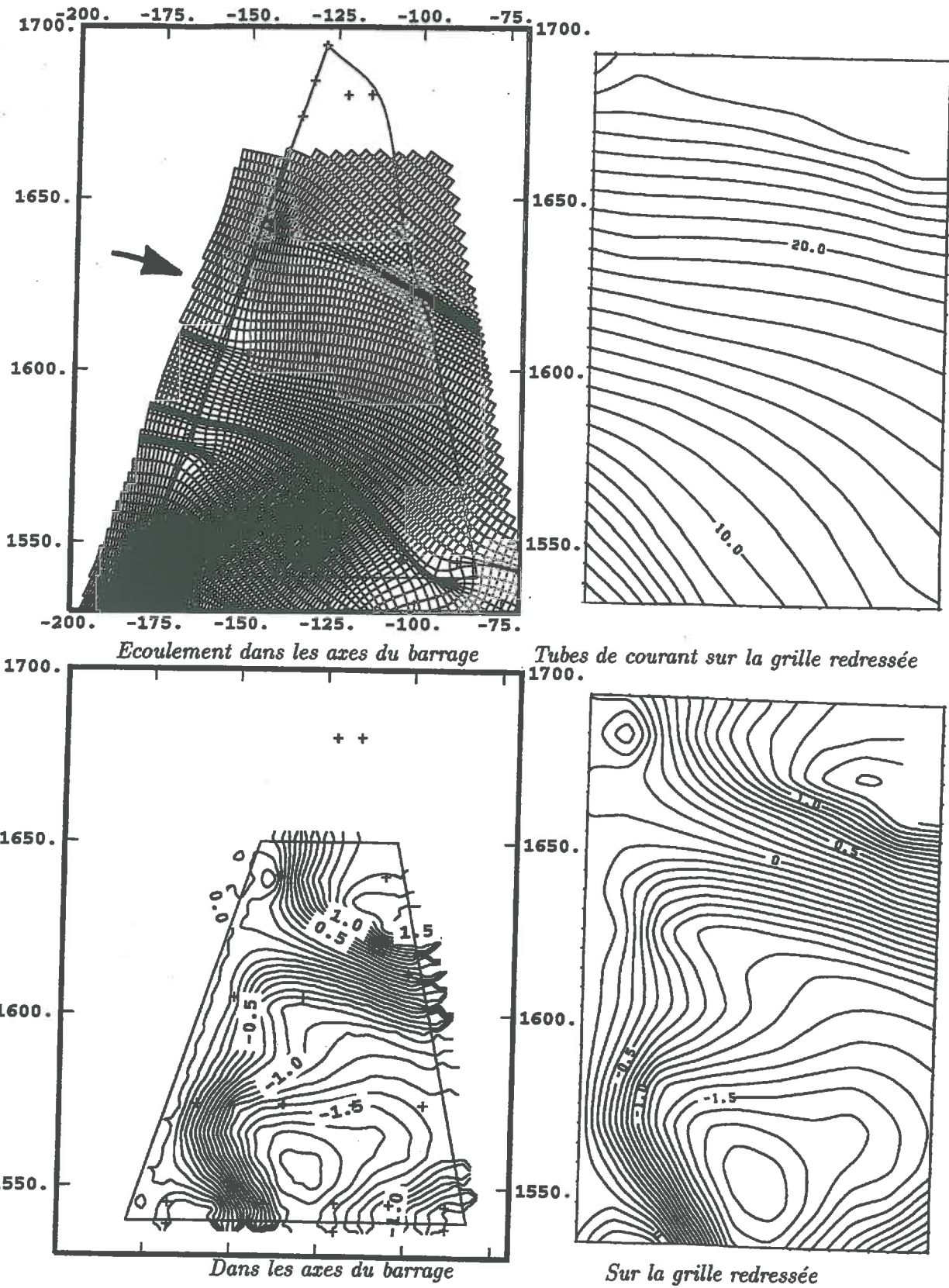


FIG. 7.28 - Résultats pour le 5/9/88. Logarithmes de perméabilité calculés avec la condition $\ln(k) = 0$ à l'amont.

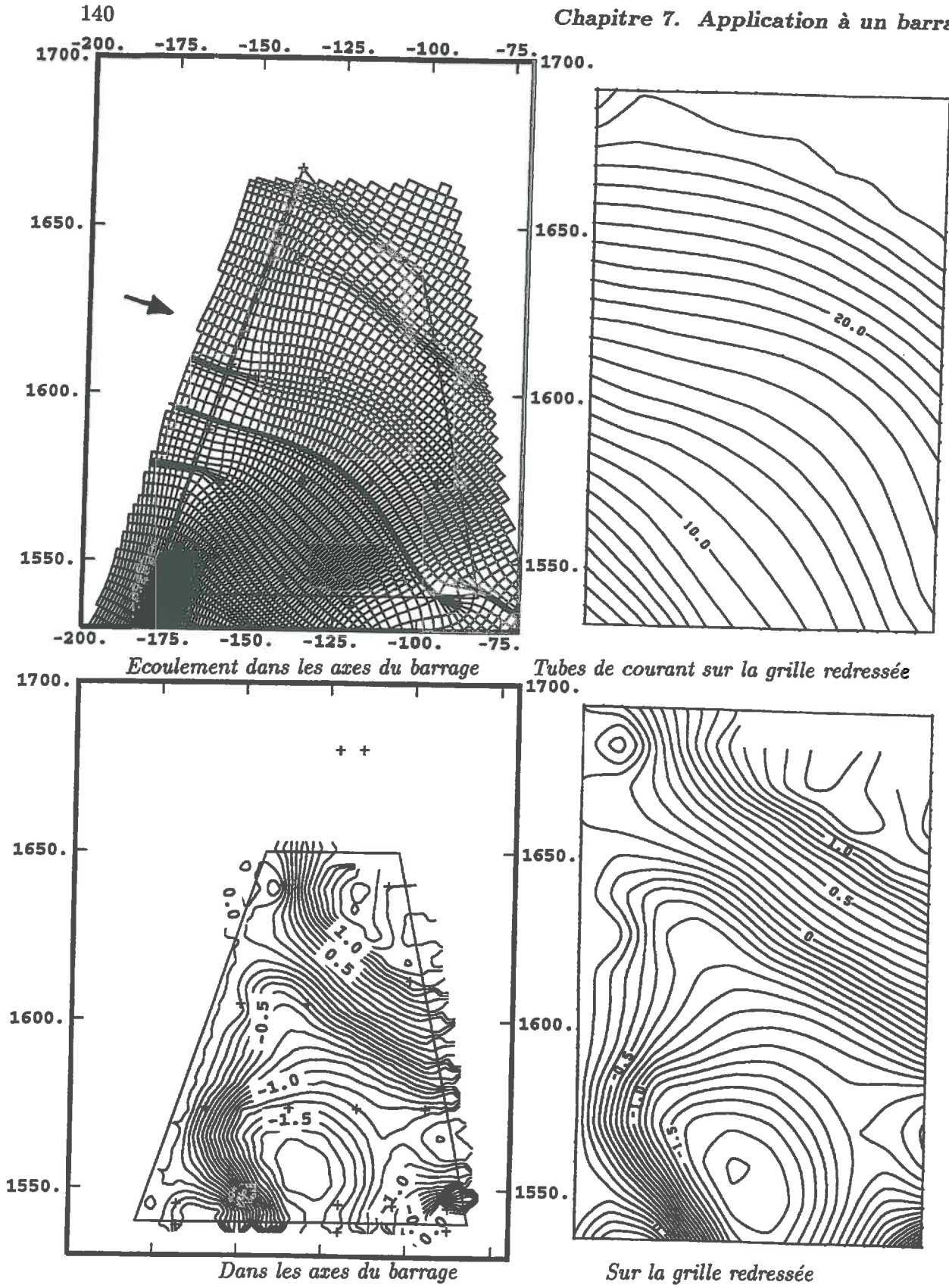
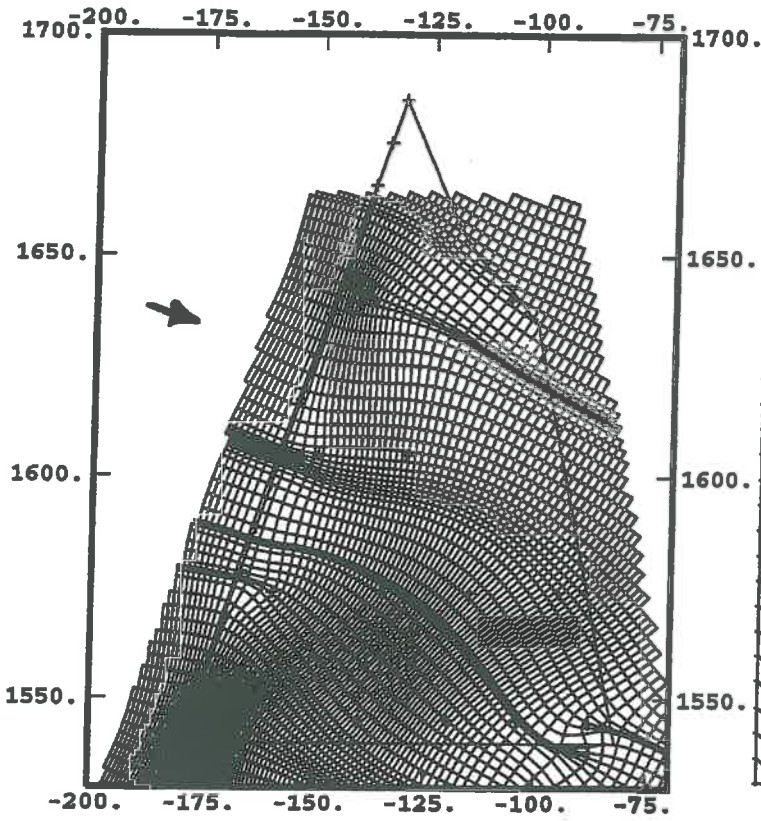
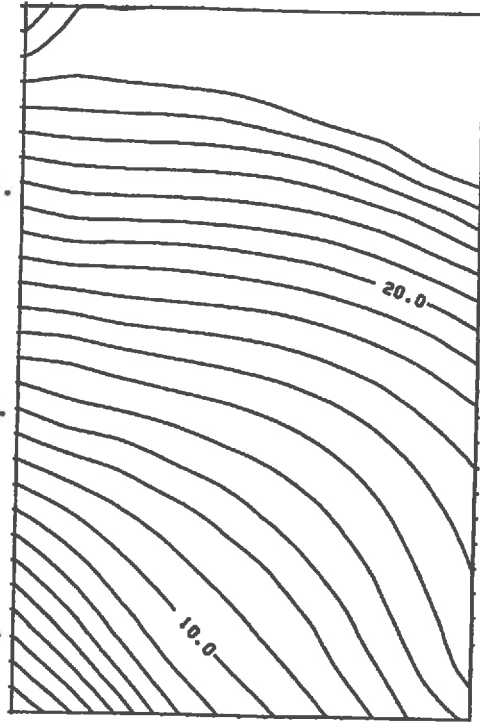


FIG. 7.29 - Résultats pour le 16/10/89. Logarithmes de perméabilité calculés avec la condition $\ln(k) = 0$ à l'amont.

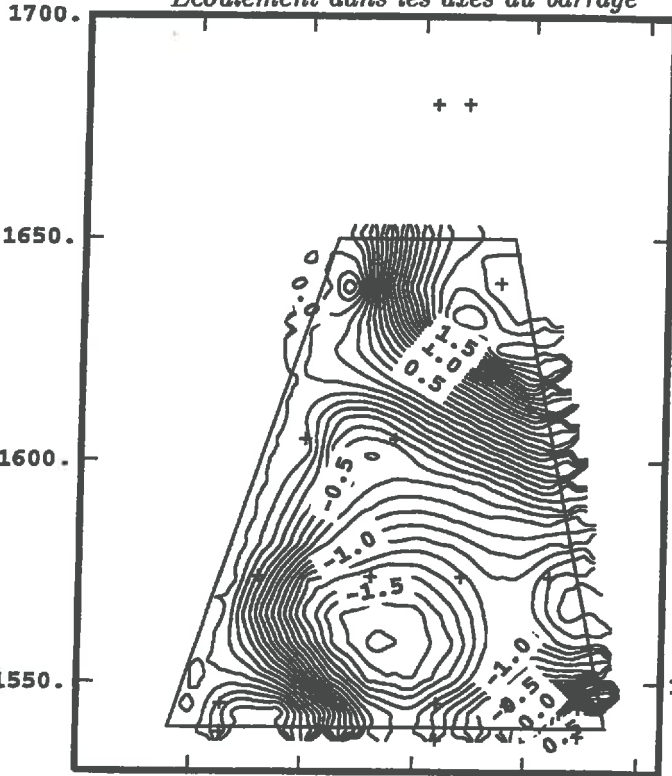
7.3. Résultats



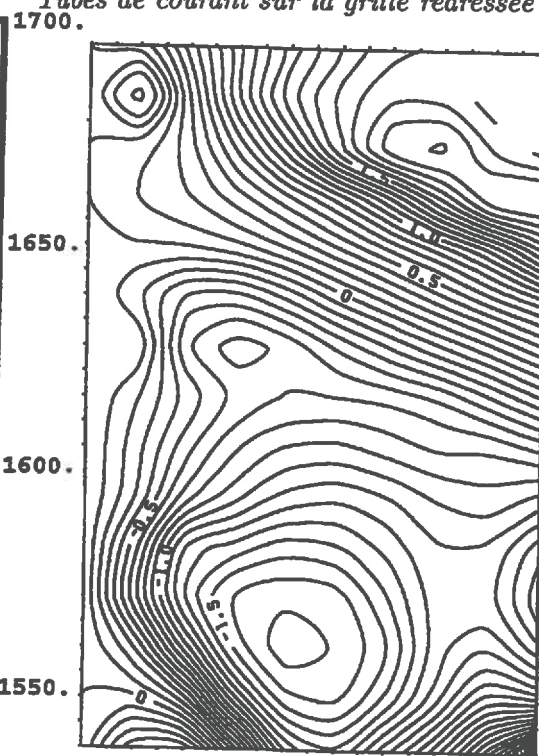
Ecoulement dans les axes du barrage



Tubes de courant sur la grille redressée

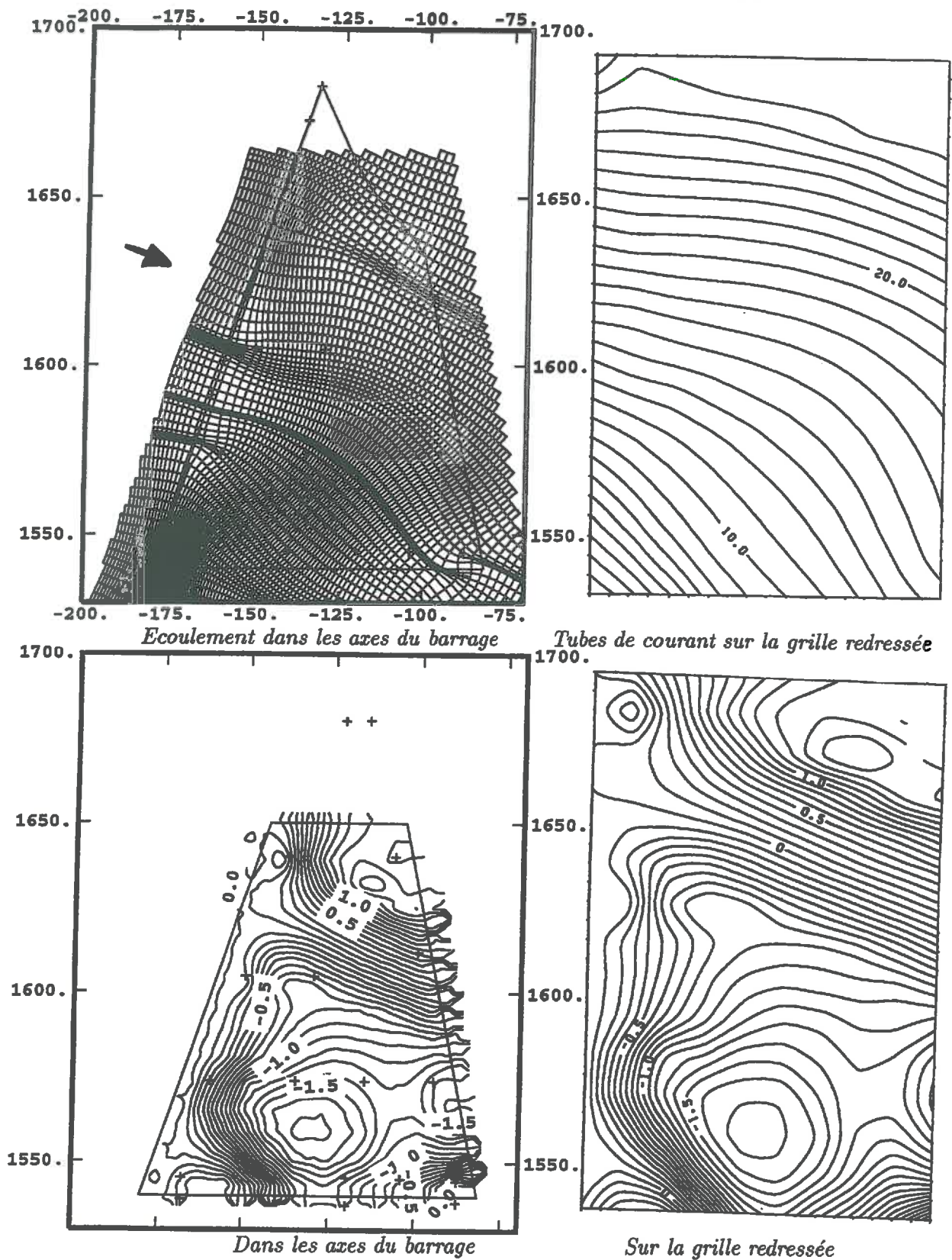


Dans les axes du barrage



Sur la grille redressée

FIG. 7.30 - Résultats pour le 12/11/90. Logarithmes de perméabilité calculés avec la condition $\ln(k) = 0$ à l'amont.



Écoulement dans les axes du barrage

Tubes de courant sur la grille redressée

Dans les axes du barrage

Sur la grille redressée

FIG. 7.31 - Résultats pour le 13/11/91. Logarithmes de perméabilité calculés avec la condition $\ln(k) = 0$ à l'amont.

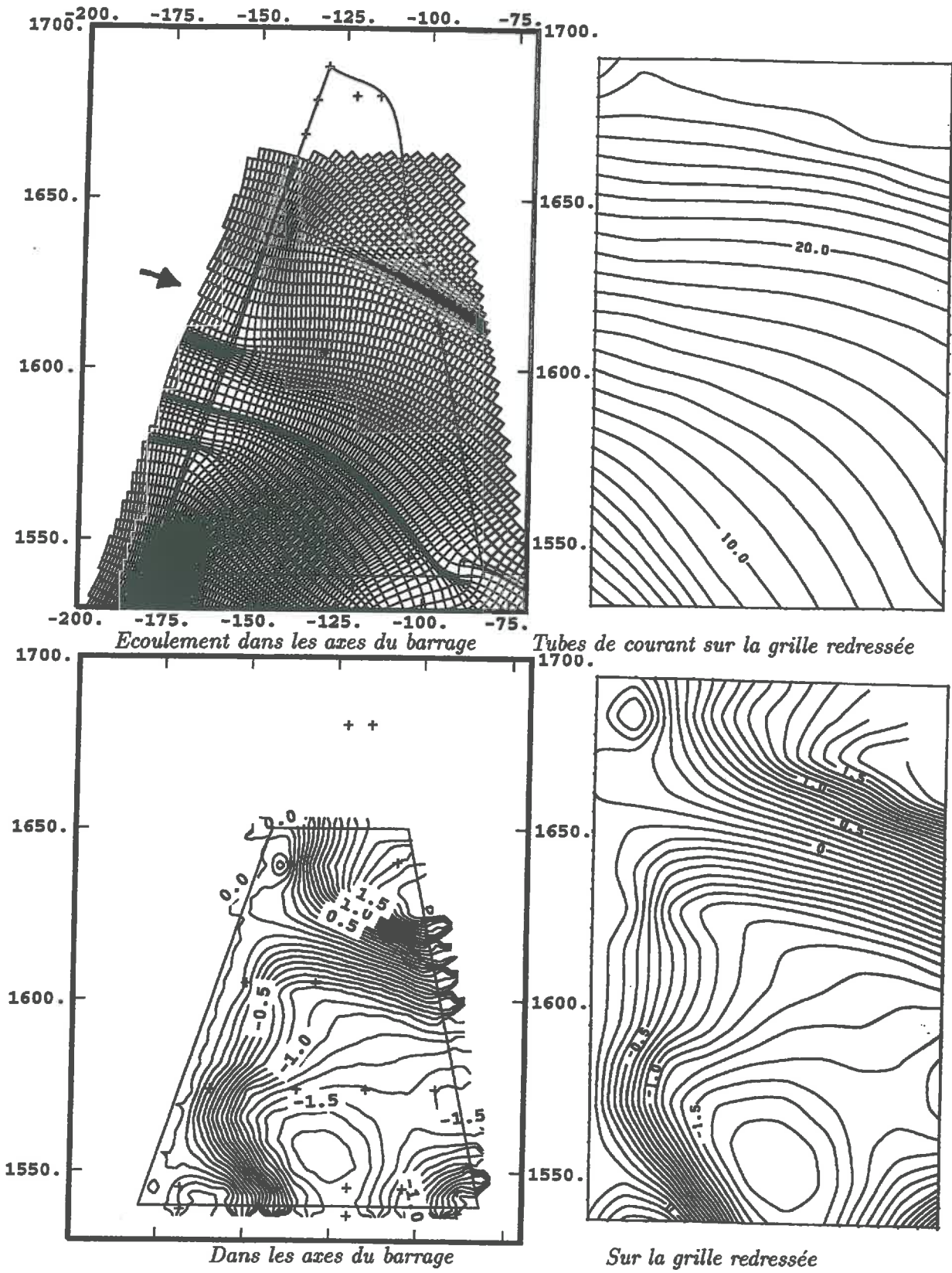


FIG. 7.32 - Résultats pour le 27/9/92. Logarithmes de perméabilité calculés avec la condition $\ln(k) = 0$ à l'amont.

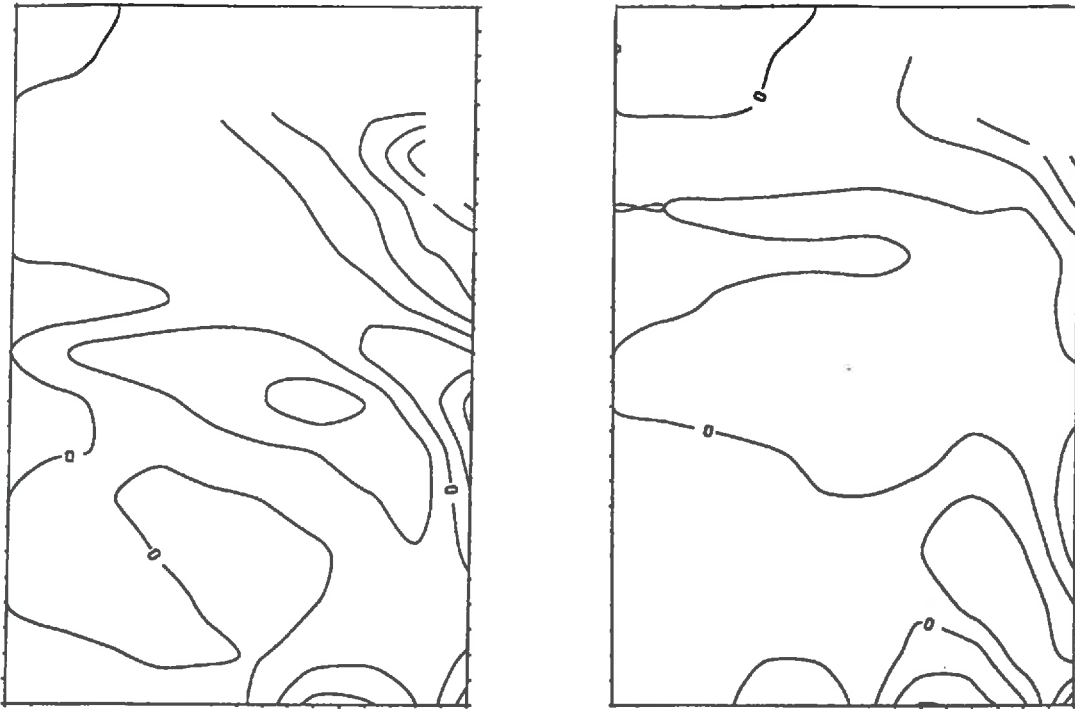


FIG. 7.33 - Différences entre les résultats les plus proches. A gauche, différence entre le 30/7/87 et le 16/10/89. A droite, différence entre le 5/9/88 et le 7/9/92.

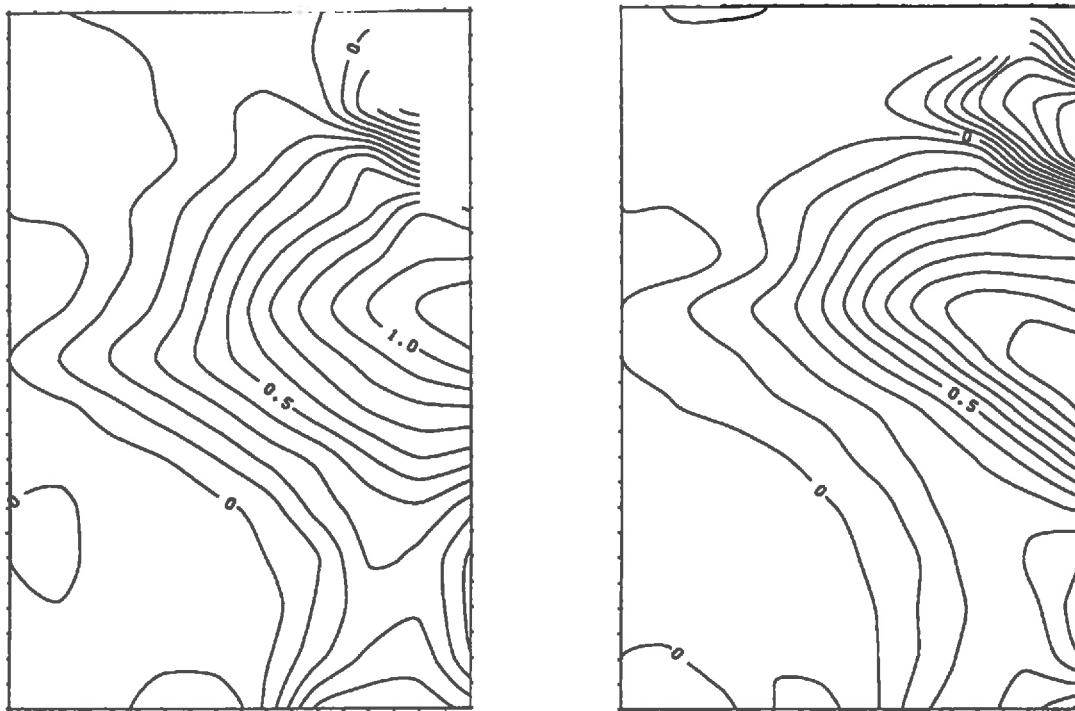


FIG. 7.34 - Différences entre les résultats les plus différents. A gauche, différence entre le 30/7/87 et le 7/9/92. A droite, différence entre le 16/10/89 et le 7/9/92.

Elle explique pourquoi, dans l'exemple traité, les résultats d'inversion peuvent se classer en plusieurs groupes.

Une différence plus faible provient des imprécisions des différents calculs (interpolation, discrétisation, etc...). Cette imprécision de calcul correspond à la différence entre les résultats les plus proches. Elle est plutôt faible puisqu'entre le 5/9/88 et le 7/9/92, elle peut être estimée, sur les logarithmes de perméabilité, à une valeur de 0.11 (somme de la valeur absolue de la moyenne 0.026 et de l'écart type 0.087). Une faible variation de perméabilité pourrait être masquée par cette imprécision.

7.3.5 Conclusion

Pour le calcul des perméabilités du noyau, les écoulements des différentes dates ne sont pas suffisamment différents pour limiter l'indétermination à une unique constante. Les résultats d'inversion ne peuvent restituer les rapports de perméabilités que dans le sens de l'écoulement, les rapports verticaux de perméabilités ne peuvent pas être estimés. En revanche, le calcul inverse ne nécessite que l'écoulement en une seule date.

Les champs de perméabilités retrouvés montrent une certaine hétérogénéité. Les structures trouvées sont les mêmes pour toutes les dates.

Les écoulements, qui varient insuffisamment dans le temps pour restituer les rapports de perméabilités verticaux, varient en revanche trop pour permettre de comparer les résultats d'inversion sans précaution. Pour comparer des perméabilités calculées en deux dates différentes, il faut que les lignes de courant des écoulements correspondants soient semblables. Or d'une année à l'autre, les écoulements en période de hautes retenues fournissent des écoulements très semblables, ce qui permet de comparer sur de grands intervalles de temps les calculs de perméabilité et d'évaluer ainsi leur évolution temporelle.

Si les perméabilités du barrage avaient évolué notablement, il serait impossible de trouver, contrairement au cas traité, des écoulements semblables pour des dates éloignées. Il ne faut donc pas attendre une grande évolution des perméabilités. Ceci est confirmé par le calcul inverse des perméabilités : à une légère imprécision près, les perméabilités du barrage semblent ne pas évoluer.

Il faut toutefois se rappeler que les perméabilités obtenues par calcul inverse correspondent en fait à des perméabilités équivalentes, relatives à des supports dont la taille, environ 30-40 m, est proche de la distance entre les cellules. Des variations de perméabilités à des échelles plus petites risquent d'être gommées dans la composition des perméabilités.

Conclusion

Le but de ce travail était de proposer une méthode de résolution au problème inverse, défini par la problématique suivante : comment estimer les perméabilités d'un barrage en terre, uniquement à partir de mesures de pression interstitielle ? La méthode proposée devait ensuite être appliquée à des données réelles.

Une méthode de résolution en plusieurs étapes

Une analyse mathématique détaillée montre que ce problème, à l'instar des autres problèmes inverses en hydrogéologie, est un problème mathématiquement mal posé, et ce pour trois raisons : il est instable, il peut avoir plusieurs solutions distinctes, ou n'en posséder aucune. La méthode de résolution proposée se décompose en plusieurs étapes et aborde ces difficultés séparément.

Ce découpage en plusieurs étapes possède quelques avantages :

- Sur le plan théorique, il permet d'étudier séparément les différentes difficultés du problème inverse.
- Du point de vue pratique, les étapes intermédiaires offrent quelques sous-produits intéressants. Ainsi, l'interpolation régularisée de la charge, combinée à la méthode de suivi des lignes courant, fournit une visualisation de chaque écoulement.

Une méthode qui s'appuie sur la physique

A la différence d'autres méthodes qui résolvent le problème de façon plus globale, la méthode proposée ici reste, dans ses différentes étapes, proche de la physique sous-jacente :

- L'interpolation régularisée des mesures de charge permet d'interpréter les résultats obtenus en terme de perméabilités équivalentes.
- La visualisation des écoulements décompose un écoulement dans ses différentes composantes physiques : les lignes d'équipotentielles et les lignes de courant.
- Le calcul des valeurs de perméabilité sur un tube de courant exploite directement la conservation de la masse d'eau.

Améliorations possibles

Quelques aspects de la méthode demandent à être améliorés.

- L'ajustement du paramètre effet de pépite est manuel. Il est entièrement calé grâce à la visualisation des figures d'écoulement. Existe-t-il un moyen automatique de caler ce

paramètre?

- Pour simplifier l'ajustement, l'effet de pépité a été supposé égal pour toutes les cellules. Il peut pourtant être choisi différent, dépendant de l'incertitude propre à chaque cellule. Mais ceci multiplie le nombre de paramètres. Existe-t-il un moyen d'ajuster tous ces paramètres?
- Le calcul inverse des perméabilités repose sur un suivi des lignes de courant, réalisé par l'intégration numérique d'une équation différentielle. Ce calcul est affecté d'une certaine incertitude. Intuitivement il semble que l'erreur commise sera plus importante dans les zones où le gradient de charge est faible, car la moindre erreur de calcul peut changer radicalement la direction d'une ligne de courant. Il n'existe pourtant pas d'estimation quantifiable de cette incertitude.
- Lorsque les écoulements se compliquent, il existe des zones où les gradients, de faible amplitude, ont une direction incertaine. A cause de ces zones, il est alors impossible de réaliser proprement le suivi des lignes de courant. Ainsi, une petite zone sensible peut empêcher le calcul des perméabilités sur le domaine entier. La technique du suivi des lignes de courant manque-t-elle de robustesse? Il est possible que la présence de faibles gradients, qui rend le problème mathématiquement singulier, soit également fatale à toute autre méthode de calcul.
- Le calcul des perméabilités par conservation du flux sur un tube de courant est une méthode théoriquement envisageable à trois dimensions. Pourtant, en pratique, la construction d'un maillage à trois dimensions qui s'appuie sur les lignes de courant me semble très difficile.
- La méthode est basée sur l'hypothèse de perméabilités scalaires, donc localement isotropes. Il est possible de contourner légèrement cette hypothèse en ne supposant plus les perméabilités isotropes, mais en supposant connus à l'avance la direction et le rapport d'anisotropie. En dehors de ces cas biens particuliers, la méthode n'est plus valable.

Validation de la méthode

La méthode a été testée sur un certain nombre d'exemples. Les résultats obtenus dépendent du nombre et de la qualité des mesures. Les écoulements dans le noyau du barrage ne sont pas suffisamment différents entre les différentes dates pour permettre de retrouver les rapports de perméabilités orthogonalement au sens de l'écoulement. En revanche, les résultats deviennent satisfaisants lorsque l'inversion s'appuie sur des mesures de perméabilité à l'amont du barrage.

La méthode d'inversion demande à être testée sur bien d'autres exemples pour mieux cerner ses limites et les améliorations qu'il faudrait lui apporter. Seul une certaine pratique permet en effet d'interpréter les résultats obtenus. Cette pratique doit de préférence être réalisée sur des données réelles, et, pour plus d'impartialité, par d'autres personnes que celles qui ont proposé cette méthode.

Il serait également intéressant de comparer cette méthode aux autres méthodes existant par ailleurs.

Annexe A

Convergence d'une approche discrétisée

Ce chapitre est construit comme une longue démonstration. Il vise, au bout d'un long cheminement, à démontrer les théorèmes du paragraphe A.3.6, qui montrent que la méthode des moindres carrés admet une solution, qu'elle peut être discrétisée et que les discrétisations convergent vers la solution.

Les résultats montrés dans ce chapitre s'appuient sur quelques grands théorèmes de la théorie des espaces de Hilbert (Analyse fonctionnelle), qui figurent dans Akhiezer [1], Laurent [24] ou Brezis [3], et qui seront rappelés avant d'être utilisés.

A.1 Application rigoureuse du théorème des projections

A.1.1 Définitions préliminaires

Les définitions qui suivent rappellent les concepts mathématiques mis en jeu dans le théorème 4.1 des projections. Elles sont nécessaires pour appliquer rigoureusement ce théorème.

Définition A.1 Une suite (x_n) d'éléments d'un espace de Hilbert H converge (fortement) vers x si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Définition A.2 Un opérateur linéaire A défini sur un espace de Hilbert H et à valeurs dans H est continu si, pour toute suite (x_n) d'éléments de H , convergente, de limite x , la suite $(A(x_n))$ converge vers $A(x)$.

Définition A.3 Un sous-espace vectoriel F de H est fermé si toute limite x , d'une suite convergente (x_n) d'éléments de F , appartient à F .

A.1.2 Propriétés topologiques des espaces B et G

Soient H , B et G les espaces définis au paragraphe 4.2.2. Montrons que les espaces B et G sont fermés dans l'espace de Hilbert H , ce qui permettra de leur appliquer les résultats à venir. Pour cela montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme A.1 Si un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H est lui-même un espace de Hilbert pour la topologie induite, F est alors un espace fermé dans H .

Démonstration Soit (f_n) une suite quelconque d'éléments de F qui converge vers une limite f dans H . F est fermé si f appartient à F .

Comme la suite (f_n) est convergente, c'est une suite de Cauchy pour la topologie de H , donc pour la topologie de F . Comme F est un espace de Hilbert, toute suite de Cauchy converge, donc il existe un élément ϕ qui soit la limite de la suite (f_n) dans F . ϕ , élément de F , est élément de H et comme les topologies de F et H coïncident sur F , la suite (f_n) converge vers ϕ pour la topologie de H . Par unicité de la limite, $\phi = f$, donc f appartient à F . F est bien un espace fermé. ■

G est un espace fermé

Pour deux fonctions g_1 et g_2 de G , le produit scalaire (4.9) peut s'écrire :

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} g_1(\mathbf{x}) g_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} M g_1(\mathbf{x}) g_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Avec ce produit scalaire, l'espace G s'identifie à l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur Ω , $L^2(\mathbb{R}^2, M d\mathbf{x})$, et d'après le lemme A.1, c'est un espace fermé dans H .

B est un espace fermé

Pour deux fonctions f_1 et f_2 quelconques de H , le produit scalaire (4.9) s'écrit

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega \setminus \Omega_t} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle_S + \langle f_1, f_2 \rangle_N \end{aligned}$$

ce qui sépare le produit scalaire en deux produits scalaires, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$, pour les zones respectivement saturée et non-saturée. Cette séparation permet de voir l'espace de Hilbert H comme l'espace produit $H_S \times H_N$ des deux espaces de Hilbert H_S et H_N définis sur les zones saturée et non-saturée. Comme les fonctions de B peuvent prendre n'importe quelles valeurs sur la zone non saturée, l'espace B peut être vu comme le produit $B_S \times H_N$, où B_S contient les restrictions des fonctions de B sur la zone saturée.

Pour une date t fixée, les fonctions charge hydraulique $h(\mathbf{x}, t)$ et ligne de courant $u(\mathbf{x}, t)$ constituent un changement de variables admissible car tout point de Ω_t est caractérisé par une charge h sur une ligne de courant indiquée par u . De plus, la charge est dérivable, et la fonction u qui indice les lignes de courant peut être choisie suffisamment régulière. Ainsi pour une fonction $f(\mathbf{x}, t) = f(x, y, t)$, et par changement de variables, l'intégrale $\int_{\Omega_t} f(x, y, t) dx dy$ devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} f(x, y, t) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega_t}(x, y, t) f(x, y, t) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega_t}(u, h, t) f(u, h, t) J(h, u, t) du dh \end{aligned}$$

où $J(h, u, t)$ désigne ici le jacobien du changement de variables.

Pour deux fonctions b_1 et b_2 de B_S , qui ne dépendent que des variables ligne de courant u et temps t , le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_2 \rangle_S &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\Omega_t}(u, h, t) b_1(u, t) b_2(u, t) J(h, u, t) du dh \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\mathbb{R}} du b_1(u, t) b_2(u, t) \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega_t}(u, h, t) J(h, u, t) dh \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\mathbb{R}} b_1(u, t) b_2(u, t) \kappa(u, t) du \end{aligned}$$

avec $\kappa(u, t) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\Omega_t}(u, h, t) J(h, u, t) dh$. Avec ce produit scalaire, l'espace B_S s'identifie à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2, \sum_{t=t_1}^{t_M} \kappa(u, t) du)$, et $B = B_S \times H_N$, produit d'espaces de Hilbert est aussi un espace de Hilbert. D'après le lemme A.1, c'est un espace fermé dans H .

A.1.3 Application du Théorème des projections

Comme au paragraphe 4.2.4, le théorème 4.1 des projections est appliqué pour transformer le problème $\mathcal{P}_2(f)$, ce qui donne le théorème A.2. Mais cette fois-ci, pour être appliqué rigoureusement à des espaces non nécessairement fermés, il doit auparavant être modifié sous la forme du théorème A.1.

Définition A.4 La fermeture \overline{F} d'un espace vectoriel F est un espace composé des limites x de toutes les suites convergentes (x_n) de F . \overline{F} est fermé par construction. Si F est fermé $F = \overline{F}$, sinon $F \subset \overline{F}$.

Théorème A.1 (des projections sur un espace quelconque) Soit F un espace vectoriel de H . Pour tout x de H il existe un unique élément $\Pi_{\overline{F}}(x)$ dans la fermeture \overline{F} de F tel que

$$\|x - \Pi_{\overline{F}}(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

Il est caractérisé par

$$\langle \Pi_{\overline{F}}(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } F.$$

Si $\Pi_{\overline{F}}(x)$ appartient à F , il est appelé **projection** de x sur F et il est alors noté $\Pi_F(x)$. Dans le cas contraire il n'existe pas de projection de x sur F .

Démonstration Si l'espace F est quelconque, il est toujours possible d'appliquer le théorème des projections sur sa fermeture \overline{F} . Les deux remarques qui suivent permettent ensuite de l'appliquer directement à F :

1. Pour tout x de H $\min_{y \in \overline{F}} \|x - y\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$.

2. L'équation caractéristique (4.11)

$$\langle \Pi_{\overline{F}}(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } \overline{F}.$$

est équivalente à l'équation, en apparence plus faible,

$$\langle \Pi_{\overline{F}}(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tout élément } y \text{ de } F.$$

■

Théorème A.2 Les fonctions g_0 de G solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$, c'est-à-dire qui minimisent la fonctionnelle $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$, sont les solutions de l'équation (A.1) et de l'équation caractéristique du problème inverse (4.14) :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) \quad (\text{A.1})$$

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G \quad (4.14)$$

Ces solutions g_0 n'existent que si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$ et diffèrent entre elles d'une fonction de l'espace $B \cap G$.

Démonstration La fonctionnelle $J(g, f)$ du problème $\mathcal{P}_2(f)$ est définie par $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$. Le théorème 4.1 des projections permet de projeter $f - g$ sur B car cet espace est fermé. D'après la formule (4.12), la fonctionnelle peut se récrire $J(g, f) = \|\Pi_{B^\perp}(f - g)\|^2$. Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ est donc la recherche des fonctions g_0 qui vérifient :

$$\|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g_0)\| = \min_{g \in G} \|\Pi_{B^\perp}(f) - \Pi_{B^\perp}(g)\|$$

Le nouveau théorème A.2 des projections peut alors s'appliquer avec $F = \Pi_{B^\perp}(G)$ et $x = \Pi_{B^\perp}(f)$ ce qui donne :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}} \circ \Pi_{B^\perp}(f)$$

Or, d'après le théorème 4.2 et comme $\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}$ est inclus dans B^\perp , $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}} \circ \Pi_{B^\perp} = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}$. Les solutions g_0 du problème $\mathcal{P}_2(f)$ sont donc solutions de l'équation (A.1). Cette équation montre que les solutions g_0 n'existent que si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

La projection de $\Pi_{B^\perp}(f)$ sur $\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}$ est caractérisé, pour tout $g \in G$, par :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}} \circ \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ &= \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique (4.14).

■

Ce théorème suggère les deux remarques suivantes :

1. Il est souhaitable que le problème $\mathcal{P}_2(f)$ admette des solutions pour tout f , c'est-à-dire que $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartienne à $\Pi_{B^\perp}(G)$ pour tout f , donc que $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé. Ce dernier résultat fait l'objet d'un théorème à venir.
2. Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ est indéterminé, il admet plusieurs solutions qui diffèrent entre elles d'un élément de l'espace des indéterminations $B \cap G$, déjà décrit au paragraphe 4.2.5. Il peu commode de travailler avec un problème qui admet plusieurs solutions. Cette remarque conduit à définir un nouveau problème, $\mathcal{P}_3(f)$.

A.1.4 Quelques lemmes utiles

Les lemmes qui suivent constituent une boîte à outils utile à plusieurs reprises par la suite.

Lemme A.2 Soient B et G deux espaces vectoriels de H , B étant supposé fermé. Ils vérifient l'égalité :

$$\Pi_{B^\perp}(G) = B^\perp \cap (B + G)$$

Démonstration Montrons d'abord l'inclusion $\Pi_{B^\perp}(G) \subset B^\perp \cap (B + G)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } g \in G \quad g = \Pi_B(g) + \Pi_{B^\perp}(g) &\Rightarrow \Pi_{B^\perp}(g) = g - \Pi_B(g) \\ &\Rightarrow \Pi_{B^\perp}(g) \in (G + B) \end{aligned}$$

donc $\Pi_{B^\perp}(G) \subset (B + G)$, ce qui, avec l'inclusion $\Pi_{B^\perp}(G) \subset B^\perp$, démontre la première inclusion.

Montrons ensuite l'inclusion réciproque, $B^\perp \cap (B + G) \subset \Pi_{B^\perp}(G)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in B^\perp \cap (B + G) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in B^\perp \\ x = b + g \text{ avec } \begin{array}{l} b \in B \\ g \in G \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \Pi_{B^\perp}(x) \\ \Pi_{B^\perp}(x) = \Pi_{B^\perp}(g) \end{array} \\ &\Rightarrow x = \Pi_{B^\perp}(g) \text{ avec } g \in G \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inclusion réciproque. ■

Lemme A.3 Soient E et G deux espaces vectoriels de H , E étant supposé fermé et inclus dans G . Ils vérifient l'inclusion :

$$\Pi_{E^\perp}(G) \subset G$$

Démonstration Par application du lemme A.2, avec E au lieu de B ,

$$\Pi_{E^\perp}(G) = E^\perp \cap (E + G) = E^\perp \cap G \subset G$$
■

Lemme A.4 Soient B et G deux espaces vectoriels de H , B étant supposé fermé. Ils vérifient l'égalité :

$$B + G = B + \Pi_{B^\perp}(G)$$

Démonstration Montrons d'abord l'inclusion $B + G \subset B + \Pi_{B^\perp}(G)$:

$$G = \Pi_B(G) + \Pi_{B^\perp}(G) \subset B + \Pi_{B^\perp}(G) \Rightarrow B + G \subset B + B + \Pi_{B^\perp}(G) = B + \Pi_{B^\perp}(G)$$

Montrons ensuite l'inclusion réciproque, $B + \Pi_{B^\perp}(G) \subset B + G$, en utilisant le lemme A.2 :

$$B + \Pi_{B^\perp}(G) = B + B^\perp \cap (B + G) \subset B + (B + G) = B + G$$
■

Lemme A.5 Soient B et G deux espaces vectoriels fermés de H . Ils vérifient les égalités :

$$G = B \cap G + G \cap (B \cap G)^\perp \quad \text{et} \quad \Pi_{B^\perp}(G) = \Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp)$$

Démonstration Par application du lemme A.4, avec $B \cap G$ au lieu de B ,

$$B \cap G + G = G = B \cap G + \Pi_{(B \cap G)^\perp}(G)$$

D'après le lemme A.2, $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(G) = (B \cap G)^\perp \cap (G + B \cap G) = (B \cap G)^\perp \cap G$, d'où le premier résultat : $G = B \cap G + G \cap (B \cap G)^\perp$.

Comme $B \cap G \subset B$, $\Pi_{B^\perp}(B \cap G) = 0$, et $\Pi_{B^\perp}(G) = \Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp)$. ■

Lemme A.6 Soient B et G deux espaces vectoriels de H , B étant supposé fermé. Ils vérifient la relation d'équivalence :

$$B + G \text{ fermé} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi_{B^\perp}(G) \text{ fermé}$$

Démonstration Montrons d'abord l'implication directe (\Rightarrow). Supposons, par hypothèse, l'espace $(B + G)$ fermé. B^\perp , espace orthogonal, est aussi fermé. D'après le lemme A.2,

$$\Pi_{B^\perp}(G) = B^\perp \cap (B + G)$$

et d'après un résultat classique de topologie, l'intersection de deux ensembles fermés est fermée, ce qui démontre l'implication.

Montrons l'implication réciproque (\Leftarrow). Supposons, par hypothèse, l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ fermé et montrons que si une suite (x_n) d'éléments de $(B + G)$ converge vers un élément x , alors cette limite appartient aussi à $(B + G)$.

La suite (x_n) converge vers x , donc par continuité de l'opérateur Π_{B^\perp} , la suite $(\Pi_{B^\perp}(x_n))$ converge vers $\Pi_{B^\perp}(x)$. Les éléments $\Pi_{B^\perp}(x_n)$ de la suite appartiennent à l'espace

$$\Pi_{B^\perp}(B + G) = \Pi_{B^\perp}(G)$$

qui est fermé par hypothèse. Leur limite $\Pi_{B^\perp}(x)$ appartient donc aussi à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

La limite x de la suite (x_n) se décompose en

$$x = \Pi_B(x) + \Pi_{B^\perp}(x) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \Pi_B(x) \in B \\ \Pi_{B^\perp}(x) \in \Pi_{B^\perp}(G) \end{array}$$

La limite x de la suite (x_n) , appartient à $B + \Pi_{B^\perp}(G)$, et $B + \Pi_{B^\perp}(G) = (B + G)$ d'après le lemme A.4, ce qui montre que $(B + G)$ est fermé. ■

A.1.5 Définition du problème $\mathcal{P}_3(f)$

Le problème $\mathcal{P}_2(f)$ admet plusieurs solutions qui diffèrent entre elles d'un élément de $B \cap G$. Il est possible de réduire cette indétermination en ne retenant que la solution de norme minimale. C'est ainsi qu'est défini le problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Problème $\mathcal{P}_3(f)$ Soient B et G deux sous-espaces vectoriels fermés dans H . Le problème $\mathcal{P}_3(f)$ est la recherche des éléments $g_0 \in G$ de norme minimale, solutions de l'équation du problème $\mathcal{P}_2(f)$:

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$$

Le lemme A.8 montre qu'il y a au plus une solution g_0 au problème $\mathcal{P}_3(f)$, qui existe si et seulement si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$. Pour le démontrer, il faut déjà démontrer le lemme A.7.

Lemme A.7 L'opérateur Π_{B^\perp} met en bijection les espaces $G \cap (B \cap G)^\perp$ et $\Pi_{B^\perp}(G)$. Sa bijection réciproque, R^{-1} , vérifie :

$$\begin{aligned} \text{pour tout élément } x \text{ de } \Pi_{B^\perp}(G) \quad & \Pi_{B^\perp} \circ R^{-1}(x) = x \\ \text{pour tout élément } g \text{ de } G \quad & R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g) \end{aligned}$$

Démonstration Soit R la restriction du projecteur Π_{B^\perp} à l'espace $G \cap (B \cap G)^\perp$ et à valeur dans $\Pi_{B^\perp}(G)$.

- Un élément x de $G \cap (B \cap G)^\perp$ tel que $R(x) = \Pi_{B^\perp}(x) = 0$ appartient à B , c'est-à-dire à $B \cap G \cap (B \cap G)^\perp = \{0\}$. R est donc une injection.
- D'après le lemme A.5, $\Pi_{B^\perp}(G) = \Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp)$, ce qui montre que $R(G \cap (B \cap G)^\perp)$, image de l'espace $G \cap (B \cap G)^\perp$ par l'opérateur R s'identifie à l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$.

L'opérateur R constitue donc une bijection entre les espaces $G \cap (B \cap G)^\perp$ et $\Pi_{B^\perp}(G)$, d'où, pour tout élément x de $\Pi_{B^\perp}(G)$

$$\Pi_{B^\perp} \circ R^{-1}(x) = x$$

Soit g un élément de G . Comme $B \cap G \subset G$, et d'après le lemme A.3, $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g)$ est élément de G , donc élément de $G \cap (B \cap G)^\perp$. Or R^{-1} , inverse de Π_{B^\perp} , vérifie, pour tout élément x de $G \cap (B \cap G)^\perp$, $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(x) = x$, d'où :

$$R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g)$$

Comme en outre $B^\perp \subset (B \cap G)^\perp$, $\Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g) = \Pi_{B^\perp}(g)$, ce qui donne finalement $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g)$. ■

Lemme A.8 Il existe au plus une solution g_0 au problème $\mathcal{P}_3(f)$. Elle s'écrit :

$$g_0 = R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$$

où R^{-1} , défini de $\Pi_{B^\perp}(G)$ sur $G \cap (B \cap G)^\perp$, est la bijection réciproque de Π_{B^\perp} . Cette solution existe si et seulement si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$.

Démonstration L'élément g_0 , défini par $g_0 = R^{-1} \circ \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$, existe si et seulement si $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$. Il appartient à G car l'image de R^{-1} est incluse dans G . Il est solution de l'équation du problème $\mathcal{P}_2(f)$ car, comme R^{-1} est la bijection réciproque de Π_{B^\perp} et d'après le lemme A.7 :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{B^\perp} \circ R^{-1} \circ \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$$

Une solution g_1 du problème $\mathcal{P}_2(f)$ vérifie $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) = \Pi_{B^\perp}(g_1)$, d'où, par application du lemme A.7 :

$$\begin{aligned} g_0 &= R^{-1} \circ \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) = R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_1) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1) & (A.2) \\ \Rightarrow \|g_1\|^2 &= \|\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1)\|^2 + \|\Pi_{B \cap G}(g_1)\|^2 = \|g_0\|^2 + \|\Pi_{B \cap G}(g_1)\|^2 \end{aligned}$$

ce qui montre que g_0 est de norme minimale parmi les solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$. Si g_1 , en plus d'être solution du problème $\mathcal{P}_2(f)$, est aussi solution du problème $\mathcal{P}_3(f)$, elle doit vérifier :

$$\|g_1\|^2 = \|g_0\|^2 \quad \Rightarrow \quad \Pi_{B \cap G}(g_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1)$$

Or d'après (A.2), $g_0 = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_1)$. La solution g_0 du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est bien unique. ■

A.1.6 Caractérisation du problème $\mathcal{P}_3(f)$

Le lemme suivant, qui caractérise les solutions du problème $\mathcal{P}_3(f)$, sert dans les applications numériques à régulariser les systèmes d'équations.

Lemme A.9 *L'unique solution (si elle existe) du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est caractérisée par l'équation : $g_0 \in G$ et pour tout élément g de G ,*

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle + \langle \Pi_{B \cap G}(g_0), \Pi_{B \cap G}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad (A.3)$$

Démonstration La solution g_0 du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est solution du problème $\mathcal{P}_2(f)$, donc de l'équation caractéristique (4.14) :

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G$$

De plus, g_0 appartient à $(B \cap G)^\perp$, donc vérifie $\Pi_{B \cap G}(g_0) = 0$, ce qui entraîne :

$$\langle \Pi_{B \cap G}(g_0), \Pi_{B \cap G}(g) \rangle = 0 \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G$$

Par sommation de ces deux équations, la solution g_0 du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est solution l'équation caractéristique (A.3).

Réciproquement, soit g_0 la solution de l'équation caractéristique (A.3) : $g_0 \in G$ et pour tout élément g de G ,

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle + \langle \Pi_{B \cap G}(g_0), \Pi_{B \cap G}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle$$

Cette équation s'appuie sur les fonctions test g de G . Or G se décompose suivants les deux espaces orthogonaux $B \cap G$ et $G \cap (B \cap G)^\perp$.

L'équation caractéristique (A.3), écrite avec les fonctions test g de $B \cap G$, donne :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle + \langle \Pi_{B \cap G}(g_0), \Pi_{B \cap G}(g) \rangle &= \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ \Rightarrow \langle \Pi_{B \cap G}(g_0), g \rangle &= 0 \end{aligned}$$

car, comme les espaces B^\perp et $B \cap G$ sont orthogonaux, $\Pi_{B^\perp}(g) = 0$. L'équation résultante montre que $\Pi_{B \cap G}(g_0) = 0$, donc que $g_0 \in G \cap (B \cap G)^\perp$.

L'équation caractéristique (A.3), écrite avec les fonctions test de $G \cap (B \cap G)^\perp$ donne :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle + \langle \Pi_{B \cap G}(g_0), \Pi_{B \cap G}(g) \rangle &= \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \\ \Rightarrow \langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle &= \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

Comme $\Pi_{B^\perp}(G \cap (B \cap G)^\perp) = \Pi_{B^\perp}(G)$, il est équivalent de prendre les fonctions test g sur G tout entier, plutôt que sur $G \cap (B \cap G)^\perp$. La solution g_0 est donc solution de l'équation :

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G$$

qui est l'équation caractéristique (4.14) du problème $\mathcal{P}_2(f)$.

Finalement une solution g_0 de l'équation caractéristique (A.3) appartient à $G \cap (B \cap G)^\perp$ et est solution du problème $\mathcal{P}_2(f)$. Elle est donc solution du problème $\mathcal{P}_3(f)$. ■

A.2 Définition et propriétés d'une approche discrétisée

Le travail qui précède a montré qu'il est nécessaire que l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé pour qu'il existe pour tout élément f une solution au problème $\mathcal{P}_3(f)$. Il est en fait nécessaire que $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé pour des raisons plus profondes encore.

Dans la pratique, en effet, les calculs sont discrétisés, les espaces B et G remplacés par des espaces B_n et G_n de dimension finie, l'élément f par un élément f_n et le problème $\mathcal{P}_3(f)$ par un problème $\mathcal{P}_3^n(f_n)$. L'espace $\Pi_{B_n^\perp}(G_n) = B_n^\perp \cap (B_n + G_n)$ (d'après le lemme A.2) est de dimension finie donc fermé. Le problème discrétisé $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ admet donc toujours une solution.

Pourtant, les développements qui suivent montrent que si $\Pi_{B^\perp}(G)$ n'est pas fermé, les solutions des problèmes discrétisés $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ risquent de diverger pour une discrétisation de plus en plus fine, contrairement au cas où $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé. Pour montrer ce résultat, il faut d'abord préciser la notion de "discrétisation de plus en plus fine".

A.2.1 Définition d'une approche discrétisée

Dans les calculs numériques, les espaces B_n et G_n , de dimension finie, sont en fait constitués de fonctions constantes sur des pavés de petite taille. Lorsque la taille des pavés diminue, l'approximation s'améliore. C'est ce que recouvre la notion vague de "discrétisation de plus en plus fine". La définition suivante permet de donner un sens mathématique à ce processus de discrétisation.

Définition A.5 Une *discrétisation* du problème $\mathcal{P}_3(f)$ consiste à remplacer les espaces B et G par des espaces de dimension finie B_n et G_n et l'élément f par un élément f_n . Une *approche discrétisée* est une suite de discrétisations, pour un indice n variant de 1 à l'infini, telle que :

- pour tout n , $B_n \subset B$, et pour tout b dans B , la suite $(\Pi_{B_n}(b))$ converge vers b ,

- pour tout n , $G_n \subset G$, et pour tout g dans G , la suite $(\Pi_{G_n}(g))$ converge vers g ,
- la suite (f_n) converge vers f .

Dans la suite, les espaces B_n , G_n et les fonctions f_n qui définissent le problème discrétisé sont supposés vérifier les conditions d'une approche discrétisée. Ces conditions sont d'ailleurs faciles à satisfaire. C'est le cas des maillages proposés dans la section 5.2, lorsque les dimensions des mailles tendent vers 0.

A.2.2 Propriétés d'une approche discrétisée

La série de lemmes à venir aboutit au théorème A.4 suivant lequel les projections discrétisées $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(f_n)$ convergent vers la projection $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f)$ du problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Lemme A.10 *Pour tout élément x de H , la suite $(\Pi_{B_n}(x))$ converge vers $\Pi_B(x)$ et la suite $(\Pi_{B_n^\perp}(x))$ converge vers $\Pi_{B^\perp}(x)$.*

Démonstration Par définition de l'approche discrétisée, la suite $(\Pi_{B_n} \circ \Pi_B(x))$ converge vers $\Pi_B(x)$ car l'élément $\Pi_B(x)$ appartient à B . Comme en outre B_n est inclus dans B , $\Pi_{B_n}(x) = \Pi_{B_n} \circ \Pi_B(x)$, ce qui montre que la suite $(\Pi_{B_n}(x))$ converge vers $\Pi_B(x)$.

Un élément x de H se décompose en $x = \Pi_{B_n}(x) + \Pi_{B_n^\perp}(x)$. Par passage à la limite, la suite $(\Pi_{B_n^\perp}(x))$ converge vers $x - \Pi_B(x) = \Pi_{B^\perp}(x)$. ■

Lemme A.11 *Pour tout élément x de $\Pi_{B^\perp}(G)$ il existe une suite (x_n) de limite x telle que, pour tout n , x_n appartienne à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$.*

Démonstration Pour un élément x de $\Pi_{B^\perp}(G)$ il existe un élément g de G tel que $x = \Pi_{B^\perp}(g)$. Soit la suite (x_n) dont les éléments sont définis par $x_n = \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)$. Pour tout n , x_n appartient à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$. De plus,

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &= \|\Pi_{B^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)\| \\ &\leq \|\Pi_{B^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp}(g)\| + \|\Pi_{B_n^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)\| \\ &\leq \|\Pi_{B^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp}(g)\| + \|g - \Pi_{G_n}(g)\| \end{aligned}$$

L'inégalité $\|\Pi_{B_n^\perp}(g) - \Pi_{B_n^\perp} \circ \Pi_{G_n}(g)\| \leq \|g - \Pi_{G_n}(g)\|$ provient de ce que, pour tout projecteur Π_F , et pour tout élément y de H , $\|\Pi_F(y)\| \leq \|y\|$. Par hypothèse $(\Pi_{G_n}(g))$ tend vers g et par application du lemme précédent $(\Pi_{B_n^\perp}(g))$ tend vers $\Pi_{B^\perp}(g)$, ce qui montre que la suite (x_n) converge vers x . ■

Lemme A.12 *Pour tout x de $\Pi_{B^\perp}(G)$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x .*

Démonstration D'après le lemme précédent, il existe une suite (x_n) qui converge vers x et telle que, pour tout n , x_n appartienne à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$. L'élément x_n s'écrit aussi $x_n = \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_n)$ car il appartient à $\Pi_{B_n^\perp}(G_n)$; par ailleurs $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur, donc,

$$\begin{aligned} \|x_n - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &= \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_n) - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \leq \|x_n - x\| \\ \Rightarrow \|x - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \leq 2\|x - x_n\| \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x . ■

Lemme A.13 Pour tout x de $\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x .

Démonstration Comme x est dans la fermeture de $\Pi_{B^\perp}(G)$, il existe une suite (x_m) d'éléments de $\Pi_{B^\perp}(G)$ de limite x .

$$\begin{aligned} \|x - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| &\leq \|x - x_m\| + \|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| \\ &\quad + \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m) - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| \\ &\leq \|x - x_m\| + \|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| + \|x_m - x\| \end{aligned}$$

car $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme la suite (x_m) converge vers x , il existe un entier m tel que $\|x - x_m\| < \varepsilon$. D'après le lemme précédent, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m))$ converge vers x_m lorsque n tend vers l'infini, donc il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $\|x_m - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x_m)\| < \varepsilon$. Finalement, pour tout $n > N$, $\|x - \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x)\| < 3\varepsilon$, ce qui signifie que la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers x . ■

Lemme A.14 Pour tout élément x de l'espace $B + (B + G)^\perp$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0.

Démonstration Un élément x de $B + (B + G)^\perp$ s'écrit $x = b + y$ avec $b \in B$ et $y \in (B + G)^\perp$.

- Comme l'espace $\Pi_{B_n^\perp}(G_n) = B_n^\perp \cap (B_n + G_n)$ est inclus dans B_n^\perp , l'élément $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(b)$ peut aussi s'écrire $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{B_n^\perp}(b)$. De plus $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}$ est un projecteur, d'où

$$\|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(b)\| = \|\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{B_n^\perp}(b)\| \leq \|\Pi_{B_n^\perp}(b)\|$$

D'après le lemme A.11, la suite $(\|\Pi_{B_n^\perp}(b)\|)$ converge vers $\|\Pi_{B^\perp}(b)\| = 0$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(b))$ converge donc vers 0.

- Comme l'espace $\Pi_{B_n^\perp}(G_n) = B_n^\perp \cap (B_n + G_n)$ est inclus dans $B_n + G_n$, l'élément $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(y)$ peut aussi s'écrire $\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{(B_n + G_n)}(y)$. L'inclusion $B_n + G_n \subset B + G$ entraîne l'inclusion $(B + G)^\perp \subset (B_n + G_n)^\perp$ d'où la série d'implications

$$y \in (B + G)^\perp \Rightarrow y \in (B_n + G_n)^\perp \Rightarrow \Pi_{(B_n + G_n)}(y) = 0 \Rightarrow \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(y) = 0$$

- Finalement la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0. ■

Lemme A.15 Pour tout élément x de l'espace $(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp$, la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0.

Démonstration La démonstration repose sur le théorème suivant, classique en théorie des espaces de Hilbert (Brezis [3]).

Théorème A.3 Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert. Alors

$$(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$$

D'après le lemme A.2, $\Pi_{B^\perp}(G) = B^\perp \cap (B + G)$, et par application du théorème:

$$(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp = (B^\perp \cap (B + G))^\perp = \overline{B + (B + G)^\perp}$$

ce qui signifie que pour tout élément x de l'espace $(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp$ il existe une suite (x_m) dans $B + (B + G)^\perp$ qui converge vers x . De plus,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x)\| &\leq \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x_m)\| + \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x_m) - \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x)\| \\ &\leq \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x_m)\| + \|x_m - x\| \end{aligned}$$

car $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}$ est un projecteur. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme la suite (x_m) converge vers x , il existe un entier m tel que $\|x - x_m\| < \varepsilon$. D'après le lemme A.14, la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x_m))$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $\|x_m - \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x_m)\| < \varepsilon$. Finalement, pour tout $n > N$, $\|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x)\| < 2\varepsilon$, ce qui signifie que la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers 0. ■

Lemme A.16 Pour tout x de H , la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x)$.

Démonstration La démonstration consiste à rassembler les résultats des différents lemmes. Un élément x de H se décompose en $x = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x) + \Pi_{(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp}(x)$, donc

$$\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x) + \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp}(x)$$

La suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x)$ d'après le lemme A.13 et la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)} \circ \Pi_{(\Pi_{B^\perp}(G))^\perp}(x))$ converge vers 0 d'après le lemme A.15. Donc la suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(x))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(x)$. ■

Lemme A.17 La suite $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n))$ converge vers l'élément $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n) - \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)\| &\leq \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f_n) - \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f)\| \\ &\quad + \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f) - \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f) - \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)\| \end{aligned}$$

car $\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}$ est un projecteur. D'après l'hypothèse (f_n) converge vers f et d'après le lemme précédent, $(\Pi_{\Pi_{B^\perp}(G_n)}(f))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$, ce qui achève la démonstration. ■

Théorème A.4 La suite (g_n) des solutions des problèmes $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ d'une approche discrétisée est telle que la suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$

Démonstration La solution g_n du problème $\mathcal{P}_3^n(f_n)$ vérifie $\Pi_{B_n^\perp}(g_n) = \Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(f_n)$ et, d'après le théorème précédent la suite $(\Pi_{\Pi_{B_n^\perp}(G_n)}(f_n))$ converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$. La suite $(\Pi_{B_n^\perp}(g_n))$ converge donc vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$.

Comme B^\perp est inclus dans B_n^\perp , $\Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{B_n^\perp}(g_n)$. Par continuité de l'opérateur Π_{B^\perp} , la suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge donc vers $\Pi_{B^\perp} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f) = \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$. ■

A.2.3 Divergence des solutions d'une approche discrétisée

Les résultats suivants montrent pourquoi il faut que $\Pi_{B^\perp}(G)$ soit fermé: le lemme A.19 montre que si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ n'est pas fermé, il existe des approches discrétisées dont les solutions divergent; au contraire, le théorème A.7 montre que si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, les solutions de toute approche discrétisée convergent.

Théorème A.5 (Compacité séquentielle faible) *De toute suite (x_n) bornée en norme, il est possible d'extraire une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge faiblement vers un élément x , c'est-à-dire telle que pour tout $y \in H$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_{\phi(n)}, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Ce théorème classique de la théorie des espaces de Hilbert, ainsi que la remarque suivante, permettent de démontrer le lemme A.18.

Remarque La limite faible x d'une suite (x_n) d'éléments d'un espace fermé F appartient aussi à F .

En effet, pour tout élément y de F^\perp , $\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle$ car la suite (x_n) converge faiblement vers x . De plus, tout élément x_n de la suite appartient à F , ce qui entraîne $\langle x_n, y \rangle = 0$, donc $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout élément y de F^\perp . Ceci signifie finalement que x appartient à $(F^\perp)^\perp = F$ car F est fermé.

Lemme A.18 *Soient B et G deux espaces fermés. Soit R^{-1} , l'opérateur bijectif, défini sur $\Pi_{B^\perp}(G)$ et à valeurs dans $G \cap (B \cap G)^\perp$, inverse du projecteur Π_{B^\perp} . Soit (x_n) une suite de $\Pi_{B^\perp}(G)$ qui converge (fortement) vers une limite x . Si la suite $(R^{-1}(x_n))$ est bornée, alors x appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$.*

Démonstration D'après le théorème A.5 de la compacité séquentielle faible, il est possible d'extraire de la suite $(R^{-1}(x_n))$, bornée, une sous-suite $(R^{-1}(x_{\phi(n)}))$ convergeant faiblement vers un élément y . Par définition de R^{-1} , $\Pi_{B^\perp}(R^{-1}(x_{\phi(n)})) = x_{\phi(n)}$, ce qui peut se combiner avec la caractérisation (4.11) du projecteur Π_{B^\perp} sous la forme:

$$\begin{aligned} & \text{pour tout } z \in B^\perp \quad \langle \Pi_{B^\perp}(R^{-1}(x_{\phi(n)})), z \rangle = \langle R^{-1}(x_{\phi(n)}), z \rangle \\ \Leftrightarrow & \text{pour tout } z \in B^\perp \quad \langle x_{\phi(n)}, z \rangle = \langle R^{-1}(x_{\phi(n)}), z \rangle \\ \Leftrightarrow & \text{pour tout } z \in B^\perp \quad \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \quad \text{par passage à la limite.} \end{aligned}$$

Comme les éléments de la suite (x_n) appartiennent à B^\perp , fermé, leur limite x aussi. La dernière égalité peut ainsi être interprétée comme l'équation caractéristique (4.11) de la projection de y sur B^\perp : $x = \Pi_{B^\perp}(y)$. Par ailleurs, comme y est limite faible d'une suite

$(R^{-1}(x_{\phi(n)}))$ d'éléments de l'espace fermé G , et d'après la remarque ci-dessus, y appartient à G . Finalement, x appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$. ■

Lemme A.19 *Si $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ n'appartient pas à $\Pi_{B^\perp}(G)$, toute suite (g_n) de solutions d'une approche discrétisée du problème $\mathcal{P}_3(f)$ est non bornée.*

Démonstration Comme $G_n \subset G$, la suite $(\Pi_{B^\perp}(g_n))$ appartient à $\Pi_{B^\perp}(G)$ et, d'après le théorème A.4, elle converge vers $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$. La suite $(R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n))$ n'est pas bornée, car sinon, d'après le lemme A.18, $\Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ appartiendrait à $\Pi_{B^\perp}(G)$, contrairement à l'hypothèse.

D'après le lemme A.7, $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)$, et comme $\Pi_{(B \cap G)^\perp}$ est un projecteur, $\|\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)\| \leq \|g_n\|$. Comme la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ n'est pas bornée, la suite (g_n) non plus. ■

Ce lemme montre bien que si $\Pi_{B^\perp}(G)$ n'est pas fermé, les suites de solutions des approches discrétisées risquent de diverger. Dans le cas contraire, la situation est plus favorable.

A.2.4 Convergence des solutions d'une approche discrétisée

Le théorème A.6 de l'inverse continu permet de démontrer le théorème suivant, qui résume l'étude du problème $\mathcal{P}_3(f)$.

Théorème A.6 (de l'inverse continu) *Si un opérateur continu met en bijection deux espaces fermés d'un espace de Hilbert, son inverse est aussi continu.*

Théorème A.7 *Si $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, le problème $\mathcal{P}_3(f)$ admet une unique solution pour tout f , et, pour toute suite (g_n) de solutions d'une approche discrétisée du problème $\mathcal{P}_3(f)$, la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ converge vers la solution $R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$ du problème $\mathcal{P}_3(f)$.*

Démonstration La première partie de l'énoncé, (une unique solution pour tout f) a déjà été démontrée.

Si $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, d'après le théorème A.6 de l'inverse continu, R^{-1} est continu car il est l'inverse de l'opérateur continu Π_{B^\perp} . Par continuité de R^{-1} , la suite $(R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n))$ converge vers $R^{-1} \circ \Pi_{\overline{\Pi_{B^\perp}(G)}}(f)$, solution du problème $\mathcal{P}_3(f)$. Enfin, d'après le lemme A.7, $R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g_n) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)$, ce qui achève la démonstration. ■

Ce dernier théorème comporte une légère restriction : pour une suite (g_n) de solutions discrétisées, si la partie $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n)$ converge, la partie $\Pi_{(B \cap G)}(g_n)$ peut fort bien diverger. L'étude de l'espace $B \cap G$ des indéterminations est donc importante.

A.3 Propriétés topologiques de l'espace somme $B + G$

Le travail qui précède montre qu'une approche discrétisée du problème $\mathcal{P}_3(f)$ n'a de sens que si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, c'est-à-dire, d'après le lemme A.6, si l'espace $B + G$ est fermé. Montrons maintenant ce résultat.

A.3.1 Séparation du domaine en plusieurs zones

Une première remarque permet de diviser le domaine Ω en sous-zones, qui seront traitées indépendamment les unes des autres pour montrer que l'espace $B + G$ est fermé.

Soient Ω_1 et Ω_2 , deux parties disjointes de Ω telles que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. Le produit scalaire (4.9) défini pour deux fonction f_1 et f_2 de H peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_1} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega_2} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle_1 + \langle f_1, f_2 \rangle_2 \end{aligned}$$

ce qui permet de voir l'espace de Hilbert H comme l'espace produit $H_1 \times H_2$ des deux espaces H_1 et H_2 , qui contiennent les restrictions des fonctions de H sur respectivement Ω_1 et Ω_2 .

Cette séparation peut également s'appliquer à l'espace G des fonctions invariantes dans le temps, car les valeurs prises par une fonction g de G sur Ω_1 ne sont pas reliées aux valeurs prises sur Ω_2 . G peut donc être vu comme le produit $G_1 \times G_2$ des espaces G_1 et G_2 des fonctions invariantes dans le temps définies sur Ω_1 et Ω_2 .

Mais il n'est pas toujours possible d'appliquer cette séparation à l'espace B , car les valeurs d'une fonction de B sont constantes sur les lignes de courant de l'écoulement, et si une ligne de courant appartient aux deux zones Ω_1 et Ω_2 les valeurs prises par une fonction de B sur Ω_1 et Ω_2 ne sont pas indépendantes. Pour appliquer cette séparation il faut et il suffit que chaque ligne de courant de l'écoulement n'appartienne qu'à une seule zone. Dans ce cas $B = B_1 \times B_2$ et la somme $B + G = (B_1 + G_1) \times (B_2 + G_2)$. Il est alors équivalent de montrer que l'espace $B + G$ est fermé ou que les espaces $B_1 + G_1$ et $B_2 + G_2$ sont fermés.

Ce qui vient d'être montré pour deux zones est également valable pour N zones $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Si chaque ligne de courant n'appartient qu'à une seule zone, l'espace B peut être vu comme un espace produit $B_1 \times \dots \times B_N$, la somme $B + G$ est égale au produit $(B_1 + G_1) \times \dots \times (B_N + G_N)$ et il suffit de montrer indépendamment sur chaque zone Ω_z que l'espace $B_z + G_z$ est fermé.

Or la division du domaine en zones de deux types, opérée au paragraphe 4.2.5 (**Espace des indéterminations**), répond à cette exigence, suivant laquelle chaque ligne de courant n'appartient qu'à une seule zone. Il suffira donc de vérifier que sur de telles zones Ω_z l'espace somme $B_z + G_z$ est fermé. Dans la suite, par simplification de notation, l'espace Ω_z sera désormais noté Ω et correspondra, suivant la terminologie introduite au paragraphe 4.2.5, soit à une zone du premier type, où toute ligne de courant croise une autre ligne de courant, soit à une zone de second type où toutes les lignes de courant sont parallèles.

A.3.2 Espace produit

Pour introduire les notations nécessaires aux démonstrations qui suivent, considérons le produit scalaire (4.9) de l'espace de Hilbert H , défini pour deux fonction f_1 et f_2 , et qui peut s'écrire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{t=t_1}^{t_M} \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \sum_{t=t_1}^{t_M} \langle f_1, f_2 \rangle_t$$

où, pour toute date t , le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ est défini pour des fonctions dépendant des coordonnées d'espace \mathbf{x} , par

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_t = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_1 = \int_{\Omega} \phi_1(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

C'est le produit scalaire d'un espace de Hilbert H_1 de fonctions de carré sommable, définies sur le domaine Ω . H peut donc être vu comme l'espace de Hilbert produit $(H_1)^M$. Cela permet d'une part de décomposer les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ de H suivant les dates t , et d'autre part, de superposer les écoulements de chaque date.

Notations Un élément x de $H = (H_1)^M$ s'écrira comme un M -uplets (x^1, \dots, x^M) où chaque x^i appartient à H_1 . Une suite (x_n) de $(H_1)^M$, qui équivaut aux M suites $(x_n^1), \dots, (x_n^M)$, converge vers $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^M)$ si chaque suite (x_n^i) converge vers x_0^i .

Les sous-espaces B et G de H s'interprètent dans l'espace produit sous la forme :

- Soit B_t le sous-espace des fonctions, constantes sur les lignes de courant du domaine Ω_t , qui peuvent s'écrire $b_t(u(\mathbf{x}, t))$ sur le domaine Ω_t ; sur le domaine complémentaire $\Omega \setminus \Omega_t$, elles peuvent prendre n'importe quelles valeurs. L'espace B correspond à l'espace produit $B_1 \times \dots \times B_M$ des M espaces B_t . Notons au passage que comme B est fermé, les espaces B_t sont eux aussi fermés.
- L'espace G est l'espace diagonal de H , composé des M -uplets (x^1, \dots, x^M) de cet espace produit $(H_1)^M$, tels que $x^1 = \dots = x^M$.

A.3.3 Cas de lignes de courant parallèles

Montrons, dans le cas où Ω est une zone du second type, c'est-à-dire où toutes les lignes de courant sont parallèles, que l'espace somme $B + G$ est fermé.

Théorème A.8 *Si les lignes de courant de tous les écoulements sont parallèles sur Ω , l'espace somme $B + G$ est fermé.*

Démonstration L'espace $B + G$ est fermé si la limite de toute suite convergente de $B + G$ appartient à $B + G$. Soit $(x_n + b_n^1, \dots, x_n + b_n^M)$, avec $b_n^i \in B_t$ pour tout t , $x_n \in H_1$, une suite de $B + G$. Supposons cette suite convergente vers y , c'est-à-dire chaque suite $(x_n + b_n^i)$ convergente vers y^i et montrons que pour tout t , y^i peut s'écrire $y^i = x_0 + b_0^i$, où x_0 est une même composante et $b_0^i \in B_t$.

Pour une date t , et pour n'importe quelle fonction x_0 de H_1 , la restriction de $y^i - x_0$ sur $\Omega \setminus \Omega_t$ est toujours la restriction d'une fonction b_0^i de B_t car les fonctions de B_t peuvent prendre n'importe quelles valeurs sur $\Omega \setminus \Omega_t$. La condition $y^i = x_0 + b_0^i$, avec $b_0^i \in B_t$, sera donc toujours vérifiée sur $\Omega \setminus \Omega_t$. Il reste à vérifier la condition sur les sous-domaines Ω_t .

Comme toutes les lignes de courant sont parallèles, l'ensemble des lignes de courant de toutes les dates forment un écoulement dans tout le domaine Ω . Soit B_0 l'espace des fonctions constantes sur ces lignes de courant. C'est un espace fermé. Pour une date t , la restriction sur Ω_t d'une fonction de B_0 correspond à la restriction d'une fonction de B_t . Comme la propriété ne doit plus être démontrée que sur Ω_t , l'espace B_t pourra désormais être confondu avec B_0 .

Pour deux dates t et s , la restriction sur $\Omega_t \cap \Omega_s$ de la suite $(x_n + b_n^t - x_n - b_n^s) = (b_n^t - b_n^s)$ est convergente de limite $y^t - y^s$. Comme les fonctions $b_n^t - b_n^s$ appartiennent à B_0 , leur limite $y^t - y^s$ est égale, sur l'intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, à une fonction $dy^{t,s}$ de B_0 , qui n'est définie que sur les lignes d'intersection non nulle avec $\Omega_t \cap \Omega_s$.

Sur une ligne de courant u , chaque fonction b de B_0 prend une unique valeur $b(u)$. Ainsi, si l'intersection de la ligne u avec $\Omega_t \cap \Omega_s$ est non vide, les fonctions $dy^{t,s}$ prennent une unique valeur $dy^{t,s}(u)$. Les valeurs $dy^{t,s}(u)$ vérifient les deux propriétés suivantes :

1. $dy^{t,s}(u) = -dy^{s,t}(u)$ car sur $\Omega_t \cap \Omega_s$, $dy^{t,s} = y^t - y^s$ et $dy^{s,t} = y^s - y^t = -dy^{t,s}$.
2. S'il existe des dates $t_1 \dots t_m$ telles que les intersections de $\Omega_{t_i} \cap \Omega_{t_{i+1}}$, pour $t = 1 \dots m$, ainsi que l'intersection $\Omega_{t_1} \cap \Omega_{t_m}$, soient non vides avec la ligne u , alors, par passage à la limite sur les suites $(b_n^{t_i}(u) - b_n^{t_{i+1}}(u))$,

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_n^{t_i}(u) - b_n^{t_{i+1}}(u) = b_n^{t_1}(u) - b_n^{t_m}(u) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m-1} dy^{t_i, t_{i+1}}(u) = dy^{t_1, t_m}(u)$$

Montrons qu'il existe des fonctions $b_0^t \in B_0$ telles que sur toute intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, $y^t - y^s = b_0^t - b_0^s$. De telles fonctions existent si, sur chaque ligne de courant u , il existe M variables $b_0^t(u)$, indicées par t , qui vérifient le système linéaire :

$$b_0^t(u) - b_0^s(u) = y^t(u) - y^s(u) = dy^{t,s}(u)$$

pour tout couple d'indices (t, s) tel que l'intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$ soit traversée par la ligne u . Le nombre d'équations peut dépasser le nombre M d'inconnues du système mais il existe toujours des solutions à cause des propriétés des constantes $dy^{s,t}(u)$ énoncées au dessus.

Il existe donc toujours des fonctions $b_0^t \in B_0$ telles que sur toute intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, $y^t - y^s = b_0^t - b_0^s$. A partir de ces fonctions, construisons une fonction x_0 en posant sur chaque domaine Ω_t , $x_0 = y^t - b_0^t$. Sur toute intersection $\Omega_t \cap \Omega_s$, l'égalité $y^t - y^s = b_0^t - b_0^s$ assure que les deux définitions possibles de x_0 , $x_0 = y^t - b_0^t$ et $x_0 = y^s - b_0^s$, sont compatibles.

Les fonctions $x_0 \in H_1$ et $b_0^t \in B_0$ ainsi construites vérifient sur tout domaine Ω_t l'égalité $y^t = x_0 + b_0^t$, ce qui montre que l'espace $B + G$ est fermé. ■

A.3.4 Lemmes préliminaires

Dans le cas où Ω est une zone du premier type, c'est-à-dire où chaque ligne de courant croise une autre ligne de courant, montrer que l'espace somme $B + G$ est fermé est moins immédiat que pour les zones du second type. La démonstration s'appuie sur quelques lemmes préliminaires.

Lemme A.20 Soit Δ le pavé non vide $O_1 \times O_2$, produit des ouverts bornés O_1 et O_2 de \mathbb{R} . Soit $H = L^2(\Delta, dx dy)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Δ . Les sous-espaces X et Y de H , des fonctions qui s'écrivent respectivement $f(x, y) = \chi(x)$ et $f(x, y) = \gamma(y)$, sont fermés ainsi que leur somme $X + Y$.

Démonstration $|O| = \int_O dx$ désigne la longueur d'un ouvert O . D'après le lemme A.1, les espaces X et Y sont fermés car il peuvent s'identifier respectivement aux espaces de Hilbert $L^2(O_1, |O_2| dx)$ et $L^2(O_2, |O_1| dy)$. Soient (χ_n) et (γ_n) deux suites de X et Y telles que la suite somme $(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers un élément h de H . Montrons que h peut s'écrire $h = \chi_0 + \gamma_0$, où χ_0 et γ_0 sont éléments respectivement de X et de Y , ce qui montrera que $X + Y$ est fermé.

Soit χ un élément de X , qui peut se décomposer en

$$\chi(x) = \chi(x) - \frac{1}{|O_1|} \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi + \frac{1}{|O_1|} \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi \quad (\text{A.4})$$

L'élément $m = \frac{1}{|O_1|} \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi$ est une constante, donc appartient à Y . De plus, pour tout γ de Y ,

$$\begin{aligned} \langle \chi - m, \gamma \rangle &= \int_{\Delta} (\chi(x) - m) \gamma(y) dx dy = \left(\int_{O_1} (\chi(x) - m) dx \right) \times \left(\int_{O_2} \gamma(y) dy \right) \\ &= \left(\int_{O_1} \chi(x) dx - \int_{O_1} \chi(\xi) d\xi \right) \times \left(\int_{O_2} \gamma(y) dy \right) = 0 \end{aligned}$$

donc $\chi - m$ est élément de Y^\perp . La décomposition (A.4) correspond donc à la décomposition orthogonale $\chi = \Pi_{Y^\perp}(\chi) + \Pi_Y(\chi)$. Or $\Pi_{Y^\perp}(\chi) = \chi - m$ demeure élément de X , d'où l'inclusion $\Pi_{Y^\perp}(X) \subset X$.

La suite $(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers h donc, par continuité du projecteur, la suite $\Pi_{Y^\perp}(\chi_n) = \Pi_{Y^\perp}(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers $\Pi_{Y^\perp}(h)$. Comme $\Pi_{Y^\perp}(X) \subset X$ et que X est fermé, $\Pi_{Y^\perp}(h)$ est un élément χ_0 de X . Par ailleurs, le projection $\Pi_Y(h)$ est un élément γ_0 de Y .

Finalement, la décomposition orthogonale de h s'écrit $h = \Pi_{Y^\perp}(h) + \Pi_Y(h) = \chi_0 + \gamma_0$ avec $\chi_0 \in X$ et $\gamma_0 \in Y$, ce qui prouve que $X + Y$ est fermé. ■

Lemme A.21 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $H = L^2(\Omega, dx dy)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω . Les sous-espaces X et Y de H , des fonctions qui s'écrivent respectivement $f(x, y) = \chi(x)$ et $f(x, y) = \gamma(y)$, sont fermés ainsi que leur somme $X + Y$.

Démonstration Le produit scalaire de deux fonctions χ_1 et χ_2 de X peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \chi_1, \chi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_\Omega(x, y) \chi_1(x) \chi_2(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x) \chi_2(x) dx \int_{\mathbb{R}} 1_\Omega(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x) \chi_2(x) dx \mu(x) \end{aligned}$$

avec $\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_\Omega(x, y) dy$, ce qui permet d'identifier X avec l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mu(x) dx)$. X est donc fermé par application du lemme A.1. De même, Y est fermé.

Soient (χ_n) et (γ_n) deux suites de X et Y telles que la suite somme $(\chi_n + \gamma_n)$ converge vers un élément h de H . Montrons que h peut s'écrire $h = \chi_0 + \gamma_0$, où χ_0 et γ_0 sont éléments respectivement de X et de Y , ce qui montrera que $X + Y$ est fermé.

Soit Δ un pavé inclus dans Ω . L'espace $L^2(\Delta, dx dy)$ peut être identifié à un sous-espace H_Δ de H , qui est fermé d'après le lemme A.1. Le projection d'une fonction $f(x, y)$ de H sur H_Δ correspond à sa restriction au domaine Δ . Ainsi $\Pi_{H_\Delta}(X)$ (resp. $\Pi_{H_\Delta}(Y)$) est identifiable à l'espace des fonctions de Δ de la forme $f(x, y) = \chi(x)$ (resp. $f(x, y) = \gamma(y)$).

Par continuité du projecteur, la suite $(\Pi_{H_\Delta}(\chi_n + \gamma_n))$ converge vers $\Pi_{H_\Delta}(h)$. Par application du lemme A.20, la restriction $\Pi_{H_\Delta}(h)$ au domaine Δ de la limite h est de la forme $h(x, y) = \chi_0(x) + \gamma_0(y)$.

Sur tous les pavés inclus dans Ω , la limite h de la suite $(\chi_n + \gamma_n)$ est de la forme $h(x, y) = \chi_0(x) + \gamma_0(y)$. Elle est donc de la forme $h(x, y) = \chi_0(x) + \gamma_0(y)$ sur tout le domaine Ω , ce qui montre que l'espace $X + Y$ est fermé. ■

Lemme A.22 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $H_1 = L^2(\Omega, dx dy)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω . Soient $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$ des fonctions qui constituent un changement de variables admissible. Soient B_1 et B_2 les espaces des fonctions de la forme respectivement $f(x, y) = b_1(u_1(x, y))$ et $f(x, y) = b_2(u_2(x, y))$. Les espaces B_1 , B_2 et $B_1 + B_2$ sont fermés.

Démonstration Il est évident que les espaces B_1 et B_2 sont fermés. Pour deux fonctions f_1 et f_2 de H_1 le produit scalaire s'écrit :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f_1(u_1, u_2) f_2(u_1, u_2) J(u_1, u_2) du_1 du_2$$

avec $J(u_1, u_2)$, le jacobien du changement de variables. Le jacobien est une fonction positive majorée, et minorée par une constante strictement positive. Il en ressort que les propriétés topologiques de H_1 restent inchangées si le produit scalaire naturel

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1(u_1, u_2) f_2(u_1, u_2) J(u_1, u_2) du_1 du_2$$

est remplacé par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \int_{\Omega} f_1(u_1, u_2) f_2(u_1, u_2) du_1 du_2$$

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ permet, par application du lemme A.21, de montrer que $B_1 + B_2$ est fermé pour ce produit scalaire, donc aussi pour le premier produit scalaire puisque les propriétés topologiques demeurent. ■

Lemme A.23 Soient B_1 et B_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de H_1 tels que la somme $B_1 + B_2$ est fermée. Une suite (x_n) d'éléments de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ converge si les suites $(\Pi_{B_1^\perp}(x_n))$ et $(\Pi_{B_2^\perp}(x_n))$ convergent.

Démonstration Soit T l'opérateur linéaire qui, à un élément x de $(B_1 \cap B_2)^\perp$, associe $T(x) = (\Pi_{B_1^\perp}(x), \Pi_{B_2^\perp}(x))$ dans $H_1 \times H_1$.

- T est continu car les projecteurs $\Pi_{B_1^\perp}$ et $\Pi_{B_2^\perp}$ le sont.

- T est injectif. Soit en effet un élément x de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ tel que $(\Pi_{B_1^\perp}(x), \Pi_{B_2^\perp}(x)) = (0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_{B_1^\perp}(x) = 0 \\ \Pi_{B_2^\perp}(x) = 0 \\ x \in (B_1 \cap B_2)^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in B_1 \\ x \in B_2 \end{array} \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp = \{0\}$$

- L'image de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ par T est un sous-espace fermé de $H_1 \times H_1$. Soit en effet (x_n) une suite de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ telle que la suite $(\Pi_{B_1^\perp}(x_n), \Pi_{B_2^\perp}(x_n))$ converge vers une limite (y_1, y_2) . Montrons qu'il existe alors un élément x_0 de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ tel que $y_1 = \Pi_{B_1^\perp}(x_0)$ et $y_2 = \Pi_{B_2^\perp}(x_0)$

Un élément x_n se décompose en

$$x_n = \Pi_{B_1^\perp}(x_n) + \Pi_{B_1}(x_n) \quad \Rightarrow \quad \Pi_{B_2^\perp}(x_n) = \Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1^\perp}(x_n) + \Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1}(x_n)$$

Par passage à la limite, la suite $(\Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1}(x_n))$ converge vers $y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$. Comme, par hypothèse, l'espace $B_1 + B_2$ est fermé, l'espace $\Pi_{B_2^\perp}(B_1)$ est fermé d'après le lemme A.6. Les éléments de la suite $(\Pi_{B_2^\perp} \circ \Pi_{B_1}(x_n))$ appartiennent à $\Pi_{B_2^\perp}(B_1)$, leur limite $y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$ aussi. De plus, d'après le lemme A.5, $\Pi_{B_2^\perp}(B_1) = \Pi_{B_2^\perp}(B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp)$, donc $y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$ peut s'écrire $\Pi_{B_2^\perp}(x_1)$, où x_1 est un élément de $B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp$.

Par ailleurs, les éléments $\Pi_{B_1^\perp}(x_n)$ appartiennent à B_1^\perp , qui est fermé, donc y_1 appartient à B_1^\perp . L'élément $x_0 = x_1 + y_1$ appartient à $(B_1 \cap B_2)^\perp$ car $x_1 \in B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^\perp$, $y_1 \in B_1^\perp$ et $B_1^\perp \subset (B_1 \cap B_2)^\perp$. Il vérifie :

$$\Pi_{B_1^\perp}(x_0) = y_1 \quad \text{car} \quad x_1 \in B_1 \text{ et } y_1 \in B_1^\perp$$

$$\Pi_{B_2^\perp}(x_0) = y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1) + \Pi_{B_2^\perp}(y_1) = y_2 \quad \text{car} \quad \Pi_{B_2^\perp}(x_1) = y_2 - \Pi_{B_2^\perp}(y_1)$$

ce qui montre que l'image par T de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ est bien un sous-espace fermé de $H_1 \times H_1$.

- T établit une bijection continue entre les espaces fermés $(B_1 \cap B_2)^\perp$ et $T((B_1 \cap B_2)^\perp)$. Par application du théorème A.6 de l'inverse continu, l'opérateur inverse T^{-1} est aussi continu, ce qui signifie qu'une suite (x_n) de $(B_1 \cap B_2)^\perp$ converge si les suites $(\Pi_{B_1^\perp}(x_n))$ et $(\Pi_{B_2^\perp}(x_n))$ convergent. ■

A.3.5 Cas de lignes de courant qui se croisent

Montrons en utilisant les lemmes précédent que, dans le cas où Ω est une zone du premier type, c'est-à-dire où chaque ligne de courant croise une autre ligne de courant, l'espace somme $B + G$ est fermé.

Lemme A.24 Soient les écoulements sur le domaine Ω tels qu'il existe deux dates r et s dont les fonctions $u(\mathbf{x}, r)$ et $u(\mathbf{x}, s)$, qui indiquent les lignes de courant, forment un changement de variables admissible sur Ω . Soient M suites (b_n^i) de B_i et une suite (x_n) de H_1 telles que chaque suite $(b_n^i + x_n)$ converge. Il existe alors une suite c_n de constantes, telle que les suites $(x_n - c_n)$ et $(b_n^i + c_n)$ convergent.

Démonstration Par le changement de variables dû aux fonctions $u(\mathbf{x}, r)$ et $u(\mathbf{x}, s)$, une fonction $f(\mathbf{x})$ de H_1 s'écrit $f(u(\mathbf{x}, r), u(\mathbf{x}, s))$. D'après le théorème A.22, l'espace $B_r + B_s$ est fermé. De plus, l'espace $B_r \cap B_s$ est l'ensemble des fonctions de la forme $f(u(\mathbf{x}, r), u(\mathbf{x}, s)) = b_1(u(\mathbf{x}, r)) = b_2(u(\mathbf{x}, s))$. $B_r \cap B_s$ correspond donc à l'espace C des fonctions constantes.

Par continuité du projecteur $\Pi_{B_r^\perp}$, la suite $\Pi_{B_r^\perp}(x_n + b_n^1) = \Pi_{B_r^\perp}(x_n)$ converge. Les éléments de cette suite peuvent aussi s'écrire $\Pi_{B_r^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(x_n)$ car $B_r^\perp \subset C^\perp$. De même que la suite $(\Pi_{B_r^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(x_n))$ converge, la suite $(\Pi_{B_s^\perp} \circ \Pi_{C^\perp}(x_n))$ converge aussi. Comme de plus $C = B_r \cap B_s$ et que l'espace $B_r + B_s$ est fermé, le lemme A.23 peut s'appliquer à la suite $(\Pi_{C^\perp}(x_n))$, qui converge vers une limite x_0 .

Posons $c_n = \Pi_C(x_n)$, qui est une constante. Comme $x_n - c_n = x_n - \Pi_C(x_n) = \Pi_{C^\perp}(x_n)$, la suite $(x_n - c_n)$ converge vers x_0 .

Pour une date t donnée, comme les suites $(x_n + b_n^t)$ et $(x_n - c_n)$ convergent, la suite $(b_n^t + c_n)$ converge aussi. ■

Théorème A.9 *Si les écoulements sont tels, que chaque ligne de courant croise une autre ligne de courant, de sorte que deux points du domaine Ω peuvent être reliés par des morceaux de lignes de courant, l'espace somme $B + G$ est fermé.*

Démonstration L'espace $B + G$ est fermé si la limite de toute suite convergente de $B + G$ appartient à $B + G$. Soit $(x_n + b_n^1, \dots, x_n + b_n^M)$, avec $b_n^t \in B_t$ pour tout t , $x_n \in H_1$, une suite de $B + G$. Supposons cette suite convergente vers y , c'est-à-dire chaque suite $(x_n + b_n^t)$ convergente vers y^t et montrons que pour tout t , y^t peut s'écrire $y^t = x_0 + b_0^t$, où x_0 est une même composante et $b_0^t \in B_t$.

Comme les lignes de courant se croisent, il existe au moins une zone Ω_1 sur laquelle les fonctions qui indiquent les lignes de courant pour deux dates r et s forment un changement de variables admissible. Par application du lemme précédent, il existe une suite de constantes c_n , telle que les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur cette zone. Comme les fonctions b_n^t sont définies sur les lignes de courant, les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur un domaine Ω_2 traversé par les mêmes lignes de courant que la zone Ω_1 . Sur le domaine Ω_2 , comme les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent, la suite $(x_n - c_n)$ converge, et les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur un domaine Ω_3 traversé par les mêmes lignes de courant que le domaine Ω_2 , etc...

Bref, au moyen des lignes de courant qui propagent la convergence des suites $(b_n^t + c_n)$ sur des domaines de plus en plus étendus, les suites $(b_n^t + c_n)$ convergent sur tout Ω vers une limite b_0^t , et la suite $(x_n - c_n)$ vers une limite x_0 . Comme l'espace C des constantes est inclus dans chaque espace B_t , chaque suite $(b_n^t + c_n)$ appartient à B_t , donc sa limite b_0^t aussi. Finalement, pour toute date t , la limite y^t de la suite $(x_n + b_n^t) = (x_n - c_n + b_n^t + c_n)$ vaut $x_0 + b_0^t$ avec $b_0^t \in B_t$, ce qui montre que l'espace $B + G$ est fermé. ■

A.3.6 Théorèmes fondamentaux

Cette partie très théorique s'achève. Les nombreux résultats intermédiaires, qui y ont été démontrés, sont maintenant rassemblés et résumés, sous la forme des théorèmes synthétiques suivants, pour n'en garder que l'essentiel.

Théorème A.10 *Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^2 , H l'espace de Hilbert, pour le produit scalaire (4.9), des fonctions définies sur Ω aux M dates t_1, \dots, t_M . Soient G le sous-espace des fonctions invariantes dans le temps, B le sous-espace des fonctions constantes sur les lignes de courant. L'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est un espace fermé.*

Démonstration Le domaine Ω peut se diviser en zones élémentaires Ω_z de deux types, suivant la terminologie introduite au paragraphe 4.2.5: des zones du premier type, où toute ligne de courant croise une autre ligne de courant, et des zones du second type où toutes les lignes de courant sont parallèles. D'après le paragraphe A.3.1, cette séparation permet de voir

H comme le produit des espaces de Hilbert H_z , définis par restriction sur chaque zone Ω_z , et $B + G$ peut alors s'écrire comme le produit des espaces $B_z + G_z$.

D'après le théorème A.9, les espaces $B_z + G_z$ sont fermés pour les zones Ω_z du premier type, où les lignes de courant se croisent, et d'après le théorème A.8, les espaces $B_z + G_z$ sont fermés pour les zones Ω_z du second type, où les lignes de courant sont parallèles. L'espace $B + G$, produit des espaces fermés $B_z + G_z$, est donc fermé, ce qui implique finalement, d'après le lemme A.6, que l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé. ■

Théorème A.11 *Soit, pour une fonction f de H donnée, la fonctionnelle $J(g, f)$ définie sur l'ensemble des fonctions g de G par $J(g, f) = \min_{b \in B} \|g - b - f\|^2$. Pour toute fonction f , il existe des fonctions g_0 de G qui minimisent cette fonctionnelle, c'est-à-dire telles que*

$$J(g_0, f) = \min_{g \in G} J(g, f) = \min_{g \in G} \left(\min_{b \in B} \|g - b - f\|^2 \right)$$

Ces fonctions g_0 de G , qui minimisent $J(., f)$, sont caractérisées par les relations :

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(f) \quad (4.13)$$

$$\langle \Pi_{B^\perp}(g_0), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle = \langle \Pi_{B^\perp}(f), \Pi_{B^\perp}(g) \rangle \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G \quad (4.14)$$

et diffèrent entre elles d'une fonction de l'espace $B \cap G$.

Démonstration Les fonctions qui minimisent la fonctionnelle $J(., f)$ sont solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ défini au paragraphe 4.2.3. D'après le théorème A.2, les solutions du problème $\mathcal{P}_2(f)$ existe pour toute fonction f si l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, ce qui a été démontré au théorème A.10. Les propriétés de ces solutions sont également décrites par le théorème A.2. ■

Théorème A.12 *La recherche des solutions du problème inverse, caractérisées par l'équation (4.13) :*

$$\Pi_{B^\perp}(g_0) = \Pi_{\Pi_{B^\perp}(G)}(v)$$

peut être approchée par une approche discrétisée définie au paragraphe A.2.1. Soient en effet (g_n) les solutions d'une approche discrétisée; la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ converge vers l'élément $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_0)$. La convergence n'a pas lieu sur l'espace $B \cap G$ des indéterminations.

Démonstration D'après le théorème A.10, l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, ce qui assure l'existence d'une unique solution g_3 au problème $\mathcal{P}_3(v)$ défini au paragraphe A.1.5. Toute solution g_0 de l'équation (4.13), diffère de g_3 d'un élément de l'espace $B \cap G$, donc vérifie $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_0) = \Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_3)$.

D'après le théorème A.7, et comme l'espace $\Pi_{B^\perp}(G)$ est fermé, la suite $(\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_n))$ converge vers $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_3)$, donc vers $\Pi_{(B \cap G)^\perp}(g_0)$. ■

Annexe B

Krigeage et régularité des fonctions de covariance

Cette annexe montre, en s'appuyant sur des éléments de traitement du signal, pourquoi un krigeage avec une fonction de covariance plus régulière que les données est irrégulier.

B.1.1 Analyse harmonique d'une FAIk

Le krigeage est équivalent à un filtrage. Cette comparaison permet d'une part de comprendre pourquoi le krigeage par un modèle trop régulier est instable, et d'autre part de donner une interprétation physique à l'effet de pépite, qui n'est pas réductible à une simple erreur de mesure. Pour mettre ces résultats en évidence, il faut auparavant rappeler quelques éléments de l'**analyse harmonique** des fonctions aléatoires, qui se trouvent dans [30] et [29].

Une FAIk $H(\mathbf{x})$ peut se décomposer par transformée de Fourier suivant un spectre de fréquences. Cette décomposition prend la forme suivante : sa covariance généralisée $K(\mathbf{x})$ est la transformée de Fourier d'une **mesure** positive $\chi(d\mathbf{u})$, sans **atome** à l'origine, et qui vérifie pour tout réel $A > 0$:

$$\int_{|\mathbf{u}|>A} \chi(d\mathbf{u}) < \infty \quad \int_{|\mathbf{u}|\leq A} |\mathbf{u}|^{2(k+1)} \chi(d\mathbf{u}) < \infty$$

La transformée de Fourier est un peu particulière puisqu'elle s'écrit :

$$K(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\cos(2\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) - 1_{|\mathbf{u}|\leq A} P_k(2\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \right) \chi(d\mathbf{u}) \quad \text{avec} \quad P_k(X) = \sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{X^{2p}}{(2p)!}$$

La formulation de cette décomposition spectrale est plutôt compliquée puisqu'elle introduit les termes de *mesure*, d'*atome*, et que la transformée de Fourier est définie différemment du sens habituel, au moyen d'un polynôme P_k . Son principe est pourtant simple : la mesure $\chi(d\mathbf{u})$ représente le poids de la fréquence \mathbf{u} dans la fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$. Ainsi pour tout réel $A > 0$, l'intégrale $I(A) = \int_{|\mathbf{u}|>A} \chi(d\mathbf{u})$ représente les hautes fréquences supérieures à A .

Dans une décomposition harmonique, le spectre exprime la régularité d'une fonction : moins il possède de hautes fréquences, plus celle-ci est régulière. Ainsi, pour la fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$, plus l'intégrale $I(A)$ décroît rapidement lorsque A tend vers l'infini, plus elle est régulière.

B.1.2 Krigeage et filtrage

Une fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$, composée de fréquences, peut être traitée comme un signal. (Les notions élémentaires de traitement du signal peuvent se trouver dans [13]). Le krigeage de $H(\mathbf{x})$ est une convolution de la charge (symbolisée par l'étoile \star):

$$H^*(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}(\mathbf{x}) H_{\alpha} = \left(\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}(\mathbf{x}) \delta_{\mathbf{x}_{\alpha}}(\cdot) \right) \star H(\cdot)$$

C'est un filtre auquel correspond une fonction de transfert $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ par transformée de Fourier. L'analyse de la norme $|T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})|$ de cette fonction montre le pouvoir régularisant du krigeage. Si $|T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})|$ s'annule pour les hautes fréquences, le krigeage filtre (ou atténue) les hautes fréquences et régularise la fonction. Il peut arriver au contraire qu'il amplifie les hautes fréquences, ce qui provoque de l'instabilité.

La proposition suivante montre comment la fonction de transfert $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ d'un krigeage est liée au spectre χ du modèle associée, et pourquoi le krigeage par un modèle trop régulier risque d'être instable.

Proposition B.1 *Plus le spectre χ d'un modèle de krigeage possède de hautes fréquences, plus la fonction de transfert $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ du krigeage de $H(\mathbf{x})$ décroît rapidement. Autrement dit, plus le modèle de krigeage est irrégulier, plus le krigeage est stable.*

Démonstration Dans l'analyse harmonique, la transformée de Fourier établit un isomorphisme entre l'espace $S(H)$ des variables aléatoires engendré par les valeurs de la fonction aléatoire $H(\mathbf{x})$ et l'espace de Hilbert $L^2(\chi)$, des fonctions $\phi(\mathbf{u})$ de carré sommable pour la norme définie par :

$$\|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u})|^2 \chi(d\mathbf{u})$$

Dans cet isomorphisme, la variable $H(\mathbf{x})$ correspond à la fonction $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}$.

Sur $S(H)$, le krigeage $H^*(\mathbf{x})$ est défini comme la combinaison linéaire autorisée $H^*(\mathbf{x}) = \sum \lambda^{\alpha}(\mathbf{x}) H_{\alpha}$ qui minimise la variance de l'erreur $H(\mathbf{x}) - H^*(\mathbf{x})$. Dans $L^2(\chi)$, l'image $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ du krigeage $H^*(\mathbf{x})$ est une combinaison linéaire autorisée des fonctions $\phi_{\mathbf{x}_{\alpha}}$

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N \lambda^{\alpha}(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{x}_{\alpha}}(\mathbf{u})$$

qui minimise la norme de $\|\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) - \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})\|$.

D'après la définition de la fonction de transfert $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$, l'image du krigeage vérifie $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$. Finalement, après division par $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}$, la fonction de transfert est donc définie par la combinaison linéaire autorisée $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x})}$ et minimise l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} |T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} - e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}|^2 \chi(d\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} |T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) - 1|^2 \chi(d\mathbf{u})$$

La minimisation est pondérée par le spectre $\chi(d\mathbf{u})$. Sur les plages de fréquences peu représentées dans le spectre, les valeurs prises par $|T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) - 1|$ sont peu contraintes par la

minimisation. Elles peuvent donc atteindre des valeurs arbitrairement grandes, et la fonction de transfert $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ est alors incontrôlée. Finalement, la fonction de transfert filtre les fréquences bien représentées dans le spectre et prend des valeurs presque arbitraires pour les autres fréquences.

Une fonction aléatoire régulière possède peu de hautes fréquences. Ses fonctions de transfert $T_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ ne filtrent donc pas les hautes fréquences. Au contraire, le krigeage d'une fonction irrégulière filtre les hautes fréquences. ■

Le krigeage avec un modèle régulier ne filtre pas les hautes fréquences. Il ne peut être appliqué qu'à des données régulières, autrement, il produit des instabilités. La régularisation, qui rajoute un effet de pénalité au modèle, le rend irrégulier. Le krigeage qui en résulte peut filtrer les irrégularités.

Annexe C

Calculs d'éléments propres

Cette annexe démontre certains résultats utilisés en section 5.3 et concernant le calcul d'éléments propres.

C.1.1 Nature de l'indétermination

D'après le lemme suivant, la nullité éventuelle du réel δ , défini ci-dessous, permet d'examiner la nature de l'indétermination.

Lemme C.1 Soit $\delta = \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right)$. Si l'espace des indéterminations $B \cap G$ est égal à l'espace C des constantes, $\delta > 0$; sinon $\delta = 0$.

Démonstration Supposons d'abord que $B \cap G$ est égal à l'espace C . D'après le paragraphe A.1.5, la restriction R du projecteur Π_{B^\perp} met en bijection les espaces $G \cap C^\perp = G \cap (B \cap G)^\perp$ et $\Pi_{B^\perp}(G)$. Il est clair que l'espace $G \cap C^\perp$ est fermé, et d'après le théorème A.10, $\Pi_{B^\perp}(G)$ est lui aussi fermé. Ces propriétés permettent d'appliquer le théorème A.6 de l'inverse continu, qui montre que la bijection réciproque R^{-1} est continue, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que pour tout élément g de $G \cap C^\perp$,

$$\|R^{-1} \circ \Pi_{B^\perp}(g)\| \leq k \|\Pi_{B^\perp}(g)\| \Rightarrow \|g\| \leq k \|\Pi_{B^\perp}(g)\| \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2}$$

Ceci implique que: $\delta = \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) \geq \frac{1}{k^2} > 0$.

Supposons maintenant que $B \cap G$ n'est pas égal à l'espace C . Il existe alors un élément g_0 non nul dans $B \cap G \cap C^\perp$. Il vérifie $\Pi_{B^\perp}(g_0) = 0$, d'où :

$$0 \leq \delta = \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) \leq \frac{\|\Pi_{B^\perp}(g_0)\|^2}{\|g_0\|^2} = 0$$

■

C.1.2 Isomorphisme naturel

Dans les approximations numériques de la section 5.2, l'espace G est approché par l'espace G_a de dimension N , engendré par la base orthogonale composée des fonctions e_n . Les calculs

numériques sont ensuite réalisés sur des vecteurs à N composantes, donc des éléments de l'espace \mathbb{R}^N . Le lien entre les fonctions de G_a et les vecteurs de \mathbb{R}^N est établi par l'isomorphisme présenté ici.

Lemme C.2 Soit l'espace euclidien \mathbb{R}^N muni du produit scalaire canonique, défini pour deux vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{z} de composantes y^n et z^n , par $\mathbf{y}^\top \mathbf{z} = \sum_n y^n z^n$, et muni de la norme $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = \sum_n (y^n)^2$. Soit G_a un espace vectoriel muni de la base orthogonale e_n . L'application I de \mathbb{R}^N dans G_a , qui à un vecteur \mathbf{y} associe une fonction $I(\mathbf{y})$ définie par $I(\mathbf{y}) = \sum_n \frac{y^n}{\|e_n\|} e_n$ est un isomorphisme, qui vérifie :

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{z} = \langle I(\mathbf{y}), I(\mathbf{z}) \rangle \quad \|\mathbf{y}\|^2 = \|I(\mathbf{y})\|^2 \quad \mathbf{y}^\top A \mathbf{y} = \|\Pi_{B_a^\pm}(I(\mathbf{y}))\|^2 \quad (\text{C.1})$$

où A est une matrice composée des éléments $A_{m,n} = \frac{\langle \Pi_{B_a^\pm}(e_m), \Pi_{B_a^\pm}(e_n) \rangle}{\|e_m\| \|e_n\|}$, et qui correspond au projecteur $\Pi_{B_a^\pm}$ dans l'isomorphisme.

Démonstration

1. $\mathbf{y}^\top \mathbf{z} = \sum_n y^n z^n = \sum_n \frac{y^n}{\|e_n\|} \frac{z^n}{\|e_n\|} \|e_n\|^2 = \langle I(\mathbf{y}), I(\mathbf{z}) \rangle$
2. $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = \langle I(\mathbf{y}), I(\mathbf{y}) \rangle = \|I(\mathbf{y})\|^2$
3. $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y} = \sum_{m,n} y^m \frac{\langle \Pi_{B_a^\pm}(e_m), \Pi_{B_a^\pm}(e_n) \rangle}{\|e_m\| \|e_n\|} y^n = \|\sum_n \frac{y^n}{\|e_n\|} \Pi_{B_a^\pm}(e_n)\|^2$
 $= \|\Pi_{B_a^\pm}(\sum_n \frac{y^n}{\|e_n\|} e_n)\|^2 = \|\Pi_{B_a^\pm}(I(\mathbf{y}))\|^2$

■

C.1.3 Approximation de δ

La définition suivante regroupe des rappels sur les calculs d'éléments propres, qu'on peut trouver dans Chatelin [5] avec plus de détails.

Définition C.1 Une matrice A de composantes $A_{m,n}$ est **symétrique** si pour tout couple d'indice (m, n) , $A_{m,n} = A_{n,m}$. Elle est **positive** si pour tout vecteur \mathbf{y} de composantes y^n $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y} = \sum_{m,n} y^m A_{m,n} y^n \geq 0$.

Les valeurs propres d'une matrice symétrique positive sont des réels positifs. La plus petite valeur propre non nulle de A s'écrit : $\lambda_a = \min_{\mathbf{y} \in K^\perp} \left(\frac{\mathbf{y}^\top A \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2} \right)$ où K est le noyau de A .

Remarque Les rappels peuvent s'appliquer à la matrice A du lemme C.2 car, par construction, elle est symétrique. De plus, elle est positive, car, d'après l'égalité (C.1), pour tout vecteur \mathbf{y} de \mathbb{R}^N , $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y} = \|\Pi_{B_a^\pm}(I(\mathbf{y}))\|^2 \geq 0$.

Lemme C.3 La plus petite valeur propre non nulle de la matrice A de composantes $A_{m,n} = \frac{\langle \Pi_{B_a^\pm}(e_m), \Pi_{B_a^\pm}(e_n) \rangle}{\|e_m\| \|e_n\|}$ vaut $\lambda_a = \min_{g \in G_a \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B_a^\pm}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right)$.

Démonstration Comme A est une matrice symétrique positive, son noyau K est composé des éléments \mathbf{y} qui vérifient $\mathbf{y}^\top A \mathbf{y} = 0$. Dans l'isomorphisme I du lemme C.2, il lui correspond l'espace des fonctions g de G_a qui vérifient $\|\Pi_{B^\perp}(g)\| = 0$, c'est-à-dire l'espace C des fonctions constantes, décrit en section 5.2.

D'après les rappels, la plus petite valeur propre non nulle de A s'écrit :

$$\lambda_a = \min_{\mathbf{y} \in K^\perp} \left(\frac{\mathbf{y}^\top A \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2} \right) \quad \text{d'où, avec l'isomorphisme } I, \quad \lambda_a = \min_{g \in G_a \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right)$$

■

Lemme C.4 La valeur propre λ_a converge vers $\delta = \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right)$ par valeurs supérieures lorsque que la discrétisation s'affine.

Démonstration Dans ce lemme, les espaces d'approximation B_a et G_a varient, c'est pourquoi ils sont indicés par l'entier n : il deviennent B_n et G_n et sont supposés former une approche discrétisée au sens défini au paragraphe A.2.1. De même, λ_a devient λ_n . Soit $\varepsilon > 0$ un réel positif. Montrons, pour démontrer le lemme, qu'il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, l'encadrement : $\delta \leq \lambda_n \leq \delta + 2\varepsilon$ soit vérifié.

Les deux inégalités :

$$1. \quad \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) \leq \min_{g \in G_n \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B_n^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) = \lambda_n \quad \text{car } G \cap C^\perp \subset G_n \cap C^\perp.$$

$$2. \quad \text{pour tout élément } g, \|\Pi_{B^\perp}(g)\| \leq \|\Pi_{B_n^\perp}(g)\| \quad \text{car } B_n^\perp \text{ contient } B^\perp$$

fournissent la relation :

$$\delta = \min_{g \in G \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) \leq \min_{g \in G_n \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B_n^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) \leq \min_{g \in G_n \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B_n^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) = \lambda_n \quad (\text{C.2})$$

D'après la définition de δ il existe un élément g_ε dans $G \cap C^\perp$ tel que :

$$\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)\|^2}{\|g_\varepsilon\|^2} \leq \delta + \varepsilon \quad (\text{C.3})$$

Posons $g_n = \Pi_{G_n}(g_\varepsilon)$. Comme $C \subset G_n$ et d'après le théorème 4.2, $\Pi_C \circ \Pi_{G_n} = \Pi_{G_n} \circ \Pi_C$; de plus $g_\varepsilon \in C^\perp$, d'où :

$$\Pi_C(g_n) = \Pi_C \circ \Pi_{G_n}(g_\varepsilon) = \Pi_{G_n} \circ \Pi_C(g_\varepsilon) = 0$$

Donc g_n appartient à $G_n \cap C^\perp$, ce qui donne l'inégalité :

$$\lambda_n = \min_{g \in G_n \cap C^\perp} \left(\frac{\|\Pi_{B_n^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} \right) \leq \frac{\|\Pi_{B_n^\perp}(g_n)\|^2}{\|g_n\|^2} \quad (\text{C.4})$$

Comme les espaces B_n et G_n forment une approche discrétisée, $g_n = \Pi_{G_n}(g_\varepsilon)$ tend vers $\Pi_G(g_\varepsilon) = g_\varepsilon$ et $\Pi_{B_n^\perp}(g_n)$ vers $\Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)$. Comme de plus

$$\begin{aligned} \|\Pi_{B_n^\perp}(g_n) - \Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)\| &\leq \|\Pi_{B_n^\perp}(g_n - g_\varepsilon)\| + \|\Pi_{B_n^\perp}(g_\varepsilon) - \Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)\| \\ &\leq \|g_n - g_\varepsilon\| + \|\Pi_{B_n^\perp}(g_\varepsilon) - \Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)\| \end{aligned}$$

la suite $(\Pi_{B_n^\perp}(g_n))$ tend vers $\Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)$, ce qui montre, compte tenu de la convergence de la suite (g_n) vers g_ε , que la suite $\left(\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g_n)\|^2}{\|g_n\|^2}\right)$ tend vers $\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)\|^2}{\|g_\varepsilon\|^2}$; il existe donc un rang N , tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g_n)\|^2}{\|g_n\|^2} \leq \frac{\|\Pi_{B^\perp}(g_\varepsilon)\|^2}{\|g_\varepsilon\|^2} + \varepsilon$$

ce qui avec les relations (C.2), (C.3) et (C.4) fournit l'encadrement souhaité: $\delta \leq \lambda_n \leq \delta + 2\varepsilon$. ■

Remarque Dans la pratique, pour éviter de comptabiliser la valeur propre 0 de la fonction $1 = \sum e_n$ qui engendre l'espace C , la matrice A est remplacée par la matrice M de composantes

$$M_{n,m} = \frac{\langle \Pi_{B_n^\perp}(e_n), \Pi_{B_n^\perp}(e_m) \rangle + \langle \Pi_C(e_n), \Pi_C(e_m) \rangle}{\|e_n\| \|e_m\|}$$

qui est la matrice du système régularisé (5.5), normalisée par la norme des fonctions de base e_n . Cette opération affecte à la fonction 1 la valeur propre 1. Par cette transformation λ_a , la première valeur propre non nulle de A , devient la plus petite valeur propre de M .

C.1.4 Vecteurs propres

La proposition suivante montre que, dans le cas où $\delta = 0$, le vecteur propre lié à la plus petite valeur propre λ_a de la matrice M correspond à l'approximation d'un élément de l'espace des indéterminations $B \cap G$.

Proposition C.1 Soit λ_a la plus petite valeur propre de la matrice M et \mathbf{y}_a un vecteur propre associé. La fonction $I(\mathbf{y}_a)$, correspondant au vecteur \mathbf{y}_a dans l'isomorphisme du lemme C.2, est l'approximation d'un élément de l'espace des indéterminations $B \cap G$.

Démonstration Dans l'isomorphisme, l'élément $I(\mathbf{y}_a)$ vérifie $\frac{\|\Pi_{B_n^\perp}(I(\mathbf{y}_a))\|^2}{\|I(\mathbf{y}_a)\|^2} = \frac{\mathbf{y}_a^\top A \mathbf{y}_a}{\|\mathbf{y}_a\|^2} = \lambda_a$. Comme de plus B_n^\perp contient B^\perp , $\|\Pi_{B^\perp}(I(\mathbf{y}_a))\| \leq \|\Pi_{B_n^\perp}(I(\mathbf{y}_a))\|$, donc $\frac{\|\Pi_{B^\perp}(I(\mathbf{y}_a))\|^2}{\|I(\mathbf{y}_a)\|^2} \leq \lambda_a$.

Si $\delta = 0$, d'après le lemme C.4, la suite des λ_a tend vers 0 lorsque la discrétisation s'affine, donc la suite des $\frac{\|\Pi_{B^\perp}(I(\mathbf{y}_a))\|^2}{\|I(\mathbf{y}_a)\|^2}$ tend aussi vers 0. Comme l'espace des indéterminations $B \cap G$ est l'espace des éléments g de G qui vérifient $\frac{\|\Pi_{B^\perp}(g)\|^2}{\|g\|^2} = 0$, cela signifie finalement que $I(\mathbf{y}_a)$ est l'approximation d'un élément de $B \cap G$. ■

Bibliographie

- [1] N.I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Frederick Ungar Publishing co., New York, 1966.
- [2] J. Bass. *Cours de Mathématique*. Masson, Paris, 1968.
- [3] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1992.
- [4] C. Certes. *Analyse et résolution du problème d'identification de paramètres spatialement répartis dans les modèles d'écoulement souterrain*. Thèse de docteur en hydrogéologie, ENSMP, Fontainebleau, France, 1990.
- [5] F. Chatelin. *Valeurs propres de matrices*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris, 1988.
- [6] P. Chauvet. *Aide-mémoire de géostatistique linéaire*. Cahier de Géostatistique, Fascicule 2. École des Mines de Paris, Paris, 1994.
- [7] G. Chavent. *Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans des équations aux dérivées partielles*. Thèse de docteur es sciences, Université de Paris VI, Paris, France, 1971.
- [8] P. M. Clifton and S. P. Neuman. Effects of kriging and inverse modeling on conditional simulation of Avra Valley aquifer in southern Arizona. *Water Resources Research*, 18(4):1215–1234, 1982.
- [9] C. Daly. *Applications de la géostatistique à quelques problèmes de filtrage*. Thèse de docteur en géostatistique, ENSMP, Fontainebleau, France, 1991.
- [10] N. DiStefano and A. Rath. An identification approach to subsurface hydrological systems. *Water Resources Research*, 11(6):1005–1012, 1975.
- [11] A. Dong. *Estimation géostatistique des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles*. Thèse de docteur en géostatistique, ENSMP, Fontainebleau, France, 1990.
- [12] Y. Emsellem and G. de Marsily. An automatic solution for the inverse problem. *Water Resources Research*, 7(5):1264–1283, 1971.
- [13] P. Faure et M. Robin. *Éléments d'automatique*. Dunod, 1984.
- [14] R. A. Freeze. A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media. *Water Resources Research*, 11(5):725–741, 1975.

- [15] E. O. Frind and G. F. Pinder. Galerkin solution of the inverse problem for aquifer transmissivity. *Water Resources Research*, 9(5):1397–1410, 1973.
- [16] G. R. Gavalas, P. C. Shah, and J. H. Seinfeld. Reservoir history matching by bayesian estimation. *Soc. Pet. Eng. J.*, 16(6):337–350, 1976.
- [17] T. R. Ginn and J. H. Cushman. Inverse methods for subsurface flow: A critical review of stochastic techniques. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 4(1):1–26, 1990.
- [18] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bul. Univ. Princeton*, 13(49), 1902.
- [19] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press College Division, Orlando, USA, 1974.
- [20] R. J. Hoeksema and R. B. Clapp. Calibration of groundwater flow models using Monte Carlo simulations and geostatistics. In *ModelCARE 90: Calibration and reliability in Groundwater Modelling*, volume 195, pages 33–42. IAHS Publ., 1990.
- [21] P. Jacquard and C. Jain. Permeability distribution from field pressure data. *Soc. Pet. Eng.*, 5(4):281–294, 1965.
- [22] P. K. Kitanidis and E. G. Vomvoris. A geostatistical approach to the inverse problem in groundwater modeling (steady state). *Water Resources Research*, 19(3):677–690, 1983.
- [23] D. Kleinecke. Use of linear programming for estimating geohydrologic parameters of groundwater basins. *Water Resources Research*, 7(2):367–375, 1971.
- [24] P. J. Laurent. *Approximation et optimisation*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, Paris, 1972.
- [25] P. Lesaint. Finite element methods for symmetric hyperbolic equations. *Numer. Math.*, 21:244–255, 1973.
- [26] G. de Marsily. *Hydrogéologie quantitative*. Collection des sciences de la terre. Masson, Paris, 1981.
- [27] G. Matheron. *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, Paris, 1967.
- [28] G. Matheron. *La théorie des variables régionalisées et ses applications*, volume 5 of *Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique*. E.N.S.M.P., Fontainebleau, 1970.
- [29] G. Matheron. Leçons sur les fonctions aléatoires d'ordre 2. Cours du Centre de Géostatistique, C-53, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, 1972.
- [30] G. Matheron. The intrinsic random functions and their applications. *Adv. Appl. Prob.*, 5:439–468, 1973.
- [31] G. Matheron. Remarques sur le krigeage et son dual. Note du Centre de Géostatistique, N-695, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, 1981.
- [32] G. Matheron. Splines and kriging, their formal equivalence. In *Down to Earth Statistics Solutions Looking for Geological Problems*. Syracuse University Geology Contributions, 1981.

- [33] S. A. Mizell, A. L. Gutjahr, and L. W. Gelhar. Stochastic analysis of spatial variability in two-dimensional steady groundwater flow assuming stationary and non-stationary head. *Water Resources Research*, 18(4):1153–1167, 1982.
- [34] R. W. Nelson. In-place measurement of permeability in heterogeneous media, 1, theory of a proposed method. *J. Geophys. Res.*, 65(6):1753–1758, 1960.
- [35] R. W. Nelson. In-place measurement of permeability in heterogeneous media, 1, experimental and computational considerations. *J. Geophys. Res.*, 66(8):2469–2478, 1961.
- [36] R. W. Nelson. In-place determination of permeability distribution for heterogeneous porous media through analysis of energy dissipation. *Soc. Pet. Eng. J.*, 8(1):33–42, 1968.
- [37] S. P. Neuman. Calibration of distributed parameter groundwater flow models viewed as a multiple-objective decision process under uncertainty. *Water Resources Research*, 9(4):1006–1021, 1973.
- [38] S. P. Neuman and S. Yakowitz. A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1, theory. *Water Resources Research*, 15(4):845–860, 1979.
- [39] D. A. Nutbrown. Identification of parameters in a linear equation of groundwater flow. *Water Resources Research*, 11(4):581–588, 1975.
- [40] C. Roth. *Contribution de la géostatistique à la résolution du problème inverse en hydrogéologie*. Thèse de docteur en géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 1995. Documents du BRGM 241.
- [41] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [42] B. Sagar, S. Yakowitz, and L. Duckstein. A direct method for the identification of the parameters of dynamic nonhomogeneous aquifers. *Water Resources Research*, 11(4):563–570, 1975.
- [43] G. Schneebeli. *Hydraulique Souterraine*. Eyrolles, Paris, 1966.
- [44] A. Tikhonov et V. Arsénine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Mir, Moscou, 1976.
- [45] G. Wahba. Ill posed problems : Numerical and statistical methods for mildly, moderately and severely illposed problems with noisy data. Technical Report 595, University of Wisconsin, Madison, 1980.
- [46] W. W. G. Yeh. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology : the inverse problem. *Water Resources Research*, 22(2):95–108, 1986.
- [47] W. W. G. Yeh and Y. S. Yoon. A systematic optimization procedure for the identification of inhomogeneous aquifer parameters. *Advances in Groundwater Hydrology*, pages 72–82, 1976.