

# THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

JEAN-PIERRE CHIAPALE

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CARACTÈRES STATISTIQUES DES FLUCTUATIONS LONGITUDINALES DE VITESSE ET DE TEMPÉRATURE DANS UN ÉCOULEMENT TURBULENT DE COUCHE LIMITE

Soutenu le 21 juin 1974, devant la Commission d'Examen

Jury	}	MM. A. FAVRE	}	Président
		G. BODIOU		Examineurs
		R. DUMAS		
		R.J. BOUCHET		Invité

Travail effectué à l'Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence  
de la Faculté des Sciences de Marseille  
Laboratoire associé du C.N.R.S.

Enregistrée aux archives originales du centre de documentation du C.N.R.S. sous le n°

PATH5

Bibliothèque  
I.N.R.A. - P.S.H.  
Unité Plantes et Systèmes  
de Culture Horticoles - Bât. B  
Site Agroparc  
F. 84914 AVIGNON Cédex 9  
FRANCE

26 DÉC 2002

# THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

JEAN-PIERRE CHIAPALE

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CARACTÈRES STATISTIQUES DES FLUCTUATIONS LONGITUDINALES DE VITESSE ET DE TEMPÉRATURE DANS UN ÉCOULEMENT TURBULENT DE COUCHE LIMITE

Soutenu le 21 juin 1974, devant la Commission d'Examen

Jury	}	MM. A. FAVRE	}	Président
		G. BODIOU		Examineurs
		R. DUMAS		
		R.J. BOUCHET		Invité

Travail effectué à l'Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence  
de la Faculté des Sciences de Marseille  
Laboratoire associé du C.N.R.S.

Bibliothèque  
I.N.R.A. - P.S.H.  
Unité Plantes et Systèmes  
de Culture Horticoles - Bât. B  
Site Agroparc  
F. 84914 AVIGNON Cédex 9  
FRANCE

Enregistrée aux archives originales du centre de documentation du C.N.R.S. sous le n°

PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E.R. Scientifiques)

Professeurs titulaires

MM. BIZOUARD Michel	Physique
BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM. BODIOU Georges	Mathématiques appliquées
BODOT Aubert	Chimie
BONNEAU Marcel	Mathématiques
CADILHAC Michel	Physique
CARPENI Georges	Chimie
CASAL Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
Mlle CLARION Claire	Mécanique des Fluides
MM. DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
DOUCET Yves	Physique
FAVRE Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
FEHRENBACH Charles	Astronomie
FOURES Léonce	Mathématiques
FRAISSE Roland	Mathématiques
Mme FURNESTIN Marie-Louise	Biologie animale
MM. GIRARDIE Adrien	Zoologie
GOVERNET Claude	Géologie appliquée
HERVE Jacques	Electronique
HUGON Maurice	Psycho-physiologie
JULG André	Chimie théorique
LAFFITTE Marc	Chimie
MALE Damien	Physique
MANDELBROJT Jacques	Physique
MARCHIS-MOUREN Guy	Chimie biologique
MERIGOUX Roger	Physique industrielle
NAUDET Maurice	Chimie des corps gras
NEGRE Robert	Biologie végétale
SIMON Claude	Physiologie animale
SCOURIAU Jean-Marie	Méthodes mathématiques de la physique
Mme TAXY Suzanne	Géologie historique
MM. VALENSI Jacques	Mécanique expérimentale des fluides
VISCONTI Antoine	Physique théorique

Professeurs sans chaire

MM. BOREL Fernand	Techniques mathématiques de la physique
BOUDET Roger	Mathématiques
Mle CATZIGRAS France	Géologie historique
Mle CHANDEBOIS Rosine	Biologie animale
M. COMBET Serge	Chimie
Mme DELACHE Solange	Mathématiques
MM. FEUGEAS Claude	Chimie
FOUGEREAU Michel	Biochimie
GILLET André	Mathématiques
GUENOCHÉ Henri	Mathématiques appliquées
GUERMEUR Robert	Physique
HALBWACHS Francis	Physique
HENNEQUIN Jacques	Electronique
MANUCEAU Jérôme	Mathématiques
MERDY Henri	Physique
Mle PICHENOT Mathilde	Biologie végétale
M. SARDA Louis	Biochimie
Mme SIRUGUE Madeleine	Physique
M. TACHOIRE Henri	Chimie

Maîtres de conférences

MM. BELAICH Jean-Pierre	Microbiologie
BENARROCHE Marcel	Physique
BENLIAN David	Chimie de coordination
CASALOT André	Chimie
CRESP Jean	Biologie animale
DELAAGE Michel	Biochimie
Mle DETRAZ Jacqueline	Mathématiques
MM. FARDOUX Gérard	Mathématiques
LAVAGNE André	Biologie végétale
MARTINET Bernard	Mathématiques
MOULINS Maurice	Biologie végétale
PUJOL Louis	Chimie
PUJOL Rémy	Psycho-physiologie
SOUBLIN Jean-Pierre	Mathématiques
STREIFF Roland	Chimie

Chargés d'enseignement

M. DELEUIL Roger	Physique
------------------	----------

A ma femme

A mes parents

Témoignage d'affection

## REMERCIEMENTS

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude de la structure fine de la turbulence entreprise à l'Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence sous la direction de Monsieur le Professeur FAVRE.

Monsieur FAVRE, Directeur de l'IMST, a accepté de diriger ce travail et m'a permis de le réaliser dans le cadre de son laboratoire. J'ai pu bénéficier d'un entourage tant intellectuel que matériel particulièrement favorable. Qu'il me soit permis ici de lui exprimer ma plus vive reconnaissance.

Monsieur DUMAS, Directeur Adjoint de l'IMST, a été à l'origine de cette étude. Il en a constamment dirigé l'exécution et il m'a éclairé de ses conseils. De plus, sa connaissance de la structure de la turbulence a contribué à ma formation personnelle, tout en créant les bases d'une collaboration. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma plus sincère gratitude.

Monsieur ASTIER a pris une part prépondérante en ce qui concerne les appareillages électroniques. Je le prie d'accepter mes plus vifs remerciements.

Mes remerciements iront également à l'ensemble des chercheurs et du personnel administratif et technique de l'IMST auprès desquels j'ai toujours trouvé un accueil amical.

Ce travail n'aurait pas été possible sans la compréhension bienveillante de M. HALLAIRE, Directeur du Département de Bioclimatologie de l'Institut National de la Recherche Agronomique, et de M. BOUCHET, Directeur de Recherches. Je suis heureux de pouvoir les remercier ici.

Je tiens également à remercier vivement M. DAMAGNEZ, Directeur de la Station de Bioclimatologie, qui m'a facilité la tâche pour mener à bien l'exécution de cette étude, et Mme AYMARD et M. FERREN qui, pour la frappe du manuscrit et l'exécution des dessins, ont directement participé à ce travail.

## SOMMAIRE

Quelques caractères non gaussiens des fluctuations turbulentes cinématiques et thermiques ont été précisés au sein de la couche-limite qui se développe sur une plaque plane lisse.

Les mesures de fonction de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et de température permettent de constater que ce sont les grandes amplitudes qui diffèrent le plus d'une loi de Gauss. Les mesures de fluctuations filtrées par filtre passe-haut ou passe-bas mettent en évidence que la partie haute-fréquence du signal est très dissymétrique et non gaussienne. Ce même résultat est obtenu en dérivant le signal turbulent.

L'analyse du nombre de passages par un seuil donné prouve que les fluctuations de grandes amplitudes diffèrent de la loi de Gauss. Une étude du déroulement temporel du signal turbulent a été également entreprise.

Les mesures de probabilités liées nous ont permis d'analyser la contribution des différentes amplitudes du signal turbulent au coefficient de corrélation. La liaison même en introduisant un décalage spatial et temporel reste gaussienne.

Les corrélations spatio-temporelles triples différentes de zéro, contrairement à un phénomène gaussien, ont été mesurées, ainsi que les probabilités liées du terme triple. La corrélation triple est liée à l'ensemble des amplitudes du signal car le décalage spatial introduit revient à ne conserver que les grandes structures turbulentes.

Enfin, l'enregistrement des corrélations triples instantanées nous a permis de mesurer la fréquence d'occurrence des "bursts" en fonction de la distance à la paroi, et de confirmer ainsi la validité du modèle de perturbation de KLINE au sein de cette couche limite turbulente.

TABLE DES MATIERES

- Remerciements
- Sommaire
- Liste des symboles
- Listes des figures

1. INTRODUCTION

2. PARTIE THEORIQUE

- 2.1. Equations aux corrélations spatio-temporelles des fluctuations de vitesse
- 2.2. Calcul des différents moments à partir de la fonction de répartition
  - 2.2.1. Cas d'une variable
  - 2.2.2. Cas de deux variables
    - 2.2.2.1. Calcul des différents moments
    - 2.2.2.2. Cas particulier : moment d'ordre deux, - mesure du coefficient de corrélation
  - 2.2.3. Calcul de la fonction de densité de probabilité du produit de deux variables aléatoires
  - 2.2.4. Cas de trois variables : calcul des différents moments à partir de la fonction de répartition
- 2.3. Calcul numérique de la fonction de répartition de la loi de Gauss à deux variables
- 2.4. Corrections à apporter pour tenir compte du bruit de fond
  - 2.4.1. Cas d'une variable
  - 2.4.2. Correction du bruit de fond dans le cas de deux variables

## 4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

### 3. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

- 3.1. Soufflerie et veine d'expérience
- 3.2. Anémomètres à fil chaud
  - 3.2.1. Généralités
  - 3.2.2. Fonctionnement à température constante
  - 3.2.3. Fonctionnement à intensité constante
- 3.3. Appareil de mesure de la fonction de répartition
  - 3.3.1. Cas d'une seule variable
  - 3.3.2. Cas de deux variables
- 3.4. Enregistreur magnétique
- 3.5. Chaîne de mesure
  - 3.5.1. Enregistrement des signaux aléatoires
  - 3.5.2. Lecture des enregistrements
  - 3.5.3. Mesure des probabilités liées
    - 3.5.3.1. Corrélacion double
    - 3.5.3.2. Corrélacion triple
  - 3.5.4. Enregistrement des corrélacions instantanées

### 4. RESULTATS EXPERIMENTAUX

- 4.1. Fonctions de répartition d'une variable
  - 4.1.1. Fil annulaire (fil amont)
    - 4.1.1.1. Fonction de répartition des fluctuations de vitesse
    - 4.1.1.2. Fonction de répartition des fluctuations thermiques
    - 4.1.1.3. Fonction de répartition des fluctuations de vitesse filtrées
    - 4.1.1.4. Fonction de répartition des fluctuations de vitesse dérivées
  - 4.1.2. Fil droit (fil aval)
    - 4.1.2.1. Fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations de température
    - 4.1.2.2. Développement en série de Gram-Charlier
- 4.2. Autres caractéristiques du signal turbulent
  - 4.2.1. Nombre de passages par un seuil fixé
  - 4.2.2. Autocorrélacion des créneaux aléatoires

4.3. Fonctions de répartition à deux variables

4.3.1. Courbes d'autocorrélation et d'inter-corrélation

4.3.2. Cas de l'autocorrélation

4.3.2.1. Temps retard nul

4.3.2.2. Temps retard différent de zéro

4.3.3. Cas de la corrélation spatio-temporelle

4.3.3.1. Différents temps retards

4.3.3.2. Fonction de répartition du produit instantané

4.4. Fonction de répartition à trois variables

4.4.1. Courbes de corrélation spatio-temporelles triple

4.4.1.1. Corrélation triple temporelle sans décalage d'espace

4.4.1.2. Corrélation spatio-temporelle triple

4.4.2. Fonctions de répartition du terme triple

4.5. Enregistrement des corrélations spatio-temporelles doubles et triples instantanées

4.5.1. Corrélations spatio-temporelles doubles

4.5.1.1. Enregistrement pour différents temps retards

4.5.1.2. Comparaisons entre le signal direct et la corrélation spatio-temporelle double

4.5.2. Corrélations spatio-temporelles triples instantanées

4.5.2.1. Corrélations spatio-temporelles triples instantanées pour différents temps retards

4.5.2.2. Terme triple instantané en fonction de la distance à la paroi

4.5.2.2.1. Fréquence d'occurrence des "bursts"

4.5.2.2.2. Distribution des intervalles de temps entre "bursts"

5. CONCLUSION

6. Annexe 1

7. BIBLIOGRAPHIE

LISTE DES SYMBOLES

2.1.1.

- M nombre de Mach
- $\rho$  masse spécifique de l'air
- f grandeur turbulente
- $\bar{f}$  grandeur macroscopique
- f' grandeur fluctuante
- $x_\alpha$  axes de coordonnées de référence
- $P_0$  point de mesure amont
- P(x) point de mesure aval
- t temps courant
- $v_1$  composante longitudinale de vitesse
- $V_1$  valeur macroscopique de la composante longitudinale de vitesse  $V_1 = \overline{v_1}$
- $v'_1$  valeur fluctuante de la composante longitudinale de vitesse
- T décalage temporel
- $X_\alpha$  décalage spatial
- P pression
- $\mu$  coefficient de viscosité moléculaire de l'air
- $\delta_{\alpha\beta}$  tenseur unitaire symétrique de Kronecker
- $Q_{\alpha\beta}$  corrélations spatio-temporelles doubles de vitesse
- $K_\beta$  corrélations spatio-temporelles doubles de vitesse et de pression
- $S_{\alpha\gamma, \beta}$  corrélations spatio-temporelles triples de vitesse

2.2.1.

- W variable aléatoire caractéristique du champ turbulent
- w valeur de cette variable aléatoire
- F(w) fonction de densité de probabilité
- $m_n$  moment d'ordre n
- $P[\overline{W} > \overline{w}]$  probabilité pour que la variable aléatoire W soit supérieure à w
- $\zeta$  variable réduite
- $\sigma(w)$  écart type

2.2.2.

- (X, Y) couple de deux variables aléatoires
- F(x, y) fonction de répartition du couple de variables aléatoires (x, y)
- f(x,y) fonction de densité de probabilité du couple de variables aléatoires(x,y)
- $m_{pq}$  moment d'ordre p + q
- $P[\underline{X} > x, \underline{Y} > y]$  probabilité pour que la variable aléatoire X soit supérieure à la valeur x et que la variable aléatoire Y soit supérieure à la valeur y
- $\rho$  coefficient de corrélation
- $\Phi(x)$  fonction de répartition gaussienne
- $\phi(x)$  fonction de densité de probabilité gaussienne
- $\zeta$  variable muette
- L(X) courbe dont l'intégrale donne le coefficient de corrélation

2.2.3.

- (X, Y) couple de variables aléatoires
- $\phi(x,y)$  fonction de densité de probabilité du couple de variables aléatoires(X,Y)
- Z variable aléatoire égale au produit des deux variables aléatoires X et Y
- H(q) fonction de répartition de la variable aléatoire Z
- h(q) fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire z
- $\rho$  coefficient de corrélation de deux variables aléatoires gaussiennes
- $K_0$  fonction de Bessel modifiée du second ordre, d'ordre zéro
- $g_0(x)$  fonction égale à  $g_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} K_0(t) dt$

2.2.4.

- (X, Y) couple de variables aléatoires
- Z variable aléatoire égale au carré de la variable aléatoire X
- g(q,y) fonction de densité de probabilité du couple de variables aléatoires(Z,Y)
- $P[\underline{Z} > q, \underline{Y} < y]$  probabilité pour que la variable aléatoire Z soit supérieure à la valeur q et que la variable aléatoire Y soit inférieure à la valeur y
- $\rho$  coefficient de corrélation de deux variables aléatoires gaussiennes

- $\phi(q)$  fonction de densité de probabilité gaussienne
- $\Phi(y)$  fonction de répartition gaussienne
- $f(u,v)$  fonction de densité de probabilité du couple de variables aléatoires gaussiennes
- $m_{nm}$  moment d'ordre  $n + m$

2.3.

- $H_n(x)$  polynôme d'Hermite d'ordre  $n$
- $f(x,y)$  fonction de densité de probabilité du couple de variables aléatoires  $(X,Y)$  gaussiennes
- $\rho$  coefficient de corrélation du couple de variables aléatoires gaussiennes
- $\Phi(x)$  fonction de répartition gaussienne
- $P[\underline{X} < x_1, \underline{Y} < y_1]$  probabilité pour que la variable aléatoire  $X$  soit inférieure à la valeur  $x$  et que la variable aléatoire  $Y$  soit inférieure à la valeur  $y$
- $\alpha_n(x)$  polynômes définis par la relation  $\alpha_n(x) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \rho^{\frac{n}{2}} H_n(x)$

2.4.1.

- $e$  signal total  $e = w + \epsilon$
- $w$  signal turbulent
- $\epsilon$  parasite du signal turbulent
- $q$  rapport signal sur bruit
- $\underline{w}$  variable  $w$  centrée  $\underline{w} = w - \bar{w}$
- $\bar{w}$  valeur moyenne de  $w$
- $\sigma$  écart type des fluctuations
- $f$  fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$
- $g$  fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y$
- $h$  fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $S = X + Y$

### 2.4.2.

$e_{\alpha}$	signal total $e_{\alpha} = w_{\alpha} + \epsilon_{\alpha}$
$w_{\alpha}$	signal turbulent
$\epsilon_{\alpha}$	parasite du signal turbulent
$\frac{e_1}{\bar{e}_1}$	variable $e_1$ centrée : $\frac{e_1}{\bar{e}_1} = e_1 - \bar{e}_1$
$\bar{e}_1$	valeur moyenne de $e_1$
$q_{\alpha}$	rapport signal sur bruit

### 3.1.

Z	distance au bord d'attaque
$\delta$	épaisseur conventionnelle de la couche limite
Ve	vitesse générale hors de la couche limite
$\delta_*$	épaisseur de déplacement
$\delta_{**}$	épaisseur de quantité de mouvement
H	paramètre de forme
$R_{\delta}$	nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de couche limite
$R_{\delta_*}$	nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement
$R_{\delta_{**}}$	nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement
Cf	coefficient de frottement local à la paroi
$v_*$	vitesse de frottement
$y^+$	distance à la paroi rapportée à la distance de frottement
St	nombre de Stanton
Ri	nombre de Richardson
$\frac{\Delta p}{\Delta X_1}$	gradient longitudinal de pouvoir statique
$V^+$	vitesse moyenne rapportée à la vitesse de frottement
Pr	nombre de Prandtl visqueux
$\theta^+$	défini par la relation $\theta^+ = \frac{(\theta_o - \bar{\theta})}{(\theta_o - \theta_e)} \frac{\sqrt{Cf/2}}{St}$
$\theta_e$	température hors de la couche limite
$\theta_o$	température à la paroi
$\bar{\theta}$	température moyenne

### 3.2.

Z	distance au bord d'attaque
$X_1$	distance des deux sondes suivant l'écoulement général du fluide
y	distance à la paroi
$\delta$	épaisseur conventionnelle de la couche limite
$e'$	fluctuation de tension aux bornes du fil chaud
$v'_1$	fluctuation longitudinale de vitesse
$V_1$	vitesse générale
$\theta'$	fluctuation de température
$\theta_p$	température à la paroi
$\theta_e$	température à l'extérieur de la couche limite
$\alpha$	coefficient de sensibilité aux fluctuations longitudinales de vitesse
$\beta$	coefficient de sensibilité aux fluctuations thermiques
r	rapport des coefficients de sensibilité $r = \alpha/\beta$

#### 3.3.1.

$\lambda$	valeur du seuil
$X(t)$	variable aléatoire dépendant du temps t
$Y_\lambda(t)$	indicatrice de dépassement du seuil $\lambda$ par la variable aléatoire $X(t)$
$\Delta T_1$	temps durant lequel le signal $X(t)$ est supérieur à la valeur du seuil $\lambda$
T	intervalle de temps
$P \overline{X(t) > \lambda}$	probabilité pour que la variable aléatoire X soit supérieure ou égale à la valeur $\lambda$
$\sigma$	écart type des fluctuations

#### 3.3.2.

$X_1(t)$	variable aléatoire dépendant du temps t
$P \overline{X_1(t) > \lambda_1, X_2(t) > \lambda_2}$	probabilité pour que la variable aléatoire $X_1(t)$ soit supérieure ou égale à la valeur $\lambda_1$ et que la variable aléatoire $X_2(t)$ soit supérieure ou égale à la valeur $\lambda_2$
$Y_{\lambda_1}(t)$	indicatrice de dépassement du seuil $\lambda_1$ par la variable aléatoire $X_1(t)$

3.5.3.

$\bar{u}$  vitesse générale  
 $P_0$  point de mesure amont  
 $P$  point de mesure aval  
 $X_1$  distance des deux points  $P_0$  et  $P$  suivant l'écoulement général  
 $y$  distance à la paroi  
 $u'_0(t)$  fluctuation longitudinale de vitesse au point  $P_0$   
 $u'(t)$  fluctuation longitudinale de vitesse au point  $P$   
 $u, v$  signaux aléatoires  
 $a$  tension continue résiduelle  
 $R_{1,11}(\zeta, X_1)$  coefficient de corrélation spatio-temporelle triple  
 $\zeta$  temps retard

4.1.1.

$y^+$  distance à la paroi rapportée à la distance de frottement  
 $\text{Prob}[\overline{U} > u'_0]$  probabilité pour que la variable aléatoire  $U$  soit supérieure à la valeur  $u'_0$   
 $\sigma$  écart type des fluctuations  
 $F$  coefficient d'aplatissement  
 $S$  facteur de dissymétrie  
 $R_3(0)$  valeur de la corrélation temporelle triple pour le temps retard nul  
 $I_\zeta$  échelle temporelle intégrale  
 $u'_B$  signal turbulent pour la bande de fréquence 0-200 Hz  
 $u'_H$  signal turbulent pour la bande de fréquence 100-5000 Hz  
 $\epsilon$  dissipation de la turbulence par unité de masse  
 $\text{Pr}[\overline{U} < u'_0]$  probabilité des amplitudes positives du signal filtré

4.1.2.

$\phi(x)$  densité de probabilité de la loi normale  
 $f(x)$  densité de probabilité expérimentale  
 $H_n(x)$  polynôme d'Hermite d'ordre  $n$   
 $A_n$  coefficient d'ordre  $n$   
 $\mu_1$  moment d'ordre  $i$  du développement en série de Gram-Charlier  
 $\mu_j$  moment d'ordre  $j$  expérimental  
 $\Phi(x)$  fonction de répartition normale

4.2.

- $N_\lambda$  nombre de passages par la valeur  $\lambda$   
 $\psi(\zeta)$  autocorrélation non normalisée de la variable aléatoire  $u(t)$   
 fréquence équivalente  
 $N_0$  nombre de passages à zéro  
 $Y_\lambda(t)$  indicatrice de dépassement du seuil  $\lambda$   
 $P_\lambda$  probabilité pour que la variable  $X(t)$  soit supérieure à  $\lambda$   
 $t_i$  temps élémentaire  
 $T$  temps total d'observation  
 $\overline{t_\lambda}$  intervalle de temps moyen entre deux passages consécutifs par la valeur  $\lambda$   
 $R(\zeta)$  covariance du signal  $Y_0(t)$   
 $\rho(\zeta)$  autocorrélation du signal  $u(t)$   
 $\Gamma(\zeta)$  autocorrélation de  $Y_0(t)$   
 $X(t)$  signal turbulent  $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$   
 $\sigma_j$  écart type des fluctuations du signal  $X_j(t)$   
 $I_\zeta$  échelle intégrale temporelle

4.3.

- $P \overline{U > u, V > v}$  probabilité liée pour que la variable  $U$  soit supérieure à la valeur  $u$  et que  $V$  soit supérieure à  $v$   
 $R_{1,1}$  corrélation double spatio-temporelle  
 $T_m$  temps optimum  
 $T_c$  temps compensateur  
 $\lambda_i$  seuil  
 $\phi(x)$  fonction de densité de probabilité normale  
 $\rho$  coefficient de corrélation du couple de variables aléatoires gaussiennes  
 $Q$  variable aléatoire égale au produit de  $u'_0(t)u'(t)$   
 $P \overline{Q > q}$  probabilité pour que la variable  $Q$  soit supérieure à la valeur  $q$

4.4.

- $R_3(\zeta)$  corrélation triple temporelle .
- $R(\zeta)$  autocorrélation temporelle du signal  $u(t)$
- $A_3$  coefficient
- $I_\zeta$  échelle intégrale temporelle
- $R_{11,1}$  corrélation spatio-temporelle triple
- $R_{1,11}$  corrélation spatio-temporelle triple
- $T_c$  temps compensateur
- $T_c'$  temps retard
- $T_m$  temps optimal des corrélations doubles
- $P[\overline{U > u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t+\zeta)}]$  probabilité liée pour que la variable  $U$  soit supérieure à la valeur  $u'_0(t)$  et que  $V$  soit supérieure à  $u'^2(t+\zeta)$

4.5.

- $n_+$  nombre de pics d'amplitudes positives
- $n_-$  nombre de pics d'amplitudes négatives
- $\overline{T}$  temps moyen séparant deux pics de grandes amplitudes
- $\delta^*$  épaisseur de déplacement
- $u_*$  vitesse de frottement
- $R_{\delta^{**}}$  nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement

LISTE DES FIGURES

- 3.1.1. Veine d'expérience
- 3.1.2. Profils de vitesse et de température -  $V^+$  et  $\frac{\theta^+}{Pr}$  en fonction de  $y^+$
- 3.2.1. Caractéristiques du fil chaud. Tension E en volts avec et sans linéariseur en fonction de la vitesse V en m.s<sup>-1</sup>
- 3.5.1. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour l'enregistrement
  - a) des fluctuations de vitesse
  - b) des fluctuations de température
- 3.5.2. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour la lecture des enregistrements
- 3.5.3. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour la mesure des fonctions de répartition et de la corrélation spatio-temporelle double
- 3.5.4. Bande passante de la chaîne de mesure avec et sans enregistreur. Rapport  $(E_A/E_B)^2$  en fonction de la fréquence n
- 3.5.5. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour la mesure des fonctions de répartition et de la corrélation spatio-temporelle triple
- 3.5.6. Bande passante de la chaîne de mesure pour la mesure de la corrélation spatio-temporelle triple. Rapport  $(E_A/E_B)^2$  en fonction de la fréquence n
- 3.5.7. Influence de la bande passante sur la corrélation spatio-temporelle triple. Courbe  $R_{1,11}(\zeta, X_1)$  en fonction du temps retard  $\zeta$  pour trois valeurs de la bande passante
- 3.5.8. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental d'enregistrement des corrélations spatio-temporelles triples
- 4.1.1. Fonction de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations thermiques. Fil amont. Courbes  $P \frac{\overline{U}}{u'_{o-}}$ ,  $P \frac{\overline{U}}{u'_{o-}}$  en fonction de  $u'_{o-}$ ,  $P \frac{\overline{\theta}}{\theta'_{o-}} > \theta'_{o-}$  et  $P \frac{\overline{\theta}}{\theta'_{o-}} < \theta'_{o-}$  en fonction de  $\theta'_{o-}$ .

- 4.1.2. Moment d'ordre deux des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'_0 P_{\overline{U}} > u'_{0\overline{U}}$  et  $u'_0 P_{\overline{U}} < u'_{0\overline{U}}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.3. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'^2_0 P_{\overline{U}} > u'_{0\overline{U}}$  et  $u'^2_0 P_{\overline{U}} < u'_{0\overline{U}}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.4. Moment d'ordre quatre des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'^3_0 P_{\overline{U}} > u'_{0\overline{U}}$  et  $u'^3_0 P_{\overline{U}} < u'_{0\overline{U}}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.5. Moment d'ordre cinq des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'^4_0 P_{\overline{U}} > u'_{0\overline{U}}$  et  $u'^4_0 P_{\overline{U}} < u'_{0\overline{U}}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.6. Spectre d'énergie des fluctuations de température. Courbe,  $nF_{\theta}(n)$  en fonction de la fréquence  $n$
- 4.1.7. Moment d'ordre deux des fluctuations thermiques. Fil amont. Courbes  $\theta_0 P_{\overline{\theta}} > \theta_{0\overline{\theta}}$  et  $\theta_0 P_{\overline{\theta}} < \theta_{0\overline{\theta}}$  en fonction de  $\theta_0$
- 4.1.8. Moment d'ordre trois des fluctuations thermiques. Fil amont. Courbes  $\theta_0^2 P_{\overline{\theta}} > \theta_{0\overline{\theta}}$  et  $\theta_0^2 P_{\overline{\theta}} < \theta_{0\overline{\theta}}$  en fonction de  $\theta_0$
- 4.1.9. Moment d'ordre quatre des fluctuations thermiques. Fil amont. Courbes  $\theta_0^3 P_{\overline{\theta}} > \theta_{0\overline{\theta}}$  et  $\theta_0^3 P_{\overline{\theta}} < \theta_{0\overline{\theta}}$  en fonction de  $\theta_0$
- 4.1.10. Moment d'ordre cinq des fluctuations thermiques. Fil amont. Courbes  $\theta_0^4 P_{\overline{\theta}} > \theta_{0\overline{\theta}}$  et  $\theta_0^4 P_{\overline{\theta}} < \theta_{0\overline{\theta}}$  en fonction de  $\theta_0$
- 4.1.11. Bande passante des deux filtres en série. Rapport  $(E_A/E_B)^2$  en fonction de la fréquence  $n$  pour trois valeurs de la bande passante
- 4.1.12. Spectres d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations de température. Courbes  $F(n)$  en fonction de la fréquence  $n$
- 4.1.13. Spectres d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse en fonction de la bande passante de la chaîne de mesure. Courbes  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$
- 4.1.14. Fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées. Courbes  $P_{\overline{U}} > u'_{0\overline{U}}$  et  $P_{\overline{U}} < u'_{0\overline{U}}$  pour trois bandes passantes en fonction de  $u'_0$

- 4.1.15. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées (0-200 Hz). Courbes  $u'_0{}^2 P/\overline{U} > \overline{u'_0}$  et  $u'_0{}^2 P/\overline{U} < \overline{u'_0}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.16. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées (100-5000 Hz). Courbes  $u'_0{}^2 P/\overline{U} > \overline{u'_0}$  et  $u'_0{}^2 P/\overline{U} < \overline{u'_0}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.17. Bande passante du dérivateur. Rapport  $(E_A/E_B)^2$  en fonction de la fréquence  $n$
- 4.1.18. Fonction de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Courbes  $P/\overline{U} > \overline{u'_0}$  et  $P/\overline{U} < \overline{u'_0}$  en fonction de  $\overline{u'_0}$
- 4.1.19. Fonction de répartition du carré des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Comparaison avec la loi log-normale. Courbe  $P/\overline{\zeta} < \overline{\zeta_0}$  en fonction de  $\zeta = \text{Ln} \left( \frac{\partial u'}{\partial t} \right)^2$
- 4.1.20. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Courbes  $u'_0{}^2 P/\overline{\theta} > \overline{u'_0}$  et  $u'_0{}^2 P/\overline{U} < \overline{u'_0}$  en fonction de  $\overline{u'_0}$
- 4.1.21. Moment d'ordre quatre des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Courbes  $u'_0{}^3 P/\overline{\theta} > \overline{u'_0}$  et  $u'_0{}^3 P/\overline{U} < \overline{u'_0}$  en fonction de  $\overline{u'_0}$
- 4.1.22. Fonction de répartition des amplitudes positives des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées (100-5000 Hz). Courbe  $P^* \overline{U} < \overline{u'_0}$  en fonction de  $u'_0$
- 4.1.23. Profil de vitesse moyenne. Influence du sillage du fil amont sur le fil aval. Fil amont en plaque  $X_1 = 75$  mm. Courbe  $V/V_e$  en fonction de la distance  $y$  à la paroi
- 4.2.1. Nombre et durée moyenne de passage par un niveau  $\lambda$  donné des fluctuations longitudinales de vitesse. Courbes  $N$  et  $\overline{t}/E_0$  en fonction du seuil  $\lambda$ . Comparaison avec la loi de Gauss
- 4.2.2. Autocorrélation temporelle de l'indicatrice de dépassement d'un seuil  $\lambda$  des fluctuations longitudinales de vitesse. Courbes  $R(\zeta)$  en fonction de  $\zeta$  pour trois seuils  $\lambda$  donnés
- 4.2.3. Comparaison de la courbe d'autocorrélation temporelle expérimentale avec la courbe théorique. Courbes  $R(\zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$
- 4.2.4. Comparaison du spectre d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse avec le spectre théorique. Courbes  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$
- 4.3.1. Courbes d'autocorrélation temporelle et de corrélation spatio-temporelle. Courbes  $R(\zeta)$  et  $R_{1,1}(\zeta, X_1)$  en fonction du temps retard  $\zeta$

- 4.3.2. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} > u'(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 0$  ms
- 4.3.3. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} < u'(t), V < u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 0$  ms
- 4.3.4. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} > u'(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  et  $P \overline{U} < u'(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 1,3$  ms
- 4.3.5. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} < u'(t), V < u'(t+\zeta) \overline{V}$  et  $P \overline{U} > u'(t), V < u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 1,3$  ms
- 4.3.6. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} > u'(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 17,6$  ms
- 4.3.7. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} < u'(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 17,6$  ms
- 4.3.8. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} < u'(t), V < u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 17,6$  ms
- 4.3.9. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} > u'(t), V < u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 17,6$  ms
- 4.3.10. Courbes intégrales donnant le coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t+\zeta)$ .  $\zeta = 0, 1,3$  ms et  $17,6$  ms. Comparaison avec une loi de Gauss
- 4.3.11. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} > u'_0(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$ .  $\zeta = 0$  ms
- 4.3.12. Réseau des probabilités liées  $P \overline{U} < u'_0(t), V > u'(t+\zeta) \overline{V}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$ .  $\zeta = 0$  ms

- 4.3.13. Réseau des probabilités liées  $P_{\overline{U} < u'_0(t), \overline{V} < u'(t+\zeta)}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 0$  ms
- 4.3.14. Réseau des probabilités liées  $P_{\overline{U} > u'_0(t), \overline{V} < u'(t+\zeta)}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 0$  ms
- 4.3.15. Réseau des probabilités liées  $P_{\overline{U} > u'_0(t), \overline{V} > u'(t+\zeta)}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms
- 4.3.16. Réseau des probabilités liées  $P_{\overline{U} < u'_0(t), \overline{V} > u'(t+\zeta)}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms
- 4.3.17. Réseau des probabilités liées  $P_{\overline{U} < u'_0(t), \overline{V} < u'(t+\zeta)}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms
- 4.3.18. Réseau des probabilités liées  $P_{\overline{U} > u'_0(t), \overline{V} < u'(t+\zeta)}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms
- 4.3.19. Courbes intégrales donnant le coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude  $u'(t+\zeta)$ .  $\zeta = 0$  et  $7,5$  ms. Comparaison avec une loi de Gauss
- 4.3.20. Fonction de répartition du produit instantané  $u'_0(t) u'(t)$ . Courbes  $P_{\overline{Q} > q}$  et  $P_{\overline{Q} < q}$  en fonction de  $q$
- 4.3.21. Moment d'ordre deux du produit instantané  $u'_0(t) u'(t)$ . Courbes  $qP_{\overline{Q} > q}$  et  $qP_{\overline{Q} < q}$  en fonction de  $q$
- 4.3.22. Moment d'ordre trois du produit instantané  $u'_0(t) u'(t)$ . Courbes  $q^2 P_{\overline{Q} > q}$  et  $q^2 P_{\overline{Q} < q}$  en fonction de  $q$

- 4.4.1. Courbes de corrélation temporelle triple. Courbes  $R_3(\zeta)$  pour les deux fils chauds amont et aval en fonction du temps retard  $\zeta$
- 4.4.2. Courbes de corrélation temporelle triple et double en fonction du temps retard  $\zeta$ . Modèle de perturbation
- 4.4.3. Comparaison des courbes de corrélation temporelles en fonction du temps retard  $\zeta$ . Comparaison avec les mesures de Van ATTA et STEWART
- 4.4.4. Courbes de corrélation spatio-temporelle triple  $R_{1,11}(\zeta)$  et  $R_{11,1}(\zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$
- 4.4.5. Comparaison des courbes de corrélation spatio-temporelle triple avec l'hypothèse de Taylor. Courbes  $R_{11,1}(\zeta)$  et  $R_{1,11}(2T'_c - \zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$
- 4.4.6. Comparaison des courbes de corrélation temporelle triple et de corrélation spatio-temporelle triple avec l'hypothèse de Taylor. Courbes  $R_3(\zeta)$  pour les deux fils chauds et  $R_{1,11}(\zeta - T_c)$  en fonction du temps retard  $\zeta$
- 4.4.7. Comparaison des courbes de corrélation spatio-temporelle triple et double. Courbes  $R_{1,11}(\zeta)$  et  $R_{1,1}(\zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$
- 4.4.8. Réseau des probabilités liées  $P[\overline{U > u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t)}]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'^2(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'_0 > 0$
- 4.4.9. Réseau des probabilités liées  $P[\overline{U < u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t)}]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'^2(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'_0 < 0$
- 4.4.10. Réseau des probabilités liées  $P[\overline{U > u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t+\zeta)}]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'^2(t+\zeta)$  pour les différentes valeurs de  $u'_0 > 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms
- 4.4.11. Réseau des probabilités liées  $P[\overline{U < u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t+\zeta)}]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'^2(t+\zeta)$  pour les différentes valeurs de  $u'_0 < 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms
- 4.4.12. Courbes intégrales  $\int_0^{+\infty} P[\overline{U > u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t+\zeta)}] d(u'^2)$  et  $\int_{-\infty}^0 P[\overline{U < u'_0(t)}, \overline{V > u'^2(t+\zeta)}] d(u'^2)$  donnant le moment d'ordre 3.  $\zeta = 0$  ms et  $\zeta = 7,5$  ms

- 4.5.1. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 0$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.2. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.3. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 17,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.4. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.5. Comparaison des enregistrements du signal direct de la corrélation spatio-temporelle pour un temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Courbes  $u'_0(t)$  et  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.6. Comparaison des enregistrements du signal direct et de la corrélation spatio-temporelle pour un temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Courbes  $u'_0(t)$  et  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.7. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard  $\zeta = - 3,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'^2_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.8. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard nul. Courbe  $u'_0(t) u'^2_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.9. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard  $\zeta = + 3,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'^2_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.10. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard  $\zeta = + 10,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'^2_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.11. Comparaison des enregistrements des corrélations spatio-temporelles triple et double pour un temps retard nul. Courbes  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  et  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.12. Comparaison des enregistrements des corrélations spatio-temporelles triple et double pour un temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Courbes  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  et  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

- 4.5.13. Comparaison des enregistrements des corrélations spatio-temporelle triple et double pour un temps retard nul. Courbes  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  et  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$
- 4.5.14. Fréquence d'occurrence des grandes amplitudes positives et négatives en fonction de la distance à la paroi. Courbes  $n_+$ ,  $n_-$ ,  $V^+$  en fonction de  $y^+$
- 4.5.15. Coefficients de dissymétrie et d'aplatissement en fonction de la distance à la paroi. Courbes  $S$ ,  $F$  et  $U^+$  en fonction de  $y^+$ .
- 4.5.16. Distribution d'intervalles de temps entre "bursts". Courbe  $N/N_{total}$  en fonction du temps  $t$
- 4.5.17. Fonction de répartition des intervalles de temps entre "bursts". Courbe du pourcentage cumulé en fonction du rapport  $t/\bar{t}$ . Comparaison avec la loi log-normale et les travaux de KIM et al (1971)

1 - INTRODUCTION

## 1 - INTRODUCTION

Les travaux théoriques sur les écoulements turbulents, grâce à REYNOLDS et TAYLOR en 1935, se sont engagés dans une direction mettant en oeuvre des termes et des concepts statistiques. C'est pourquoi l'on examine dans un premier temps la distribution des fluctuations de vitesse en un point donné d'un écoulement. Cette fonction de répartition est définie comme étant la probabilité pour que la fluctuation de vitesse considérée prenne une certaine valeur, à n'importe quel instant donné. Les premières mesures de fonction de répartition de fluctuations de vitesse furent effectuées par G.K. BATCHELOR (1953) en aval de grille de turbulence (c'est-à-dire pour une turbulence à peu près homogène et isotrope). Il a constaté que la distribution des fluctuations de vitesse obéissait à une loi approximativement gaussienne. Durant de nombreuses années, les mesures de ces fonctions de répartition étaient peu nombreuses, citons celles de G.K. BATCHELOR (1949), R.W. STEWART (1950) et A.A. TOWNSEND (1956-1959). Par la suite, d'assez nombreux expérimentateurs ont étendu et précisé ces mesures, tels que FRENKIEL (1951), KLEBANOFF (1954-1955), MAC CREADY (1953), COMTE-BELLOT (1959-1965-1966), MILLS, al. (1958), KENNEDY, CORRISIN (1961), JOHNSON (1962), MARCILLAT (1964), DUMAS, MARCILLAT (1966), FRENKIEL, KLEBANOFF (1967), VAN ATTA, CHEN (1968) et ZARIC (1969-1970-1972).

Le coefficient de dissymétrie et d'aplatissement voisins de 0 et de 3 en turbulence homogène et isotrope comme le voudrait la distribution gaussienne, sont très différents de ces deux valeurs en turbulence anisotrope, cas par exemple de la couche limite turbulente.

Toutefois, l'isotropie n'implique pas que le phénomène soit gaussien. Par exemple, les dérivées des fluctuations de vitesses en aval d'une grille de turbulence bien que presque isotropes ne suivent pas une loi normale, mais plutôt pour les grands nombres de Reynolds, une loi log-normale. C'est pourquoi les mesures de distribution statistique sont intéressantes dans les écoulements cisailés près d'une paroi pour expliquer la structure de la turbulence.

Dans une première partie de notre étude, nous avons donc mesuré les fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations thermiques et comparé les résultats expérimentaux à la distribution gaussienne. L'influence de la bande passante sur les fonctions de répartition a été également entreprise afin de déterminer la distribution statistique des différentes échelles qui interviennent dans le phénomène turbulent.

A ces mesures ponctuelles, de nombreux auteurs préfèrent effectuer simultanément des mesures en plusieurs points car la turbulence présente des caractères conservatifs au long du mouvement. Citons l'important travail de A. FAVRE et de ses collaborateurs à l'IMST à partir de 1946 à nos jours (A. FAVRE 1946 à 1969) pour la mesure et l'interprétation des corrélations spatio-temporelles, les mesures de PREM KUMAR, DASH (1970) et VAN ATTA, YEH (1970) de corrélations multiples et les mesures d'échantillonnage conditionné de KOVASNAY (1967-68-69) effectuées à l'aide de plusieurs fils chauds. Tous ces résultats expérimentaux permettent une meilleure analyse de la structure de la couche limite turbulente et d'élaborer des théories sur les écoulements turbulents (DEISSLER (1960-1965), SAVULESCU (1960), STERNBERG (1967), KRAICHNAN (1970)). D'ailleurs, avec des hypothèses restrictives d'homogénéité et d'isotropie en fluide incompressible, on pourrait calculer toutes les corrélations doubles, en introduisant des hypothèses supplémentaires sur les corrélations triples qui interviennent dans les équations. FRENKIEL s'est intéressé depuis quelques années aux distributions statistiques derrière une grille de turbulence afin de déterminer les moments élevés ou de faire des hypothèses sur eux, et de boucler ainsi les équations de NAVIER et STOKES.

C'est pourquoi dans la seconde partie de notre étude, nous avons mesuré les probabilités liées du terme double, soit de l'autocorrélation ou soit de la corrélation spatio-temporelle afin de déterminer la contribution des différentes amplitudes du signal dans le coefficient de corrélation.

Parallèlement à ces mesures en plusieurs points, quelques auteurs essaient soit à partir d'hypothèses sur la distribution statistique (DUTTON, DEAVEN (1969)) en turbulence atmosphérique, ou soit par intégration analogique des équations de NAVIER-STOKES (DREXLER, KROPAC (1968)) de prédire la distribution statistique des fluctuations turbulentes. Nous avons donc essayé d'apporter des renseignements statistiques supplémentaires sur le signal turbulent par exemple le nombre de passages par un seuil donné ou le déroulement temporel de ce signal (les passages par un seuil donné devant obéir à un processus de Poisson).

En plus de ces résultats portant sur les corrélations doubles, nous avons dans une dernière partie mesuré les corrélations spatio-temporelles triples. Ces termes triples interviennent dans les équations générales du fait de leur non-linéarité, et il est donc nécessaire de les mesurer pour établir un bilan de ces équations. Les mesures de probabilités liées du terme triple permettent alors de préciser la contribution des diverses amplitudes du signal turbulent dans le moment d'ordre trois.

L'enregistrement des corrélations spatio-temporelles triples instantanées nous a permis enfin de mieux préciser la structure de l'écoulement turbulent et de déceler une intermittence interne liée aux phénomènes qui prennent naissance dans la sous-couche.

## 2 - PARTIE THEORIQUE

## 2.1. Equations aux corrélations spatio-temporelles des fluctuations de vitesse :

Ces équations résultent des équations générales [ A.A. TOWNSEND 1956, J.O. HINZE 1959, A. FAVRE 1965 ] et des équations aux corrélations spatio-temporelles écrites par [ A. RAMAMONJIARISOA 1967, A. FAVRE, R. DUMAS, E. VEROLLET 1967-1968-1969 ] .

L'écoulement dans la veine étant à faible nombre de Mach ( $M = 0,05$ ) et à écart de température relative modérée (0,09), les effets de compressibilité dues aux variations de vitesse sont négligeables, ainsi que les effets de dilatation dues aux variations de température. Par suite, dans les équations dynamiques, nous pourrions poser  $\rho = \bar{\rho}$  ; les décompositions selon la méthode A ou B (A. FAVRE 1965) sont alors identiques. Nous décomposerons donc toute grandeur turbulente  $f$  en une grandeur macroscopique  $\bar{f}$  et une grandeur fluctuante  $f'$ .

$$f = \bar{f} + f'$$

L'écoulement étant en première approximation bidimensionnel (A. FAVRE, J. GAVIGLIO 1960), nous supposons les dérivées  $\frac{\partial(\ )}{\partial x_3}$  nulles. Les grandeurs attachées au point  $P_0$  conservent l'indice zéro, et celles relatives au point  $P$  ne sont munies que de l'indice rappelant la direction des axes de référence.

La composante longitudinale de vitesse au point  $P(x)$  au temps  $t$  est décomposée suivant la relation :

$$v_1 = V_1 + v'_1 \quad \text{avec} \quad V_1 = \bar{v}_1, \quad \bar{v}'_1 = 0$$

Le point  $P_0 (x_0)$  au temps  $t_0$  servant de référence, on a :

$$X_\alpha = x_\alpha - x_{0\alpha} \quad \text{et} \quad T = t - t_0.$$

Les moyennes statistiques sont remplacées par les moyennes temporelles suivant les hypothèses d'ergodicité (L. AGOSTINI, J. BASS 1950 ; A. BLANC-LAPIERRE, R. FORTET, J. KAMPE de FERIET 1953 ; A. RAMAMONJIARISOA 1967).

Les équations dynamiques instantanées au point P(x) s'écrivent alors :

$$\bar{\rho} \frac{dV_\alpha}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial}{\partial X_\gamma} f_{\alpha\gamma} \quad (1)$$

avec

$$f_{\alpha\gamma} = - \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial v_\alpha}{\partial X_\beta} \delta_{\alpha\beta} + \bar{\mu} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial X_\gamma} + \frac{\partial v_\gamma}{\partial X_\alpha} \right)$$

De l'équation (1), on peut déduire l'équation aux fluctuations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial v'_\alpha}{\partial t} + \bar{\rho} v'_\gamma \frac{\partial v'_\alpha}{\partial X_\gamma} + \bar{\rho} v'_\gamma \frac{\partial v_\alpha}{\partial X_\gamma} + \bar{\rho} v'_\gamma \frac{\partial v'_\alpha}{\partial X_\gamma} - \bar{\rho} v'_\gamma \frac{\partial v'_\alpha}{\partial X_\gamma} \\ = - \frac{\partial p'}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial f'_{\alpha\gamma}}{\partial X_\gamma} \end{aligned} \quad (2)$$

Pour obtenir l'équation aux corrélations spatio-temporelles, on multiplie l'équation (2) par la fluctuation  $v'_{\beta_0}$  au point  $P_0$ , à l'instant  $t_0$ , et on prend la moyenne.

Le fait que l'écoulement soit statistiquement stationnaire permet d'écrire avec les hypothèses d'ergodicité (A. FAVRE, J. GAVIGLIO, R. DUMAS 1966) :

$$\overline{(\ )'_0 \frac{\partial (\ )'}{\partial t}} = \frac{\partial (\ )'_0 (\ )'}{\partial t}$$

d'où

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \overline{v'_\alpha v'_{\beta_0}}}{\partial t} + \bar{\rho} v'_\gamma \frac{\partial \overline{v'_\alpha v'_{\beta_0}}}{\partial X_\gamma} + \bar{\rho} \overline{v'_\gamma v'_{\beta_0}} \frac{\partial v_\alpha}{\partial X_\gamma} + \frac{\partial \overline{(\rho v'_\gamma v'_\alpha v'_{\beta_0})}}{\partial X_\gamma} \\ = - \frac{\partial \overline{p' v'_{\beta_0}}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \overline{f'_{\alpha\gamma} v'_{\beta_0}}}{\partial X_\gamma} \end{aligned} \quad (3)$$

Nous pouvons poser pour les corrélations spatio-temporelles doubles et triples :

$$Q_{\alpha\beta}(x_0, x, T) = \overline{v'_\alpha v'_{\beta_0}}$$

$$K_\beta(x_0, x, T) = \overline{p' v'_{\beta_0}}$$

$$S_{\alpha\gamma, \beta} = \overline{\rho v'_\alpha v'_\gamma v'_{\beta_0}}$$

L'équation (3) s'écrit alors :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \alpha \beta}{\partial t} + \bar{\rho} v_{\gamma} \frac{\partial \alpha \beta}{\partial x_{\gamma}} + \bar{\rho} q_{\gamma \beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial s_{\alpha \gamma \beta}}{\partial x_{\gamma}} = - \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \overline{f'_{\alpha \gamma} v_{\beta 0}}}{\partial x_{\gamma}} \quad (4)$$

C'est l'équation aux corrélations spatio-temporelles pour les fluctuations de vitesse.

## 2.2. Calcul des différents moments à partir de la fonction de répartition

### 2.2.1. Cas d'une variable

Soit  $W$  une grandeur aléatoire caractéristique du champ turbulent (par exemple la fluctuation longitudinale de vitesse ou la fluctuation thermique) et soit  $F(w) = P(W < w)$  la fonction de répartition associée à cette grandeur aléatoire. Si la fonction  $F(w)$  est absolument continue

sa dérivée existe, on peut définir la fonction de densité de probabilité  $f(w)$  par la relation :

$$f(w) = \frac{d F(w)}{dw}$$

Le moment d'ordre  $n$  est égal par définition à

$$m_n = \langle w^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w^n f(w) dw$$

Si l'on sépare les intervalles d'intégration en intervalles partiels  $(-\infty, 0)$  et  $(0, +\infty)$ , on obtient :

$$\langle w^n \rangle = \int_{-\infty}^0 w^n f(w) dw + \int_0^{+\infty} w^n f(w) dw \quad (1)$$

La fonction de densité de probabilité de la variable  $w$  peut être définie par les deux relations suivantes :

$$f(w) = - \frac{d P \overline{W > w}}{dw} \quad \text{et} \quad f(w) = + \frac{d P \overline{W < w}}{dw}$$

La relation (1) peut s'écrire :

$$\langle w^n \rangle = \int_{-\infty}^0 w^n \frac{dP[W < w]}{dw} - \int_0^{+\infty} w^n \frac{dP[W > w]}{dw} dw$$

En intégrant par parties l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \langle w^n \rangle = & \left\{ w^n P[W < w] \right\}_{w=-\infty}^0 - n \int_{-\infty}^0 w^{n-1} P[W < w] dw \\ & - \left\{ w^n P[W > w] \right\}_{w=0}^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} w^{n-1} P[W > w] dw \end{aligned}$$

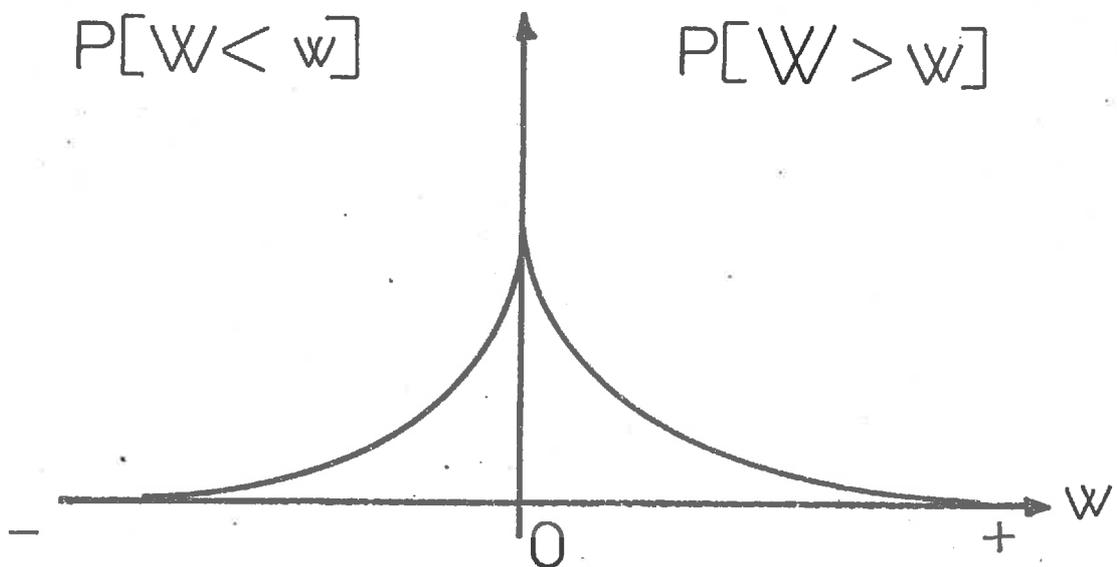
D'où :

$$F\langle w^n \rangle = \overline{w^n} = -n \int_{-\infty}^0 w^{n-1} P[W < w] dw + n \int_0^{+\infty} w^{n-1} P[W > w] dw$$

On retrouve la formule donnée par MARCILLAT (1964)

$$\langle w^n \rangle = \overline{w^n} = n \int_0^{+\infty} w^{n-1} P[W > w] dw - n \int_{-\infty}^0 w^{n-1} P[W < w] dw$$

Les courbes  $P[W > w]$  pour  $w \geq 0$  et  $P[W < w]$  pour  $w \leq 0$  permettent de calculer tous les différents moments.



En particulier si on considère la variable réduite  $\zeta = \frac{W - \bar{W}}{\sigma(W)}$  où  $\sigma(W) = \sqrt{(W - \bar{W})^2}$  est l'écart type, on a

$$\bar{\zeta} = \int_0^{+\infty} P[\bar{W} > \zeta] d\zeta - \int_{-\infty}^0 P[\bar{W} < \zeta] d\zeta = 0$$

$$\bar{\zeta}^2 = 2 \int_0^{+\infty} \zeta P[\bar{W} > \zeta] d\zeta - 2 \int_{-\infty}^0 \zeta P[\bar{W} < \zeta] d\zeta = 1$$

### 2.2.2. Cas de deux variables

#### 2.2.2.1. Calcul des différents moments

Soit X et Y deux variables aléatoires et soit  $F(x, y) = P[\bar{X} < x, \bar{Y} < y]$  la fonction de répartition du couple de variables (x, y). Si F(x, y) est une fonction absolument continue : elle est deux fois dérivable, on peut définir la fonction de densité de probabilité du couple (x, y), par la relation :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Le moment d'ordre p + q est égal par définition à :

$$m_{pq} = \langle x^p y^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy$$

En séparant les intervalles d'intégration en intervalles partiels  $(-\infty, 0)$  et  $(0, +\infty)$  on peut encore écrire :

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 x^p y^q f(x, y) dx dy \quad \text{(I)}$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad \text{(II)}$$

$$+ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 x^p y^q f(x, y) dx dy \quad \text{(III)}$$

$$+ \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \quad \text{(IV)}$$

La fonction de densité de probabilité du couple (x, y) peut être définie par les différentes relations :

$$f(x, y) = + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P \overline{X < x, Y < y} \quad (1)$$

$$f(x, y) = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P \overline{X < x, Y < y} \quad (2)$$

$$f(x, y) = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P \overline{X > x, Y > y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P \overline{X > x, Y > y} \quad (4)$$

Si l'on remplace la valeur de  $f(x, y)$  par (1) pour le terme (I) de la relation (2), on a :

$$(I) = \int_{x=-\infty}^0 x^p \left\{ \int_{y=-\infty}^0 y^q \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P \overline{X < x, Y < y} dy \right\} dx$$

Une intégration par parties nous conduit à :

$$(I) = \int_{x=-\infty}^0 x^p \left\{ \int_{y=-\infty}^0 y^q \frac{\partial}{\partial x} P \overline{X < x, Y < y} dy - q \int_{y=-\infty}^0 y^{q-1} \frac{\partial}{\partial x} P \overline{X < x, Y < y} dy \right\} dx$$

La fonction  $P \overline{X < x, Y < y}$  tend vers zéro quand  $y$  tend vers  $-\infty$  ; si le phénomène aléatoire a des variations d'amplitudes bornées (cas de la turbulence), le premier terme de la relation ci-dessus tend donc vers zéro quand  $y$  tend vers  $-\infty$  c'est à dire vers la valeur maximale de  $y$ . On peut donc écrire

$$(I) = - q \int_{x=-\infty}^0 x^p \int_{y=-\infty}^0 y^{q-1} \frac{\partial}{\partial x} P \overline{X < x, Y < y} dy dx$$

Nous pouvons vérifier que ce terme tend vers zéro dans le cas particulier où les deux variables obéissent à une loi de Gauss

Soit  $\rho$  le coefficient de corrélation, en supposant les variables réduites

$$\langle x y \rangle = \rho$$

La fonction de densité de probabilité du couple  $(x, y)$  est égale à

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}$$

et la fonction de répartition du couple de variables (x, y) à (joint density function) :

$$\text{Prob } \underline{X} < x, \underline{Y} < y = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, du \, dv$$

On a par définition

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 P \underline{X} < x, \underline{Y} < y}{\partial x \partial y}$$

et le calcul nous conduit à l'expression suivante pour la dérivée par rapport à x de la fonction de répartition

$$\frac{\partial}{\partial x} P \underline{X} < x, \underline{Y} < y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \, d\zeta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P \underline{X} < x, \underline{Y} < y = \phi(x) \cdot \Phi\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (1)$$

où  $\phi(x)$  est la fonction de densité de probabilité d'une loi normale à une variable et  $\Phi(x)$  sa fonction de répartition.

Nous avons donc

$$y^q \frac{\partial}{\partial x} P \underline{X} < x, \underline{Y} < y = y^q \cdot \phi(x) \cdot \Phi\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Pour  $\zeta$  inférieur à -1, on a :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \, d\zeta < \int_{-\infty}^{-\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \, d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

d'où

$$0 \leq y^q \frac{\partial}{\partial x} P \underline{X} < x, \underline{Y} < y < y^q \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Quand y tend vers moins l'infini,  $y^q \frac{\partial}{\partial x} P \underline{X} < x, \underline{Y} < y$  tend vers zéro.

$$(I) = -q \int_{x=-\infty}^0 x^p \int_{y=-\infty}^0 y^{q-1} \frac{\partial}{\partial x} P(\underline{X} < x, Y < \underline{y}) dy dx$$

Si l'on permute l'ordre d'intégration, et si l'on intègre une nouvelle fois par parties, on trouve :

$$(I) = -q \int_{y=-\infty}^0 y^{q-1} \left\{ \int_{x=-\infty}^0 x^p P(\underline{X} < x, Y < \underline{y}) dx - p \int_{x=-\infty}^0 x^{p-1} P(\underline{X} < x, Y < \underline{y}) dx \right\} dy$$

c'est-à-dire :

$$(I) = +pq \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 x^{p-1} y^{q-1} P(\underline{X} < x, Y < \underline{y}) dx dy$$

En procédant exactement de même avec les expressions (2), (3) et (4) respectivement pour les termes (II), (III) et (IV) de la relation (2), on trouve le résultat final

$$\begin{aligned} m_{pq} = \langle x^p y^q \rangle &= pq \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} P(\underline{X} > x, Y > \underline{y}) dx dy \\ &+ pq \int_{x=-\infty}^0 \int_{y=-\infty}^0 x^{p-1} y^{q-1} P(\underline{X} < x, Y < \underline{y}) dx dy \\ &- pq \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^0 x^{p-1} y^{q-1} P(\underline{X} > x, Y < \underline{y}) dx dy \\ &- pq \int_{x=-\infty}^0 \int_{y=0}^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} P(\underline{X} < x, Y > \underline{y}) dx dy \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour un phénomène à amplitudes bornées. Elle pourrait être certainement étendue à d'autres cas, mais nous nous sommes contentés de vérifier qu'elle était encore valable dans le cas d'un processus gaussien.

Le réseau des quatre courbes  $P(\underline{X} > x, Y > \underline{y})$ ,  $P(\underline{X} > x, Y < \underline{y})$ ,  $P(\underline{X} < x, Y < \underline{y})$  et  $P(\underline{X} < x, Y > \underline{y})$  permet de calculer les différents moments. Ces quatre courbes présentent un avantage sur le plan expérimental car elles convergent toutes vers zéro.

$$x \leq 0$$

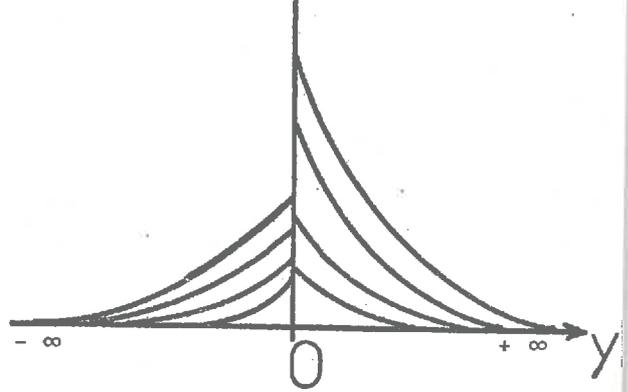
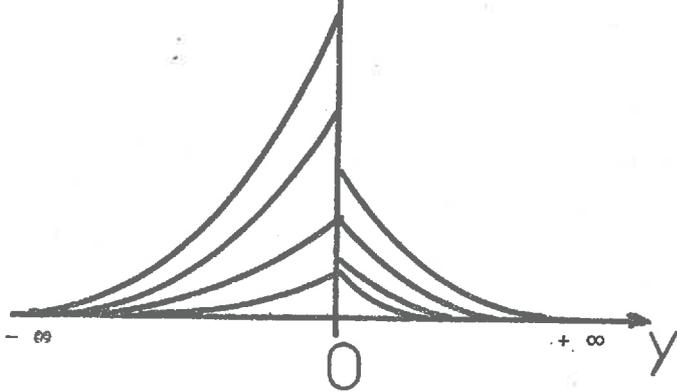
$$x \geq 0$$

$$P[X < x, Y < y]$$

$$P[X < x, Y > y]$$

$$P[X > x, Y < y]$$

$$P[X > x, Y > y]$$



2.2.2.2. Cas particulier : moment d'ordre deux : mesure du coefficient de corrélation

D'après la formule précédente, le coefficient de corrélation est égal à :

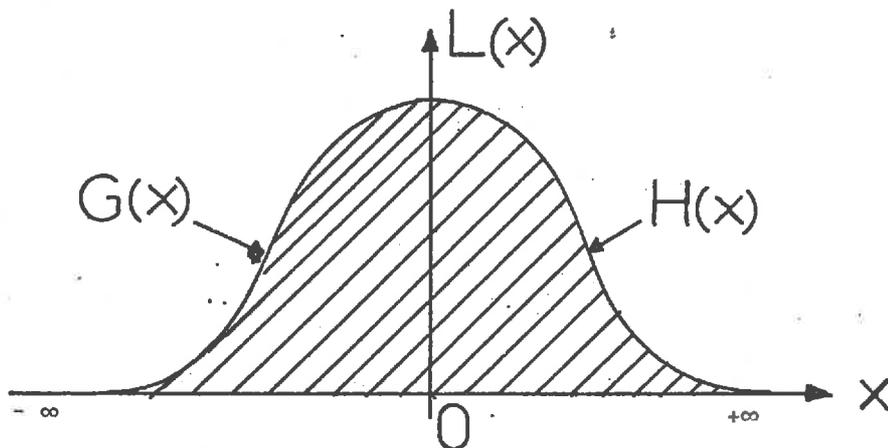
$$\begin{aligned} \langle xy \rangle = & \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 P[X < x, Y < y] dx dy - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} P[X < x, Y > y] dx dy \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P[X > x, Y > y] dx dy - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 P[X > x, Y < y] dx dy \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \langle xy \rangle = & \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 P[X < x, Y < y] dy dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 P[X < x, Y > y] dy dx \\ & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P[X > x, Y > y] dy dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 P[X > x, Y < y] dy dx \end{aligned}$$

soit :

$$\langle xy \rangle = \int_{-\infty}^0 G(x) dx + \int_0^{\infty} H(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} L(x) dx$$



Le coefficient de corrélation s'obtient en planimétrant l'aire comprise entre la courbe L(x) et l'axe des abscisses.

Ce procédé de mesure du coefficient de corrélation peut servir à tester l'hypothèse de la liaison gaussienne entre les deux variables aléatoires X et Y. Nous pouvons en effet, en fonction de l'amplitude (x ou y) du signal voir les différences entre les résultats expérimentaux et les calculs théoriques pour deux variables gaussiennes. En particulier, nous pouvons dire si ce sont les petites amplitudes ou les grandes amplitudes qui diffèrent de la loi de Gauss, ou bien si ce sont les survitesses ou les sous-vitesses qui contribuent le plus dans la valeur du coefficient de corrélation.

Mais pour cela il faut calculer l'expression théorique de la courbe que nous avons appelée L(x).

Le coefficient de corrélation est égal à :

$$\langle x y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$$

soit :

$$\langle x y \rangle = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)}} \left\{ \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^2-2\rho xy)}{2(1-\rho^2)}} dy \right\} dx$$

En effectuant le changement de variable :

$$\zeta = \frac{y - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}, \text{ on obtient :}$$

$$\langle x y \rangle = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{ \int_{y=-\infty}^{+\infty} (\zeta \sqrt{1-\rho^2} + \rho x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \right\} dx$$

d'où :

$$\langle x y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{ou encore en intégrant par parties :}$$

$$\langle x y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \rho$$

La courbe L(x) a donc pour équation :

$$L(x) = \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \rho \cdot \phi(x)$$

2.2.3. Calcul de la fonction de densité de probabilité du produit de deux variables aléatoires :

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ; et l'on suppose connue la fonction de densité de probabilité du couple  $(x, y)$ , -soit  $\phi(x, y)$  cette fonction.

On définit la nouvelle variable aléatoire  $Z = X.Y$ .  
Soit  $H(q) = P[\underline{Z} \leq \overline{q}]$  la fonction de répartition de cette variable.

$$H(q) = \text{Prob} [\underline{Z} < \overline{q}] = \int_{x \cdot y < q} \phi(x, y) \, dx dy$$

$$H(q) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{q/x} \phi(x, y) \, dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{q/x} \phi(x, y) \, dy$$

On fait le changement de variable :  $y = \frac{t}{x}$

$$H(q) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^q \frac{1}{x} \phi(x, \frac{t}{x}) \, dt + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^q \frac{1}{x} \phi(x, \frac{t}{x}) \, dt$$

En permutant l'ordre d'intégration, on a :

$$H(q) = \int_{-\infty}^q dt \left( \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} \phi(x, \frac{t}{x}) \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \phi(x, \frac{t}{x}) \, dx \right)$$

soit :

$$H(q) = \int_{-\infty}^q dt \left( \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{x} \phi(x, \frac{t}{x}) + \frac{1}{x} \phi(-x, -\frac{t}{x}) \right] dx \right)$$

On vérifie ainsi que la fonction de densité de probabilité  $h(q)$  est égale à :

$$h(q) = \frac{dH(q)}{dq}$$

$$h(q) = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{x} \phi(x, \frac{q}{x}) + \frac{1}{x} \phi(-x, -\frac{q}{x}) \right] dx$$

Considérons deux variables aléatoires gaussiennes.

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}$$

d'où

$$\phi\left(x, \frac{q}{x}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{\rho q}{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 + \frac{q^2}{x^2}\right)\right\} = \phi\left(-x, -\frac{q}{x}\right)$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$x^2 = t$$

$$h(q) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{+\frac{\rho q}{1-\rho^2}} \int_0^\infty \frac{1}{2t} e^{-\frac{q^2}{2(1-\rho^2)t}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)t}} dt$$

Soit  $K_0$  la fonction de Bessel modifiée du second ordre, d'indice zéro (A. ANGOT 1949).

$$K_0(k\sqrt{s}) = \int_0^\infty \frac{1}{2t} e^{-\frac{k^2}{4t}} e^{-st} dt$$

On pose :

$$k = \frac{q\sqrt{2}}{1-\rho^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{s} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$$

d'où :

$$h(q) = \frac{dP}{dq} \sqrt{z < q}$$

$$h(q) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{+\frac{\rho}{1-\rho^2} q} \cdot K_0\left(\frac{q}{1-\rho^2}\right)$$

On retrouve la formule donnée par MILLER (1964).

Si les deux variables aléatoires gaussiennes sont indépendantes, c'est-à-dire si  $\rho = 0$ , on a :

$$h(q) = \frac{1}{\pi} K_0(q)$$

On retrouve l'expression donnée par C.W. VAN ATTA, W.Y. CHEN (1969). Dans ce cas particulier, on obtient directement la valeur de la fonction de répartition de la variable aléatoire Z à partir de l'expression d'une fonction  $g_0(x)$

$$g_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} K_0(t) dt$$

qui a été calculée au National Bureau of Standards et citée par Y. LUKE (1962). On a en effet :

$$\text{Prob} \left[ \overline{Z} > q \right] = \frac{1}{\pi} \int_q^{+\infty} K_0(t) dt$$

$$\text{Prob} \left[ \overline{Z} > q \right] = \frac{1}{\pi} e^{-q} \cdot g_0(q)$$

(cf. tableau 1 pour  $\rho = 0$ ).

q	h (q)	P $\sqrt{z} > q$
.000000	∞	.500000
.100000	.772570	.391086
.200000	.557902	.325847
.300000	.436880	.276557
.400000	.354756	.237205
.500000	.294246	.204893
.600000	.247486	.177900
.700000	.210244	.155080
.800000	.179941	.135619
.900000	.154921	.118913
1.000000	.134009	.104496
1.200000	.101382	.081133
1.400000	.077572	.063359
1.600000	.059842	.049706
1.800000	.046441	.039139
2.000000	.036256	.030914
2.200000	.028425	.024481
2.400000	.022345	.019430
2.600000	.017634	.015451
2.800000	.013942	.012308
3.000000	.011045	.009819
3.200000	.008785	.007844
3.400000	.007003	.006273
3.600000	.005570	.005023
3.800000	.004456	.004026
4.000000	.003565	.003229
4.200000	.002833	.002593
4.400000	.002260	.002083
4.600000	.001814	.001675
4.800000	.001464	.001347
5.000000	.001178	.001085
5.200000	.000944	.000874
5.400000	.000759	.000704
5.600000	.000611	.000568
5.800000	.000491	.000458
6.000000	.000396	.000369
6.200000	.000319	.000298
6.400000	.000257	.000241
6.600000	.000208	.000194
6.800000	.000167	.000157
7.000000	.000135	.000127

$$- h (q) = \frac{1}{\pi} K_0 (q)$$

$$- P \sqrt{z} > q = \frac{1}{\pi} \int_q^{+\infty} K_0 (t) dt$$

Tableau n° 1

2.2.4. Calcul des différents moments à partir de la fonction de répartition

On considère le couple de variables aléatoires  $x$  et  $y$ . On définit la nouvelle variable aléatoire  $Z = X^2$ ; et on s'intéresse à la fonction de répartition du couple de variables  $(z, y)$ .

La variable aléatoire  $Z$  est une variable toujours positive. Soit  $g(q, y)$  la fonction de densité de probabilité du couple  $(z, y)$ . Le moment d'ordre  $n + m$  est égal par définition à :

$$\langle q^n y^m \rangle = \int_{q=0}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} q^n y^m g(q, y) dq dy$$

On sépare les intervalles d'intégration en intervalles partiels  $(-\infty, 0)$  et  $(0, +\infty)$ .

$$\langle q^n y^m \rangle = \int_{q=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 q^n y^m g(q, y) dq dy + \int_{q=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} q^n y^m g(q, y) dq dy$$

On peut remarquer que la fonction de densité de probabilité du couple de variable  $(z, y)$  est égale à :

$$g(q, y) = - \frac{\partial^2}{\partial q \partial y} P \left[ \sqrt{Z} > q, Y < \sqrt{y} \right] = + \frac{\partial^2}{\partial q \partial y} P \left[ \sqrt{Z} > q, Y > \sqrt{y} \right]$$

On a donc :

$$\langle q^n y^m \rangle = - \int_{q=0}^{+\infty} q^n \left( \int_{-\infty}^0 y^m \frac{\partial^2}{\partial q \partial y} P \left[ \sqrt{Z} > q, Y < \sqrt{y} \right] dy dq \right) \quad (I)$$

$$+ \int_{q=0}^{+\infty} q^n \int_0^{+\infty} y^m \frac{\partial^2}{\partial q \partial y} P \left[ \sqrt{Z} > q, Y > \sqrt{y} \right] dy dq \quad (II)$$

Le terme (I) peut encore s'écrire, si l'on intègre par parties :

$$(I) = - \int_{q=0}^{+\infty} q^n \left\{ \int_{-\infty}^0 y^m \frac{\partial}{\partial q} P \left[ \sqrt{Z} > q, Y < \sqrt{y} \right] \Big|_{y=-\infty}^0 - m \int_{y=-\infty}^0 y^{m-1} \frac{\partial}{\partial q} P \left[ \sqrt{Z} > q, Y < \sqrt{y} \right] dy \right\} dq$$

La probabilité  $P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right]$  tend vers zéro quand  $y$  tend vers  $-\infty$ . Si le phénomène aléatoire est à amplitude limitée (cas de la turbulence), le premier terme tend vers zéro quand  $y$  tend vers  $-\infty$ , c'est-à-dire vers la plus petite valeur de  $y$ .

On peut démontrer que ce terme tend vers zéro pour un phénomène gaussien, à amplitude infinie.

On considère deux variables aléatoires gaussiennes  $X$  et  $Y$ . On définit la nouvelle variable aléatoire  $Z = X^2$ , et on s'intéresse à la fonction de répartition du couple de variables  $(z, y)$ .

On a d'après H. CRAMER (1961) :

$$\text{Prob} \left[ \bar{Z} < q, Y < \bar{y} \right] = \text{Prob} \left[ \bar{X} < +\sqrt{q}, Y < \bar{y} \right] - \text{Prob} \left[ \bar{X} < -\sqrt{q}, Y < \bar{y} \right]$$

d'où :

$$P \left[ \bar{Z} < q, Y < \bar{y} \right] = \int_{u=-\infty}^{+\sqrt{q}} \int_{v=-\infty}^{\bar{y}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u^2 - 2\rho uv + v^2) \right\} dudv \\ - \int_{u=-\infty}^{-\sqrt{q}} \int_{v=-\infty}^{\bar{y}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (u^2 - 2\rho uv + v^2) \right\} dudv$$

La dérivée par rapport à  $q$  est égale à :

$$\frac{\partial}{\partial q} P \left[ \bar{Z} < q, Y < \bar{y} \right] = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot \phi(q) \cdot \Phi \left( \frac{y - \rho\sqrt{q}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{q}} \phi(q) \cdot \Phi \left( \frac{y + \rho\sqrt{q}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

avec :

$$\phi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}}$$

$$\Phi(y) = P \left[ \bar{Y} < \bar{y} \right] = \int_{-\infty}^{\bar{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta$$

La dérivée seconde par rapport à  $q$  et  $y$  est égale à :

$$g(q, y) = \frac{\partial^2 P \left[ \bar{Z} < q, Y < \bar{y} \right]}{\partial q \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \left[ f(+\sqrt{q}, y) + f(-\sqrt{q}, y) \right]$$

où  $f(u, v)$  est la fonction de densité de probabilité du couple de variables gaussiennes.

Le calcul nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial q} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right] = - \frac{1}{2\sqrt{q}} \phi(q) \phi\left(\frac{y - \rho\sqrt{q}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{q}} \phi(q) \phi\left(\frac{y + \rho\sqrt{q}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Le problème de limite de  $y^m \frac{\partial}{\partial q} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right]$  quand  $y$  tend vers  $-\infty$ , est identique à celui rencontré en 2.2.2.1. Donc quand  $y$  tend vers  $-\infty$ ,  $y^m \frac{\partial}{\partial q} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right]$  tend vers zéro, quelque soit  $m$ .

Donc :

$$(I) = + m \int_{q=0}^{+\infty} q^n \int_{y=-\infty}^0 y^{m-1} \frac{\partial}{\partial q} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right] dy dq$$

Si l'on permute l'ordre d'intégration et si l'on intègre par parties on trouve :

$$(I) = m \int_{y=-\infty}^0 y^{m-1} \left\{ \int_{q=0}^{+\infty} q^n P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right] dy - n \int_{q=0}^{+\infty} q^{n-1} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right] dq \right\} dy$$

c'est-à-dire :

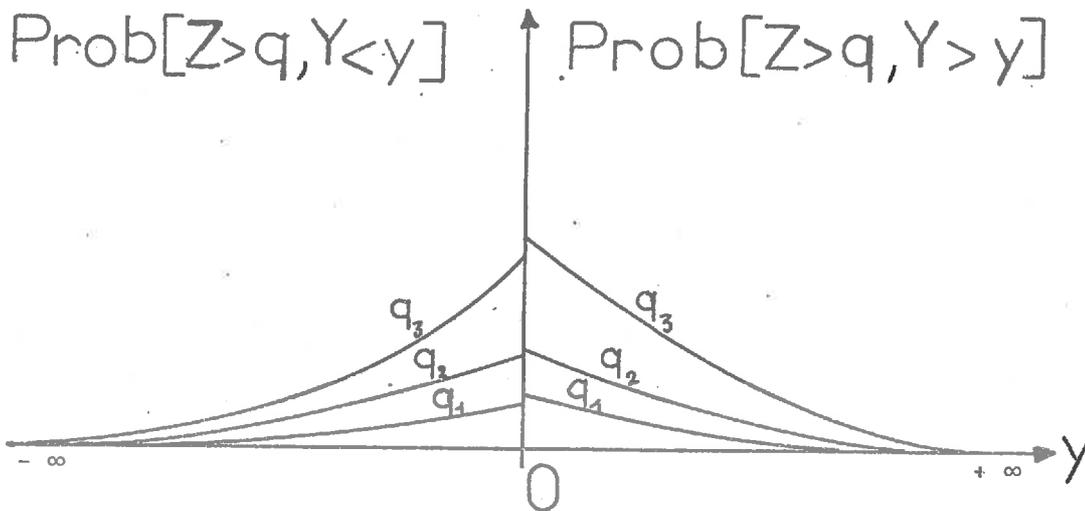
$$(I) = - nm \int_{q=0}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^0 q^{n-1} y^{m-1} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right] dq dy$$

Si l'on procède de façon identique pour le terme (II), on trouve pour la valeur du moment d'ordre  $n + m$  la relation

$$m_{nm} = \langle q^n y^m \rangle = nm \int_{q=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} q^{n-1} y^{m-1} P \left[ \bar{Z} > q, Y > \bar{y} \right] dq dy - nm \int_{q=0}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^0 q^{n-1} y^{m-1} P \left[ \bar{Z} > q, Y < \bar{y} \right] dq dy$$

Cette relation est valable pour un phénomène d'amplitude bornée et dans le cas particulier d'un processus gaussien.

$$q \geq 0$$



Le réseau des courbes  $P[Z > q, Y > y]$  pour  $y > 0$  et  $P[Z > q, Y < y]$  pour  $y < 0$  permet de calculer tous les différents moments.

### 2.3. Calcul numérique de la fonction de répartition de la loi de Gauss à deux variables

Ce calcul repose sur les propriétés des polynômes d'Hermite à une variable. Nous rappellerons brièvement les principales propriétés de ces polynômes (H. CRAMER 1961, J. LEGRAS 1963).

Le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$ , est un polynôme d'ordre  $n$ , défini par la relation suivante :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

Les polynômes d'Hermite appartiennent à l'ensemble des polynômes orthogonaux. On a la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ n! \sqrt{2\pi} & n = m \end{cases}$$

Ils satisfont à la relation de récurrence suivante :

$$H_{n+1}(x) - x H_n(x) + n H_{n-1}(x) = 0$$

et 
$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x)$$

La fonction génératrice est égale à :

$$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

D'après H. CRAMER (1961), CHARLIER a établi la relation :

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{H_v(x) H_v(y)}{v!} t^v = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-t^2)}(t^2x^2 + t^2y^2 - 2txy)\right\} \quad (1)$$

Les premiers polynômes sont égaux à :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité de la loi de Gauss à deux variables peut s'écrire d'après la relation (1)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{v=0}^{\infty} H_v(x) H_v(y) \frac{\rho^v}{v!}$$

Si l'on désigne par  $\Phi(x)$  la fonction de répartition de la loi de Gauss à une variable :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$$

la fonction  $f(x, y)$  a pour expression d'après H. CRAMER (1961)

$$f(x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} \phi^{(v+1)}(x) \phi^{(v+1)}(y) \frac{\rho^v}{v!}$$

La série peut être intégrée terme à terme, ce qui permet d'en déduire une expression pour la fonction de répartition :

$$\text{Prob } \underline{X} < x, Y < \underline{y} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

$$\text{Prob } \underline{X} < x, Y < \underline{y} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\phi^{(v)}(x) \phi^{(v)}(y)}{v!} \rho^v$$

c'est-à-dire :

$$P \underline{X} < x, Y < \underline{y} = \Phi(x) \cdot \Phi(y) + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} H_v(x) H_v(y) \cdot \frac{\rho^{v+1}}{(v+1)!}$$

Pour calculer la somme de la série, il est plus facile d'introduire une nouvelle fonction  $\alpha_n(x)$  définie de la façon suivante :

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \rho^{\frac{n}{2}} H_n(x)$$

d'où

$$P \underline{X} < x, Y < \underline{y} = \Phi(x) \cdot \Phi(y) + \rho \cdot \phi(x) \phi(y) \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v(x) \alpha_v(y)$$

A partir de la relation de récurrence des polynômes d'Hermite, on peut calculer celle des polynômes  $\alpha_n(x)$ .

$$\alpha_n(x) = x \sqrt{\frac{\rho}{n+1}} \alpha_{n-1}(x) - \frac{\rho(n-1)}{\sqrt{n(n+1)}} \alpha_{n-2}(x)$$

Le calcul de la fonction de répartition de la loi de Gauss à deux variables est résolu, à condition que la série converge assez rapidement. Les calculs numériques ont été effectués au Centre de Calcul de Luminy (Faculté des Sciences de Marseille) sur IBM 360-44.

La série converge rapidement pour les faibles valeurs du coefficient de corrélation  $\rho$ . Mais elle apparaît comme une série oscillante pour les valeurs relativement élevées de  $\rho$ .

A titre d'indication nous pouvons dire que si :

- $x = y = + 5$  et  $\rho = + 0,40$  il faut aller jusqu'au quarantième terme
- $x = y = + 5$  et  $\rho = + 0,70$  au soixante-dizième terme
- $x = y = + 5$  et  $\rho$  voisin de 1, la série ne converge pas encore au 160ème terme.

C'est pourquoi nous nous sommes limités à un calcul de la fonction de répartition pour un nombre relativement faible de valeurs de  $\rho$ , correspondant à notre cas particulier.

Si  $x = y = 0$ , on est alors capable de donner une forme analytique à cette fonction. Cette relation nous sera utile ultérieurement : (H. CRAMER 1961, A. BLANC-LAPIERRE, B. PICINBONO 1961).

$$P \left[ \underline{X} < 0, \underline{Y} < 0 \right] = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(u,v) du dv = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } \rho$$

De même on a :

$$P \left[ \underline{X} > 0, \underline{Y} < 0 \right] = P \left[ \underline{X} < 0, \underline{Y} > 0 \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } \rho$$

$$P \left[ \underline{X} > 0, \underline{Y} > 0 \right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } \rho$$

Nous vérifions ainsi que pour calculer le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires gaussiennes, il suffit de connaître uniquement le signe de ces deux variables.

Nous avons vérifié cette formule dans le cas de la mesure des probabilités jointes pour les fluctuations de vitesse longitudinale au point P et au point P<sub>0</sub> sans décalage de temps.

$$\frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } \rho = 0,01704 \quad \text{d'où } \rho = 0,110$$

0,01943	0,123
0,01377	0,086
0,01813	0,114

ce qui conduit à une valeur moyenne de 0,11 pour le coefficient de corrélation. La mesure effectuée à l'aide d'un corrélateur P.A.R. donne une valeur de 0,12. On trouve une légère différence due d'une part à l'incertitude de la mesure, et d'autre part au fait que les deux signaux ne sont pas tout à fait gaussiens.

#### 2.4. Correction à apporter pour tenir compte du bruit de fond

Le bruit de fond de la chaîne de mesures constitue une cause d'erreur importante. Toutefois il est possible d'apporter une correction aux différents moments calculés expérimentalement, moyennant l'hypothèse d'un bruit gaussien non corrélé avec la turbulence.

##### 2.4.1. Cas d'une variable

Soit  $w$  un signal perturbé aléatoirement par un parasite  $\varepsilon$ . En sortie des différents appareils de mesure on mesure la variable  $e = w + \varepsilon$ . On définit le rapport  $q$  signal sur bruit par l'expression  $q = \frac{\overline{e^2}}{\overline{\varepsilon^2}}$

On suppose que les trois variables  $e$ ,  $w$ ,  $\varepsilon$  sont centrées, et que le parasite est un bruit gaussien non corrélé avec le signal turbulent  $w$ . On a donc :

$$\overline{w^h \epsilon^k} = \overline{w^h} \cdot \overline{\epsilon^k} \quad \text{et} \quad \overline{w \epsilon} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{(w - \overline{w})(\epsilon - \overline{\epsilon})} = 0$$

On a :

$$q = \frac{\overline{w^2} + 2 \overline{w \epsilon} + \overline{\epsilon^2}}{\overline{\epsilon^2}} = \frac{\overline{w^2}}{\overline{\epsilon^2}} + 1$$

$$\underline{e} = \frac{e}{\sigma(e)} = \frac{w}{\sigma(w) \sqrt{1 + \frac{1}{q-1}}} + \frac{\epsilon}{\frac{\sigma(\epsilon)\sigma(w)}{\sigma(\epsilon)} \sqrt{1 + \frac{1}{q-1}}}$$

d'où

$$\underline{e} = \sqrt{\frac{q-1}{q}} \underline{w} + \frac{1}{\sqrt{q}} \underline{\epsilon} \quad (1)$$

On prend la moyenne de l'équation (1), on obtient :

$$\underline{\overline{e}} = \sqrt{\frac{q-1}{q}} \underline{\overline{w}} + \frac{1}{\sqrt{q}} \underline{\overline{\epsilon}} = 0 \quad \text{car} \quad \underline{\overline{w}} = \underline{\overline{\epsilon}} = 0.$$

$$\underline{\overline{e^2}} = \frac{q-1}{q} \underline{\overline{w^2}} + \frac{1}{q} \underline{\overline{\epsilon^2}} = 1$$

$$\underline{\overline{e^3}} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \underline{\overline{w^3}}$$

d'où

$$\underline{\overline{w^3}} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^{\frac{3}{2}} \underline{\overline{e^3}}$$

$$\underline{e^4} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^2 \underline{w^4} + 6 \frac{q-1}{q^2} + \frac{1}{q^2} \cdot 3$$

$$\underline{w^4} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \underline{e^4} - \frac{6}{q-1} - \frac{3}{(q-1)^2}$$

et

$$\underline{e^5} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{5}{2}} \underline{w^5} + \frac{1}{q^2} \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \underline{w^3}$$

$$\underline{w^5} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^{\frac{5}{2}} \underline{e^5} - \frac{1}{q^2} \left(\frac{q}{q-1}\right)^{\frac{5}{2}} \underline{e^3}$$

Si le bruit de fond n'est pas gaussien, la correction à apporter est plus difficile à établir car il faut calculer les différents moments  $\underline{\epsilon^k}$ . On a toutefois  $\underline{\epsilon} = 0$  et  $\underline{\epsilon^2} = 1$ .

La correction directe de la fonction de répartition est difficile à faire. On sait (LEFORT 1967) que dans le cas particulier de deux variables indépendantes, ayant des fonctions de densité f et g, la variable  $S = X + Y$  a une densité h définie par le produit de convolution :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y) g(y) dy$$

c'est-à-dire :

$$h = f * g = g * f.$$

On peut mesurer les fonctions de répartition du signal total e et du parasite  $\epsilon$  et en déduire les fonctions de densité h et g des variables e et  $\epsilon$ . Il faut alors calculer la fonction de densité f : ce qui revient à déconvoluer. On sait toutes les difficultés auxquelles on se heurte en général lorsqu'on veut déconvoluer

Dans le cas général d'un parasite corrélé avec le signal turbulent, la correction n'est plus possible à effectuer sur la fonction de densité de probabilité.

2.4.2. Correction du bruit de fond dans le cas de deux variables

On considère deux variables  $w_1$  et  $w_2$  perturbées aléatoirement par deux parasites  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . On suppose que ces deux parasites sont sans corrélation avec les signaux turbulents. On pose comme précédemment :

$$e_1 = w_1 + \epsilon_1$$

$$e_2 = w_2 + \epsilon_2$$

On a donc :

$$\underline{e_1} = \sqrt{\frac{q_1 - 1}{q_1}} \underline{w_1} + \frac{1}{\sqrt{q_1}} \underline{\epsilon_1}$$

$$\underline{e_2} = \sqrt{\frac{q_2 - 1}{q_2}} \underline{w_2} + \frac{1}{\sqrt{q_2}} \underline{\epsilon_2}$$

Si l'on suppose que les deux rapports  $q_1$  et  $q_2$  sont égaux, on trouve :

$$q_1 = q_2 = q$$

$$\underline{e_1} \underline{e_2} = \frac{q-1}{q} \underline{w_1} \underline{w_2} \quad \text{d'où}$$

$$\underline{e_1^2} \underline{e_2^2} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^2 \underline{w_1^2} \underline{w_2^2} \quad \text{d'où}$$

$\underline{w_1} \underline{w_2} = \frac{q}{q-1} \underline{e_1} \underline{e_2}$
$\underline{w_1^2} \underline{w_2^2} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \underline{e_1^2} \underline{e_2^2}$

$$\underline{e_1^2} \underline{e_2^2} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^2 \underline{w_1^2} \underline{w_2^2} + 2 \frac{q-1}{q^2} + \frac{1}{q^2}$$

d'où

$\underline{w_1^2} \underline{w_2^2} = \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \underline{e_1^2} \underline{e_2^2} - \frac{2q-1}{(q-1)^2}$
---

### 3 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

### 3 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL :

#### 3.1. Soufflerie et veine d'expérience

Les mesures ont été effectuées sur maquette dans la soufflerie S<sub>1</sub> de l'I.M.S.T. Les descriptions de la veine d'expérience de la maquette ont été développées par les auteurs dans de nombreuses publications (A. FAVRE, R. DUMAS, E. VEROLLET 1966, 1967, 1968, 1969).

La veine d'expérience est cylindrique de section carrée (80 x 80 cm). La maquette est constituée d'une plaque plane suspendue horizontalement dans le milieu de la veine (cf. fig. 3.1.1.).

Deux ventilateurs contrarotatifs entraînés par deux moteurs de 60 CV à courant continu, alimentés par un redresseur à ignitron régulé, permettent d'atteindre des vitesses de l'ordre de 40 m/s. Mais dans nos séries de mesures, nous avons toujours maintenu la vitesse générale, hors de la couche limite, à une valeur constante de 16 m/s.

Afin d'éliminer les perturbations en envergure, cinq grilles à mailles calibrées ont été placées dans la chambre de tranquillisation (A. FAVRE, J. GAVIGLIO 1960). De plus, un dépoussiéreur électrostatique filtre une fraction du débit de l'écoulement, ce qui permet d'éliminer les poussières les plus fines (inférieures au micron), responsables d'une diminution de sensibilité des anémomètres à fil chaud au cours du temps.

Des rugosités ont été disposées sur le bord d'attaque de la maquette afin de déclencher la turbulence, de façon à obtenir une couche limite turbulente pleinement développée à la position de mesure Z = 2780 mm, correspondant à une distance de plus de 50 fois l'épaisseur de couche limite  $\delta$ .

Pour cette position du bord d'attaque de la plaque plane, les valeurs des différents paramètres aérodynamiques et thermiques sont les suivantes :

- distance au bord d'attaque Z = 2780 mm
- vitesse hors de la couche limite  $V_e = 16$  m/s
- épaisseur conventionnelle de la couche limite ( $V = 0,99 V_e$ ) :  $\delta = 45,2$  mm
- épaisseur de déplacement  $\delta^* = 7,89$  mm
- épaisseur de quantité de mouvement  $\delta^{**} = 5,67$  mm

- paramètre de forme :  $H = \frac{\delta_*}{\delta_{**}} = 1,39$
- nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de couche limite  
 $R\delta = 48\ 000$  ( $20^\circ\text{C}$ )
- nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement  
 $R\delta_* \approx 8\ 400$
- nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  
 $R\delta_{**} \approx 6\ 000$
- coefficient de frottement local à la paroi :  $C_f = 27,2 \cdot 10^{-4}$
- vitesse de frottement :  $V_* = 0,59\text{ m/s}$
- distance à la paroi rapportée à la distance de frottement :  $Y^+ = 67$
- nombre de Richardson :  $Ri = 45,3 \cdot 10^{-6}$  (les effets de gravité sont donc négligeables)  
 $Ri \approx \frac{\theta_o - \theta_e}{\theta_e} \frac{St}{(Cf/2)2} \frac{g \cdot v Pr}{Ve^3}$
- gradient longitudinal de pression statique :  $\frac{\Delta P}{\Delta X_1} = - 0,023\text{ M.K.S.}$
- gradient de pression sans dimension  $\frac{\delta}{\rho v^2} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta X_1} = - 2,8 \cdot 10^{-4}$
- taux de turbulence naturelle :  $4 \cdot 10^{-4}$
- nombre de Stanton :  $St = 19,6 \cdot 10^{-4}$  ( $St_{\theta} = q_o / \rho C_p (\theta_o - \theta) Ve$  où  $q_o$  est l'échange thermique à la paroi  $q_o = k \frac{\partial \theta}{\partial y}$ )

Pour les mesures de fluctuations thermiques, on chauffe la plaque plane au moyen de résistances électriques uniformément réparties de façon à maintenir la température de la plaque constante à une valeur moyenne de  $25,8^\circ\text{C}$  (avec un écart type de  $0,5^\circ\text{C}$ ) au-dessus de la température de l'air de la soufflerie. Une régulation thermique à eau permet de maintenir pratiquement constante la température de l'air, rendant ainsi négligeable la dérive thermique de la soufflerie.

Par contre, lors des mesures de fluctuations de vitesse, on ne chauffe pas la plaque et par suite on travaille en régime isotherme : ce qui a l'avantage d'éviter une contamination des fluctuations de vitesse par celles de température enregistrées par le fil chaud (contamination en énergie pouvant aller jusqu'à 35 % (A. FAVRE, R. DUMAS, E. VEROLLET 1969)).

La figure 3.1.2. représente les profils de vitesse et de température moyennes en fonction de la distance  $y^+$ , distance à la paroi rapportée à la distance de frottement. La courbe  $V^+ = \frac{V}{V_*}$  en fonction de  $y^+$  coïncide avec la courbe proposée par VAN DRIEST (1956). Les points obtenus pour  $y^+$  inférieur à 58 sont corrigés selon la méthode de MAC MILLAN (1956).

La courbe  $\frac{\theta^+}{Pr} = \frac{1(\theta_o - \theta)}{Pr(\theta_o - \theta_e)} \cdot \frac{\sqrt{Cf/2}}{St}$  en fonction de  $y^+$  est très

Voisine de celle de  $V^+$  en fonction de  $y^+$ , même en dehors de la zone correspondant à la sous-couche visqueuse (On sait que dans cette zone on doit avoir  $\frac{v^+}{u^+} = y^+$  et  $V^+ = y^+$ . ( $Pr$  étant le nombre de Prandtl visqueux}). Il semble donc que le nombre de Prandtl turbulent pour notre expérience soit voisin du nombre de Prandtl visqueux.

On constate que le point de mesure ( $y^+ = 67$ ) correspond à la partie linéaire du profil de vitesse  $v^+$  en fonction de  $y^+$  ; c'est-à-dire à la zone turbulente pleinement développée de la couche limite ("the law of the wall" des auteurs anglosaxons).

### 3.2. Anémomètres à fil chaud

#### 3.2.1. Généralités

Les mesures sont effectuées à l'aide de deux fils chauds de  $5 \mu$  de diamètre, et d'environ 1,2 mm de long, en platine rhodié. On réalise l'égalité des résistances à "froid" (c'est-à-dire vent arrêté) des deux sondes à quelques pour cents près. On conserve pour le fil amont une valeur légèrement supérieure, ce qui correspond à un fil plus long pour minimiser le sillage.

Mais si les deux fils sont de résistance trop différente, on peut introduire, du fait des anémomètres, des différences de phase entre les deux chaînes. On a d'ailleurs décelé lors d'une expérience faite avec deux fils dont la longueur différait de 20 %, une variation de quelques dixièmes de millisecondes du temps optimal de la corrélation spatio-temporelle entre les deux sondes (temps optimal voisin de 7,5 ms).

La sonde amont est maintenue à la distance  $Z = 2780$  mm du bord d'attaque de la plaque plane, tandis que l'autre sonde est à une distance  $X_1$  variable de la précédente. Nous nous sommes toujours placés à une distance  $X_1$  de 75 mm, ce qui correspond à 1,66 fois l'épaisseur conventionnelle de la couche limite. Pour réduire les effets du sillage sur le fil aval, on a donné au support du fil chaud amont une forme annulaire ce qui explique la valeur légèrement différente de la résistance à froid des deux fils.

Des fils chauds de même métal que celui des sondes anémométriques, sont insérés dans un mince tube de verre, placés hors de la couche limite, pour compenser les éventuelles dérives thermiques de la soufflerie.

Les deux sondes sont maintenues sur une même ligne de courant à une distance à la paroi de 1,7 mm ( $y_0 = y = 1,7$  mm, c'est-à-dire  $y/\delta = 0,038$ ). Pour cette distance à la paroi, les termes de viscosité et de conductivité pour les fluctuations à grandes échelles sont négligeables, cette distance se situant dans la zone "logarithmique" du profil des vitesses.

### 3.2.2. Fonctionnement à température constante

On utilise les anémomètres à fils chauds en fonctionnement à température constante pour les mesures de fluctuations turbulentes de vitesse. Pour ces mesures, la plaque plane n'est pas chauffée.

La chaîne de mesure comprend le bloc d'alimentation de l'anémomètre de type DISA 55D01, le linéariseur (DISA 55D10) et une unité auxiliaire servant d'amplification et de filtre (type DISA 55D25).

La tension de sortie de l'anémomètre n'est pas une fonction linéaire de la vitesse de l'écoulement. Les effets de non linéarité deviennent importants dans la couche limite, par suite de la courbure de la caractéristique du fil chaud (J. MARCILLAT 1964). Il est impensable d'essayer de mesurer des corrélations d'ordre élevé sans avoir de systèmes linéaires. MARCILLAT a montré que l'on pouvait commettre des erreurs de l'ordre de 50 % sur les termes triples, si l'on ne tenait pas compte de la non-linéarité de réponse du fil chaud.

Ce problème de linéarisation a été résolu par un circuit électronique analogique (linéariseur DISA 55D10) : la courbe 3.2.1. donne les tensions de sortie de l'anémomètre avec et sans linéariseur.

L'unité auxiliaire DISA 55D25 sert d'amplificateur, et de filtre passe-bas pour éliminer l'éventuel bruit de fond de la chaîne de mesure.

Nous avons conservé la bande de fréquence 0-5000 Hz, ce qui est largement suffisant compte tenu du spectre d'énergie des fluctuations de vitesse (cf. figure 4.1.12).

### 3.2.3. Fonctionnement à intensité constante

Pour mesurer les fluctuations thermiques, les anémomètres à température constante ne conviennent pas, car pour un très faible coefficient de surchauffe ils se comportent pratiquement comme un anémomètre à intensité constante non compensé.

C'est pourquoi nous faisons fonctionner l'anémomètre Disa comme un amplificateur à intensité constante en déconnectant les branches du pont et en utilisant une alimentation externe. Il faut adjoindre à ce dispositif un amplificateur de compensation. La constante de temps est déterminé expérimentalement par la méthode des signaux carrés.

D'après la théorie linéaire de fonctionnement du fil chaud, la fluctuation de tension électrique est une fonction des fluctuations de vitesse et de température :

$$e' = \alpha \left( \frac{V_1}{V_1} \right) + \beta \left( \frac{\theta'}{\theta_p - \theta_e} \right) \quad (1)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients de sensibilité aux fluctuations longitudinales de vitesse et aux fluctuations thermiques. Le rapport  $r = \frac{\alpha}{\beta}$  dépend du courant de chauffage du fil.

L'expérience montre que pour un courant de chauffage de 5 mA, et pour un fil de 5  $\mu$  de diamètre on obtient :  $r = 0,33$ . Le fil n'est alors pratiquement sensible qu'aux fluctuations de température, lorsque l'on considère les moyennes quadratiques (la contamination par le terme  $2 \sqrt{\theta}$  est de quelques pour cents).

La variation de tension aux bornes de fil chaud est une fonction linéaire de la température dans le cas du fonctionnement à intensité constante (E. VEROLLET 1962). Il n'est pas nécessaire de supposer que les fluctuations de température sont faibles pour utiliser une expression de la forme (1).

### 3.3. Appareil de mesure de la fonction de répartition

Le compteur de dépassement permet la mesure des temps de dépassement de deux seuils par des signaux aléatoires, durant un temps prédéterminé. Ce compteur a été construit par S.A.I.P., d'après le principe proposé par R. DUMAS (R. DUMAS 1964).

#### 3.3.1. Cas d'une seule variable

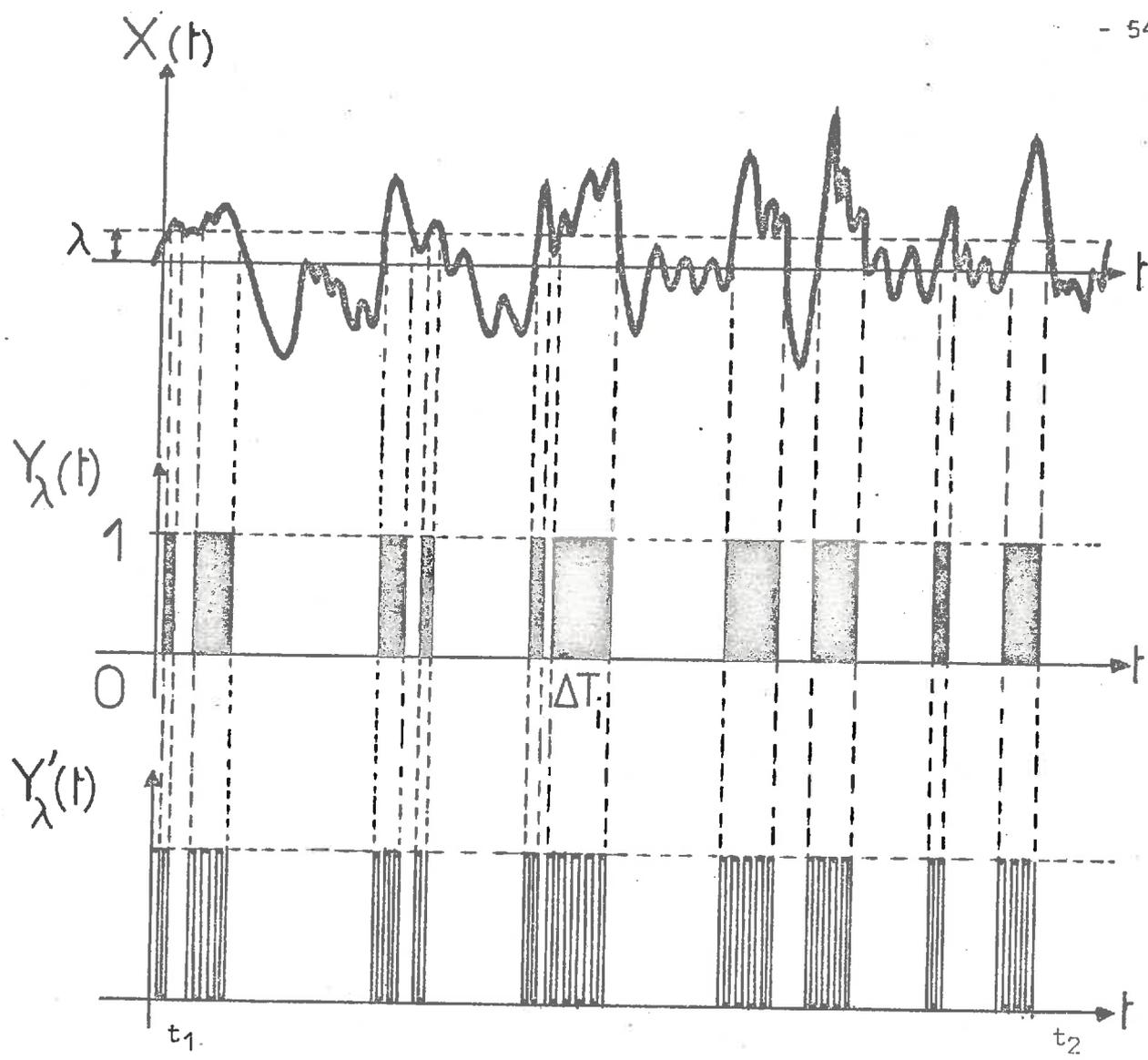
Soit  $\lambda$  la valeur du seuil affiché par l'intermédiaire d'un potentiomètre dix tours hélicoïdal. Si l'on applique la tension  $X(t)$  à l'entrée, un signal par tout ou rien  $Y_\lambda(t)$  est élaboré de la façon suivante :

$$\begin{cases} Y_\lambda(t) = 1 & \text{si } X(t) \geq \lambda \\ Y_\lambda(t) = 0 & \text{si } X(t) < \lambda \end{cases}$$

si l'on a affiché préalablement le commutateur sur la position  $>$ . (Si l'on avait affiché la position  $<$ , il suffit de changer le sens des inégalités).

Le signal  $Y_\lambda(t)$  tout ou rien autorise ou non le passage des impulsions à 100 kHz élaborés par un oscillateur à quartz : cela revient à "hacher" le signal  $Y_\lambda(t)$  par un système à chopper.

Un compteur électronique rapide, et un compteur mécanique permettent de mesurer le nombre de ces impulsions.



Nous avons donc la somme des temps  $\Delta T_i$  durant lequel le signal aléatoire  $X(t)$  est supérieur à la valeur du seuil  $\lambda$ , et en divisant par l'intervalle de temps  $T = t_2 - t_1$  nous avons la proportion de temps pendant lequel  $X(t)$  est supérieur à  $\lambda$ .

On posera :

$$P_\lambda = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta T_i$$

Si l'on admet que le phénomène aléatoire satisfait aux conditions classiques d'ergodicité, en général réalisées et vérifiées par l'expérience (L. AGOSTINI, J. BASS 1950 ; A. BLANC-LAPIERRE, R. FORTET, J. KAMPE de FERIET 1953), la valeur  $P_\lambda$  apparaît comme une estimation de la probabilité  $P \{ \overline{X(t)} \geq \lambda \}$ . Cette probabilité est alors une quantité sans dimension, indépendante du temps pourvu que le temps d'intégration  $T$  soit suffisamment long pour permettre à un grand nombre d'évènements d'arriver.

TENNEKES et LUMLEY (1972) définissent la probabilité  $P \int \overline{X(t)} > \lambda \overline{ }$  comme la limite quand T tend vers + ∞ de

$$P_{\lambda} = \text{Prob} \int \overline{X(t)} > \lambda \overline{ } = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$

Le seuil λ varie de - 5 volts, à + 5 volts, ce qui permet si l'on applique un signal aléatoire ayant une valeur r.m.s. de 1 volt, de tracer la fonction de répartition de - 5 σ à + 5 σ (σ étant l'écart type).

### 3.3.2. Cas de deux variables

Le compteur de dépassement de seuil permet également de mesurer la probabilité jointe  $\text{Prob} \int \overline{X_1(t)} \geq \lambda_1, X_2(t) \geq \lambda_2 \overline{ }$ .

Le signal  $Y_{\lambda_1}(t)$  est égal à 1 si la variable  $X_1(t)$  est supérieure au seuil  $\lambda_1$ ;  $Y_{\lambda_2}(t) = 1$ , si  $X_2(t)$  est supérieur à  $\lambda_2$ .

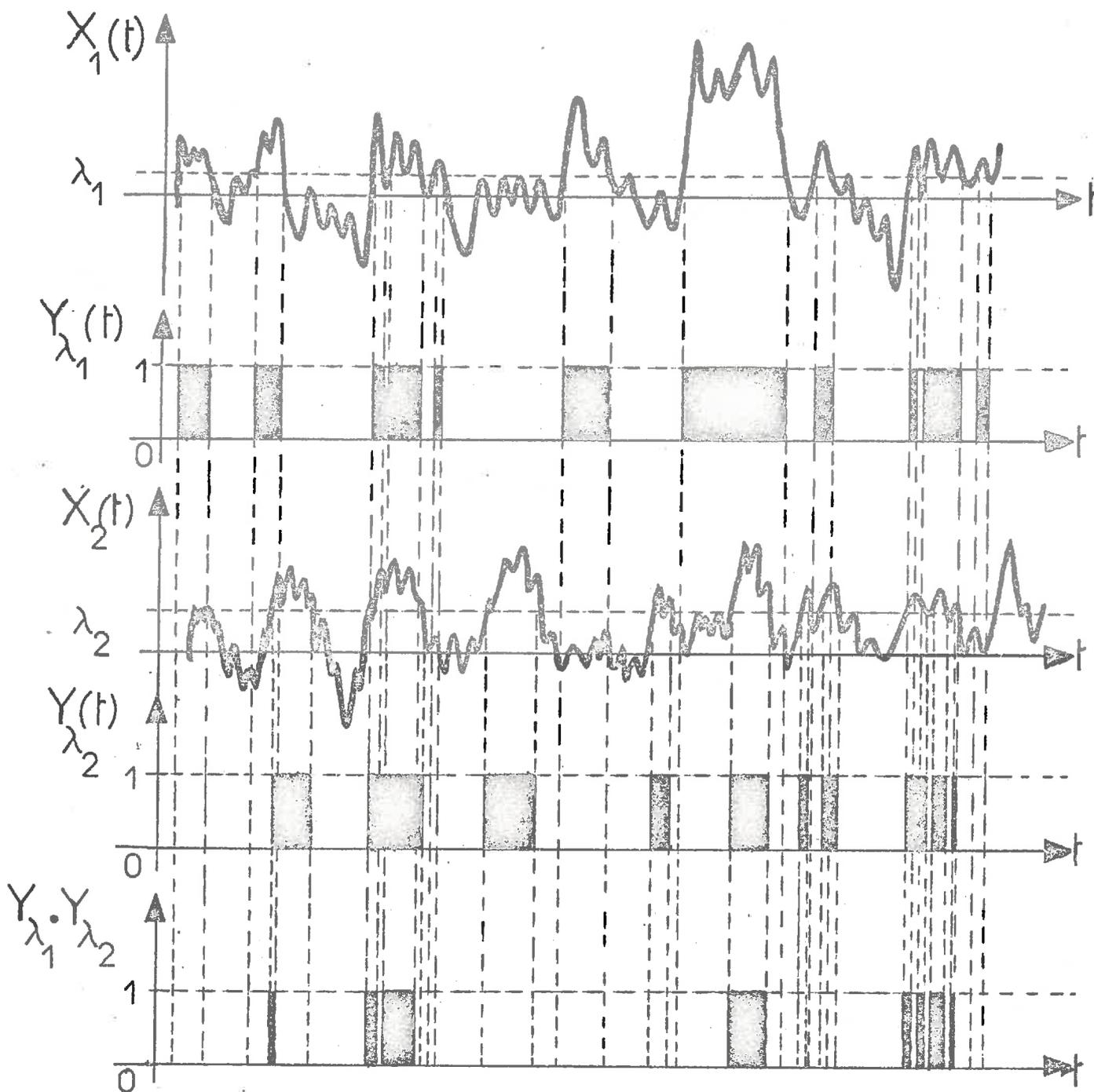
Le produit instantané des deux fonctions  $Y_{\lambda_1}(t)$  et  $Y_{\lambda_2}(t)$  est égal à 1, si  $X_1(t)$  est supérieur à  $\lambda_1$  et  $X_2(t)$  supérieur à  $\lambda_2$ . On a (cf. schéma ci-après ) :

$$\begin{aligned} \text{Prob} \int \overline{X_1(t) \geq \lambda_1, X_2(t) \geq \lambda_2} \overline{ } &= \text{Prob} \int \overline{Y_{\lambda_1}(t)=1, Y_{\lambda_2}(t)=1} \overline{ } \\ &= \text{Prob} \int \overline{Y_{\lambda_1}(t) \cdot Y_{\lambda_2}(t) = 1} \overline{ } \end{aligned}$$

Ce produit instantané est effectué à l'intérieur de l'appareil de dépassement de seuil, quand les deux chaines de mesure sont en service. C'est le signal produit qui est ensuite "choppé" à 100 kHz.

On peut donc avoir une estimation des quatre probabilités jointes suivantes :

- $P \int \overline{X_1(t) > \lambda_1, X_2(t) > \lambda_2} \overline{ }$
- $P \int \overline{X_1(t) > \lambda_1, X_2(t) < \lambda_2} \overline{ }$
- $P \int \overline{X_1(t) < \lambda_1, X_2(t) < \lambda_2} \overline{ }$
- $P \int \overline{X_1(t) < \lambda_1, X_2(t) > \lambda_2} \overline{ }$



#### 3.4. Enregistreur magnétique

La chaîne de mesure comprend un enregistreur magnétique C3 TOLANA, à têtes de lecture décalables. Cet appareil dérive du premier corrélateur réalisé par A. FAVRE pour mesurer la corrélation dans le temps (A. FAVRE 1946, 1948, A. FAVRE et al. 1950, 1953, 1954 et développé par J. GAVIGLIO (1962)).

Les têtes d'enregistrement sont fixes, seule une tête de lecture est décalable par rapport à l'autre, ce qui permet d'avancer ou de retarder une chaîne par rapport à l'autre. Le décalage de temps est déterminé en connectant un signal sinusoïdal de fréquence 1 000 Hz sur les deux voies et en regardant sur un oscilloscope l'image Lissajous des signaux en sortie d'enregistreur. Le déplacement de la tête de lecture s'effectue à l'aide d'un système mécanique, ce qui permet d'avoir un décalage de temps fixe. On peut aussi le mesurer en envoyant le même signal turbulent sur les deux chaînes, et en faisant l'intercorrélacion en sortie à l'aide du corrélateur P.A.R.

Ce dispositif permet d'introduire un temps retard de quelques fractions de millisecondes à une centaine de millisecondes. Néanmoins pour les grands décalages de temps on constate un pleurage important de la bande magnétique. L'erreur est, inférieure à 0,1 milliseconde pour les décalages de temps inférieurs à 10 millisecondes.

### 3.5. Chaîne de mesure

#### 3.5.1. Enregistrement des signaux aléatoires

Nous avons représenté sur la figure (3.5.1), le schéma du dispositif d'enregistrement des fluctuations longitudinales de vitesse, et les fluctuations thermiques.

Pour les fluctuations de vitesse, la chaîne de mesure comprend :

- le bloc d'alimentation de l'anémomètre
- le linéariseur
- un filtre DISA, utilisé en passe-bas (0-5 000 Hz)
- un amplificateur qui permet de régler la valeur du signal à l'entrée de l'enregistreur magnétique Tolana, utilisé avec une gamme de vitesse d'enregistrement, correspondant à une bande de fréquence de 0 à 2 500 Hz. Nous n'avons pas utilisé la vitesse double d'enregistrement, car cela entraînait une lecture plus rapide de l'enregistrement, et un pleurage légèrement plus important de la bande magnétique.

De plus, compte tenu de la répartition spectrale d'énergie du signal turbulent, on ne fait pas une grande erreur en limitant la bande passante de 0-2 500 Hz pour les mesures de fluctuations de vitesse.

Sur la figure 3.5.4, la courbe en traits pleins représente la bande passante de l'enregistreur Tolana. On a une coupure très franche à 2 800 Hz.

Pour l'enregistrement des fluctuations thermiques, (voir fig. 3.5.1.) la chaîne de mesure est pratiquement la même. Toutefois, lorsqu'on utilise l'enregistreur magnétique, on néglige une partie de l'énergie spectrale par suite de la fréquence de coupure du filtre passe-bas à 2 500 Hz. Le linéariseur est supprimé, car on a une réponse linéaire en sortie d'anémomètre. La compensation du signal est assurée par un amplificateur de compensation comprenant un étage de filtre, un étage d'amplification et un étage de compensation.

### 3.5.2. Lecture des enregistrements

La figure 3.5.2 représente le dispositif de lecture des enregistrements. Le signal de sortie de l'enregistreur repasse à travers le filtre DISA (bande passante 0-5 000 Hz) afin d'éliminer le bruit de fond aux hautes fréquences, que l'enregistreur peut éventuellement introduire.

Le signal est amplifié de façon à amener sa valeur efficace à 1 volt ; il est envoyé, à travers un condensateur, au discriminateur à seuil pour déterminer la fonction de répartition. Le condensateur sert à couper la tension continue, afin d'avoir un signal avec une valeur moyenne nulle. Il entraîne un affaiblissement aux alentours de 0,2 Hz.

Le signal ayant un écart type de 1 volt, l'appareil à seuil permet donc de mesurer sa fonction de répartition entre  $-5\sigma$  et  $+5\sigma$  ( $\sigma$  étant l'écart type) ; ce qui pour des signaux presque gaussiens paraît suffisant.

On peut contrôler grâce à un corrélateur P.A.R. (modèle 100), la courbe d'autocorrélation du signal enregistré, et comparer avec les mesures effectuées en direct.

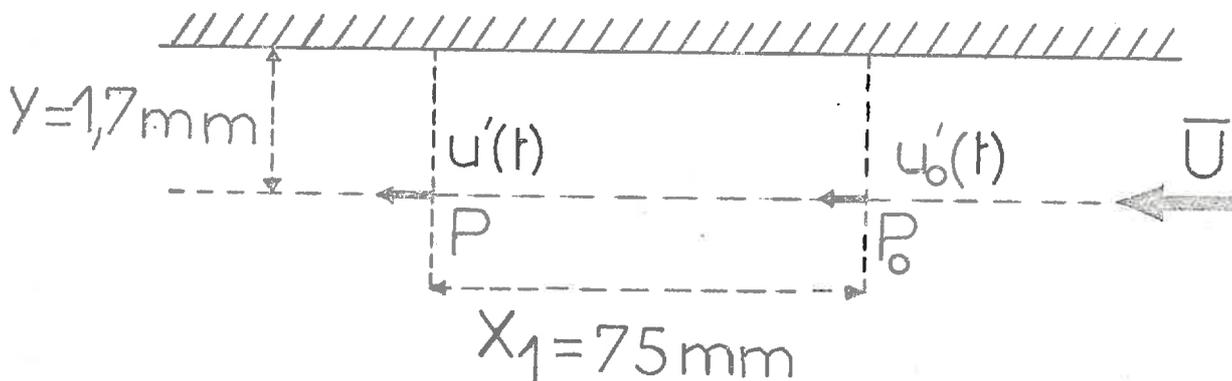
Le corrélateur P.A.R. est un calculateur hybride à mémoires capacitives. Une chaîne de mesure du corrélateur est quantifiée, tandis que l'autre chaîne reste analogique. Le décalage de temps affichable, permet de calculer la corrélation en 100 points. Les tensions de sortie du corrélateur, correspondant à la fonction de corrélation, et la base de temps, sont adressées respectivement aux voies Y et X d'une table à tracer (CIMATIC).

### 3.5.3. Mesure des probabilités liées

#### 3.5.3.1. Corrélation double

La figure 3.5.3 représente le dispositif expérimental de mesure des probabilités liées des fluctuations de vitesse en deux points distincts.

Les deux chaînes anémométriques rentrent en parallèle sur l'enregistreur Tolana, qui permet d'introduire un décalage de temps constant. Les signaux de sorties sont amplifiés, et envoyés sur les deux chaînes du discriminateur (après avoir supprimé les composantes continues à l'aide du condensateur).



Pour les mesures effectuées avec un décalage de temps, on retarde toujours le signal provenant du fil amont (point  $P_0$ ) par rapport au signal du fil aval.

On a constaté qu'il n'y avait pas de déphasage entre les deux chaînes pour toute la bande de fréquence utilisée.

#### 3.5.3.2. Corrélation triple

La figure 3.5.5. représente le dispositif de mesure de la fonction de répartition des probabilités liées de la fluctuation de vitesse en un point et du carré instantané de la fluctuation de vitesse en un autre point.

Le carré instantané est obtenu à l'aide d'un multiplicateur (P.A.R. 230). Ce multiplicateur n'introduit pas de déphasage visible à l'oscilloscope dans la gamme de fréquence 0 - 3 500 Hz, entre le signal direct et le signal carré.

On applique au signal carré une contre-tension de façon à annuler sa valeur moyenne.

Les deux signaux sont ensuite amplifiés, avant d'attaquer le discriminateur à seuil.

Le corrélateur est branché en parallèle sur le discriminateur, et on mesure ainsi en même temps la corrélation spatio-temporelle. Cette mesure est délicate, car il faut supprimer toute tension continue avant de prendre le carré du signal. En effet, soit  $a$  la tension continue résiduelle,  $u$  et  $v$  étant les signaux aléatoires, on peut écrire :

$$\overline{(v + a)^2} = \overline{v^2} + 2 \overline{av}$$

La corrélation double  $\overline{uv}$  est très importante par rapport à la corrélation triple, et elle contamine cette dernière, si on n'a pas pris la précaution de centrer la variable  $v$  avec précision.

C'est pour cette raison que l'on a mis un condensateur sur chaque chaîne. La figure 3.5.6 représente d'ailleurs la bande passante de ce dispositif de mesures.

Nous n'avons pu conserver une symétrie totale dans les deux chaînes ; néanmoins on ne constate pas de différence de phase dans la bande de fréquence utilisée, ce qui est extrêmement important pour la mesure des corrélations triples.

Il faut toutefois conserver les basses fréquences car ce sont elles qui sont responsables de la forme de la corrélation spatio-temporelle triple.

Sur la figure (3.5.7) nous avons représenté la corrélation

$$\frac{\overline{u'_0(t+\zeta) u'^2(t)}}{\sqrt{\overline{u'^2_0(t)}}^{1/2} \cdot \sqrt{\overline{u'^2(t)}}} = R_{1,11}(\zeta, X_1)$$

en fonction de la bande passante de la chaîne de mesure.

Si on élimine la partie basse-fréquence du signal turbulent, la corrélation  $R_{1,11}(\zeta, X_1)$  diminue pour les temps retard relativement grands. Le maximum de la courbe  $R_{1,11}(\zeta, X_1)$  est conservé, tandis que le minimum diminue et tend à disparaître pour une bande passante de 20 à 5 000 Hz de la chaîne de mesure.

### 3.5.4. Enregistrement des corrélations instantanées

Il s'est avéré très intéressant pour tenter d'interpréter physiquement les résultats expérimentaux d'enregistrer sur papier les différents signaux aléatoires. Pour cela on a utilisé l'enregistreur à rayons ultra-violet Bell et Howell (type 5.127). Cet enregistreur laisse passer les fréquences de 0 à 800 Hz sans déphasage et sans amortissement. On a donc enregistré le signal sur Ampex 1 300 à la vitesse de 7 1/2 inch/s et on l'a relu à la vitesse de 1 7/8 inch/s, ce qui permet de translater la bande de fréquence du signal turbulent à des valeurs compatibles avec l'enregistreur à papier.

La figure(3.5.8 ) représente les dispositifs capables de permettre l'enregistrement :

- du signal turbulent
- de la corrélation double instantanée avec décalage de temps
- de la corrélation triple instantanée avec décalage de temps.

## 4 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

### 4.1. Fonctions de répartition d'une variable

Pour mesurer la fonction de répartition d'une seule variable, soit celle des fluctuations de vitesse ou celle des fluctuations thermiques en un point, nous avons procédé par enregistrement magnétique du signal à étudier, ou par mesure directe. Les deux méthodes donnent les mêmes résultats aux incertitudes de mesure près. Cela prouve que le bruit de fond introduit par l'enregistreur magnétique TOLANA est négligeable par rapport au signal.

La mesure de la fonction de répartition d'un signal turbulent nécessite une cinquantaine de points pour avoir une bonne précision ; comme les enregistrements durent une demi-heure, cela entraîne six lectures de la même bande magnétique. Il peut apparaître des parasites dus à l'effacement du signal sur la bande magnétique. Nous avons donc préféré, dans la plupart des cas où cela était possible, effectuer les mesures en direct.

Nous ne travaillons pas sur le même échantillon statistique du signal aléatoire, mais comme le phénomène peut être supposé ergodique, les moyennes à travers plusieurs épreuves ou prélevées au hasard sur une même épreuve sont équivalentes. Il faut néanmoins pour que l'on puisse appliquer le théorème d'ergodicité, intégrer sur un temps suffisamment long de façon à ce qu'un nombre important d'évènements puisse arriver.

#### 4.1.1. Fil annulaire (fil amont)

Les mesures sont effectuées à une distance de la plaque plane de 1,7 millimètres, correspondant à  $y^+ = 67$ .

4.1.1.1. Fonction de répartition des fluctuations de vitesse

Nous avons vu précédemment (cf. 2.2.1.) que l'on pouvait tracer la fonction de répartition de la façon suivante : Prob ( U>u'o ) pour les fluctuations longitudinales positives de vitesse et Prob ( U<u'o ) pour les fluctuations négatives. U représente la variable aléatoire égale à la fluctuation longitudinale de vitesse, par rapport à la vitesse moyenne  $\bar{u}$ .

La courbe (4.1.1.) représente cette fonction de répartition en fonction de l'amplitude (sur papier gauss-arithmétique). Dans cette représentation, la fonction de répartition d'une loi gaussienne est une droite, appelée droite de HENRY (J. BASS 1968). Nous pouvons constater que les amplitudes positives et négatives (comprises entre  $\pm 1, 2 \sigma$ ,  $\sigma$  étant l'écart type des fluctuations), coïncident avec la courbe de Gauss. On peut donc en déduire que les faibles amplitudes du signal aléatoire ne contribuent pratiquement pas dans les moments impairs : essentiellement les moments d'ordre trois et cinq. Au delà de  $\pm 1,2 \sigma$ , la fonction de répartition converge vers zéro plus rapidement que la loi de Gauss. Il est évident en effet, qu'expérimentalement l'on ne peut avoir d'amplitudes infinies, ce qui correspondrait à une vitesse infinie. Le processus aléatoire étudié est physiquement un phénomène aléatoire à amplitudes bornées.

Cette convergence de la fonction de répartition expérimentale plus rapide que la fonction gaussienne, implique donc que le moment d'ordre quatre, ou coefficient d'aplatissement  $F = \frac{\langle u'o^4 \rangle}{\langle u'o^2 \rangle^2}$  est inférieur à 3, valeur correspondant à un phénomène gaussien.

On constate que pour cette position dans la couche-limite, les grandes amplitudes positives (supérieures à  $+ 1,8 \sigma$ ) sont plus probables que les grandes amplitudes négatives. Les moments impairs doivent être donc positifs. Nous pouvons vérifier ces conclusions déduites de la courbe de fonction de répartition, en calculant les différents moments par la formule établie en (2.2.1.)

$$\langle u'o^n \rangle = n \int_0^{+\infty} u'o^{n-1} P [U>u'o] du'o - n \int_{-\infty}^0 u'o^{n-1} P [U<u'o] du'o$$

Les figures(4.1.2.) à (4.1.5.) représentent les valeurs de ces fonctions intégrales. On vérifie que seuls les grands écarts (supérieurs à  $\pm 1,2 \sigma$ ) contribuent notablement aux moments impairs. On voit aussi que

les erreurs possibles commises sur l'extrapolation effectuée empiriquement, pour des écarts supérieurs à  $3\sigma$ , ne pourraient modifier notablement les valeurs des moments, tout au moins jusqu'à l'ordre cinq. En effet, si l'on arrête pour la probabilité à une valeur de un millième, les courbes  $u'_0^n \cdot P \int_U > u'_0 \int$  ne convergent pas rapidement vers zéro pour les moments d'ordre supérieur à trois. L'aire manquante sera de plus en plus importante, à mesure que l'ordre du moment calculé sera plus élevé. Nous nous sommes donc limité au calcul des moments jusqu'à l'ordre cinq, sans introduire une erreur trop importante pour la signification statistique des résultats.

La valeur des différents moments est indiquée par le tableau suivant :

n	$\langle u'_0^n \rangle / \langle u'_0^2 \rangle^{n/2}$
1	0
2	1
3	+ 0,10
4	2,84
5	+ 0,66

Pour les moments pairs, on constate :

- que le moment d'ordre deux est égal à un par définition, car la variable est réduite ;
- que le moment d'ordre quatre est inférieur à trois, en accord avec les résultats de P.S. KLEBÁNOFF (1954), J. MARCILLAT (1964) et G. COMTE-BELLOT (1965), dans la zone "linéaire" du profil de vitesse.

Pour les moments impairs :

- le facteur de dissymétrie  $S = \frac{\langle u'_0^3 \rangle}{\langle u'_0^2 \rangle^{3/2}}$  est positif : les survitesses sont légèrement plus probables que les sous-vitesses, pour cette distance à la paroi.

Les mesures de corrélation triple effectuées au corrélateur P.A.R. confirment cette valeur de S (cf. 4.4.1.1.). On a :

$$R_3(0) = \frac{\langle u'_0 \cdot (u'^2_0 - \langle u'^2_0 \rangle) \rangle}{\langle u'^2_0 \rangle^{1/2} \cdot \langle (u'^2_0 - \langle u'^2_0 \rangle)^2 \rangle}$$

c'est-à-dire :

$$R_3(0) = \frac{\langle u'^3_0 \rangle}{\langle u'^2_0 \rangle^{1/2} (\langle u'^4_0 \rangle - \langle u'^2_0 \rangle^2)^{1/2}} = \frac{S}{\sqrt{F-1}}$$

On a  $R_3(0) = + 0,07$  et  $F = 2,84$  ; on en déduit la valeur de S :

$$S = 0,095 \approx 0,10.$$

On retrouve bien la valeur calculée à partir de la fonction de répartition.

#### 4.1.1.2. Fonction de répartition des fluctuations thermiques

Sur la courbe (4.1.1.) on a représenté la fonction de répartition des fluctuations thermiques. Cette courbe a une allure semblable à celle relative aux fluctuations de vitesse.

On constate également que les faibles écarts ( $\pm 1,2\sigma$ ) coïncident à peu près avec la loi de Gauss, et ne contribuent donc pratiquement pas dans les moments impairs. Pour les grands écarts (supérieurs à  $\pm 1,6\sigma$ ) la fonction de répartition diffère de la loi de Gauss, et converge plus rapidement que celle-ci vers zéro. Donc le moment d'ordre quatre est inférieur à trois. De même les grands écarts positifs sont plus probables que les grands écarts négatifs. La différence des deux est moindre que pour les fluctuations de vitesse ; et par suite, le coefficient de dissymétrie des fluctuations thermiques est positif et inférieur à celui des fluctuations de vitesse.

Les courbes (4.1.7.) à (4.1.10) représentent les valeurs des courbes intégrales de la formule citée en 4.1.1.1.

Seuls les grands écarts (supérieurs à  $\pm 1,2\sigma$ ) contribuent notamment aux moments impairs. Les différents moments sont égaux à :

n	$\langle \theta'_0 \rangle^n / \langle \theta'_0 \rangle^2 \pi/2$
1	0
2	1
3	+ 0,02
4	2,73
5	+ 0,24

Les résultats obtenus pour les fluctuations de vitesse et température sont très voisins pour cette distance à la plaque plane  $y^+ = 67$ . Cela permettrait de confirmer l'hypothèse que les fluctuations transversales de vitesse ne contaminent pas notablement à cette distance les fluctuations longitudinales de vitesse. En effet le fil chaud mesure le module du vecteur vitesse. Si  $w'$  représente la fluctuation verticale de vitesse, on a, en supposant que l'influence de la composante parallèle au fil est négligeable :

$$\sqrt{(\bar{u} + u')^2 + w'^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 + 2 \frac{u'}{\bar{u}} + \frac{u'^2}{\bar{u}^2}} \approx \bar{u} \left( 1 + \frac{u'}{\bar{u}} \right)$$

si l'intensité relative de turbulence pour  $u'$  est faible. Dans le cas de corrélation entre  $u'$  et  $w'$ , F.N. FRENKIEL (1951) et Z. ZARIC (1969) ont montré que même si  $u'$  et  $w'$  sont gaussiens, le module du vecteur vitesse n'est plus gaussien et présente une dissymétrie, fonction des paramètres précités.

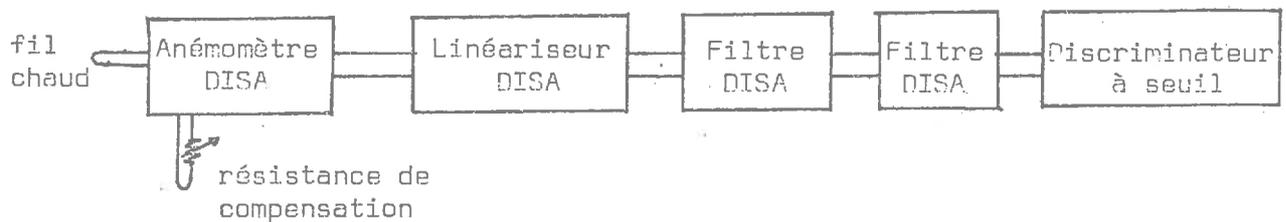
Toutefois le spectre d'énergie des fluctuations de température est beaucoup plus étendu vers les fréquences élevées que le spectre des fluctuations de vitesse. Aussi l'erreur commise par la limitation de bande passante (0-2600 Hz) est certainement non négligeable pour les fluctuations thermiques. Cette erreur peut être importante car les fréquences élevées contribuent le plus aux facteurs de dissymétrie (cf paragraphe 4.1.1.3. et thèse de FULACHIER). Ce qu'il en ressort de cette mesure c'est que, pour cette position dans la couche limite, et pour une même bande spectrale, les résultats ne diffèrent pas notablement pour la vitesse et pour la température. Z. ZARIC (1972) aboutit aux mêmes conclusions en analysant les distributions de probabilité des vitesses et des températures près de la paroi (cf. figure 4.1.6 qui donne le spectre d'énergie des fluctuations de températures en fonction de la fréquence  $n$ ).

#### 4.1.1.3. Fonctions de répartition des fluctuations de vitesse filtrées

Quelques auteurs se sont intéressés aux propriétés statistiques des fluctuations turbulentes de vitesse après filtrage par filtre à bande étroite, en particulier V.A. SANDBORN (1959). Les paramètres statistiques mesurés sont le coefficient de dissymétrie  $S$  et le coefficient d'aplatissement  $F$ . On constate que le coefficient d'aplatissement  $F$  augmente d'une façon linéaire en fonction de la fréquence d'accord du filtre. Ceci conduit SANDBORN, et par la suite de nombreux auteurs à supposer que la partie haute fréquence du signal turbulent avait une structure intermittente par rapport à la partie basse fréquence. G.K. BATCHELOR et A.A. TOWNSEND (1949) avaient déjà en 1949 pressenti cette conclusion en observant les dérivées successives de la fluctuation de vitesse. Ils avaient observé une augmentation du coefficient d'aplatissement en fonction de l'ordre de la dérivation, ce qui pour eux était dû à une intermittence interne ("spottiness") même en turbulence homogène, isotrope derrière grille. Il faut remarquer que pour un phénomène expérimental à spectre limité, la dérivation successive du signal revient à conserver progressivement que la partie haute fréquence du signal.

Nous avons préféré filtrer le signal avec un filtre passe-haut et un filtre passe-bas complémentaires, afin de séparer les parties basse fréquence et haute fréquence du signal. Ce procédé permet contrairement au filtre de bande étroite, d'interpréter plus facilement les résultats.

Pour déterminer les fonctions de répartition du signal filtré, nous avons utilisé le dispositif schématisé par la figure ci-dessous.



Les deux filtres DISA sont mis en série, afin d'obtenir une coupure plus franche de la bande de fréquence. La figure (4.1.11) représente la bande passante de la chaîne de mesure ; les filtres étant utilisés soit en passe-haut avec une bande passante de 100 à 5 000 Hz, ou soit en filtre passe-bas avec une bande passante de 0 à 200 Hz. On constate que pour ces deux types d'utilisation, la fréquence de coupure correspondant à un affaiblissement de cinquante pour cent de l'énergie du signal, est la même et égale à 140 Hz environ. Le dispositif utilisé avait malheureusement une gamme de fréquence variable par plots, nous n'avons pas pu faire varier d'une façon continue la bande de fréquence. Néanmoins, cette fréquence de coupure a été choisie compte tenu de la courbe (4.1.12) de répartition spectrale des fluctuations de vitesse. Pour cette fréquence de 140 Hz, nous nous trouvons bien en dehors de la région où le spectre d'énergie, représenté en log-log, est constant. Dans la représentation  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$ , [cf courbe 4.1.13] cette fréquence est située au delà du maximum d'énergie turbulente du signal. De plus la courbe d'autocorrélation temporelle des fluctuations longitudinales de vitesse  $R(\zeta)$  permet de définir l'échelle temporelle intégrale du phénomène  $I_\zeta$  :

$$I_\zeta = \int_0^{\infty} R(\zeta) d\zeta \quad \text{avec} \quad R(\zeta) = \frac{\langle u'_0(t) \cdot u'_0(t+\zeta) \rangle}{\langle u'^2_0(t) \rangle} - 1$$

Pour cette distance à la paroi, l'échelle intégrale temporelle  $I_\zeta$  est égale à 3,25 ms, ce qui correspond à une fréquence  $N_\zeta = \frac{1}{I_\zeta}$  de 308 Hz. Cette fréquence  $N_\zeta$  représente en fait la limite supérieure en fréquence des fluctuations qui renferment la majeure partie de l'énergie et que l'on considère comme correspondant aux "gros tourbillons". En laissant les fréquences supérieures ou inférieures à 140 Hz, nous avons isolé la partie des "gros tourbillons" qui n'interviennent pas notablement dans la dissipation par viscosité. Nous allons étudier du point de vue statistique ces deux échelles de fluctuations, par rapport au signal turbulent total.

Sur la figure (4.1.13) nous avons représenté l'énergie spectrale que l'on conserve lors de ces deux montages. Soit  $\overline{u'^2_B}$  l'énergie moyenne du signal pour la bande de fréquence 0-200 Hz et  $\overline{u'^2_H}$  celle pour la bande 100-5000 Hz. On a :

$$\frac{\overline{u'^2_B}}{\overline{u'^2}} = 0,70 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{u'^2_H}}{\overline{u'^2}} = 0,30$$

La somme de ces deux valeurs est dans le cas général différente de 1 (car les deux filtres ont une partie commune) ; mais dans notre cas particulier, elle est égale à 1.

La courbe (4.1.14) représente les fonctions de répartition des fluctuations de vitesse filtrées, en fonction de l'amplitude du signal. On constate :

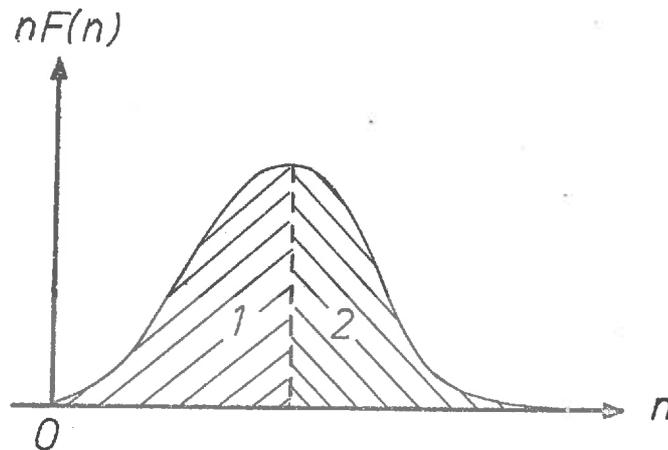
- 1) que la partie basse-fréquence a une fonction de répartition presque symétrique. Le coefficient de dissymétrie sera donc presque nul. De plus, la fonction de répartition suit la loi de Gauss pour les faibles écarts compris entre  $\pm 1,2$
- 2) que pour la partie haute-fréquence, la fonction de répartition présente une dissymétrie très forte. Les amplitudes négatives du signal turbulent suivent une loi de Gauss, et les amplitudes positives sont plus probables qu'une loi de Gauss. Le coefficient de dissymétrie est positif et a une valeur importante.

Les courbes (4.1.15) et (4.1.16) représentent les courbes intégrales (cf paragraphe précédent) du moment d'ordre trois du signal filtré entre 0 et 200 Hz, et entre 100 et 5000 Hz. La dissymétrie est très visible sur la courbe (4.1.16). Les valeurs des différents moments sont résumés dans le tableau suivant :

n	$\frac{\langle u'_{oB}{}^n \rangle}{\langle u'_{oZ}{}^n \rangle^{n/2}}$	$\frac{\langle u'_{oB}{}^n \rangle}{\langle u'_{oB}{}^2 \rangle^{n/2}}$	$\frac{\langle u'_{oH}{}^n \rangle}{\langle u'_{oH}{}^2 \rangle^{n/2}}$
1	0	0	0
2	1	1	1
3	0,09	0,00	0,32
4	2,84	2,72	3,37

Les fluctuations de vitesse aux basses fréquences apparaissent donc plus symétriques que celles du signal total. On ne peut pas dire qu'elles obéissent davantage à une loi de Gauss que le signal turbulent total, car elles diffèrent toutes les deux du même ordre par rapport à cette loi de Gauss (les coefficients d'aplatissement sont inférieurs à 3). Par contre les fluctuations de vitesse aux hautes fréquences diffèrent notablement de la courbe de Gauss et présentent une très forte dissymétrie.

Si l'on décompose le signal à l'aide d'un filtre idéal en deux parties,  $u'_1$  étant la partie basse fréquence et  $u'_2$  la partie haute fréquence, on a :



$$u = u'_1 + u'_2 \quad \text{avec} \quad q = \langle u_1'^2 \rangle \cdot \langle u_2'^2 \rangle^{-1} \quad \text{et} \\ p = \langle u_2'^2 \rangle \cdot \langle u_1'^2 \rangle^{-1}$$

et si l'on suppose qu'il y a indépendance statistique entre ces deux signaux, les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement sont égaux respectivement à :

$$S_u^* = \frac{\langle u^3 \rangle}{\langle u^2 \rangle^{3/2}} = q^{3/2} \cdot S_{u_1}' + p^{3/2} \cdot S_{u_2}'$$

et

$$F_u^* = \frac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} = q^2 \cdot F_{u_1}' + 6pq + p^2 F_{u_2}'$$

On peut comparer alors  $S_u^*$  et  $F_u^*$ , avec  $S_u$  et  $F_u$  du signal total. Si l'on trouve les mêmes valeurs, cela prouve que les différents moments  $\langle u_1^n u_2^m \rangle$  sont nuls pour  $n$  impair et pour  $m$  impair. Si les deux signaux  $u'_1$  et  $u'_2$  sont gaussiens, cela revient à dire qu'il y a indépendance statistique et par suite les fréquences sont indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire finalement que les fluctuations aléatoires considérées sont régies par une équation linéaire.

Dans notre cas particulier, on a :  $q = 0,70$  et  $p = 0,30$  ; d'après le tableau des moments précédents, on en déduit :

$$\begin{array}{ll} S_u^* & = 0,05 & S_u & = 0,09 \\ F_u^* & = 2,89 & F_u & = 2,84 \end{array}$$

Vu la précision des mesures, on ne peut pas dire que les écarts trouvés soient significatifs. A la précision près des mesures, il semble que les deux parties spectrales considérées se comportent comme deux phénomènes statistiquement indépendants. Les mesures obtenues par filtrage peuvent donc servir de critère de linéarité (selon une conversation avec M. J. KAMPE de FERIET).

4.1.1.4. Fonction de répartition des fluctuations de vitesse dérivées

Pour tester l'isotropie spatiale des "petits tourbillons", de nombreux auteurs se sont intéressés aux propriétés statistiques des dérivées des fluctuations turbulentes de vitesse. Au lieu de considérer la dérivée spatiale  $\frac{\partial(\quad)}{\partial x_i}$ , on peut considérer la dérivée temporelle, à condition que l'hypothèse de TAYLOR puisse être applicable. On a alors dans ce cas, d'après J.O. HINZE (1959) :

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x_1} = - \frac{1}{u_1} \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$$

Le signe moins est nécessaire, car à une valeur positive de  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  à un point de l'espace correspond une valeur négative de  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

De plus, les dérivées spatiales interviennent dans l'expression de la dissipation de la turbulence. On sait que la dissipation de la turbulence par unité de masse pour un fluide turbulent non isotrope est égale à (J.O. HINZE 1959) :

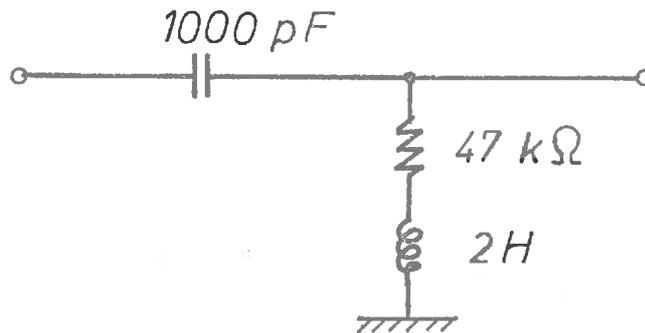
$$\epsilon = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

La détermination de la dissipation nécessite la mesure de tous les termes de la forme  $\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right\rangle$ .

Dans le cas d'une turbulence homogène, isotrope, l'expression précédente se réduit à :

$$\epsilon = 15 \nu \overline{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2}$$

Nous avons donc dérivé le signal turbulent par rapport au temps à l'aide du circuit à éléments passifs suivant :



La figure (4.1.17) représente la bande passante de ce circuit dérivateur. On ne conserve que la partie haute fréquence du spectre d'énergie des fluctuations de vitesse.

Comme précédemment, nous avons mesuré la fonction de répartition du signal dérivé, que nous avons représenté sur la figure (4.1.18). Cette fonction de répartition diffère de la fonction de répartition d'un signal gaussien : les grands écarts positifs (supérieur à  $+ 2 \sigma$ ,  $\sigma$  étant l'écart type des fluctuations) sont plus probables que ceux d'une loi de Gauss, et les grands écarts négatifs sont moins probables.

Cette courbe permet de calculer les différents moments du signal dérivé, que nous avons porté dans le tableau suivant :

n	$\frac{\overline{\left(\frac{\partial u'_0}{\partial t}\right)^n}}{\overline{\left(\frac{\partial u'_0}{\partial t}\right)^2}^{n/2}}$
1	0
2	1
3	+ 0,45
4	4,39

Nous retrouvons des valeurs très voisines de celles obtenues par G. COMTE -BELLOT (1959-1965-1966) en écoulement turbulent entre deux parois parallèles, pour la même distance exprimée en  $y^+$  de la plaque plane.

Les petites échelles de fluctuations sont très dissymétriques et contribuent le plus à donner un coefficient de dissymétrie différent de zéro.

Les figures (4.1.20) et (4.1.21) représentent les courbes intégrales relatives au moment d'ordre trois et quatre du signal dérivé. Elles mettent en évidence la dissymétrie de ce signal.

GURVICH, YAGLOM (1966) ont montré dans un schéma de processus en cascade et avec des hypothèses de similitude et d'indépendance statistique des niveaux de transferts, que le logarithme du carré d'une dérivé doit suivre une loi log-normale. La dissipation moyenne est égale à :

$$\epsilon = 15 \nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} = 15 \nu \frac{1}{u_1^2} \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2}$$

en faisant l'hypothèse de Taylor pour transformer la dérivée spatiale en dérivée temporelle.

Nous avons porté sur la figure (4.1.19), la fonction de répartition du carré du signal dérivé. La différence entre la courbe de fonction de répartition expérimentale et la loi log-normale est peut-être due au fait que le nombre de Reynolds est trop faible pour pouvoir appliquer le raisonnement de YAGLOM.

D'ailleurs, même dans les résultats expérimentaux de VAN ATTA, CHEN (1970), GIBSON, STEGEN, WILLIAMS (1970), STEWART, WILSON, BURLING (1970), obtenus pour la turbulence atmosphérique, seules les grandes amplitudes du carré du signal dérivé suivent une loi log-normale.

A titre indicatif, la figure (4.1.22) représente la fonction de répartition :

$$P^* \int_{U < u'_0} = \frac{P/\int_{U < u'_0} - P/\int_{U < 0}}{1 - P/\int_{U < 0}}$$

des amplitudes positives du signal filtré dans la bande 100-5000 Hz. Seules les grandes amplitudes positives du signal filtré tendent vers une distribution log-normale. Du point de vue expérimental, comme l'on est en présence d'un signal turbulent dont l'énergie est finie, le fait de dériver le signal revient à conserver la partie haute-fréquence de celui-ci. C'est pour cette raison que l'on retrouve les mêmes résultats expérimentaux pour les mesures faites avec un filtre passe-haut et celles faites avec un circuit dérivateur.

#### 4.1.2. Fil droit (fil aval)

##### 4.1.2.1. Fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations de température

Les fonctions de répartition des fluctuations de vitesse et de température pour le fil aval présentent la même allure que celles relatives au fil amont. Ces mesures ont été effectuées à la même distance de la plaque plane :  $y = 1,7 \text{ mm}$  ( $y^+ = 67$ ), le fil amont étant en place.

Les différents moments ont les valeurs suivantes :

Ordre du moment	Vitesse	Température
1	0	0
2	1	1
3	- 0,07	- 0,10
4	2,90	2,75
5	- 0,48	- 1,04

Nous trouvons les mêmes valeurs, aux incertitudes de mesures près, pour les fluctuations de vitesse que pour les fluctuations thermiques à cette distance de la plaque plane. Z. ZARIC (1972) aboutit aux mêmes conclusions en mesurant les distributions de probabilité des vitesses et des températures près de la paroi.

Néanmoins, nous avons trouvé pour les moments impairs un signe différent de ceux obtenus pour le fil amont. Nous avons d'abord pensé que cette différence était due à une erreur de mesure, car le dispositif expérimental servait également pour un autre travail de recherches. Après vérification, il ne semble pas que cela soit due à une erreur de montage, mais peut-être à un effet de sillage du fil amont sur le fil aval. En effet, les valeurs des différents moments des fluctuations de vitesse et de température pour le fil aval sont obtenues avec le fil amont en place. Si on enlève le fil amont, on obtient les valeurs suivantes pour les fluctuations longitudinales de vitesse :

Ordre du moment	Fil amont en place	Fil amont enlevé
1	0	0
2	1	1
3	- 0,07	+ 0,02
4	2,90	2,79
5	- 0,48	+ 0,15

Il semble bien que ce soit un éventuel sillage du fil amont sur le fil aval qui puisse faire changer de signe les moments impairs. Toutefois, il faut noter que pour cette distance à la paroi ( $y^+ = 67$ ), le moment d'ordre trois est presque nul et par suite, la dispersion statistique peut entraîner un changement de signe, et que de plus, la distance qui sépare les deux fils est très grande :  $X_1 = 75$  mm, comparée aux dimensions du capteur.

Il faudrait refaire des mesures systématiques, pour pouvoir affirmer que c'est réellement le sillage d'un fil sur l'autre qui perturbe les moments impairs (ce sillage n'est pas décelable d'ailleurs par la mesure des profils de vitesse moyenne, du moins pour cette distance  $y = 1,7$  mm, car on décèle une perturbation due au support amont dans la région  $7 \text{ mm} \leq y \leq 17 \text{ mm}$ ) (cf. figure 4.1.23).

D'ailleurs, DUMAS et al. (1972) ont montré que dans cette zone le facteur S, qui est très voisin de zéro, change de signe d'une expérience à l'autre, sans qu'une cause précise puisse être établie.

#### 4.1.2.2. Développement en série de Gram-Charlier

Pour la fonction de répartition des fluctuations thermiques, nous avons essayé de comparer cette courbe expérimentale avec un développement en série de Gram-Charlier de la loi de Gauss à une variable.

Soit X une variable aléatoire possédant pour fonction de densité de probabilité la fonction f(x) (sous réserve de son existence), et ayant des moments de tous ordres  $\mu_n$ . Si cette fonction f(x) ne diffère que très peu d'une loi normale à une variable, on peut faire un développement en série de Gram-Charlier, d'après les travaux de nombreux auteurs cités par H. CRAMER (1961) et repris par J. KAMPE de FERIET (1966). Soit  $\phi(x)$  la fonction de densité de probabilité de la loi normale à une variable :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Nous pouvons écrire que la fonction expérimentale f(x) est égale à :

$$f(x) = \phi(x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot H_n(x)$$

où  $H_n(x)$  est le polynôme d'Hermite d'ordre n, défini par la relation :

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (-1)^n \cdot H_n(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

et  $A_n$  un coefficient constant égal à :  $A_n = \frac{1}{n!} \overline{H_n(x)}$

Les premiers coefficients sont égaux à :

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = A_2 = 0$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} \mu_3$$

$$A_4 = \frac{1}{4!} (\mu_4 - 3)$$

$$A_5 = \frac{1}{5!} (\mu_5 - 10 \mu_3)$$

$$A_6 = \frac{1}{6!} (\mu_6 - 15 \mu_4 + 30)$$

-----

La série doit se terminer à un rang pair, car si x tend vers l'infini, la fonction f(x) doit être positif. Nous nous sommes donc arrêtés à l'ordre quatre :

$$f(x) = \phi(x) \cdot [1 + A_3 H_3(x) + A_4 H_4(x)]$$

Cela suppose que tous les autres coefficients  $A_n$  pour n supérieur à quatre sont nuls. Cela entraîne que l'on doit avoir :

$$\hat{\mu}_5 = 10 \mu_3$$

$$\hat{\mu}_6 = 15 \mu_4 - 30$$

-----

On compare les valeurs des moments  $\hat{\mu}_5, \hat{\mu}_6, \dots$  avec les valeurs expérimentales. L'approximation est bonne si toutes les différences trouvées sont petites.

Pour passer à la fonction de répartition, il suffit d'intégrer l'expression précédente de  $-\infty$  à x.

$$\text{Prob } [X < x] = \int_{-\infty}^x \phi(x) [1 + A_3 H_3(x) + A_4 H_4(x)] dx$$

d'où finalement :

$$\text{Prob } [X < x] = \Phi(x) - \phi(x) [A_3 H_2(x) + A_4 (H_3(x))]$$

avec :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_2(x) = x^2 - 1 \\ H_3(x) = x^3 - 3x \end{cases}$$

Nous avons essayé un développement en série de Gram-Charlier pour les différentes fonctions de répartition. Cette expansion en série orthogonale donne pour la fonction de répartition des parties faiblement négatives car on limite le développement en série au quatrième ordre.

Le tableau ( n° 2) donne la fonction de répartition théorique de Gram-Charlier pour les fluctuations de température :  $\mu_3 = - 0,10$  et  $\mu_4 = + 2,75$ .

L'approximation conduit bien pour le moment d'ordre cinq à une valeur voisine de la valeur expérimentale :

$$\hat{\mu}_5 = 10 \mu_3 = - 1,0 \quad \text{et} \quad \mu_5 = - 1,04$$

mais à partir des amplitudes supérieures à  $3 \sigma$  on a des lohes négatifs.

$\theta$	$P_{\bar{\theta}} > \theta_7$	$\theta P_{\bar{\theta}} > \theta_7$	$\theta^2 P_{\bar{\theta}} > \theta_7$	$\theta^3 P_{\bar{\theta}} > \theta_7$
0,0	506,65	0	0	0
0,2	429,41	85,88	17,18	3,44
0,4	354,09	141,64	56,65	22,66
0,6	283,31	169,99	101,99	61,19
0,8	219,29	175,43	140,35	112,28
1,0	163,70	163,70	163,70	163,70
1,2	117,43	140,92	169,10	202,92
1,4	80,63	112,88	158,03	221,25
1,6	52,73	84,37	134,99	215,98
1,8	32,63	58,73	105,72	190,30
2,0	18,93	37,86	75,72	151,44
2,2	10,14	22,31	49,08	107,97
2,4	4,88	11,71	28,11	67,46
2,6	1,97	5,12	13,32	34,62
2,8	0,54	1,51	4,23	11,85
3,0	- 0,07	- 0,21	0,63	- 1,89
3,2	- 0,26	- 0,83	2,66	- 8,52
3,4	- 0,25	- 0,85	2,89	- 9,83
3,6	- 0,19	- 0,68	2,46	- 8,86
3,8	- 0,13	- 0,49	1,88	- 7,13
4,0	- 0,07	- 0,28	1,12	- 4,48

Tableau n° 2

Nous pouvons dire en conclusion que l'approximation en série de Gram-Charlier limitée à l'ordre quatre conduit à des valeurs, pour les moments supérieurs, voisines des valeurs expérimentales, mais elle ne permet pas de représenter avec une bonne précision la fonction de répartition expérimentale en fonction de l'amplitude du signal ; pour les grandes amplitudes, il apparaît des branches négatives.

#### 4.2. Autres caractéristiques statistiques du signal turbulent

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à l'étude statistique des amplitudes du signal turbulent. Il est intéressant d'étudier le déroulement dans le temps de ce signal aléatoire. Le problème mathématique de relier par exemple la densité de probabilité des intervalles de temps séparant deux passages consécutifs de la variable aléatoire par une valeur donnée, et les fonctions statistiques telles que la fonction de répartition des amplitudes, ou le spectre d'énergie, n'est pas encore résolu, même dans le cas d'une variable gaussienne. Par exemple, deux phénomènes gaussiens en amplitude peuvent avoir des fonctions d'autocorrélation complètement différentes.

##### 4.2.1. Nombre de passages par un seuil fixé

Le nombre de passages par un seuil donné a été calculé par S.O. RICE (1944) dans le cas particulier où la variable aléatoire est gaussienne, ainsi que sa dérivée, et en supposant qu'elles sont statistiquement indépendantes. Soit  $\lambda$  la valeur du seuil, le nombre  $N_\lambda$  d'occurrence de cette valeur  $\lambda$  est égal à :

$$N_\lambda = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2\psi(0)}} \cdot \left[ -\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right]^{1/2}$$

où  $\psi(\zeta)$  est la fonction d'autocorrélation non normalisée de la variable aléatoire  $u(t)$ . Nous pouvons encore écrire :

$$\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} = -\frac{1}{u^2} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} \quad (1)$$

d'où :

$$N_\lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{u^2}} \cdot \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2u^2}}$$

Le nombre de passages à zéro est égal à :

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{u^2}} \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}}$$

H.W. LIEPMANN, J. LAUFER, K. LIEPMANN (1951) ont utilisé cette relation pour mesurer la micro-échelle de la turbulence derrière grille. La fréquence équivalente  $N$  introduite par MARTINOT-LAGARDE (1946) est égale à :

$$N^2 = \int_0^\infty n^2 F(n) dn = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\overline{u^2}} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}$$

d'où :  $N_0 = 2 N$

Le nombre mesuré de passages à zéro pour les fluctuations longitudinales de vitesse au point  $P_0$  est égal à :  $N_0 = 964$ , et la fréquence équivalente  $N$  calculée à partir de la courbe d'autocorrélation (d'après la relation 1)

$$R(\zeta) = \frac{\overline{u(t+\zeta) u(t)}}{\overline{u^2}(t)}$$

est égale à  $N = 504$ .

Nous trouvons une très légère différence entre la fréquence équivalente  $N$  calculée à partir de la courbe d'autocorrélation  $N = 504$ , et celle calculée à partir du nombre de passages à zéro :  $N' = 482$ . Cela est dû à la précision des mesures et au fait que le signal aléatoire considéré, ainsi que sa dérivée ne sont pas gaussiens. LIEPMANN et al (1951) et S. CORRSIN, A.L. KISTLER (1954) ont trouvé une différence de dix pour cent entre ces deux méthodes, dans le cas de la turbulence en aval d'une grille.

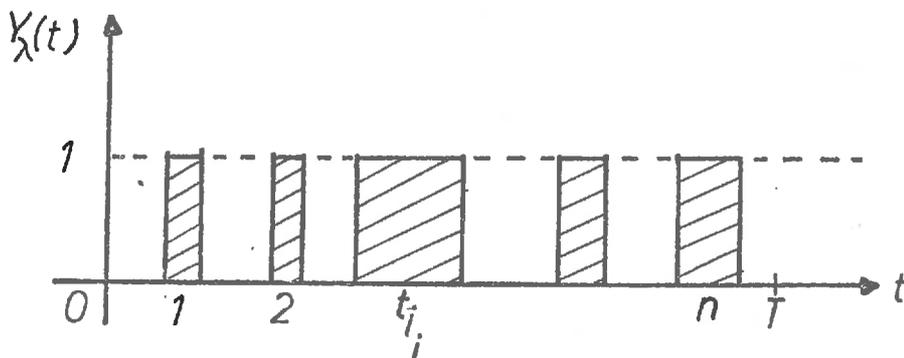
Sur la figure (4.2.1.), nous avons représenté le nombre de passages  $N_\lambda$  par la valeur  $\lambda$  pour les fluctuations longitudinales de vitesse et la courbe théorique

$$\frac{N_\lambda}{N_0} = e^{-\frac{\lambda^2}{2 \overline{u^2}}}$$

Nous constatons une fois de plus que les faibles amplitudes suivent la loi de Gauss et que les grandes amplitudes en diffèrent.

Nous avons également représenté sur la même figure la durée moyenne entre deux passages consécutifs par un niveau donné. Une relation théorique entre la durée moyenne des passages par un seuil  $\lambda$  donné en fonction de ce seuil peut être établie simplement.

Soit  $Y_\lambda(t)$  l'indicatrice de dépassement du seuil  $\lambda$  de la variable  $X(t)$ , et soit  $P_\lambda$  la probabilité pour que cette variable  $X(t)$  soit supérieure à  $\lambda$ . On a, par définition, les deux relations suivantes :



$$P \{ \overline{Y}_\lambda(t) = 1 \} = P \{ X(t) > \lambda \} = p_\lambda$$

$$P \{ \overline{Y}_\lambda(t) = 0 \} = P \{ X(t) < \lambda \} = q_\lambda = 1 - p_\lambda$$

D'après le paragraphe (3.3.1), nous pouvons donc écrire :

$p_\lambda = \frac{\sum t_i}{T}$ , et que le temps moyen  $\overline{t}_\lambda$  entre deux passages consécutifs par le seuil  $\lambda$  est égal à

$$\overline{t}_\lambda = \frac{\sum t_i}{n} \quad (n \text{ étant le nombre total de crêneaux durant le temps d'observation } T).$$

D'où finalement :  $p_\lambda = \frac{n}{T} \overline{t}_\lambda = n \overline{t}_\lambda$

$n$  étant cette fois le nombre moyen de crêneaux par seconde. Ce nombre  $n$  ne représente en fait que la moitié du nombre de passages par la valeur  $\lambda$  :

$$n = \frac{1}{2} N_\lambda$$

On a : 
$$\overline{t}_\lambda = \frac{p_\lambda}{n} = \frac{2 p_\lambda}{N_\lambda} = \frac{2 p_\lambda}{N_0 e^{-\lambda^2/2\sigma^2}}$$

La valeur  $\overline{t}_0$  pour le seuil  $\lambda = 0$  est égale à :

$$\overline{t}_0 = \frac{2p_0}{N_0} = \frac{1}{N_0} \quad \text{car par hypothèse } p_0 \text{ est égal à un demi.}$$

Le rapport  $\overline{t}_\lambda/\overline{t}_0$  a pour expression :

$$\frac{\overline{t}_\lambda}{\overline{t}_0} = \frac{2 p_\lambda}{e^{-\lambda^2/2\sigma^2}} \quad \text{avec} \quad p_\lambda = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\lambda^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$$

#### 4.2.2. Autocorrélation des crêneaux aléatoires

Nous avons vu en (3.3) qu'en sortie du discriminateur à seuil, nous pouvons avoir la fonction indicatrice  $Y_\lambda(t)$ , égale à 1 ou à 0 si le signal turbulent est supérieur ou inférieur au seuil. Cette nouvelle variable  $Y_\lambda(t)$  est intéressante à examiner, car elle permet d'analyser le déroulement dans le temps du signal aléatoire  $u(t)$  en fonction du seuil  $\lambda$ .

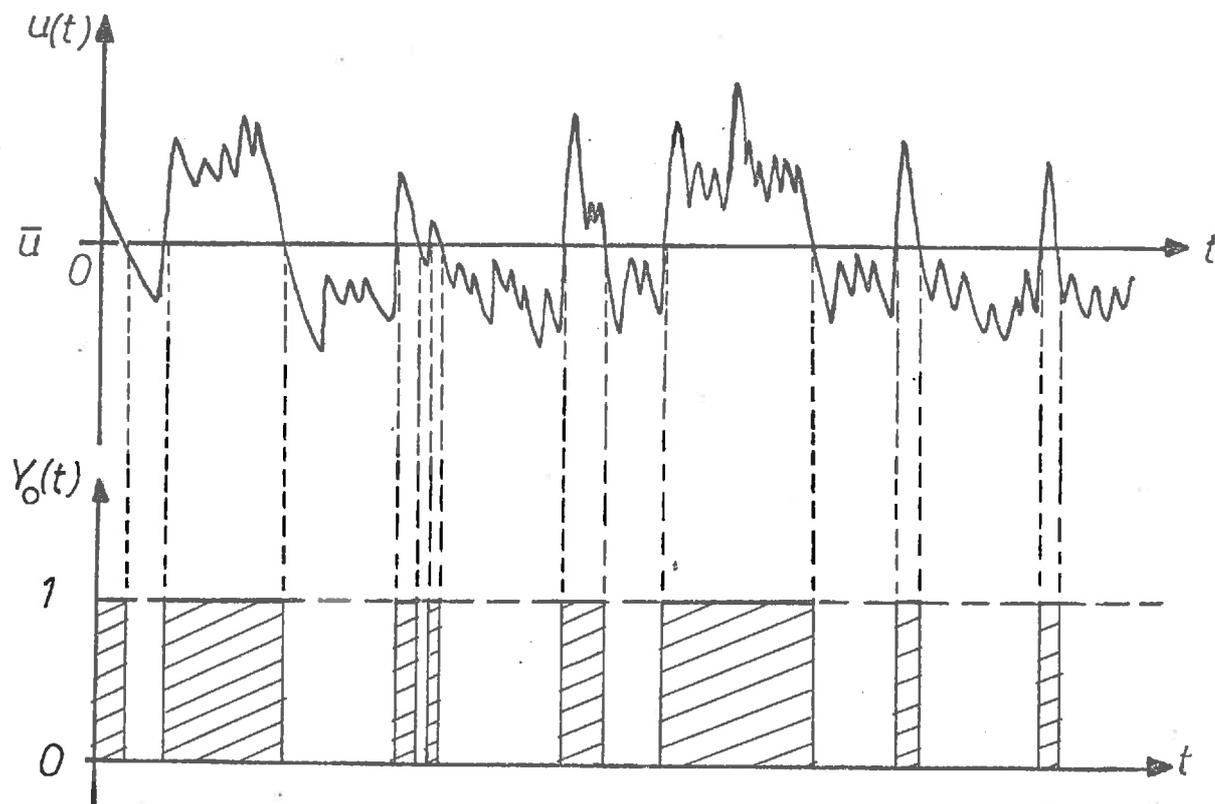
Dans le cas particulier où le seuil  $\lambda$  est nul, les deux états 1 et 0 que peut prendre la fonction  $Y_\lambda(t)$  sont équiprobables, car le signal est presque gaussien pour les faibles amplitudes. Nous pouvons alors essayer de comparer l'autocorrélation de la fonction  $Y_\lambda(t)$  avec l'autocorrélation d'un processus de Poisson, c'est-à-dire une exponentielle.

Dans le cas général où les deux états 1 et 0 ne sont plus équiprobables, on ne peut pas établir une relation générale du point de vue mathématique, pour l'autocorrélation de  $Y_\lambda(t)$ . Nous avons essayé dans l'annexe n° 1 de prolonger au cas général le processus aléatoire de Poisson où les deux états 1 et 0 sont équiprobables. Nous avons trouvé que, quelque soit le seuil  $\lambda$ , l'autocorrélation  $Y_\lambda(t)$  doit être une exponentielle, à condition que le processus soit un processus aléatoire additif, à accroissements indépendants.

Expérimentalement, nous avons trouvé que les autocorrélations de  $Y_\lambda(t)$  sont effectivement des lois exponentielles à partir d'un certain temps retard  $\zeta$ . Nous avons représenté sur la figure (4.2.2.) les courbes obtenues pour différents seuils .

Pour les grands retards de temps, la courbe expérimentale semble différer d'une loi exponentielle, mais il faut remarquer que les valeurs absolues de l'autocorrélation sont alors très faibles; et que l'imprécision des mesures devient importante.

Dans ce cas particulier où  $\lambda = 0$ , nous pouvons poursuivre le calcul mathématique de l'autocorrélation de  $Y_0(t)$  (selon une conversation personnelle avec M. J. BASS).



La covariance du signal  $Y_0(t)$  est égale à :

$$R(\zeta) = \overline{Y_0(t) Y_0(t+\zeta)} = 1 \cdot P \overline{Y_0(t) \cdot Y_0(t+\zeta)} = 1 \overline{}$$

c'est-à-dire, d'après la définition même de la fonction  $Y_0(t)$  :

$$R(\zeta) = P \overline{u(t) > 0, u(t+\zeta) > 0} \overline{}$$

Nous pouvons supposer que les deux variables  $u(t)$  et  $u(t+\zeta)$  obéissent à une distribution gaussienne à deux variables, avec  $\rho(\zeta)$  comme coefficient de corrélation.  $\rho(\zeta)$  représente en fait l'autocorrélation du signal originel  $u(t)$ .

Nous avons vu en (2.3) la relation :

$$P \overline{u(t) > 0, u(t+\zeta) > 0} \overline{=} \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } \rho(\zeta)$$

Quand  $\zeta$  tend vers l'infini,  $\rho(\zeta)$  tend vers zéro et la probabilité tend vers  $\frac{1}{4}$ . L'autocorrélation du signal  $Y_0(t)$  est égale à :

$$\Gamma(\zeta) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin } \rho(\zeta)$$

On peut déduire la relation inverse :

$$\rho(\zeta) = \sin \overline{\frac{\pi}{2} \Gamma(\zeta)} \overline{}$$

Dans ce cas particulier la fonction  $Y_0(t)$  prend les deux valeurs 1 et 0 avec des probabilités égales. On peut supposer que  $Y_0(t)$  obéit à un processus de Poisson, les changements d'état de  $Y_0(t)$  étant indépendants entre eux. On sait que dans ce cas, l'autocorrélation de  $Y_0(t)$  est une loi exponentielle (J. BASS 1968) :

$$\Gamma(\zeta) = e^{-\lambda|\zeta|}$$

D'où la relation permettant de calculer la courbe d'autocorrélation du phénomène total à partir des propriétés statistiques de la fonction indicatrice  $Y_0(t)$  :

$$\rho(\zeta) = \sin \overline{\frac{\pi}{2} e^{-\lambda|\zeta|}} \overline{}$$

Cette fonction  $\rho(\zeta)$  a bien une tangente horizontale à l'origine, mais elle ne présente pas de branches négatives.

Cette relation a été donnée par S. CORRISIN, A.L. KISTLER (1954) pour le cas de l'intermittence de frontière de la couche limite.

Nous avons essayé d'ajuster empiriquement la valeur de  $\lambda$  pour que la différence entre les courbes théorique et expérimentale soit minimale. Mais cette relation ne permet pas d'avoir un accord satisfaisant. Nous avons donc essayé de décomposer le signal turbulent en deux : d'une part les petites échelles de fluctuations et d'autre part les grandes échelles.

Nous pouvons supposer que le signal turbulent  $X(t)$  est la somme de deux signaux  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ . Si ces deux signaux sont indépendants et suivent une loi de Gauss d'écart type  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  respectivement, le signal  $X(t)$  suit une loi de Gauss d'écart type  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . L'autocorrélation de  $X(t)$  est égale par suite de l'hypothèse d'indépendance statistique entre  $X_1$  et  $X_2$  :

$$R(\zeta) = \frac{\langle X(t) X(t+\zeta) \rangle}{\sigma^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \frac{\langle X_1(t) X_1(t+\zeta) \rangle}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} \frac{\langle X_2(t) X_2(t+\zeta) \rangle}{\sigma_2^2}$$

d'où :

$$R(\zeta) = a R_1(\zeta) + b R_2(\zeta) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2}$$

On a évidemment  $a + b = 1$ . D'après l'annexe n° 1, l'autocorrélation de l'indicatrice de dépassement de  $X_1$  est égale à :

$$\Gamma_1(\zeta) = e^{-\frac{\Lambda}{2\rho\lambda q\lambda} |\zeta|}$$

où  $\Lambda$  est le nombre moyen de passages par le seuil  $\lambda$

$$\text{Pour } \lambda = 0, \text{ on a } \Gamma_1(\zeta) = e^{-2\Lambda |\zeta|} = e^{-N_0 |\zeta|}$$

$N_0$  étant le nombre moyen de passages à zéro.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les doubles des nombres moyens de passages à zéro de  $X_1$  et  $X_2$ , on a :

$$R(\zeta) = a \sin \left[ \frac{\pi}{2} e^{-\alpha |\zeta|} \right] + b \sin \left[ \frac{\pi}{2} e^{-\beta |\zeta|} \right]$$

Sur la figure (4.2.3.) nous avons représenté en échelle semi-logarithmique la courbe d'autocorrélation  $R(\zeta)$  théorique (avec  $a = 0,55$ ,  $\alpha = 315$ ,  $b = 0,45$ ,  $\beta = 2500$ ) et la courbe expérimentale. L'approximation de  $R(\zeta)$  est assez bonne et la relation trouvée peut servir pour représenter avec une bonne précision la courbe d'autocorrélation pour cette distance à la paroi.

Au-delà des temps retards de 11 ms, on a une imprécision trop grande sur la détermination expérimentale de  $R(\zeta)$ , car elle a une valeur inférieure à 2 %. De plus, ces différences intéressent des fluctuations qui n'interviennent plus notablement dans le bilan d'énergie.

A partir de cette relation, on peut, par transformée de Fourier, calculer le spectre d'énergie  $F(n)$  du signal total :

$$F(n) = 4 \int_0^{\infty} R(\zeta) \cos 2\pi n \zeta d\zeta = 4 \int_0^{\infty} a \sin \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\zeta} \cos 2\pi n \zeta d\zeta + 4 \int_0^{\infty} b \sin \frac{\pi}{2} e^{-\beta\zeta} \cos 2\pi n \zeta d\zeta$$

F1  
F2

L'intégration directe n'est pas possible, mais nous avons fait une intégration numérique sur ordinateur en remplaçant les intégrales par des séries. Le résultat de ces calculs est porté sur la figure (4.2.4). On a représenté la courbe  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$  et la courbe expérimentale. La décomposition du signal turbulent en deux parties indépendantes et gaussiennes donne pour le spectre d'énergie la même allure de variation que le spectre expérimental. On constate pour le spectre théorique une légère bosse (avec les valeurs numériques de  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  précitées); cette légère distorsion semble être également présente pour le spectre expérimental. Mais on ne peut pas conclure avec certitude par suite de l'imprécision des mesures.

A partir de la même relation, nous pouvons calculer l'échelle intégrale temporelle :

$$I_{\zeta} = \int_0^{\infty} R(\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \left[ \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} \right] \sin \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

où  $Si$  représente le sinus intégral. On trouve avec les valeurs numériques précédentes :  $I_{\zeta} = 2,6$  ms et expérimentalement  $I_{\zeta} = 3,2$  ms.

Le nombre de passages à zéro de la variable, par suite des relations déjà écrites, est égal à :

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ - \frac{d^2 R(\zeta)}{d\zeta^2} \right]^{1/2} d\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{a\alpha^2 + b\beta^2}$$

Nous trouvons  $N_0 = 847$  et expérimentalement  $N_0 = 984$ .

En conclusion, nous pouvons dire que l'hypothèse que le signal aléatoire est la somme de deux signaux indépendants, l'un représentant les basses fréquences et l'autre les hautes fréquences, conduit à des résultats théoriques très voisins des résultats expérimentaux : courbe d'autocorrélation spectre d'énergie, échelle intégrale temporelle et nombre de passages à zéro. Nous avons déjà trouvé le même résultat en analysant les fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées à l'aide d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut. Il semble donc que le concept de "gros tourbillons" et de "petits tourbillons" soit une entité physique incontestable au sein de la couche limite.

### 4.3. Fonction de répartition à deux variables

Nous allons dans ce chapitre prolonger les études statistiques entreprises précédemment au cas de deux variables. Nous avons vu dans la partie théorique que pour calculer les différents moments de la forme  $\overline{u^n v^m}$ , il fallait tracer le réseau des quatre probabilités liées de la forme :  $P \left[ \overline{U} > u, \overline{V} > v \right]$ . Ceci a nécessité la détermination de 2 600 points expérimentaux. Avant de passer aux résultats expérimentaux, nous allons rappeler les courbes d'autocorrélation et d'intercorrélation obtenues aux points  $P_0$  et P de mesures.

#### 4.3.1. Courbes d'autocorrélation et d'intercorrélation

Sur la figure 4.3.1. nous avons représenté une courbe d'autocorrélation et la courbe de corrélation spatio-temporelle

$$R_{1,1}(\zeta, X_1) = \langle u'_0(t) u'(t+\zeta) \rangle \cdot \langle u'^2(t) \rangle^{-1}$$

Le temps optimum  $T_m$  est défini comme étant le temps correspondant au maximum maximum de la corrélation  $R_{1,1}(\zeta, X_1)$ . Il est déterminé expérimentalement par l'intersection du milieu des cordes et de la courbe  $R_{1,1}(\zeta, X_1)$ . Ce temps  $T_m$  est inférieur au temps compensateur  $T_c$  défini comme étant le temps mis par le fluide pour aller d'un point à l'autre ( $T_c = X_1/\bar{V}$ ). La différence entre les temps  $T_m$  et  $T_c$  est due aux termes triples des équations aux corrélations spatio-temporelles (cf. 2.1) et aux termes de la forme  $Q_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}$  (par exemple  $u'v'(\zeta) \frac{\partial u'}{\partial v}$ ). Dans nos mesures, nous avons pour  $X_1 = 75$  mm et pour une vitesse en dehors de la couche limite de  $V_e = 16$  m/s :

$$T_m = 7,56 \text{ ms}$$

$$T_c = 8,40 \text{ ms}$$

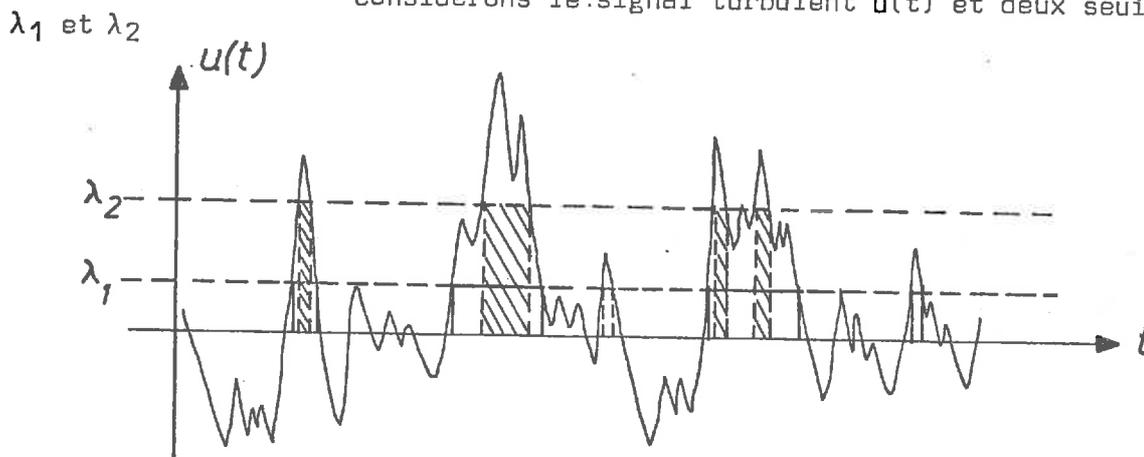
Nous nous sommes intéressés d'abord aux mesures de probabilités liées pour les fluctuations longitudinales de vitesse en un même point avec ou sans retard de temps. Les trois décalages de temps choisis sont respectivement de 0, 1,3 et 17,5 ms de façon à avoir un coefficient de corrélation égal à 1, voisin de 0,5 et pratiquement nul.

Dans un deuxième temps, nous avons recommencé ces mesures pour les fluctuations longitudinales de vitesse aux points  $P_0$  et P pour un temps retard nul et un temps retard correspondant au temps optimal  $T_m$ .

4.3.2. Cas de l'autocorrélation :

4.3.2.1. Temps retard nul

Considérons le signal turbulent  $u(t)$  et deux seuils



D'après le schéma ci-dessus, la probabilité liée est égale à :

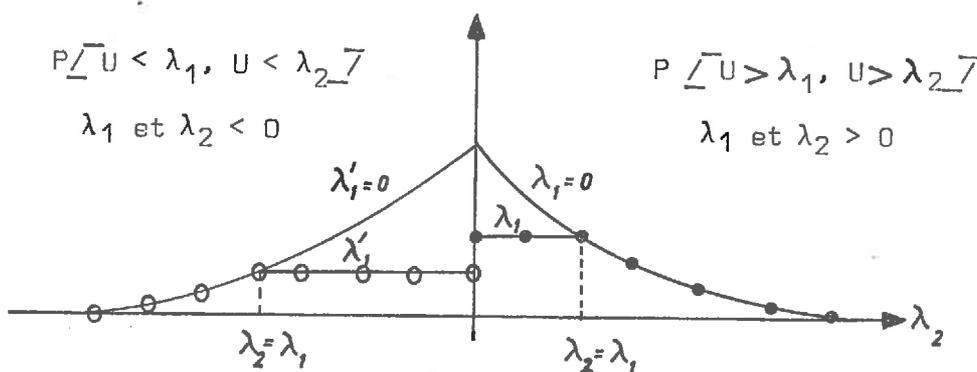
$$P[\bar{U} > \lambda_1, U > \lambda_2] = \begin{cases} P[\bar{U} > \lambda_2] & \text{si } \lambda_2 > \lambda_1 \\ P[\bar{U} > \lambda_1] & \text{si } \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases}$$

si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe.

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes contraires, on a :

$$P[\bar{U} > \lambda_1, U < \lambda_2] = 0 \quad \text{avec } \lambda_1 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 < 0$$

Le réseau des probabilités liées se réduit donc au schéma ci-dessous



Les figures 4.3.2. et 4.3.3 représentent le réseau expérimental. Si on intègre les courbes par rapport à une variable, on obtient une courbe dont l'aire donne la valeur du coefficient de corrélation (cf. 2.2.2). Dans ce cas particulier, la courbe obtenue est à comparer pour un phénomène gaussien à la fonction

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{(figure 4.3.10.)}$$

Nous pouvons dire que la courbe qui donne le coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude du signal ne diffère que très peu avec la courbe relative à une liaison gaussienne entre les deux variables.

Il semble que le moment d'ordre deux (coefficient d'autocorrélation) suive une loi de Gauss. Ce résultat est très important pour les études théoriques, comme celles entreprises par FRENKIEL et KLEBANOFF (1967). En effet, on peut supposer pour les moments élevés, que le signal turbulent a une liaison gaussienne, mais pour le coefficient d'autocorrélation, on ne sait pas si cette hypothèse est encore valable. Le résultat expérimental obtenu démontre que le coefficient d'autocorrélation en fonction de l'amplitude du signal suit une loi de Gauss.

#### 4.3.2.2. Temps retard différent de zéro

Pour un temps retard différent de zéro, le coefficient d'autocorrélation est différent de 1, et par suite il faut tracer le réseau des quatre probabilités liées.

Pour les deux temps retards  $\zeta = 1,3$  ms et  $\zeta = 17,6$  ms, les figures 4.3.4 à 4.3.9. représentent ce réseau expérimental de probabilités liées. L'intégration de ces courbes par rapport à une variable nous permet de tracer la courbe dont l'aire donne la valeur du coefficient de corrélation (figure 4.3.10.).

Comme dans le cas du temps retard nul, le coefficient d'autocorrélation en fonction de l'amplitude du signal diffère très peu de la courbe gaussienne.

Pour le temps retard  $\zeta = 17,6$  ms, le coefficient de corrélation est nul (cf. figure 4.3.1.), et dans ce cas particulier, la courbe de liaison gaussienne se réduit à l'axe des abscisses. Les points expérimentaux sont situés sur cet axe ou légèrement de part et d'autre. Il n'y a pas d'amplitudes qui diffèrent notablement d'une liaison gaussienne.

En conclusion, nous pouvons dire que la liaison entre la variable et elle-même suit une loi de Gauss pour le temps retard nul et si on introduit un décalage temporel, elle continue à persister, même pour un temps retard de 17,6 ms. Le résultat expérimental très intéressant que nous avons obtenu est résumé dans la figure 4.3.10. : la contribution des différentes amplitudes du signal dans le coefficient d'autocorrélation pour trois temps retards, suit une loi de Gauss.

#### 4.3.3. Cas de la corrélation spatio-temporelle

##### 4.3.3.1. Différents temps retards

Nous avons effectué les mêmes mesures pour la corrélation spatio-temporelle  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$ , afin d'analyser ce coefficient de corrélation spatio-temporelle en fonction de l'amplitude du signal. Les deux temps retards choisis sont respectivement de 0 ms et de 7,5 ms (temps voisin du temps optimal des corrélations spatio-temporelles doubles  $T_m = 7,56$  ms).

Les figures 4.3.11. à 4.3.14. représentent en échelle semi-logarithmique le réseau des différentes probabilités liées en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$ , pour le temps retard nul. Les figures 4.3.15. à 4.3.18. représentent le même réseau pour le temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Nous constatons que le réseau de courbes pour le temps retard nul est plus symétrique que celui pour  $\zeta = 7,5$  ms car la valeur du coefficient de corrélation est dans ce cas plus faible que pour le temps retard de 7,5 ms.

Si l'on intègre ces courbes par rapport à une variable, on obtient la contribution des amplitudes des fluctuations de vitesse au coefficient de corrélation spatio-temporelle. Sur la figure 4.3.19., nous avons porté les deux courbes dont les aires donnent le coefficient de corrélation spatio-temporelle pour le temps retard nul et le temps retard de 7,5 ms. La liaison entre les fluctuations longitudinales de vitesse aux points expérimentaux P et  $P_0$  suit avec une bonne approximation une loi de Gauss. Pour le temps retard nul, les survitesses suivent exactement cette loi, sauf pour les amplitudes supérieures à deux fois l'écart type.

Les sous-vitesses sont d'abord supérieures à la loi de Gauss et ensuite inférieures pour des amplitudes supérieures à une fois l'écart type des fluctuations.

Pour le temps retard  $\zeta = 7,5$  ms, les survitesses sont supérieures à la loi de Gauss et les sous-vitesses légèrement inférieures.

Ces mesures tendent donc à démontrer que les fluctuations longitudinales de vitesse en un point et les fluctuations longitudinales au même point ou en introduisant un décalage spatial et temporel conservent une liaison gaussienne. Les différentes courbes d'autocorrélation ou de corrélation spatio-temporelle en fonction de l'amplitude du signal pour les divers temps retards suivent avec une bonne approximation une loi de Gauss. S'il est possible assez facilement pour les moments élevés de vérifier expérimentalement que l'on a une loi de Gauss ou non, seules les mesures précises de probabilités liées permettent d'analyser le coefficient de corrélation entre les deux signaux turbulents en fonction de l'amplitude d'un des signaux et de vérifier l'exactitude d'une liaison gaussienne.

A partir des réseaux de probabilités liées, nous avons pu calculer les différents moments de la forme  $\langle u'_0^n(t)u'_0^m(t+\zeta) \rangle$  pour le temps retard nul et le temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Le tableau ci-dessous donne la valeur de ces moments jusqu'à l'ordre 6, ainsi que les moments théoriques pour une loi de Gauss à deux variables.

$\zeta = 0 \text{ ms}$

	$u'$	$u'^2$	$u'^3$
$u'_0$	+ 0,11	+ 0,04	+ 0,33
$u'_0{}^2$	- 0,03	+ 0,98	- 0,06
$u'_0{}^3$	+ 0,29	+ 0,12	+ 0,85

$\zeta = 7,5 \text{ ms}$

	$u'$	$u'^2$	$u'^3$
$u'_0$	+ 0,40	0,02	+ 0,99
$u'_0{}^2$	+ 0,04	+ 1,11	+ 0,14
$u'_0{}^3$	+ 0,99	+ 0,18	+ 2,76

Répartition théorique

	$y$	$y^2$	$y^3$
$x$	$\rho$	0	$3 \rho$
$x^2$	0	$1 + 2 \rho^2$	0
$x^3$	$3 \rho$	0	$9\rho + 6 \rho^3$

Les résultats obtenus pour les moments d'ordre trois de la forme  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  et  $u'^2_0(t) u'(t+\zeta)$  sont voisins de ceux obtenus directement par le corrélateur P.A.R. aux incertitudes de mesures près (cf. 4.4.1.).

#### 4.3.3.2. Fonction de répartition du produit instantané

Le dispositif expérimental nous a permis également d'étudier la fonction de répartition des amplitudes du signal  $u'_0(t)u'(t)$ . (Le produit instantané de ces signaux étant fait à l'aide du multiplicateur P.A.R.). La figure 4.3.20. représente cette fonction de répartition en fonction de l'amplitude (en échelle semi-logarithmique).

La décroissance de la probabilité est exponentielle aussi bien pour les amplitudes positives que négatives. Les grandes amplitudes positives du produit instantané (supérieures à 1,8 fois l'écart type des fluctuations) sont plus probables que les grandes amplitudes négatives. Ce phénomène est encore plus visible sur les courbes 4.3.21. et 4.3.22. qui représentent respectivement le moment d'ordre deux et trois du produit instantané. Le moment d'ordre trois, c'est-à-dire  $u'^3_0(t)u'^3(t)$  doit être positif, ce qui est bien en accord avec les résultats obtenus par les probabilités liées.

Nous constatons aussi que sur la figure 4.3.22. la courbe  $q^2 P_{\overline{Q}} > q_{\overline{7}}$  est différente de zéro pour une amplitude de 5 fois l'écart type. Si l'on mesure la fonction de répartition d'un signal égal au produit de deux autres, il faut évidemment avoir un appareillage électronique à beaucoup plus grande dynamique pour ne pas saturer les amplificateurs et fausser ainsi les résultats expérimentaux.

#### 4.4. Fonction de répartition à trois variables

Les mesures de fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse nous ont montré l'importance du coefficient de dissymétrie. Ce terme triple sert de critère pour mesurer l'écart entre la fonction de répartition expérimentale et une répartition de Gauss. Il intervient également du point de vue théorique dans les équations générales aux corrélations [A. FAVRE et al. (1969), J.O. HINZE (1959)], car en plus des corrélations spatio-temporelles doubles, il apparaît, du fait de la non linéarité des équations de Reynolds, des corrélations triples qu'il est donc nécessaire de mesurer pour établir un bilan de ces équations. La dissymétrie des fluctuations longitudinales de vitesse liée à la partie non gaussienne de la turbulence va entraîner des corrélations triples différentes de zéro. Ce fait conditionne le transfert d'énergie cinétique de la turbulence par elle-même.

##### 4.4.1. Courbes de corrélation spatio-temporelle triple

###### 4.4.1.1. Corrélation triple temporelle sans décalage d'espace

La figure 4.4.1 représente le coefficient de corrélation  $R_3(\zeta)$

$$R_3(\zeta) = \langle u'(t-\zeta)u'^2(t) \rangle \cdot \langle u'^2(t) \rangle^{-3/2}$$

pour les deux fils chauds amont et aval, à la distance de 1,7 mm de la plaque plane.

La corrélation triple temporelle n'est pas nulle à l'origine, car pour cette distance à la paroi ( $y^+ = 67$ ), la turbulence n'est pas tout à fait homogène et isotrope. Les valeurs de  $R_3(\zeta)$  à l'origine, pour les deux fils chauds, sont, à la précision des mesures près, égales à celles calculées à partir des fonctions de répartition.

En fonction du temps retard  $\zeta$ , les courbes  $R_3(\zeta)$  relatives aux deux fils ne sont pas identiques. Mais on ne peut pas dire si cette différence est vraiment significative car la valeur absolue de  $R_3(\zeta)$  est très faible. Néanmoins, les deux courbes représentées en 4.4.1 résultent de moyennes effectuées sur trois enregistrements successifs.

La courbe de corrélation triple temporelle présente l'allure d'une courbe antisymétrique (Rappelons d'ailleurs qu'en turbulence isotrope elle est antisymétrique par rapport à l'origine  $\zeta = 0$ ). Pour expliquer une telle forme, on peut proposer un schéma identique à celui indiqué par L.S.J. KOVASNAY et al. (1969) et BLACKWELDER (1970). Les mesures de visualisation de KLINE, RUNSTADLER (1959) et KIM et al. (1968-1971) mirent en évidence l'existence d'éruptions turbulentes ("bursts") à la surface de

la sous-couche visqueuse. Cette perturbation turbulente en général en sous-vitesse par rapport à l'écoulement local, est éjectée de cette sous-couche visqueuse dans la partie centrale de la couche limite. Ce processus d'émission rappelle d'ailleurs un phénomène d'instabilité car il apparaît une petite perturbation qui est amplifiée suivant un mode presque périodique, puis qui est éjectée dans les zones plus externes de la couche limite. Ce phénomène d'éruption de turbulence est aléatoire et stationnaire.

Cette interaction de la couche interne de la couche limite, dans laquelle la plus grande partie de la production de turbulence prend naissance (P.S. KLEBANOFF 1955) et la couche externe est importante dans le processus physique qui détermine la structure de l'écoulement.

Si l'on suppose que ce processus de formation de "bursts" turbulents a une distribution uniforme dans le temps, et que ces "bursts" se produisent à des instants indépendants entre eux du point de vue statistique, on peut appliquer le théorème de RICE (RICE (1949), MIDDLETON (1960)). En effet, RICE a montré que pour un signal aléatoire composé de perturbations indépendantes et ayant une distribution temporelle uniforme, l'autocorrélation du signal aléatoire est égale à celle d'une perturbation isolée.

Faisons une application pratique de ce modèle très schématique en considérant une perturbation de vitesse de la forme :

$$u(t) = - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On a évidemment pour que la valeur moyenne du signal soit nulle une sous-vitesse et une sur-vitesse. L'autocorrélation de  $u(t)$  est égale à :

$$\langle u(t) u(t+\zeta) \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\zeta^2}{4} \right] \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{4}}$$

et

$$R(\zeta) = \langle u(t) u(t+\zeta) \rangle \cdot \langle u^2(t) \rangle^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\zeta^2}{2} \right] \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{4}}$$

$R(\zeta)$  est une fonction symétrique, avec une tangente horizontale à l'origine et qui présente deux lobes négatifs. Sur la figure 4.4.2, on a représenté le type de perturbation  $u(t)$ , ainsi que le coefficient d'autocorrélation en fonction du décalage de temps  $\zeta$ .

De même, on peut calculer la corrélation triple temporelle :

$$R_3(\zeta) = \langle u(t+\zeta) u^2(t) \rangle \cdot \langle u^2(t) \rangle^{-3/2} = - \frac{(2\sqrt{4\pi})^{3/2}}{27\pi \sqrt{3}} \cdot \zeta^3 \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{3}}$$

C'est une courbe antisymétrique avec une tangente horizontale à l'origine, comme l'on peut le constater sur la figure 4.4.2. Un tel modèle mathématique relativement simple, basé sur les mesures de KLINE et al. (1959-1967) permet de retrouver l'allure générale de la courbe de corrélation triple temporelle.

La courbe expérimentale  $R_3(\zeta)$  ne passe pas à l'origine pour  $\zeta = 0$  et n'a pas de tangente horizontale pour cette valeur. En dilatant l'échelle des temps, nous n'avons pas pu conclure sur la valeur exacte de cette dérivée à l'origine car la courbe  $R_3(\zeta)$  est obtenue point par point grâce au corrélateur P.A.R, et non d'une façon continue.

Au voisinage de  $\zeta = 0$ , on peut faire un développement limité de  $R_3(\zeta)$  :

$$R_3(\zeta) = R_3(0) + \zeta \frac{d R_3(0)}{d\zeta} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{d^2 R_3(0)}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^3}{6} \frac{d^3 R_3(0)}{d\zeta^3} + \epsilon$$

$\epsilon$  étant un infiniment petit d'ordre supérieur.

Si on suppose le processus aléatoire et stationnaire, le second terme est égal à :

$$\frac{d R_3(0)}{d\zeta} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \frac{\overline{u(t+\zeta)u^2(t)}}{(\overline{u^2})^{3/2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{(\overline{u^2})^{3/2}} \frac{d}{d\zeta} \overline{(u(t+\zeta))u^2(t)}$$

On a de plus :

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d}{d\zeta} \overline{(u(t+\zeta)) u^2(t)} = \frac{d}{dt} \overline{(u(t)) u^2(t)} = \frac{1}{3} \frac{d \overline{u^3}}{dt} = 0$$

car le signal  $u(t)$  est stationnaire.

La courbe  $R_3(\zeta)$  doit donc avoir une tangente horizontale pour  $\zeta = 0$ .

J.O. HINZE (1959) a montré que pour la turbulence homogène, isotrope, la corrélation spatiale a une tangente horizontale à l'origine. Si on fait l'hypothèse de Taylor (J.O. HINZE 1959) d'équivalence entre le temps et l'espace par la relation  $X = \bar{V} \cdot \zeta$ , la corrélation triple temporelle doit avoir également une tangente horizontale pour  $\zeta = 0$ .

Pour essayer d'expliquer les différences entre la courbe expérimentale et son allure théorique, nous avons introduit un modèle de perturbation dissymétrique. Pour cela nous avons utilisé le développement en série de Gram-Charlier de la courbe de Gauss (cf. 4.1.2.2). Si on se limite au troisième terme de la série, on a :

$$u(t) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[ 1 - 3 t A_3 + A_3 t^3 \right]$$

c'est-à-dire

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[ -t + 3 A_3 t^2 - A_3 t^4 \right]$$

La courbe  $u(t)$  présente des légères oscillations pour les grandes valeurs de  $t$ , car nous nous sommes arrêtés au troisième terme. On pourrait reprendre les calculs en poussant plus loin le développement, mais les calculs deviennent rapidement assez considérables.

Le coefficient  $A_3$  est un paramètre libre, lié au moment d'ordre trois de  $u(t)$  par la relation

$$A_3 = \frac{1}{3!} \langle u^3(t) \rangle$$

On trouve pour le coefficient de corrélation :

$$R(\zeta) = \langle u(t) u(t+\zeta) \rangle \cdot \langle u^2(t) \rangle^{-1} = \frac{\Delta'_\zeta}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{4}}$$

avec :

$$\Delta'_\zeta = \frac{1}{2} + \frac{69}{16} \cdot A_3^2 - \frac{\zeta^2}{2^2} \cdot (1 + 12 A_3^2) + \frac{\zeta^4}{2^4} \cdot \frac{33}{2} A_3^2 - \frac{\zeta^6}{2^6} \cdot 8 A_3^2 + \frac{\zeta^8}{2^8} \cdot A_3^2$$

$R(\zeta)$  est bien une fonction symétrique, avec une tangente horizontale à l'origine.

Pour la corrélation triple, on a :

$$\langle u(t+\zeta) u^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{3}} \cdot \Delta'_\zeta$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta'_\zeta = & A_3^3 \cdot \frac{20}{27} + A_3 \cdot \frac{4}{3} + \frac{\zeta^2}{3^2} (- A_3^3 \cdot 84 + A_3^2 \cdot 32 - A_3 \cdot 12) \\ & + \frac{\zeta^3}{3^3} (- 2 + A_3^3 \cdot 120 - A_3^2 \cdot 88 + A_3 \cdot 36) \\ & + \frac{\zeta^4}{3^4} (- A_3^3 \cdot 262 + A_3^2 \cdot 72 - A_3 \cdot 90) \\ & + \frac{\zeta^5}{3^5} (- A_3^3 \cdot 1650 + A_3^2 \cdot 1944 + A_3 \cdot 36) \\ & + \frac{\zeta^6}{3^6} (- A_3^3 \cdot \frac{2560}{3} - A_3^2 \cdot 144 - A_3 \cdot 120) \\ & + \frac{\zeta^7}{3^7} ( A_3^3 \cdot 324 + A_3^2 \cdot 2160) \\ & + \frac{\zeta^8}{3^8} (- A_3^3 \cdot 942 - A_3^2 \cdot 72) \\ & + \frac{\zeta^9}{3^9} ( A_3^3 \cdot 216 + A_3^2 \cdot 3486) \\ & + \frac{\zeta^{10}}{3^{10}} (- A_3^3 \cdot 612) \\ & + \frac{\zeta^{11}}{3^{11}} ( A_3^3 \cdot 36 + A_3^2 \cdot 1458) \end{aligned}$$

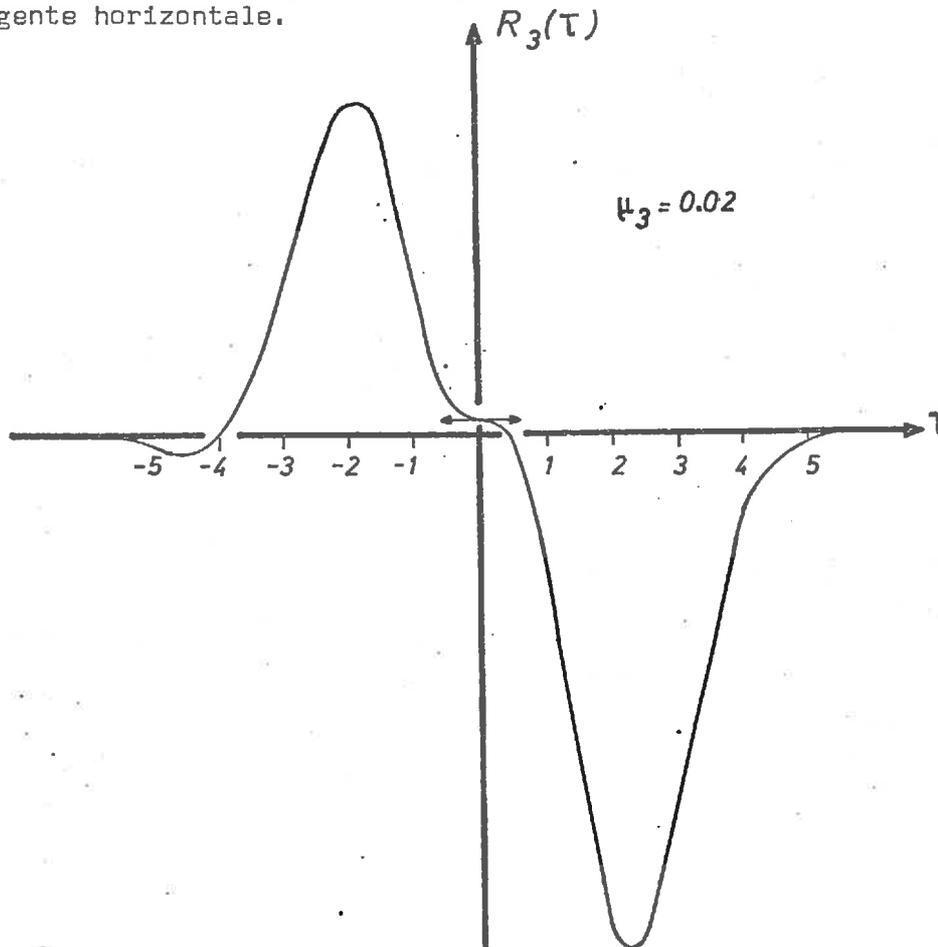
$$+ \frac{\zeta^{12}}{3^{12}} (-A_3^3 \cdot 124)$$

$$+ \frac{\zeta^{13}}{3^{13}} (A_3 \cdot 162)$$

On a pour  $\zeta = 0$  :  $\langle u^3(t) \rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} 12 A_3 + \frac{20}{27} A_3^3 \overline{\tau}$

et  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\zeta} \langle u(t+\zeta) u^2(t) \rangle \overline{\tau} = 0$

La courbe  $R_3(\zeta)$  n'est plus une courbe symétrique, et de plus elle ne passe plus à l'origine pour  $\zeta = 0$ , mais elle conserve en ce point une tangente horizontale.



Nous avons comparé sur la figure 4.4.3 nos résultats expérimentaux avec ceux obtenus derrière une grille de turbulence, car il n'y a pas à notre connaissance dans la bibliographie d'auteurs qui citent de telles courbes en couche limite sur plaque plane. Nous avons utilisé les mesures de STEWART (1950) obtenues à un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur conventionnelle de couche limite de notre expérience. En faisant l'hypothèse de Taylor, on transforme la corrélation triple spatiale de STEWART en corrélation temporelle. Cette hypothèse est généralement assez bien vérifiée derrière grille de turbulence, à partir d'une certaine distance de cette dernière.

De plus, nous avons représenté sur la même figure les corrélations triples temporelles de VAN ATTA et CHEN (1988) obtenues derrière grille de turbulence. Pour tenir compte des différences d'échelle entre les mesures de VAN ATTA et CHEN et les nôtres, nous avons comparé les échelles intégrales temporelles obtenues par planimétrage des courbes d'autocorrélation temporelle. Nous avons trouvé les résultats suivants :

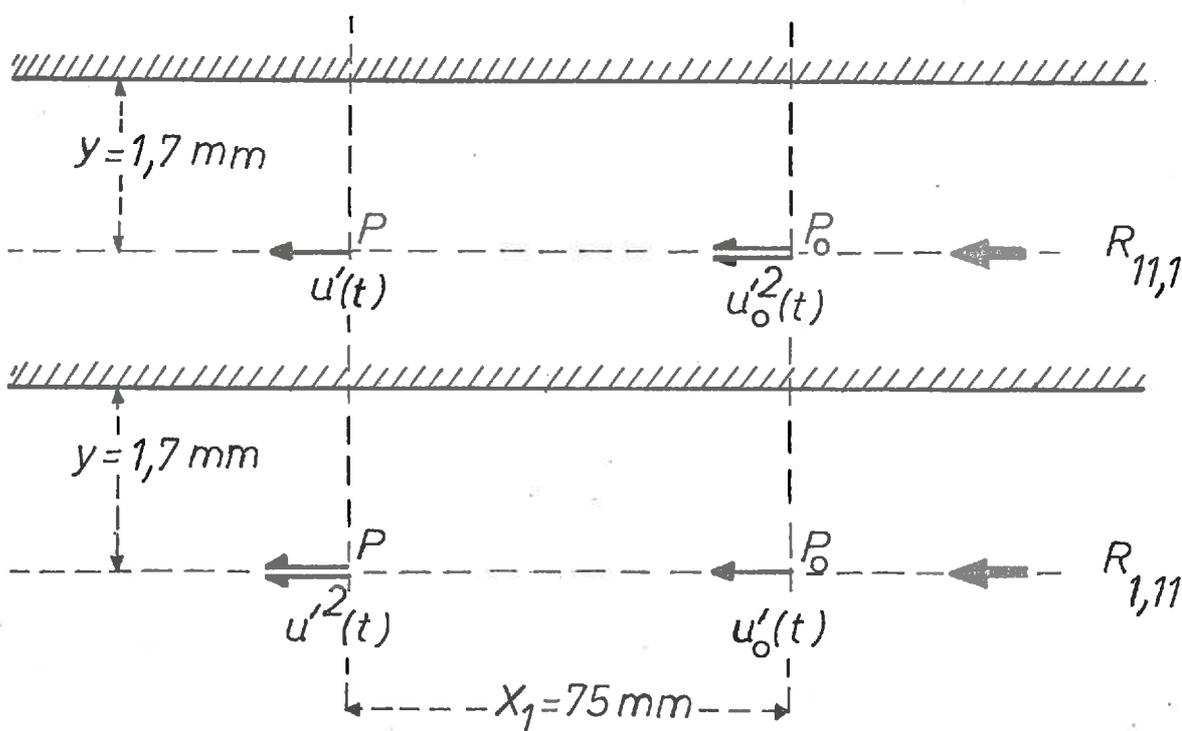
- VAN ATTA et CHEN :  $I'_\zeta = 0,75 \text{ ms}$
- nos mesures :  $I_\zeta = 3,25 \text{ ms}$

Il suffit donc de porter les résultats de VAN ATTA et CHEN en fonction de  $\zeta \cdot \frac{I}{I_\zeta}$  pour obtenir des mesures comparables.

Sur la figure 4.4.3 on constate une ressemblance entre les courbes obtenues derrière grille de turbulence et à l'intérieur de la couche limite, pour cette distance à la paroi de  $y^+ = 67$ . Les maximum et minimum coïncident à peu près au même temps  $\zeta$ , ainsi que la valeur de la corrélation pour les temps retards positifs. La courbe expérimentale présente seule une dissymétrie, contrairement aux courbes de corrélation triple derrière grille de turbulence qui ont de plus une tangente horizontale à l'origine. En conclusion, nous pouvons dire que la courbe expérimentale se rapproche de celles obtenues en turbulence homogène et isotrope derrière grille ; les différences constatées étant dues à la nature même de la turbulence de la couche limite qui se développe sur la plaque plane.

#### 4.4.1.2. Corrélation spatio-temporelle triple

Nous avons mesuré les corrélations spatio-temporelles triples entre les deux points de mesure  $P_0$  et  $P$ , représentées par le schéma ci-dessous :



Les corrélations triples sont liées aux fluctuations de grandes amplitudes. En introduisant un décalage spatial suffisamment grand, elles sont liées aux grandes structures qui dominent l'écoulement. Le décalage longitudinal  $X_1$  est égal à 1,6 fois l'épaisseur de la couche limite.

La figure 4.4.4 donne les valeurs de ces deux corrélations en fonction du temps retard  $\zeta$ . Les courbes obtenues sont antisymétriques. Pour expliquer la différence de signe à l'origine et la forme de ces deux courbes, nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Si l'hypothèse de TAYLOR est applicable, on peut écrire :

$$\overline{u'^2(t) u'(t+\zeta, X_1)} = \overline{u'^2(t) u'(t+\zeta - 2 T'_c, -X_1)}$$

où  $T'_c$  est un temps retard défini par la relation  $T'_c = \frac{X_1}{c}$

$c$  étant une célérité de transport supposée constante. Si on fait un changement d'origine des temps, on a finalement :

$$\overline{u'^2(t) u'(t+\zeta, X_1)} = \overline{u'^2(t+2T'_c-\zeta) u'(t, -X_1)}$$

soit :

$$R_{1,1}(\zeta) = R_{1,1}(2T'_c-\zeta)$$

La courbe  $R_{1,1}(\zeta)$  apparaît donc comme la courbe  $R_{1,1}(\zeta)$  décrite en sens contraire à partir du temps retard  $2 T'_c$ . On peut déterminer ce temps  $T'_c$  graphiquement de façon à minimiser les différences entre  $R_{1,1}(\zeta)$  et  $R_{1,1}(2T'_c-\zeta)$ . Mais cette méthode ne conduit pas à une valeur très précise du temps  $T'_c$ . Nous avons adopté une autre méthode basée sur le développement limité de la corrélation temporelle triple.

Considérons la corrélation temporelle triple sans décalage d'espace :

$$R_3(\zeta) = \langle u'(t+\zeta) u'^2(t) \rangle \cdot \langle u'^2(t) \rangle^{-3/2}$$

Nous pouvons faire un développement limité de  $R_3(\zeta)$  au voisinage de  $\zeta = 0$

$$R_3(\zeta) = R_3(0) + \zeta \frac{dR_3(0)}{d\zeta} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{d^2R_3(0)}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^3}{6} \frac{d^3R_3(0)}{d\zeta^3} + \epsilon$$

(I)            (II)            (III)            (IV)

Le terme (I) est différent de zéro, le terme (II) est nul d'après 4.4.1.1. En supposant le processus aléatoire et stationnaire, le troisième terme est égal à :

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\langle u'^2 \rangle^{3/2}} \frac{d^2}{d\zeta^2} \langle u'(t+\zeta) u'^2(t) \rangle \\
 &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\langle u'^2 \rangle^{3/2}} \left\langle \frac{d^2}{d\zeta^2} (u'(t+\zeta)) u'^2(t) \right\rangle = \frac{1}{\langle u'^2 \rangle^{3/2}} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} (u'(t)) u'^2(t) \right\rangle \\
 &= - \frac{2}{\langle u'^2 \rangle^{3/2}} \left\langle \left( \frac{du'(t)}{dt} \right)^2 u'(t) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Ce terme est très petit car les spectres de  $\left(\frac{du'}{dt}\right)^2$  et  $u'$  sont très différents.

Un calcul identique permet d'écrire pour le terme (IV)

$$\langle u'^2 \rangle^{3/2} \frac{d^3 R_3(0)}{d\zeta^3} = - 2 \left\langle \left( \frac{du'}{dt} \right)^3 \right\rangle - 6 \left\langle u' \frac{du'}{dt} \frac{d^2 u'}{dt^2} \right\rangle \approx - 2 \left\langle \left( \frac{du'}{dt} \right)^3 \right\rangle$$

L'origine est donc un point d'inflexion pour la courbe  $R_3(\zeta)$  et la pente de la courbe  $R_3(\zeta)$  au voisinage de  $\zeta = 0$  dépend du coefficient de dissymétrie des fluctuations de vitesse dérivées.

Si nous revenons à notre problème initial de comparer les courbes  $R_{11,1}(\zeta)$  et  $R_{1,11}(2 T'_c - \zeta)$ , le temps  $T'_c$  est déterminé graphiquement de façon à ce que les temps retards relatifs aux points d'inflexions des deux courbes coïncident (cf. figure 4.4.5). Nous avons trouvé  $2 T'_c = 13,7$  ms, soit  $T'_c = 6,85$  ms. Ce temps correspond à une célérité de transport supérieure à la vitesse de la matière au point de mesure considéré.

Par ailleurs, on peut comparer (figure 4.4.6) la courbe  $R_{11,1}(\zeta, X_1)$  avec les courbes  $R_3(\zeta, 0)$  obtenues pour les fils amont et aval en introduisant pour  $R_{11,1}$  un décalage de temps  $T''_c$  égal au temps correspondant au point d'inflexion. On trouve  $T''_c \approx 7,4$  ms.

On constate que l'on obtient des temps  $T'_c = 6,85$  ms et  $T''_c = 7,4$  ms inférieurs au temps optimal des corrélations doubles  $T_m = 7,56$  ms et au temps compensateur  $T_c = 8,40$  ms. Ces résultats confirment que les corrélations spatio-temporelles triples sont dues aux fluctuations de grandes échelles.

#### 4.4.2. Fonctions de répartition du terme triple

Nous nous sommes intéressés à la mesure de la fonction de répartition du terme  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  pour deux temps retards :  $\zeta = 0$  et  $\zeta = 7,5$  ms. Nous avons donc mesuré les deux probabilités liées suivantes :

$$P \int U > u'_0(t), V > u'^2(t+\zeta) \int \text{ pour } u'_0 > 0$$

et

$$P \int U < u'_0(t), V > u'^2(t+\zeta) \int \text{ pour } u'_0 < 0$$

Les quatre figures 4.4.8 à 4.4.11 représentent l'allure générale de ce réseau de courbes pour les deux temps retards. On peut constater sur les deux courbes 4.4.8 et 4.4.9 que les probabilités liées ont une décroissance exponentielle en fonction de l'amplitude du signal carré. S'il y avait indépendance statistique entre les deux variables, la probabilité liée serait égale au produit des deux probabilités : c'est-à-dire d'un terme constant puisque l'on trace les courbes à  $u'_0$  constant et d'une loi du  $x^2$  à un degré de liberté. La loi du  $x^2$  présente pour les amplitudes supérieures à une fois l'écart type une décroissance quasi exponentielle en fonction de l'amplitude. Les courbes expérimentales présentent bien cette décroissance exponentielle, mais elles convergent plus rapidement que la loi du  $x^2$ . Il est normal du point de vue physique que cette convergence soit plus rapide car on ne peut pas avoir des amplitudes infinies qui correspondraient à des vitesses infinies.

Les courbes 4.4.10 et 4.4.11 présentent les mêmes allures de variations en fonction de l'amplitude du signal carré  $u'^2(t+\zeta)$  pour  $\zeta = 7,5$  ms. Nous constatons à partir de ce réseau de courbes que pour mesurer les fonctions de répartition du terme triple  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$ , il faut avoir un appareillage électronique à grande dynamique. En effet, les probabilités liées ont une valeur inférieure à un millième pour des amplitudes supérieures à six fois l'écart type des fluctuations. Il en est de même si l'on veut mesurer la valeur de la corrélation triple : il faut avoir un appareillage qui laisse passer sans saturation et sans déphasage les fluctuations de 6 fois au minimum l'écart type de ces fluctuations. C'est pourquoi les mesures précises de corrélations triples sont très délicates à effectuer.

A partir de ce réseau de courbes, nous pouvons calculer le moment d'ordre 3 en fonction de l'amplitude du signal. Sur la figure 4.4.12 nous avons représenté les courbes intégrales :

$$\int_0^{\infty} P \int U > u'_0(t), V > u'^2(t+\zeta) \int d(u'^2) \text{ pour } u'_0 > 0$$

et

$$\int_{-\infty}^0 P \int U < u'_0(t), V > u'^2(t+\zeta) \int d(u'^2) \text{ pour } u'_0 < 0$$

pour les deux temps retards  $\zeta = 0$  et  $\zeta = 7,5$  ms. La différence des deux courbes intégrales représente la valeur de la corrélation spatio-temporelle triple.

On constate que l'ensemble des amplitudes du signal contribue de la même façon dans la corrélation spatio-temporelle triple. Le décalage d'espace introduit revient à éliminer les hautes fréquences du signal et à ne conserver que les structures à basse fréquence.

A partir de la courbe 4.4.12, nous avons trouvé :

$$R_{1,11}(0, X_1) = 0,02$$

et

$$R_{1,11}(7,5 \text{ ms}, X_1) = 0,02.$$

Ces deux valeurs sont voisines de celles obtenues par le corrélateur P.A.R. et par les fonctions de répartition du signal  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$

#### 4.5. Enregistrement des corrélations spatio-temporelles doubles et triples instantanées

Le dispositif expérimental (cf. 3.5.4) nous a permis d'enregistrer sur papier photosensible les corrélations spatiotemporelles doubles et triples instantanées. Ces différents enregistrements vont nous aider à interpréter les résultats expérimentaux obtenus.

##### 4.5.1. Corrélations spatio-temporelles doubles

###### 4.5.1.1. Enregistrement pour différents temps retards

Les différents enregistrements (cf. figures 4.5.1 à 4.5.4) représentent les variations temporelles du terme  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  pour trois temps retards. Ces temps retards correspondent respectivement pour  $\zeta = 0$  ms à la corrélation spatio-temporelle double sans décalage de temps, pour  $\zeta = 7,50$  ms au maximum de cette corrélation et pour  $\zeta = 17,50$  ms à une corrélation pratiquement nulle (cf. courbe 4.3.1).

Pour le temps retard nul, le terme  $u'_0(t)u'(t)$  présente des variations très fluctuantes et très importantes au cours du temps. On constate des brusques variations d'amplitudes, ce qui correspond à une corrélation très forte, soit positive soit négative. C'est-à-dire que les fluctuations longitudinales de vitesse aux points  $P_0$  et  $P$  sont en phase ou en opposition de phase. Pour ce temps retard, on a plus d'amplitudes positives que de négatives, ce qui en valeur moyenne va conduire à un coefficient de corrélation positif.

Pour le temps retard correspondant au temps optimal  $T_m$  des corrélations doubles, le signal  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  est dissymétrique : les amplitudes positives sont plus importantes. Par suite, le coefficient de corrélation a une valeur positive plus grande que pour le temps retard nul. Enfin, pour le temps retard de 17,50 ms le signal  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  présente pratiquement autant d'amplitudes positives que d'amplitudes négatives, ce qui explique la valeur très faible du coefficient de corrélation.

###### 4.5.1.2. Comparaison entre le signal direct et la corrélation spatio-temporelle double

Sur les deux figures 4.5.5 et 4.5.6, nous avons comparé les enregistrements instantanés du signal  $u'_0(t)$  et des signaux  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  pour un temps retard  $\zeta$  correspondant au temps optimal  $T_m$  ( $= 7,50$  ms). Les perturbations de grandes amplitudes de la corrélation double correspondent aux variations de grandes amplitudes du signal  $u'_0(t)$ . Toutes les grandes amplitudes du signal  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  coïncident avec les grandes amplitudes de  $u'_0(t)$ , seul le signe est parfois différent. Si les fluctuations de vitesse aux points  $P_0$  et  $P$  sont en phase, on a une amplitude positive et si elles sont en opposition de phase, on a une amplitude négative.

#### 4.5.2. Corrélations spatio-temporelles triples instantanées

Nous avons également enregistré le terme de corrélation spatio-temporelle triple  $u'_0(t)u'^2(t+\zeta)$  pour différents temps retards.

##### 4.5.2.1. Corrélations spatio-temporelles triples instantanées pour différents temps retards

La corrélation spatio-temporelle triple pour les différents temps retards présente une allure très intermittente (figures 4.5.7 à 4.5.10).

Le signal  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  a d'importantes variations d'amplitudes durant des temps relativement courts, suivies de périodes de calme. Pour expliquer un tel aspect du signal, il suffit de considérer le terme triple instantané  $u'^3(t)$  : toutes les fluctuations d'amplitudes inférieures à une fois l'écart type du signal  $u'(t)$  seront très fortement atténuées et au contraire toutes les amplitudes supérieures seront amplifiées. La mesure du terme triple  $u'^3(t)$  est donc un moyen de détecter les grandes amplitudes du signal  $u'(t)$ . On constate, comme les fonctions de répartition mesurées l'ont montré, que ce sont les grandes amplitudes qui contribuent le plus dans le coefficient de dissymétrie.

Les différentes courbes  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  enregistrées pour les temps retards :  $\zeta = - 3,5, 0, + 3,5$  et  $10,5$  ms ont la même allure.

L'occurrence de ces perturbations de grandes amplitudes se fait à basse fréquence. Pour cette distance à la paroi ( $y = 1,7$  mm, c'est-à-dire  $y^+ = 67$ ), nous avons trouvé en comptant directement le nombre moyen par seconde de grandes perturbations sur les enregistrements sur papier photosensible, une fréquence voisine de 56 Hz. Cette fréquence est proche de la fréquence correspondant au maximum du spectre d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse, représenté en  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$  (cf. figure 4.1.13). Elle est également voisine de la fréquence pour laquelle la célérité calculée à partir des mesures de corrélations spatio-temporelles doubles est maximale dans le cas de décalages longitudinaux et orthogonaux à la paroi.

Si l'on compare la corrélation spatio-temporelle triple instantanée  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$  et la corrélation spatio-temporelle double instantanée  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$ , on constate que ces deux signaux présentent les mêmes pics aux mêmes instants, de même signe ou non (cf. figures 4.5.11 à 4.5.13). Cette variation aléatoire du signe dans la corrélation triple par rapport à la corrélation double, est donnée par le signe de  $u'_0(t)$  car la seconde variable est toujours positive. Par suite la corrélation triple est plus faible en valeur moyenne que la corrélation double.

Nous avons également comparé le signal  $u'(t)$  avec le signal  $u'_0(t) u'^2(t+\zeta)$ . Les pics de grandes amplitudes de la corrélation triple coïncident évidemment avec les grandes amplitudes du signal direct  $u'(t)$ .

#### 4.5.2.2. Terme triple instantané en fonction de la distance à la paroi

##### 4.5.2.2.1. Fréquence d'occurrence entre "bursts"

Les enregistrements du terme triple instantané  $u'^3(t)$  en fonction de la distance à la paroi nous ont permis de déterminer la fréquence d'occurrence des perturbations de grandes amplitudes. Il faut donc compter le nombre de pics d'amplitudes positives et négatives durant un certain temps. Nous nous sommes donnés comme critère pour séparer deux pics voisins que le temps séparant deux pics consécutifs doit être supérieur à un certain pourcentage de l'amplitude.

La figure 4.5.14 représente la fréquence d'occurrence des pics d'amplitudes positives et négatives en fonction de la distance à la paroi, exprimée en  $y^+$ .

On constate que le nombre de pics d'amplitudes négatives  $n_-$  correspondant à des zones de sous-vitesses par rapport à l'écoulement, est à peu près constant dans la zone linéaire du profil de vitesse  $V^+$  en fonction de  $y^+$ . Il semble donc que les tourbillons relatifs aux sous-vitesses soient liés au même processus physique de formation. Cette mesure est en accord avec les travaux de KLINE et al. (1959-1967) et KIM et al. (1968-1971) qui ont observé, dans l'eau à l'aide de bulles d'hydrogène, la formation d'éruptions ("bursts") à basse vitesse à l'intérieur de la couche limite. Le nombre  $n_-$  chute quand  $y^+$  dépasse 400 : cela est dû à l'intermittence de frontière de la couche limite avec le fluide à potentiel qui charge le phénomène physique. RAO et al. (1971) ont trouvé le même résultat expérimental.

Le nombre  $n_+$  de pics d'amplitudes positives, liés à des zones de sur-vitesse, augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche de la paroi. Il est bien naturel que ce nombre  $n_+$  soit plus grand près de la paroi, car la probabilité d'avoir des sur-vitesses pour des vitesses générales faibles est plus grande que celle d'avoir des sur-vitesses quand la vitesse approche la vitesse maximale de l'écoulement.

Pour  $y^+ = 67$ , les deux nombres  $n_-$  et  $n_+$  sont égaux à 56 Hz. Les travaux de RAO et al. (1971) et de KIM et al. (1971) à partir des travaux de KLINE ont permis d'adopter un nombre sans dimension pour comparer les fréquences d'occurrence de "bursts" turbulents pour les différents types de couches limites. Ces auteurs montrent que la valeur de  $\frac{U \bar{T}}{\delta_*}$  (identique à l'inverse d'un nombre de Strouhal) où  $\bar{T}$  est le temps moyen qui sépare deux perturbations est constant en fonction du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement.

Dans nos mesures, nous avons :  $U' = 16 \text{ m/s}$ ,  $\delta_* = 7,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$$\text{et } \bar{T} = \frac{1}{N} = \frac{1}{56}$$

d'où :  $\frac{U \bar{T}}{\delta_*} = 36$ . Cette valeur est très proche de celle trouvée par KLINE pour ses mesures dans l'eau et par les autres auteurs.

L'analyse des corrélations triples instantanées permet donc de détecter les fluctuations de grandes amplitudes. D'autre part, il semble que la fréquence observée soit bien identique à celle correspondant à la formation de perturbations en sous-vitesse par rapport à l'écoulement environnant. Ces perturbations, selon le modèle de KLINE, sont ensuite éjectées dans la zone plus interne de la couche limite. Même pour cette distance à la paroi de  $y^+ = 67$ , les corrélations triples permettent d'isoler dans le signal total ce phénomène de perturbations à basse fréquence.

C'est la structure interne de la couche limite (les phénomènes qui prennent naissance à l'interface de la sous-couche) qui conditionne les phénomènes turbulents, même pour des distances relativement grandes par rapport à la paroi.

Cette intermittence de structure est à relier à la "spottiness" de LANDAU et KOLMOGOROV et de BATCHELOR et TOWNSEN (1949). De tels "bursts" semblent être un phénomène général à tous les écoulements turbulents.

Les courbes  $n_+$  et  $n_-$  en fonction de la distance à la paroi permettent de plus de donner l'allure générale du coefficient S de dissymétrie à l'intérieur de la couche limite. Si l'on suppose que les pics d'amplitudes positive et négative sont identiques, on peut dire que le coefficient S est presque nul dans la zone linéaire du profil de vitesse, près de la paroi il est positif et dans la zone du sillage il doit être fortement négatif. Cette interprétation relativement schématique permet néanmoins de retrouver les valeurs expérimentales obtenues par DUMAS et al. (1972) (cf. courbe 4.5.15) et MARCILLAT (1964) à l'intérieur de la couche limite.

4.5.2.2.2. Distribution des intervalles de temps entre "bursts"

Sur la figure (4.5.16) nous avons représenté l'histogramme de répartition des intervalles de temps séparant les pics de grandes amplitudes ("bursts"). Selon RAO et al. (1971), nous avons également représenté sur la figure 4.5.17, en échelle log-normale, le pourcentage cumulé en fonction du rapport  $T/\bar{T}$  où  $\bar{T}$  est l'intervalle de temps moyen séparant deux pics. La distribution des intervalles de temps suit une loi log-normale, ainsi que les données de KIM et al. (1971) que nous avons représentées sous cette même forme. RAO et al. (1971) ont trouvé également ce résultat et ils ont rappelé que KOLMOGOROV en 1962 avait prédit cette distribution log-normale pour la "spottiness" des structures turbulentes

Si l'on divise le temps moyen entre "bursts" par l'échelle de temps  $\frac{\nu}{u_*^2}$ , nous avons  $T^+ = \frac{\bar{T} u_*^2}{\nu} = 411$ .

RAO et al. ont proposé la relation :  $T^+ = 0,65 R_{\delta^{0,73}}$ ; pour nos expériences, on trouve pour  $R_{\delta^{***}} = 6\ 000$  :  $T^+ = 372$ . Les deux valeurs sont voisines et confirment que cette relation est valable avec une bonne précision.

5 - CONCLUSION

## 5 - CONCLUSION

Les mesures des fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations de température nous ont permis de constater que ce sont les grandes amplitudes qui diffèrent d'une loi de Gauss et qui contribuent ainsi à donner des moments impairs différents de zéro. Pour cette distance à la paroi de  $y^+ = 67$ , nous avons trouvé les mêmes résultats pour les fluctuations de vitesse et de température.

La partie basse fréquence des fluctuations longitudinales de vitesse a une fonction de répartition symétrique, tandis que la partie haute fréquence est très dissymétrique et diffère davantage de la loi de Gauss. Les mesures de fluctuations dérivées conduisent au même résultat, car la dérivation pour un phénomène physique à spectre d'énergie limité revient à ne conserver que les fréquences élevées.

Le déroulement dans le temps des fluctuations de vitesse a été analysé soit l'aide du nombre de passages par un seuil donné, ou soit par les corrélations temporelles de la fonction indicatrice de dépassement de seuil. Nous avons constaté qu'une fois de plus, ce sont les grandes amplitudes qui s'écartent de la loi de Gauss. Ces mesures nous ont permis d'établir pour la courbe d'autocorrélation temporelle une relation théorique assez bien vérifiée expérimentalement en supposant que le signal turbulent est la somme d'une partie basse fréquence et d'une partie haute fréquence indépendantes, et que les changements de niveaux suivent un processus de Poisson en fonction du temps. La transformée de Fourier de cette relation nous conduit à un spectre d'énergie théorique voisin du spectre expérimental. Il semble donc, au sein de la couche limite turbulente, que l'on puisse décomposer le signal turbulent en "petits tourbillons" et "gros tourbillons".

Les mesures de probabilités liées nous ont permis de donner la contribution des différentes amplitudes des fluctuations longitudinales de vitesse soit dans le coefficient d'autocorrélation, ou soit dans le coefficient de corrélation spatio-temporelle. La liaison entre la variable et elle-même, ou en introduisant un décalage d'espace et de temps reste néanmoins une liaison gaussienne.

Nous avons mis au point le dispositif expérimental pour mesurer les corrélations spatio-temporelles triples. La forme de ces corrélations peut s'expliquer par un modèle de "bouffées" justifié par les travaux de KLINE. De plus, en faisant l'hypothèse de Taylor, nous avons retrouvé les courbes de corrélation triples obtenues derrière une grille de turbulence.

Nous avons constaté que ces corrélations triples sont dues aux grandes structures car les temps de transport des corrélations triples sont inférieurs au temps compensateur du fluide. Le décalage spatial introduit, revient d'ailleurs à ne conserver que les grandes structures dans le signal turbulent. Les mesures de probabilités liées du terme triple confirment que dans ce cas toutes les amplitudes du signal contribuent autant dans la corrélation triple (car les différences algébriques avec la loi de Gauss sont constantes en fonction de l'amplitude du signal).

Les mesures de corrélations triples instantanées nous ont permis de plus de préciser la structure fine de l'écoulement turbulent. La fréquence d'occurrence des grandes perturbations ("bursts") concorde avec les résultats expérimentaux de KLINE, al. et de RAO, al. Il semble donc que l'on puisse appliquer dans l'écoulement turbulent qui se développe sur la plaque plane le processus de génération de "houffées" mis en évidence par KLINE. Ce sont les phénomènes qui prennent naissance à l'interface de la sous-couche qui conditionnent l'écoulement turbulent externe, même pour des distances relativement grandes par rapport à la paroi ( $y^+ = 67$ ).

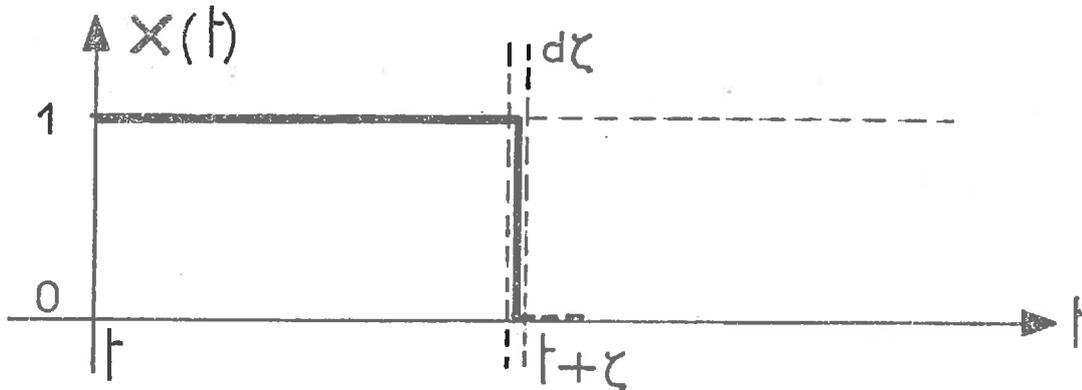
6 - ANNEXE 1

Annexe 1

On considère la variable aléatoire  $X(t)$  qui possède les propriétés suivantes :

- 1)  $X(t)$  peut prendre les valeurs 1 et 0
- 2) à l'instant  $t = 0$ , ces deux valeurs ont des probabilités égales respectivement à  $p$  et  $q$ . On a par définition  $p + q = 1$
- 3) on suppose que la probabilité de passages de 1 à 0 obéit à une loi de Poisson de paramètre  $\lambda/2 p$ , et celle de 0 à 1 à une loi de Poisson de paramètre  $\lambda/2 q$ . (cf. remarque p. 115)

Il y a indépendance statistique entre intervalles consécutifs.



On considère le processus, appelé 1, qui au temps  $t$  ayant la valeur  $X(t) = 1$  conserve cette valeur sur l'intervalle de temps  $\overline{t}, t + \zeta \overline{}$ , et prend la valeur  $X = 0$  pendant l'intervalle élémentaire  $\overline{t + \zeta}, t + \zeta + d\zeta \overline{}$ .

D'après cette définition, du fait de l'indépendance, on a :

$$P(1) = P(0 \text{ changement pendant } \zeta) \cdot P(1 \text{ ch. à } 0 \text{ pendant } d\zeta)$$

La loi de Poisson étant continue, la deuxième probabilité est une probabilité élémentaire, qui tend vers zéro avec  $d\zeta$ .

$$P(1 \text{ ch. } 1 \text{ à } 0) \text{ (pendant } d\zeta) = \frac{\lambda}{2p} d\zeta$$

$$P(0 \text{ ch. pendant } \zeta) = e^{-\frac{\lambda\zeta}{2p}}$$

et  $P(1)$ , qui apparaît comme une probabilité élémentaire est égal à :

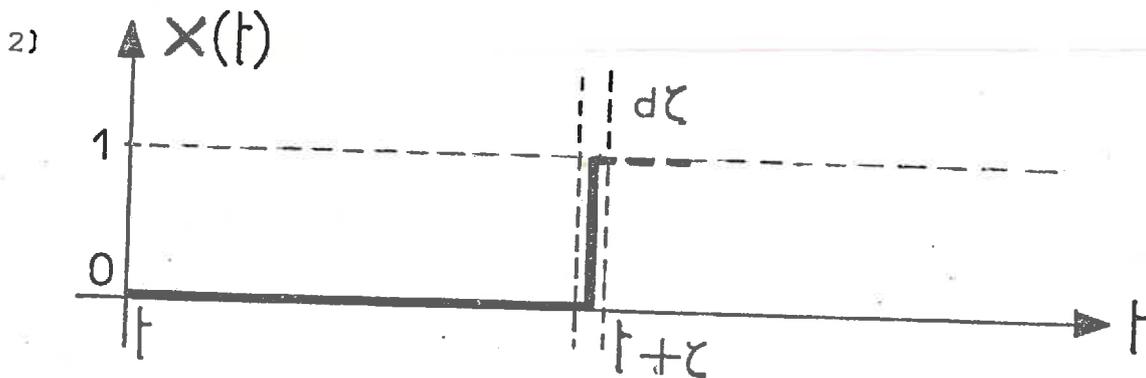
$$P(1) = e^{-\frac{\lambda\zeta}{2p}} \cdot \frac{\lambda}{2p} d\zeta$$

La densité  $p$  de probabilité du processus est alors :

$$p(1) = e^{-\frac{\lambda\zeta}{2p}} \cdot \frac{\lambda}{2p}$$

On posera par la suite  $\alpha = \lambda/2p$ . L'espérance mathématique de la durée d'un intervalle correspondant à un processus (1) est égale à :

$$E\{\zeta\} = \int_0^{\infty} \zeta \frac{\lambda}{2p} e^{-\frac{\lambda\zeta}{2p}} d\zeta = \frac{2p}{\lambda}$$



De même, on a avec le processus appelé 0 :

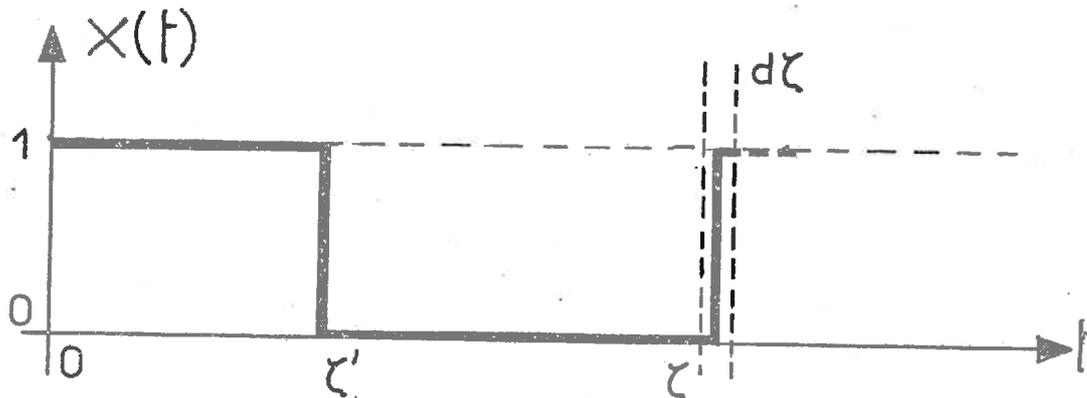
$$P(0) = e^{-\frac{\lambda\zeta}{2q}} \cdot \frac{\lambda}{2q} d\zeta \quad \text{et} \quad p(0) = \frac{\lambda}{2q} e^{-\frac{\lambda\zeta}{2q}}$$

L'espérance mathématique de la durée de cet intervalle est égale à :

$$E\{\zeta\} = \frac{2q}{\lambda}$$

On posera par la suite  $\beta = \frac{\lambda}{2q}$

3) On suppose maintenant qu'il y a un changement sur l'intervalle ouvert  $[0, \zeta]$ , un changement ayant lieu en  $[\zeta', \zeta + d\zeta]$



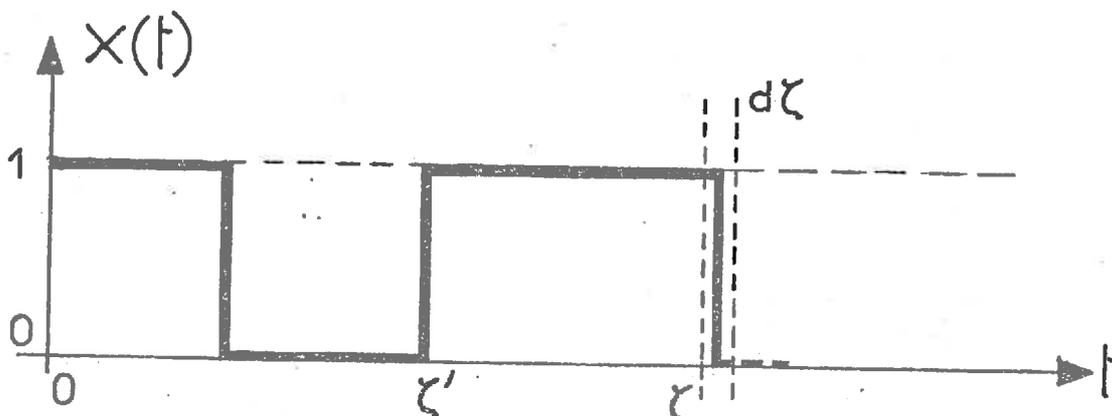
On veut évaluer la probabilité pour qu'une séquence du type 10 dure un temps  $\zeta$ . Cette probabilité est égale, avec l'hypothèse d'indépendance statistique, au produit de convolution des probabilités :

$$P[10] = P[1] * P[0]$$

ou :

$$p(10) = p(1) * p(0) = \int_0^{\zeta} \frac{\lambda}{2p} e^{-\frac{\lambda \zeta'}{2p}} \cdot \frac{\lambda}{2q} e^{-\frac{\lambda}{2q}(\zeta - \zeta')} d\zeta' = (\zeta)$$

4) De même s'il y a deux changements sur  $[0, \zeta]$ , on a :



$$P(101) = P(10) * P(1)$$

D'une manière générale, s'il y a n changements, le problème revient à calculer un produit de convolution répété n fois. Il est alors très intéressant d'employer les transformées de Laplace, si elles existent, car on est ramené à calculer un produit de n fonctions.

On considère deux fonctions  $f_1(\zeta)$  et  $f_2(\zeta)$ , et leur transformée de Laplace, si elles existent,  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$

$$\text{On sait que : } f_1(\zeta) = L^{-1} \underline{\underline{F_1(p)}} \quad f_2(\zeta) = L^{-1} \underline{\underline{F_2(p)}}$$

$$f_1 * f_2 = \int_0^\zeta f_1(t) \cdot f_2(\zeta - t) dt = L^{-1} \underline{\underline{F_1(p) \cdot F_2(p)}} = L^{-1} \underline{\underline{F(p)}}$$

La décomposition de  $F(p)$  en éléments simples donne directement la valeur de  $f(\zeta)$ .

Schéma	F (p)	f(ζ)
	$\frac{\alpha}{p + \alpha}$	$\alpha e^{-\alpha\zeta}$
	$\frac{\beta}{p + \beta}$	$\beta e^{-\beta\zeta}$
	$\frac{\alpha\beta}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} (e^{-\alpha\zeta} - e^{-\beta\zeta})$
	$\frac{\alpha\beta}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} (e^{-\alpha\zeta} - e^{-\beta\zeta})$
	$\frac{\alpha^2\beta}{(p+\alpha)^2(p+\beta)}$	$\frac{\alpha^2\beta}{\beta-\alpha} \zeta e^{-\alpha\zeta} - \frac{\alpha^2\beta}{(\alpha-\beta)^2} (e^{-\alpha\zeta} - e^{-\beta\zeta})$
		
	$\frac{\alpha^n \beta^{n-1}}{(p+\alpha)^n (p+\beta)^{n-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(p+\alpha)^i} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{(p+\beta)^j}$	$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(i-1)!} \zeta^{i-1} e^{-\alpha\zeta} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{(j-1)!} \zeta^{j-1} e^{-\beta\zeta}$

Donc la probabilité qu'en partant de 1 on soit en 1 à l'instant  $\zeta$  un changement se faisant en  $\zeta + d\zeta$ , est égale à la somme des probabilités calculées avec 0 changement, 2 changements, etc... ; sur les intervalles ouverts  $\zeta \in ]0, \zeta[$  on notera avec probabilité P (1 à 1).

On a :  $P(1 \text{ à } 1) = P(1) + P(101) + \dots$

$$P(1 \text{ à } 1) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha}{p+\alpha} + \frac{\alpha^2 \beta}{(p+\alpha)^2 (p+\beta)} + \frac{\alpha^3 \beta^2}{(p+\alpha)^3 (p+\beta)^2} + \dots \right]$$

$$P(1 \text{ à } 1) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha / (p+\alpha)}{1 - \alpha\beta / (p+\alpha)(p+\beta)} \right]$$

De même :

$$P(1 \text{ à } 0) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta}{(p+\alpha)(p+\beta)} + \frac{\alpha^2 \beta^2}{(p+\alpha)^2 (p+\beta)^2} + \dots \right]$$

$$P(1 \text{ à } 0) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta / (p+\alpha)(p+\beta)}{1 - \alpha\beta / (p+\alpha)(p+\beta)} \right]$$

$$P(0 \text{ à } 1) = P(0 \text{ à } 0) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta / (p+\alpha)(p+\beta)}{1 - \alpha\beta / (p+\alpha)(p+\beta)} \right]$$

$$P(0 \text{ à } 0) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\beta}{p+\beta} + \frac{\alpha\beta^2}{(p+\alpha)(p+\beta)^2} + \frac{\alpha^2 \beta^3}{(p+\alpha)^2 (p+\beta)^3} + \dots \right]$$

$$P(0 \text{ à } 0) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\beta / (p+\beta)}{1 - \alpha\beta / (p+\alpha)(p+\beta)} \right]$$

D'où :

$$P(1 \text{ à } 1) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{p} + \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{(p+\alpha+\beta)} \right]$$

$$P(1 \text{ à } 0) = P(0 \text{ à } 1) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{p} - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{(p+\alpha+\beta)} \right]$$

$$P(0 \text{ à } 0) = d\zeta \cdot L^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{p} + \frac{\beta^2}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{(p+\alpha+\beta)} \right]$$

$$P \overline{1} \text{ à } \overline{1} = d\zeta \left( \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot H(\zeta) + \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} \cdot e^{-(\alpha+\beta)\zeta} \right)$$

$$P \overline{1} \text{ à } \overline{0} = d\zeta \left( \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot H(\zeta) - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot e^{-(\alpha+\beta)\zeta} \right) = P \overline{0} \text{ à } \overline{1}$$

$$P \overline{0} \text{ à } \overline{0} = d\zeta \left( \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot H(\zeta) + \frac{\beta^2}{\alpha+\beta} \cdot e^{-(\alpha+\beta)\zeta} \right)$$

où  $H(\zeta)$  est la fonction d'Heaviside égale à 1 pour  $\zeta > 0$ .

En remplaçant  $\alpha$  et  $\beta$  par leur valeur, on a le tableau des probabilités conditionnelles suivant :

$P \overline{1} \text{ à } \overline{1}$	1	0
1	$\frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{q}{p} e^{\frac{\lambda\zeta}{2pq}} \right) d\zeta$	$\frac{\lambda}{2} \left( 1 - e^{\frac{\lambda\zeta}{2pq}} \right) d\zeta$
0	$\frac{\lambda}{2} \left( 1 - e^{\frac{\lambda\zeta}{2pq}} \right) d\zeta$	$\frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{p}{q} e^{\frac{\lambda\zeta}{2pq}} \right) d\zeta$

Considérons le processus 1 à 1, il consiste en ce que si  $X(0) = 1$   $X(\zeta) = 1$  le nombre de changement en  $\overline{0}, \zeta \overline{1}$ , un changement se faisant en  $\overline{1}\zeta, \zeta+d\zeta \overline{1}$ , on a vu que

$$P(1 \text{ à } 1) = P(1) + P(101) + \dots$$

mais aussi :

$$P(1 \text{ à } 1) = P \left( \begin{array}{l} \text{0 au pair changement} \\ \text{dans l'intervalle } \zeta \end{array} \right) X P \left( \begin{array}{l} \text{1 changement 1 à 0} \\ \text{dans } d\zeta \end{array} \right)$$

$$D'où : \frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{q}{p} e^{\frac{\lambda\zeta}{2pq}} \right) d\zeta = P \overline{1} \dots \overline{1} \cdot \frac{\lambda}{2p} d\zeta$$

Donc :

$$P \left[ \dots \right] = p + q e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$$

En procédant de même pour les trois autres cas, on établit le tableau de contingence suivant :

instant 0

instant  
ζ

	Etat 1	Etat 0	
Etat 1	$p^2 + pq e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$	$pq - pq e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$	p
Etat 0	$pq - pq e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$	$q^2 + pq e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$	q
	p	q	1

On a un processus poissonnien stationnaire.

La covariance  $\Gamma(\zeta)$  est égale à :

$$\Gamma(\zeta) = \langle X_t X_{t+\zeta} \rangle = p^2 + pq e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$$

Comme  $\langle X_t \rangle = p$  et  $\langle X_t^2 \rangle = p$ , le coefficient de corrélation est égal à :

$$R(\zeta) = \frac{p^2 + pq e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}} - p^2}{p - p^2}$$

$$R(\zeta) = e^{-\frac{\lambda \zeta}{2pq}}$$

Si  $p = q = \frac{1}{2}$  on retrouve le tableau de contingence classique, dans le cas où les deux états 1 et 0 sont équiprobables.

Remarque :

Dans cette annexe, nous n'avons pas étudié le cas général où les changements de 1 à 0 et de 0 à 1 suivent des lois de Poisson de paramètres quelconques. Nous allons, dans cette remarque, voir comment l'on a été conduit à prendre pour paramètres des lois de changements d'états, les valeurs particulières  $\frac{\lambda}{2p}$  et  $\frac{\lambda}{2q}$ .

Soit  $Y_\gamma(t)$  l'indicatrice de dépassement du seuil  $\gamma$  de la variable  $X(t)$  et soit  $p_\gamma$  la probabilité pour que cette variable  $X(t)$  soit supérieure à  $\gamma$ . On a par définition :

$$P \int X(t) > \underline{\gamma} = P \int Y_\lambda(t) = \underline{1} = p_\gamma$$

On a vu précédemment (p. 81), que l'on pouvait écrire :

$$p_\gamma = n \bar{t}_\gamma = \frac{1}{2} N_\gamma \bar{t}_\gamma$$

où  $n$  est le nombre de créneaux par seconde,  $\bar{t}_\gamma$  le temps moyen entre deux passages consécutifs par le seuil  $\gamma$  et  $N_\gamma$  le nombre de passages par la valeur  $\gamma$ . On a donc :

$$\bar{t}_\gamma = \frac{2 p_\gamma}{N_\gamma}$$

Si les changements de 1 à 0 obéissent à une loi de Poisson de paramètre  $\mu$ , l'espérance mathématique de la durée d'un intervalle correspondant au processus (1) (cf. p. 108) est égale à :

$$\bar{t}_\gamma = E \{ \zeta \} = \frac{1}{\mu}$$

On pose donc finalement  $\mu = \frac{\lambda}{2p}$  où  $\lambda$  représente cette fois le nombre de passages par la valeur  $\gamma$ .

Un raisonnement identique permettrait de voir que pour les changements de 0 à 1, il faut poser :  $\mu = \frac{\lambda}{2q}$

7 - BIBLIOGRAPHIE

B I B L I O G R A P H I E

- L. AGOSTINI, J. BASS (1950)  
Les théories de la turbulence.  
Publ. Scient. Techn. Min. Air n° 237, Paris.
- ANGOT A. (1948)  
Compléments de mathématiques.  
Editions de la revue d'Optique. Collection technique du C.N.E.T.
- BASS J. (1968)  
Eléments de calcul des probabilités théorique et appliqué.  
Masson, 2e édition
- BATCHELOR G.K., TOWNSEND A.A. (1949)  
Proc. Roy. Soc., A 199, 238.
- BATCHELOR G.K. (1953)  
The theory of homogeneous turbulence.  
University Press, Cambridge
- BLACKWELDER (1970)  
Large scale motion of a turbulent boundary layer with a zero  
and a favorable pressure gradient.  
The Johns Hopkins University.
- BLANC-LAPIERRE A., FORTET R., KAMPE de FERIET J. (1953)  
Théorie des fonctions aléatoires.  
Masson.
- BLANC-LAPIERRE A., PICINBONO B. (1961)  
Propriétés statistiques du bruit de fond.  
Masson & Cie.
- COMTE-BELLOT G. (1959)  
Ecoulement turbulent de l'air dans un tunnel bidimensionnel  
à parois parallèles.  
C.R. Acad. Sc. Paris, 248, 2710-2712.
- COMTE-BELLOT G. (1959)  
Coefficient d'aplatissement des fluctuations longitudinales  
de vitesse dans un tunnel bidimensionnel à parois parallèles.  
C.R. Acad. Sc. Paris, 249, 2270-2272

COMTE-BELLOT G. (1959)

Coefficients de dissymétrie et d'aplatissement des dérivées par rapport au temps des fluctuations longitudinales de vitesse au voisinage d'une paroi.

C. R. Acad. Sc. Paris, 249, 2483-2485.

COMTE-BELLOT G. (1965)

Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles.

Publ. Scient. Techn. Min. Air, n° 419

COMTE-BELLOT G. (1966)

Moments d'ordre trois et quatre des distributions de probabilité des fluctuations de vitesse et de leurs dérivées dans les écoulements turbulents.

Communication présentée au Colloque sur la contribution de l'électronique aux méthodes de traitement statistique des mesures en physique. Grenoble 26-29 Avril 1966.

CORRSIN S., KISTLER A.L. (1954)

The free-stream boundaries of turbulent flows.

N.A.C.A. Techn. Note 3133

CRAMER H. (1961)

Mathematical Methods of Statistics

Princeton University Press.

DEISSLER R.G. (1960)

A theory of decaying homogeneous turbulence.

Phys. Fluids, 3, n° 2, pp. 176-187

DEISSLER R.G. (1965)

Some remarks on the approximations for moderately weak turbulence.

Phys. Fluids, 8, n° 11, pp. 2106-2107

DUMAS R. (1964)

Contribution à l'étude des spectres de turbulence.

Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air  
n° 404

DUMAS R., MARCILLAT J. (1966)

Répartition en amplitudes de la vitesse dans une couche limite turbulente.

C.R. Acad. Sc. T 262, pp 700-703, Mars 1966, PARIS

DUMAS R., FAVRE A. (1971)

Some double and triple space-time correlation measurements in a boundary layer.

A.F.O.S.R. Scientific Report n° 7, June 1971.

- DUMAS R., FULACHIER L., ARZOUMANIAN E. (1972)  
Facteurs d'intermittence et de dissymétrie des fluctuations de température et de vitesse dans une couche limite turbulente.  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274, pp. 267-270
- DUMAS R., ARZOUMANIAN E., FAVRE A. (1972)  
Structure de la turbulence : corrélations spatio-temporelles doubles et triples.  
Communication présentée au 13 e Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée. Moscou 21-26 Août 1972
- DUTTON J.A., DEAVEN D.G. (1969)  
A self-similar view of atmospheric turbulence.  
Radio-Science, Volume 4, Number 12, pp. 1341-1349
- DREXLER J., KROPAC O. (1968)  
One class of nonlinear stochastic differential equations characterized by random excitation.  
Applied Mechanics Proceedings of the twelfth international congress of Applied Mechanics Stanford University.  
August 26-31, 1968. Editors M. HETENYI, W.G. VINCENTI  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York
- FAVRE A. (1946)  
Appareil de mesures statistiques de la corrélation dans le temps.  
VIe Cong. Intern. Méc. Appl. Paris.
- FAVRE A. (1948)  
Mesures statistiques de la corrélation dans le temps.  
VIIe Cong. Intern. Méc. Appl. Londres.
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1950)  
Mesures de la corrélation dans le temps et l'espace, et spectres de la turbulence en soufflerie.  
Coll. Intern. Mécan. 1950, Poitiers.
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1953)  
Quelques mesures de corrélations dans le temps et l'espace en soufflerie.  
VIIIe Congr. Intern. Mécan. Th. et Appl. Istanbul  
La Recherche Aéronautique, n° 32, Mars-Avril, Paris
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1953)  
Appareil de mesures de la corrélation dans le temps et l'espace.  
VIIIe Cong. Intern. Mécan. Th. et Appl. Istanbul  
La Recherche Aéronautique, n° 31, Janv-Fév. Paris  
Apparatus for measurements of time and space correlation.  
NACA, T.M. 1371, 1955, WASHINGTON

- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1954)  
Nouvelles mesures dans la couche limite d'une plaque plane,  
des intensités de turbulence, et des corrélations dans le temps ;  
spectres.  
La Recherche Aéronautique, n° 38, Mars-Avril, Paris.
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1954)  
Corrélations dans le temps et l'espace avec filtres de bande  
en aval d'une grille de turbulence.  
La Recherche Aéronautique, n° 40, Juillet-Août, Paris.
- FAVRE A., GAVIGLIO J. (1954)  
Détection par autocorrélation de signaux périodiques perturbés  
par des parasites aléatoires.  
Coll. Nat. Mécan. 1952 Marseille  
Pub. Sc. et Techn. Ministère de l'Air, n° 298, Paris.
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1955).  
Couche limite turbulente : corrélations spatio-temporelles doubles,  
spectres.  
La Recherche Aéronautique, n° 48, Nov.-Décembre, Paris
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1956)  
Corrélations spatio-temporelles et spectres dans la couche  
limite turbulente.  
IXe Cong. Intern. Mécan. Appl. Bruxelles.
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1957)  
Space-time double correlations and spectra in a turbulent  
boundary layer.  
Journ. of Fluid Mech. Vol. 2, part 4, pp. 313-342, Londres
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1958)  
Further space-time correlations of velocity in a turbulent  
boundary layer.  
Journ. of Fluid Mechanics Vol 3, part 4, pp. 344-356 Londres
- FAVRE A., GAVIGLIO J. (1960)  
Turbulence et perturbations dans la couche limite d'une plaque  
plane.  
Meet. AGARD, Londres Rap. 278, Paris.
- FAVRE A. (1961)  
Corrélations spatio-temporelles.  
Coll. Intern. de Méc. de la Turbulence, Marseille  
Colloque n° 108, C.N.R.S., Paris

- FAVRE A. (1964)  
Space-time Correlations in Turbulent Fluids.  
IIInd All Union Congr. Theor. Appl. Mech. Moscou
- FAVRE A. (1965)  
Review on space time correlations in turbulent fluids.  
Journal of Applied Mechanics, USA, Juin.
- FAVRE A. (1965)  
Equations des gaz turbulents compressibles  
I - Formes générales  
II- Méthode des vitesses moyennes ; méthode des vitesses  
macroscopiques pondérées par la masse volumique.  
Journal de mécanique, vol. 4, n° 3, pp. 361-390 (1ère partie)  
Journal de mécanique, vol. 4, n° 4, pp. 391-421 (2ème partie).
- FAVRE A., GAVIGLIO J. (1966)  
Appareil analogique de mesures statistiques de la corrélation  
dans le temps.  
Colloque sur le traitement statistique des mesures.  
26-28 Avril, Grenoble.
- FAVRE A., GAVIGLIO J., DUMAS R. (1966)  
Structure of velocity space-time correlations in a boundary  
layer.  
Communication to the IUGG-IUTAM Symposium on Boundary Layers  
And Turbulence including Geophysical Applications - 19-24 September  
Kyoto - Japan.
- FAVRE A., DUMAS R., VEROLLET E. (1966)  
Some spectral measurements of space-time correlations.  
AFOSR-ASR n° 2
- FAVRE A., DUMAS R., VEROLLET E. (1967)  
Facilities and methods of measurement for temperature space-time  
correlations in a boundary layer.  
AFOSR-ASR n° 3
- FAVRE A., GAVIGLIO J., BURNAGE H. (1967)  
Observations sur la transition dans un sillage en écoulement  
supersonique.  
La Recherche Aérospatiale, n° 119.
- FAVRE A., DUMAS R., VEROLLET E. (1968)  
Boundary layer : expressions for celerities of filtered  
fluctuations ; first measurements for temperature fluctuations.  
AFOSR-FSR n° 4
- FAVRE A., DUMAS R., VEROLLET E. (1969)  
New advances in facilities and methods of measurements.  
AFOSR-ASR n° 5

- FRENKIEL F.N. (1951)  
Frequency distributions of velocities in turbulent flow.  
J. Meteo. Vol. 8, n° 5, October, pp. 316-320
- FRENKIEL F.N., KLEBANOFF P.S. (1967)  
Higher-Order Correlations in a Turbulent Field.  
Phys. Fluids, Vol. 10, n° 3, pp. 507-520
- FULACHIER L. (1972)  
Contribution à l'étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulente. Effet de l'aspiration.  
Th. Dr. ès Sc. IMST. Université de Provence - Marseille
- GAVIGLIO J. (1962)  
Sur quelques problèmes de mesures de turbulence effectuées à l'aide de l'anémomètre à fil chaud parcouru par un courant d'intensité constante.  
Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air n° 385
- GIBSON C.H., STEGEN G.R., WILLIAMS R.B. (1970)  
Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number.  
J. Fluid Mech. Vol. 41, part 1, pp. 153-167
- GURVICH A.S., YAGLOM A.M. (1967)  
Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence.  
Boundary Layers and Turbulence IUGG-IUTAM Symposium 1966  
Phys. Fluids Supplement 1967
- HINZE J.O. (1959)  
Turbulence.  
Mc Graw Hill Book Company.
- JOHNSON R.F. (1962)  
An amplitude probability analyser for use in turbulence and noise measurements.  
Aeronautical Research Council. C.P. n° 580 London
- KAMPE de FERIET J. (1966)  
The Gram-Charlier approximation of the normal law and the statistical description of a homogeneous turbulent flow near statistical equilibrium.  
Applied Mathematics Laboratory Research and Development Report March 1966 Report 2013  
David Taylor Model Basin, Washington, D.C.

- KENNEDY D.A., CORRSIN S. (1961)  
Spectral flatness factor and intermittency in turbulence and in non-linear noise.  
J. Fluid Mech. Vol. 10, part 3, pp. 366-370
- KIM H.T., KLINE S.J., REYNOLDS W.C. (1968)  
An experimental study of turbulence production near a smooth wall in a turbulent boundary layer with zero pressure gradient.  
Report MD-20, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
- KIM H.T., KLINE S.J., REYNOLDS W.C. (1971)  
The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer.  
J. Fluid Mech., vol. 50, part 1, pp. 133-160
- KLEBANOFF P.S. (1954)  
Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradients.  
NACA TN n° 3178 Washington.
- KLEBANOFF P.S. (1955)  
Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient.  
N.A.C.A. TR 1247
- KLINE S.J., RUNSTADLER P.W. (1959)  
Some preliminary results of visual studies of the flow model of the wall layers of the turbulent boundary layer.  
J. Applied Mech. June, pp. 166-170
- KLINE S.J., REYNOLDS W.C., SCHRAUB F.A., RUNSTADLER P.W. (1967)  
The structure of turbulent boundary layers.  
J. Fluid Mech., 30, 4, pp. 741-773.
- KOVASNAY L.S.G. (1967) Structure of the turbulent boundary layer.  
Boundary Layers and Turbulence IUGG-IUTAM Symposium 1966  
Phys. Fluids Supplement 1967.
- KOVASNAY L.S.G. (1968) The intermittent region of the turbulent boundary layer.  
Paper to be presented at the Third National Congress for Theoretical and Applied Mechanics Moscow, USSR, January 21-February 1.
- KOVASNAY L.S.G., KIBENS V., BLACKWELDER R.F. (1969)  
Large scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer.  
Boeing Symposium of Turbulence.

- KRAICHNAN R.H. (1970)  
Convergents to turbulence functions.  
J. Fluid Mech. (1970) vol. 41, p. 1, pp. 189-217
- LEFORT G. (1967) M  
Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques.  
Armand Colin
- LEGRAS J. (1963)  
Précis d'analyse numérique.  
Dunod
- LIEPMANN H.W., LAUFER J., LIEPMANN K. (1951)  
On the spectrum of isotropic turbulence.  
NACA Technical Note, n° 2473, Washington.
- LIN C.C. (1961)  
Statistical Theories of turbulence-Princeton.  
University Press.
- LOEVE M. (1963)  
Probability theory.  
D. Van Nostrand Company, Inc.
- LUKE Y. (1962)  
Integrals of Bessel Functions.  
New York Mc Graw-Hill Company
- MAC CREADY P.B., Jr (1953)  
Atmospheric Turbulence measurements and analysis.  
J. Meteor. Vol. 10, n° 5, 325-337
- MAC CREADY P.B., Jr (1953)  
Structure of atmospheric turbulence.  
J. Meteor. Vol. 10, n° 6, 434-449
- MAC MILLAN F.A. (1956)  
Experiments on pitot tubes in shear flow.  
A.R.C. R. and M. n° 3028
- MARCILLAT J. (1964)  
Fonctions de répartition des vitesses turbulentes dans une  
couche limite. Effets de la réponse de l'anémomètre à fil chaud.  
Thèse Faculté des Sciences d'Aix-Marseille
- MARTINDOT-LAGARDE A. (1946)  
Introduction au spectre de la turbulence.  
G.R.A. Note Technique n° 55
- MIDDLETON D. (1960)  
An introduction to Statistical Communication Theory.  
Mc Graw Hill Book Company
- MILLER K.S. (1964)  
Multidimensional gaussian distributions.  
John Wiley and Sons, Inc, New-York - London - Sydney
- MILLS R.R., KISTLER A.L., O'BRIEN, CORRSIN S. (1958)  
Turbulence and temperature fluctuations behind a heated  
grid-NACA TN 4288

- PREM KUMAR, DASH R. (1970)  
Multi-point, multi-time velocity correlations and decay of homogeneous turbulence.  
Phys. Fluids, 13, n° 3, pp. 576-584
- RAO K.N., NARASIMHA R., BADRI NARAYANAN M.A. (1971)  
The "bursting" phenomenon in a turbulent boundary layer.  
J. Fluid Mech., vol 48, part 2, pp. 339-352
- RAMAMONJIARISOA A. (1967)  
Contribution à l'étude des corrélations spatio-temporelles dans un écoulement turbulent incompressible.  
Thèse de Docteur-Ingénieur - Faculté des Sciences de l'Université d'Aix-Marseille.
- RICE S.O. (1944)  
Mathematical Analysis of Random Noise.  
The Bell System Technical Journal Vol. 23 n° 3, pp. 282-332 July 1944  
The Bell System Technical Journal Vol. 24 n° 1, pp. 46-156 Janv. 1945
- ROSHKO A. (1953)  
On the development of turbulent wakes from vortex streets  
N.A.C.A. Techn. Note 2913
- SANDBORN V.A. (1959)  
Measurements of intermittency of turbulent motion in a boundary layer.  
J. Fluid Mech. Vol. 6, part 2, 221-240
- SAVULESCU ST.N. (1960)  
On a hypothesis of limitative statistical organization of energy fluctuations in the fully developed turbulent boundary layer.  
Revue de Mécanique Appliquée. Edition de l'Académie de la République Populaire Roumaine - Tome V n° 6
- SCHLICHTING H. (1960)  
Boundary Layer Theory.  
Mac Graw Hill. New York Toronto London
- SCHRAUB F.A., KLINE S.J. (1965)  
A study of the structure of the turbulent boundary layer with and without longitudinal pressure gradients.  
Report MD 12. Thermosciences Division - Department of Mechanical Engineering - Stanford University. Stanford California
- SCHWARTZ L. (1965)  
Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.  
Hermann
- STERNBERG J. (1967)  
On the interpretation of space-time correlation measurements in shear flow-boundary layers and Turbulence IUGG-IUTAM Symposium 1966  
Phys. Fluids Supplement 1967.
- STEWART R.W. (1950)  
Triple velocity correlation in isotropic turbulence  
Pro. Camb. Phil. Soc., n° 47
- STEWART R.W., WILSON J.R. and BURLING R.W. (1970)  
Some statistical properties of small scale turbulence in an atmospheric boundary layer.  
J. Fluid Mech. (1970) Vol. 41, part 1, pp. 141-152

- TAYLOR G.I. (1935)  
Théorie statistique de la turbulence.  
Proceedings of the Royal Society - 2 Septembre 1935 Vol. 151  
G.R.A. Traduction technique n° 212, 1941, pp. 1-75
- TENNEKES H., LUMLEY J.L. (1972)  
A first course in turbulence.  
The MIT Press
- TOWNSEND A.A. (1956)  
The structure of turbulent shear flow.  
Cambridge at the University Press, pp. 232-237
- TOWNSEND A.A. (1959)  
The analysis of temperature fluctuations by pulse counting techniques.  
J. Fluid Mech. Vol. 6, Part. 2
- VAN ATTA C.W., CHEN W.Y. (1968)  
Correlation measurements in grid turbulence using digital harmonic analysis.  
J. Fluid Mech. Vol. 34, part 3, pp. 497-515
- VAN ATTA C.W., CHEN W.Y. (1969)  
Measurements of spectral energy transfer in grid turbulence.  
J. Fluid Mech. Vol. 38, part 4, pp. 743-673
- VAN ATTA C.W. and YEH T.T. (1970)  
Some measurements of multi-point time correlations in grid turbulence.  
J. Fluid Mech., Vol. 41, part 1, pp 169-178
- VAN ATTA C.W., CHEN W.Y. (1970)  
Structure fonctions of turbulence in the atmospheric boundary layer over the ocean.  
J. Fluid Mech. Vol. 44, part 1, pp. 145-159
- VAN DRIEST E.R. (1956)  
On turbulent flow near a wall.  
Journ. Aero. Sc'. Vol. 23, pp. 1007-1011 and 1036.
- VEROLLET E. (1962)  
Contribution aux méthodes de mesures de turbulence de vitesse et de température par l'anémomètre à fil chaud.  
Thèse de 3ème Cycle. Faculté des Sciences d'Aix-Marseille  
Juillet 1962
- ZARIC Z. (1969)  
Statistical interpretation of the velocity measurements in high intensity turbulence.  
International Seminar "Heat and Mass transfers in flows with separated regions and measurement techniques.  
Herceg-Nov 1-13 September 1969

ZARIC Z. (1970)

Caractéristiques statistiques d'écoulement turbulent près des parois chauffées avec gradient de pression longitudinal.  
Université de Beograd, Institut Boris Kidric Beograd, Yougoslavie

ZARIC Z. (1972)

Wall Turbulence Statistical Analysis  
Présenté at the IV-All Union Heat and Mass Transfer Conference  
Minsk, SSSR, May 15-19 1972

ZARIC Z. (1972)

Distribution de probabilité des vitesses et des températures près d'une paroi.  
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, pp. 459-462

ZARIC Z. (1972)

Analyse statistique de la turbulence près d'une paroi par échantillonnage conditionnel.  
C. R. Acad. Sc. Paris, T. 275, pp. 513-515

*FIGURES*

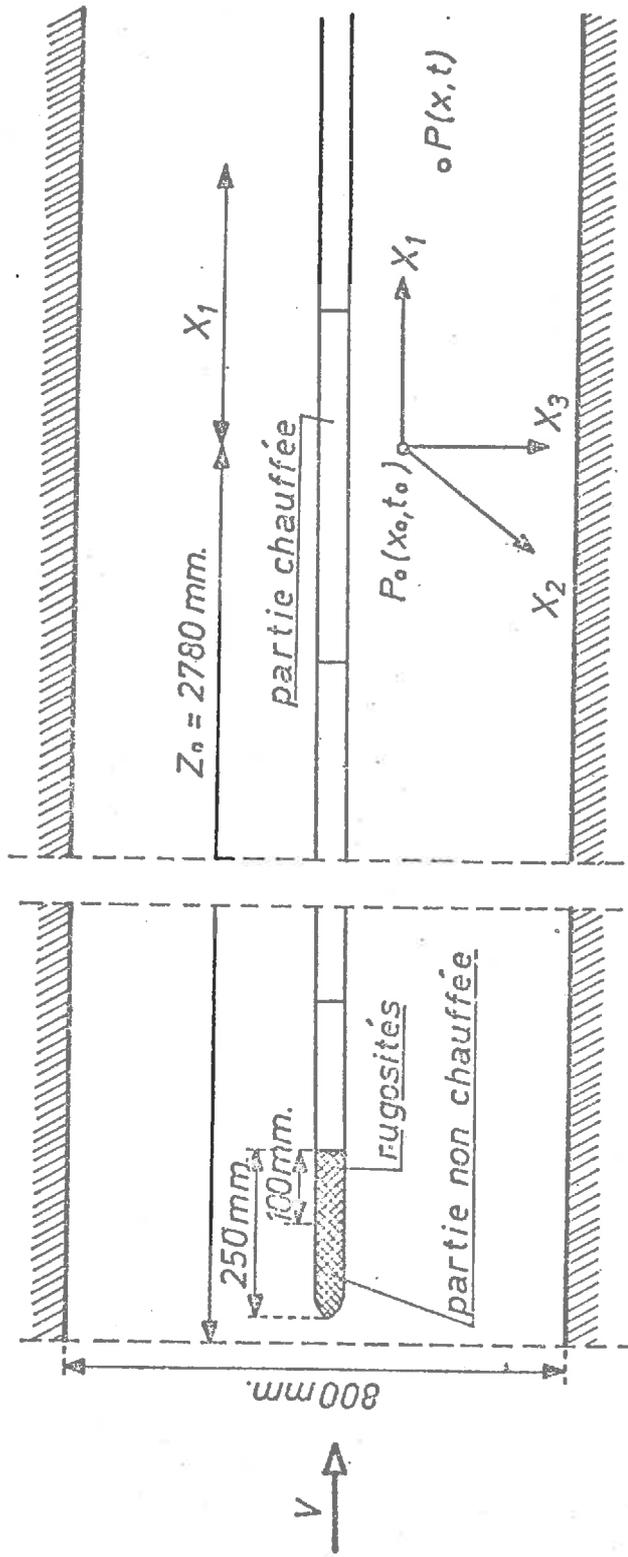


Fig. 3.1.1. Veine d'expérience

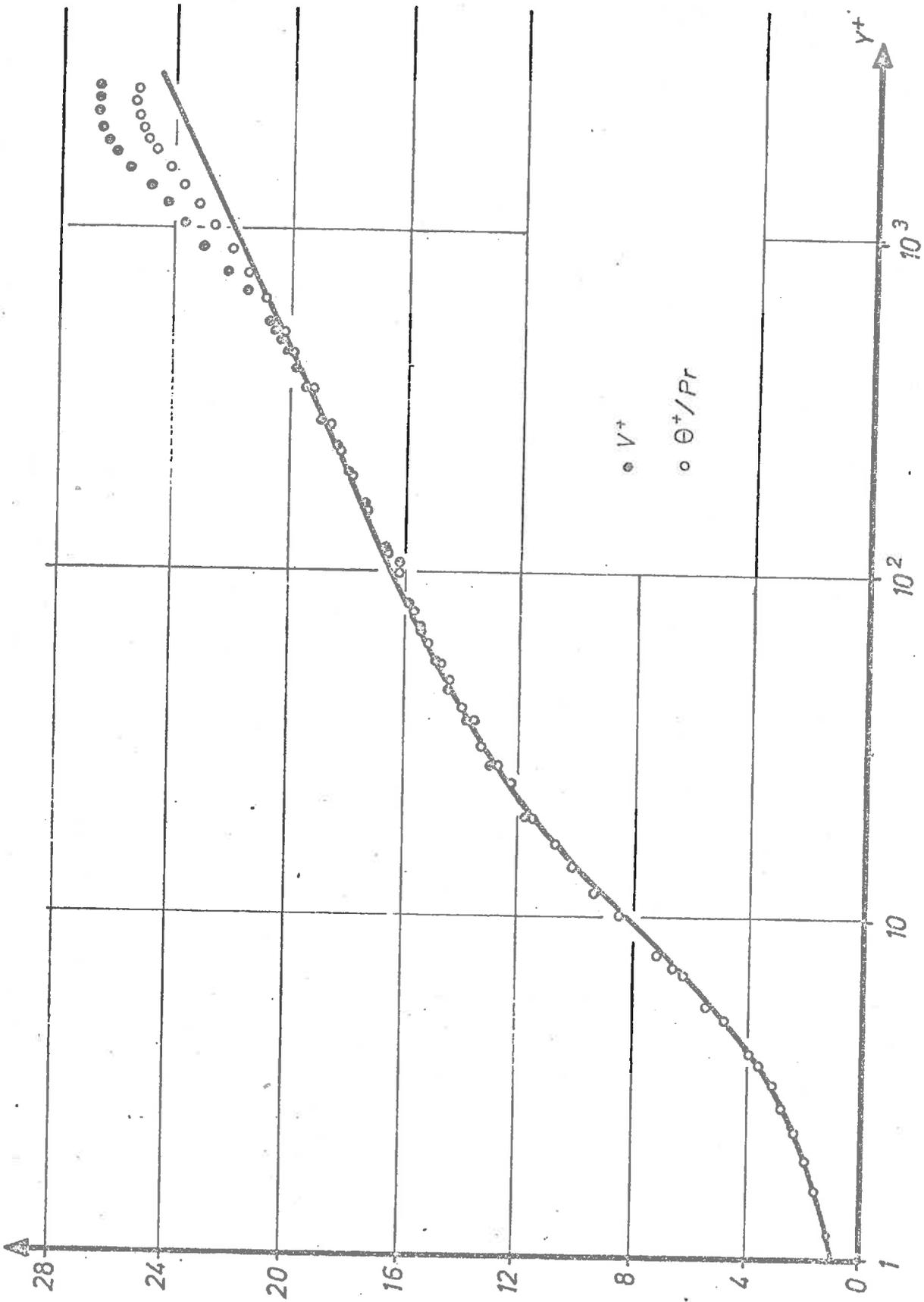


Fig. 3.1.2. Profils de vitesse et de température -  $V^+$  et  $\frac{\theta^+}{Pr}$  en fonction de  $y^+$

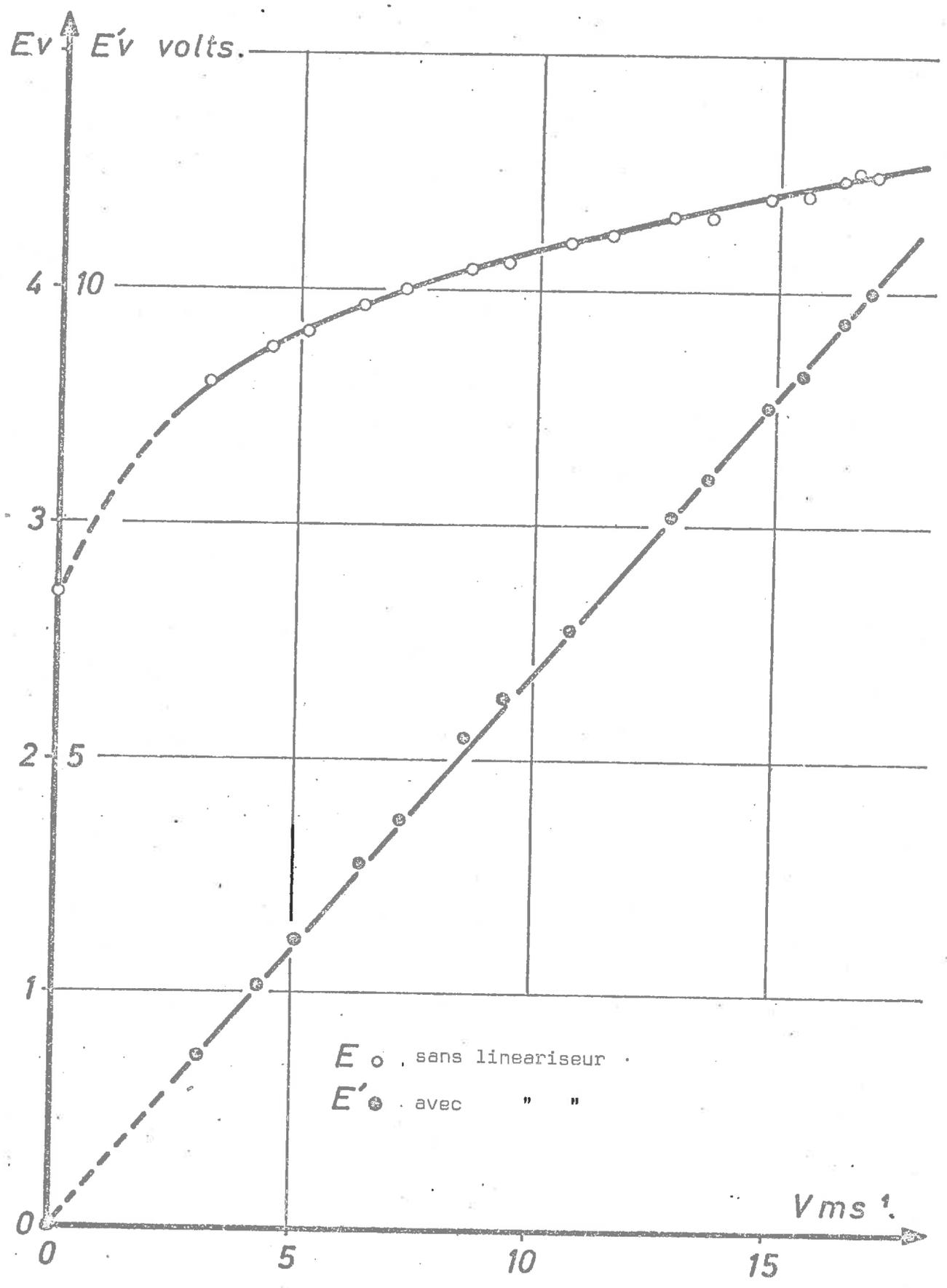
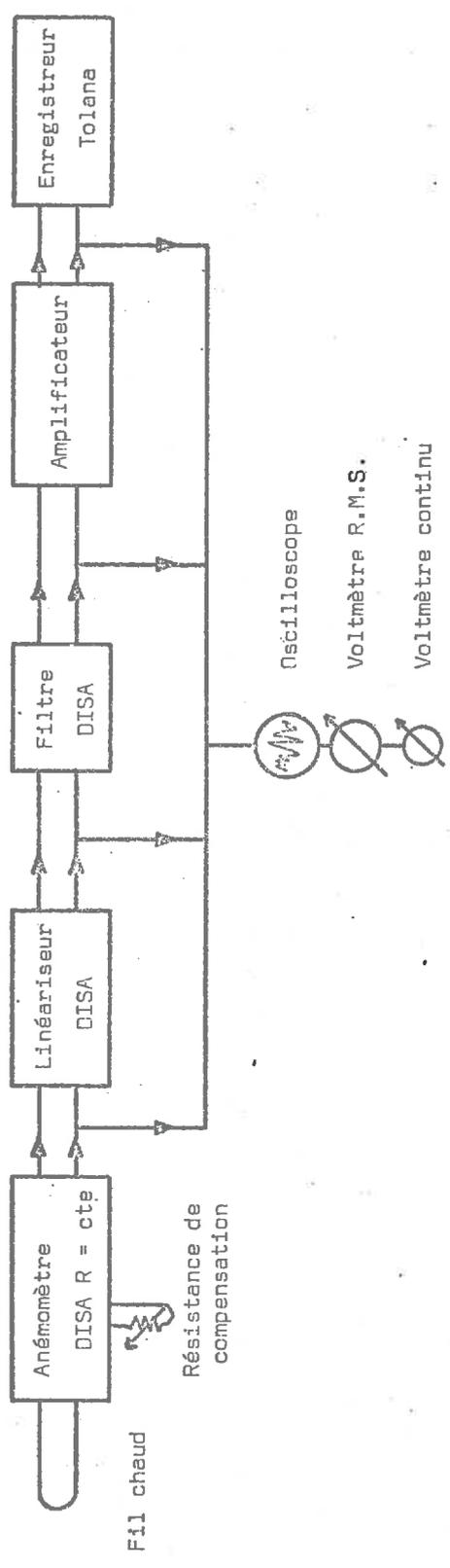
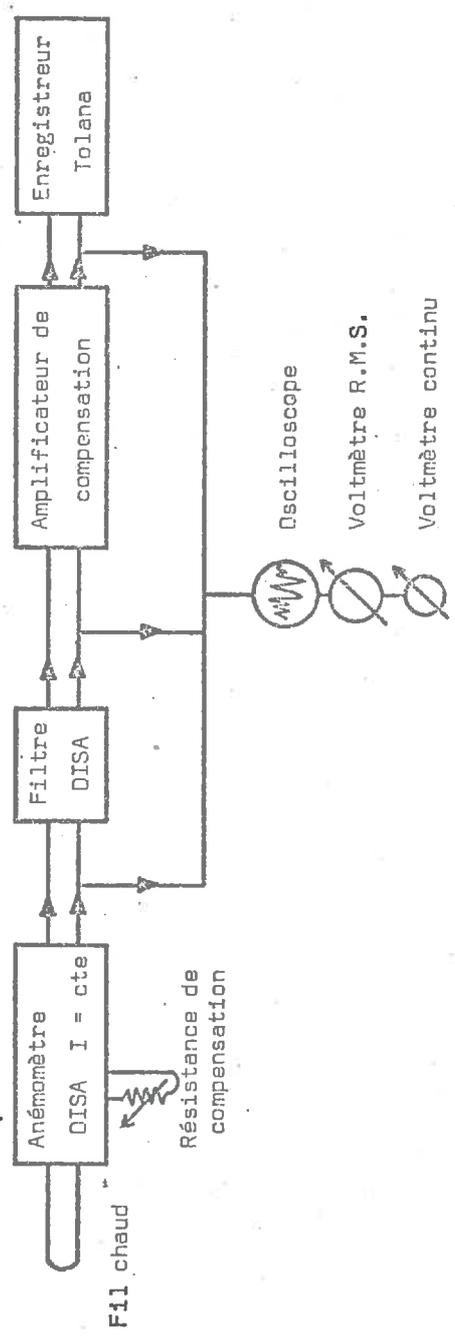


Fig. 3.2.1. Caractéristiques du fil chaud. Tension E en volts avec et sans linéariseur en fonction de la vitesse V en m.s<sup>-1</sup>

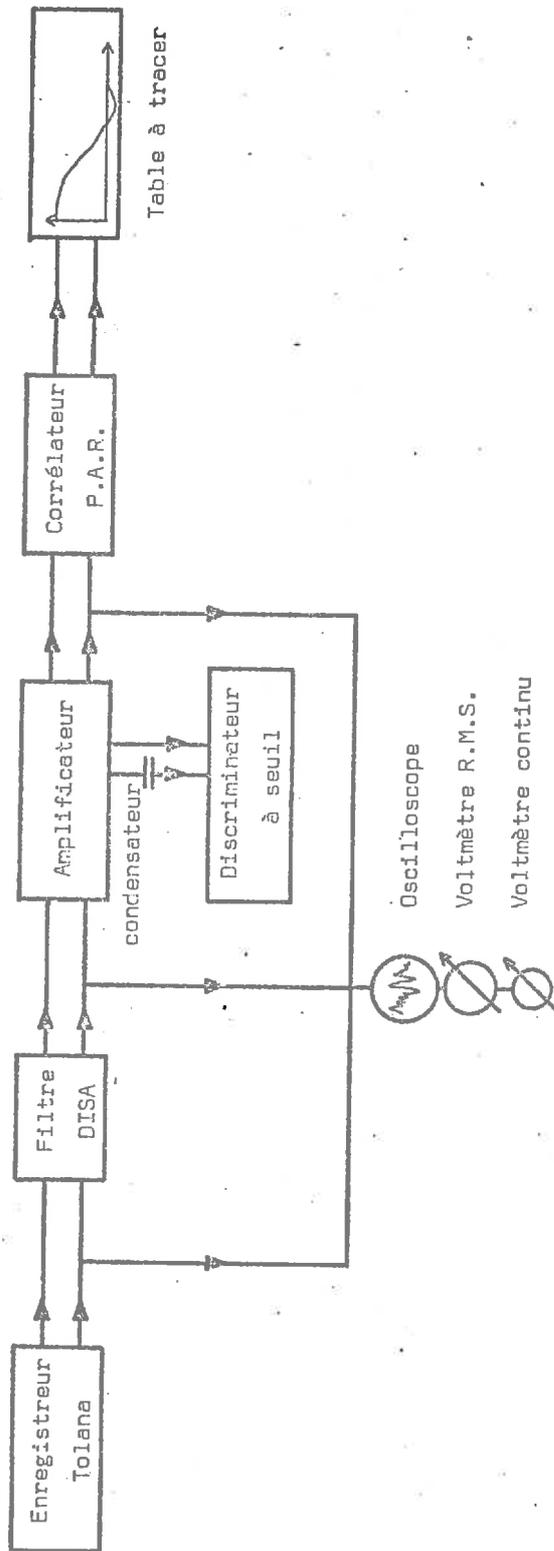


(a) - Enregistrement des fluctuations de vitesse



(b) - Enregistrement des fluctuations thermiques

Fig. 3.5.1. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour l'enregistrement  
a) des fluctuations de vitesse  
b) des fluctuations de température



- Lecture des enregistrements -

Fig. 3.5.2. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour la lecture des enregistrements

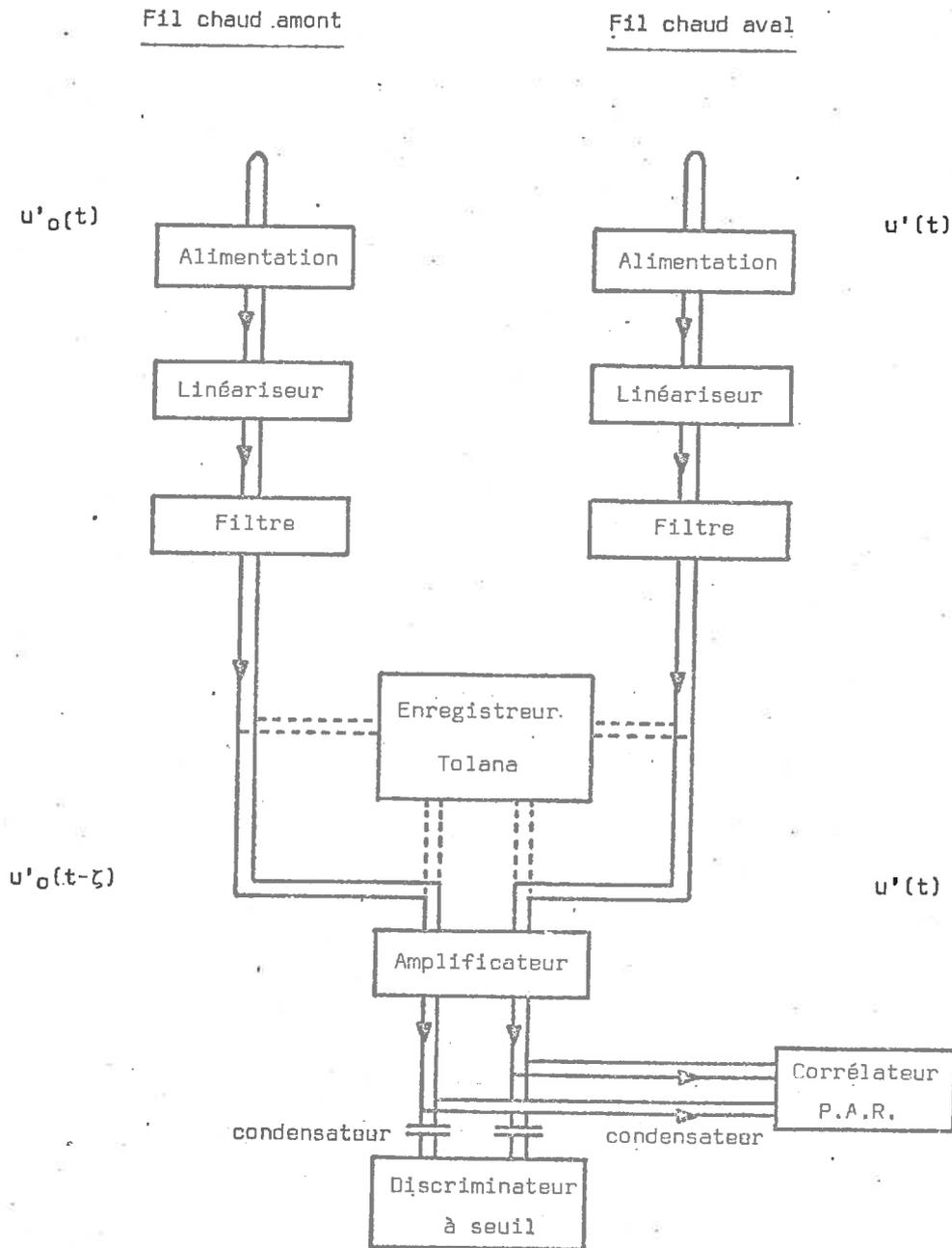


Fig. 3.5.3. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour la mesure des fonctions de répartition et de la corrélation spatio-temporelle double

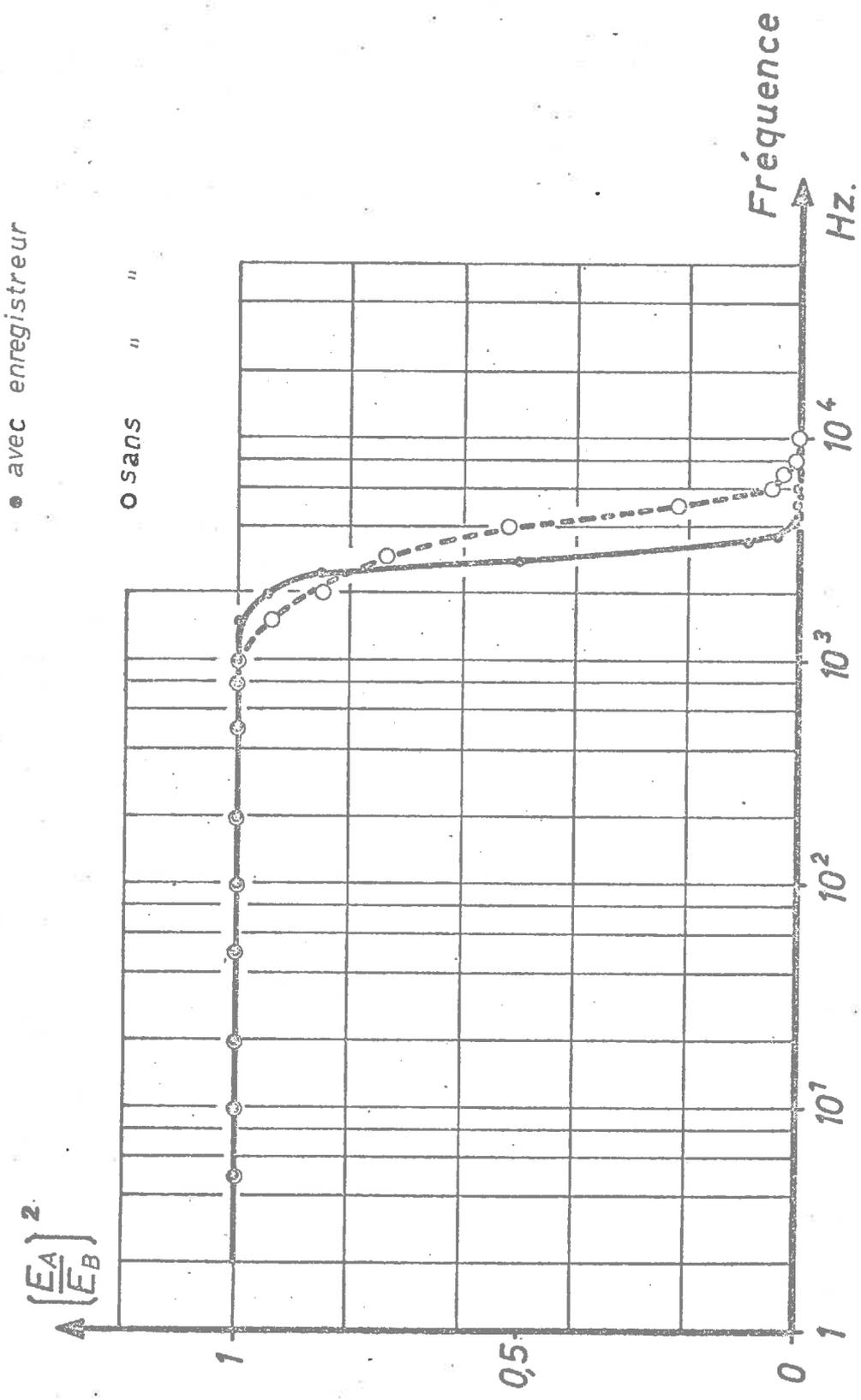


Fig. 3.5.4. Bande passante de la chaîne de mesure avec et sans enregistreur.  
Rapport  $(EA/EB)^2$  en fonction de la fréquence  $n$

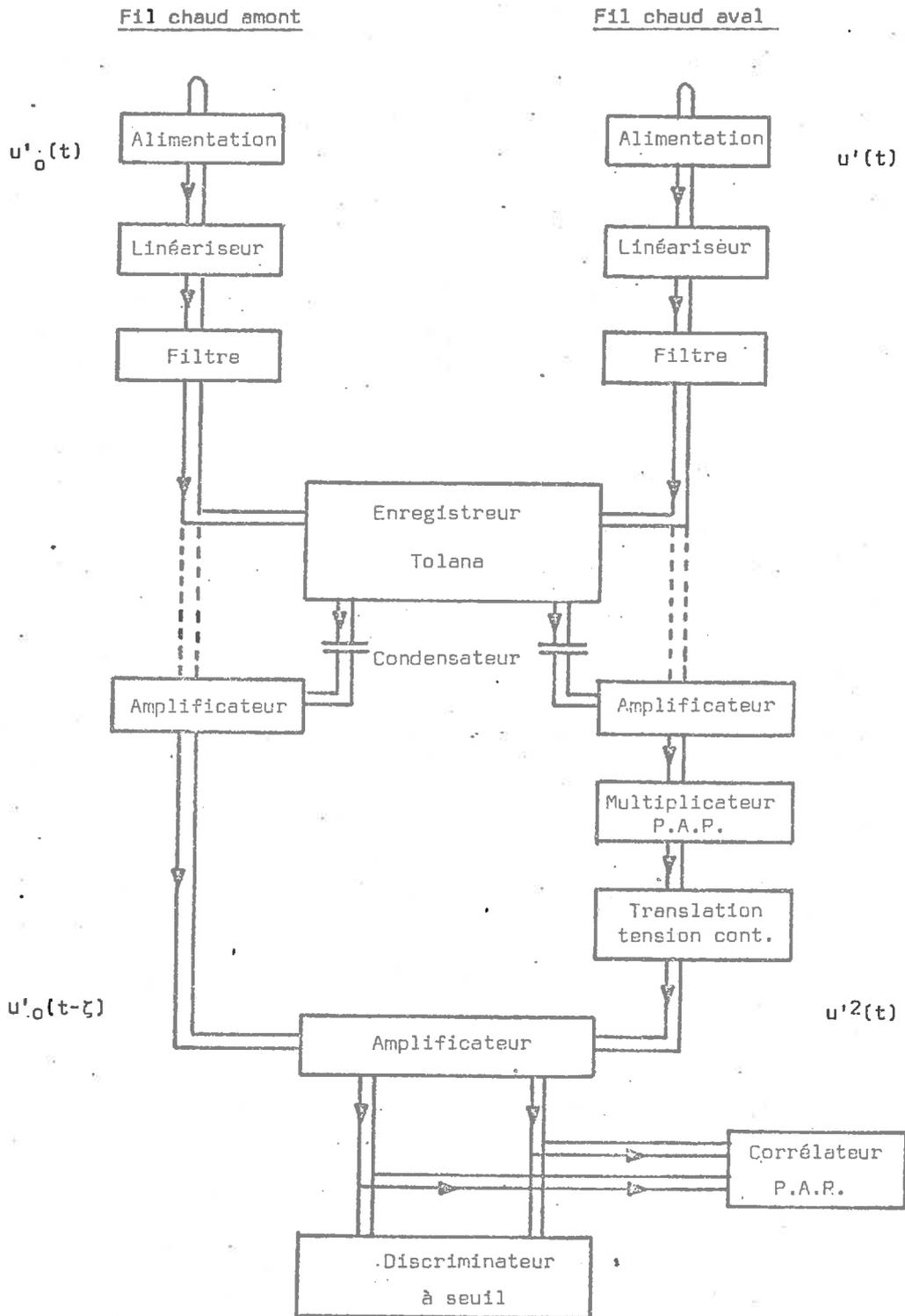


Fig. 3.5.5. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental pour la mesure des fonctions de répartition et de la corrélation spatio-temporelle triple

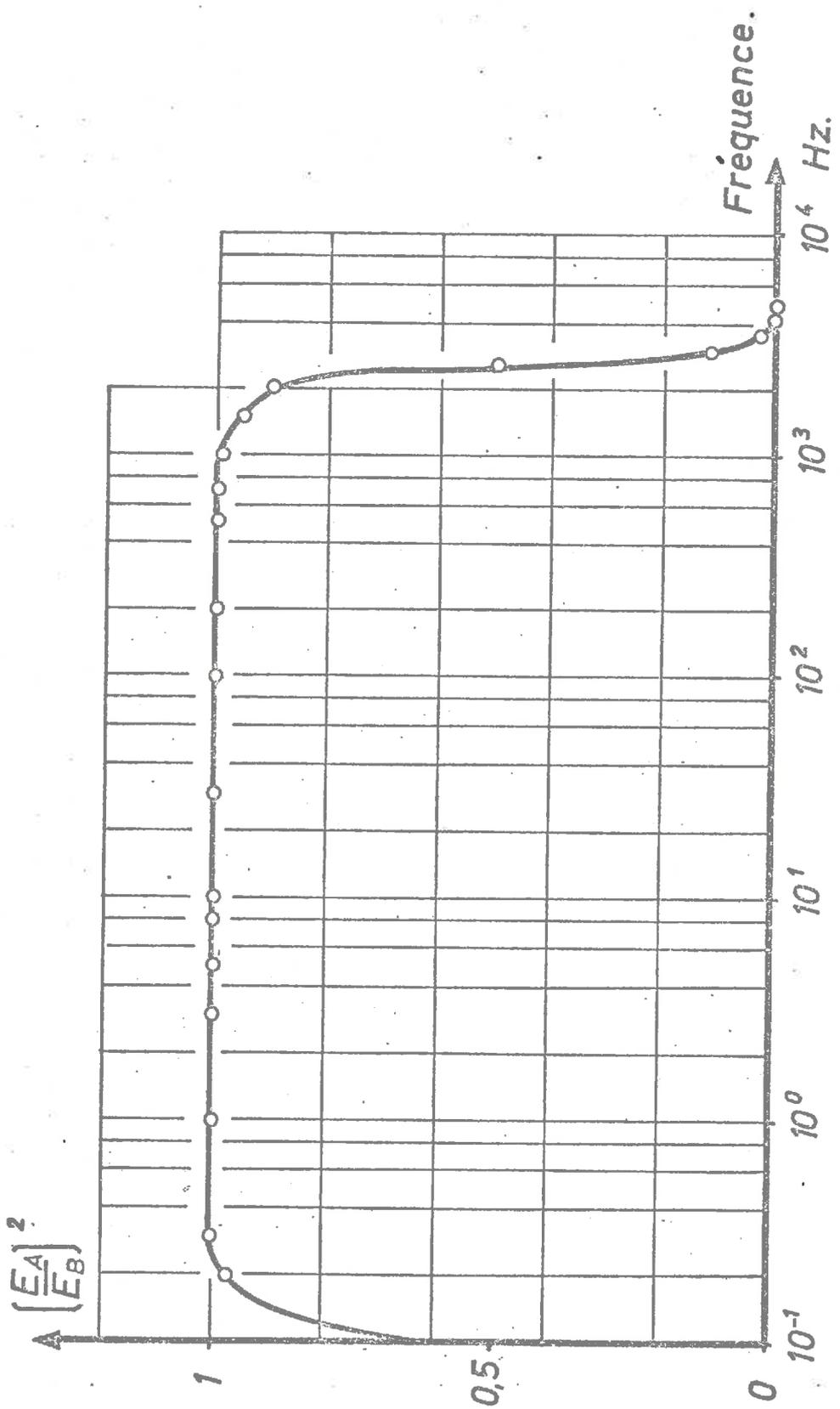


Fig. 3.5.6. Bande passante de la chaîne de mesure pour la mesure de la corrélation spatio-temporelle triple. Rapport  $(\frac{EA}{EB})^2$  en fonction de la fréquence n

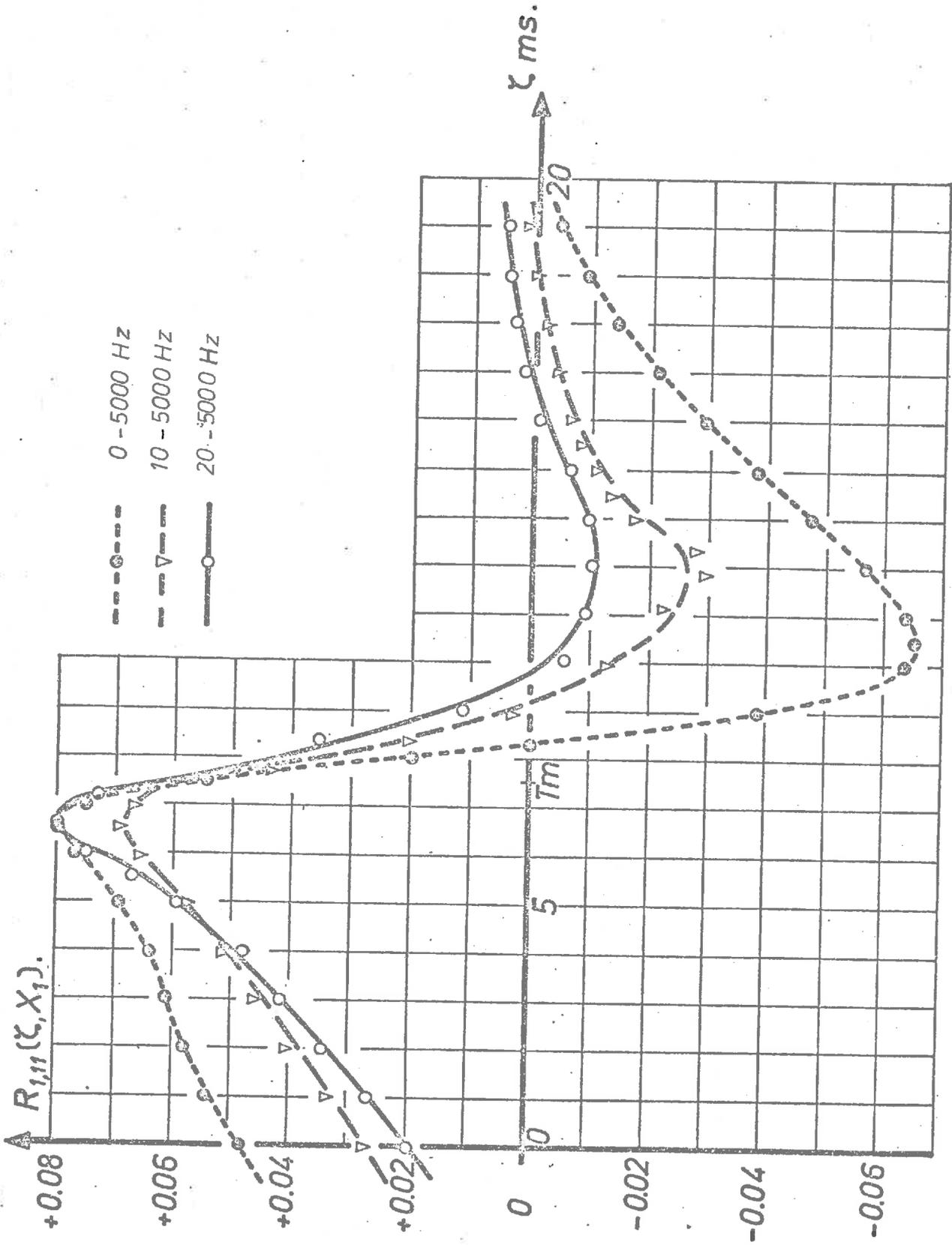


Fig. 3.5.7. Influence de la bande passante sur la corrélation spatio-temporelle triple. Courbe  $R_{1,11}(\zeta, X_1)$  en fonction du temps retard  $\zeta$  pour trois valeurs de la bande passante

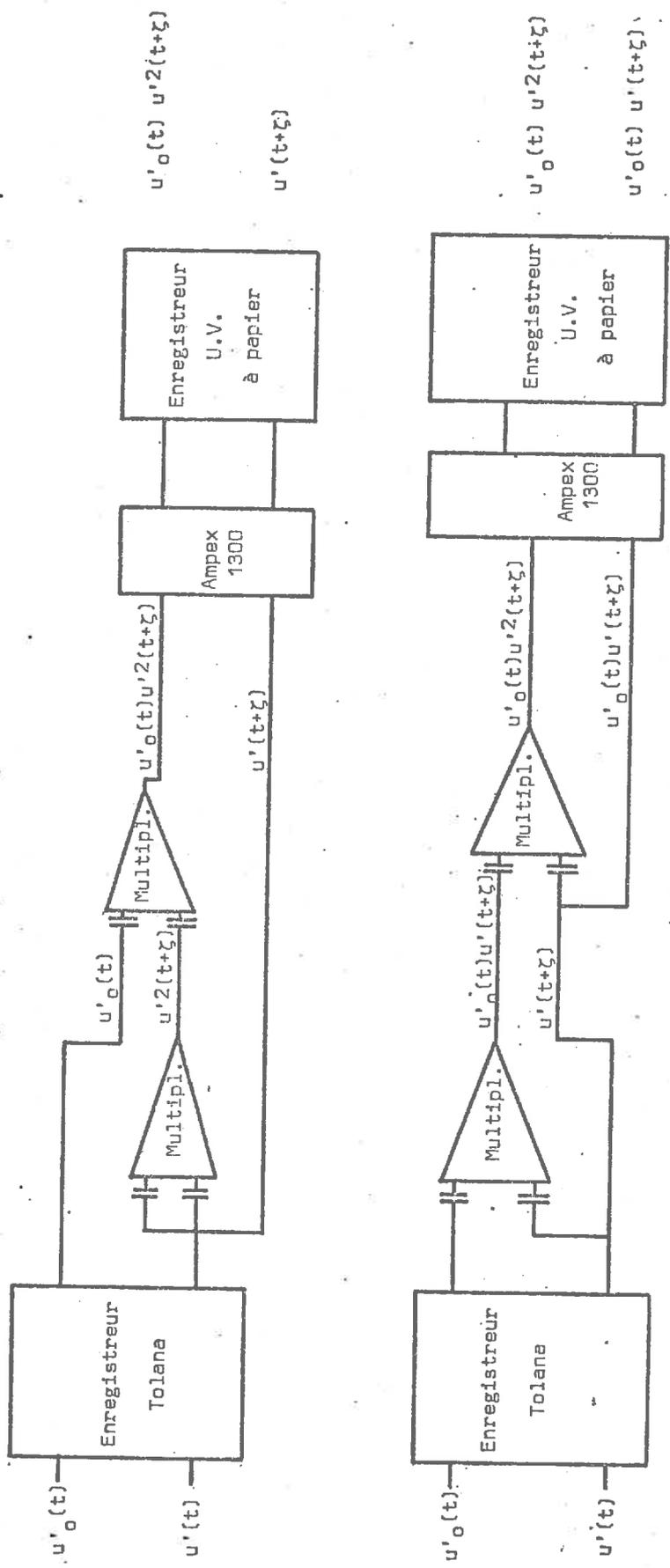


Fig. 3.5.8. Chaîne de mesure. Dispositif expérimental d'enregistrement des corrélations spatio-temporelles triples

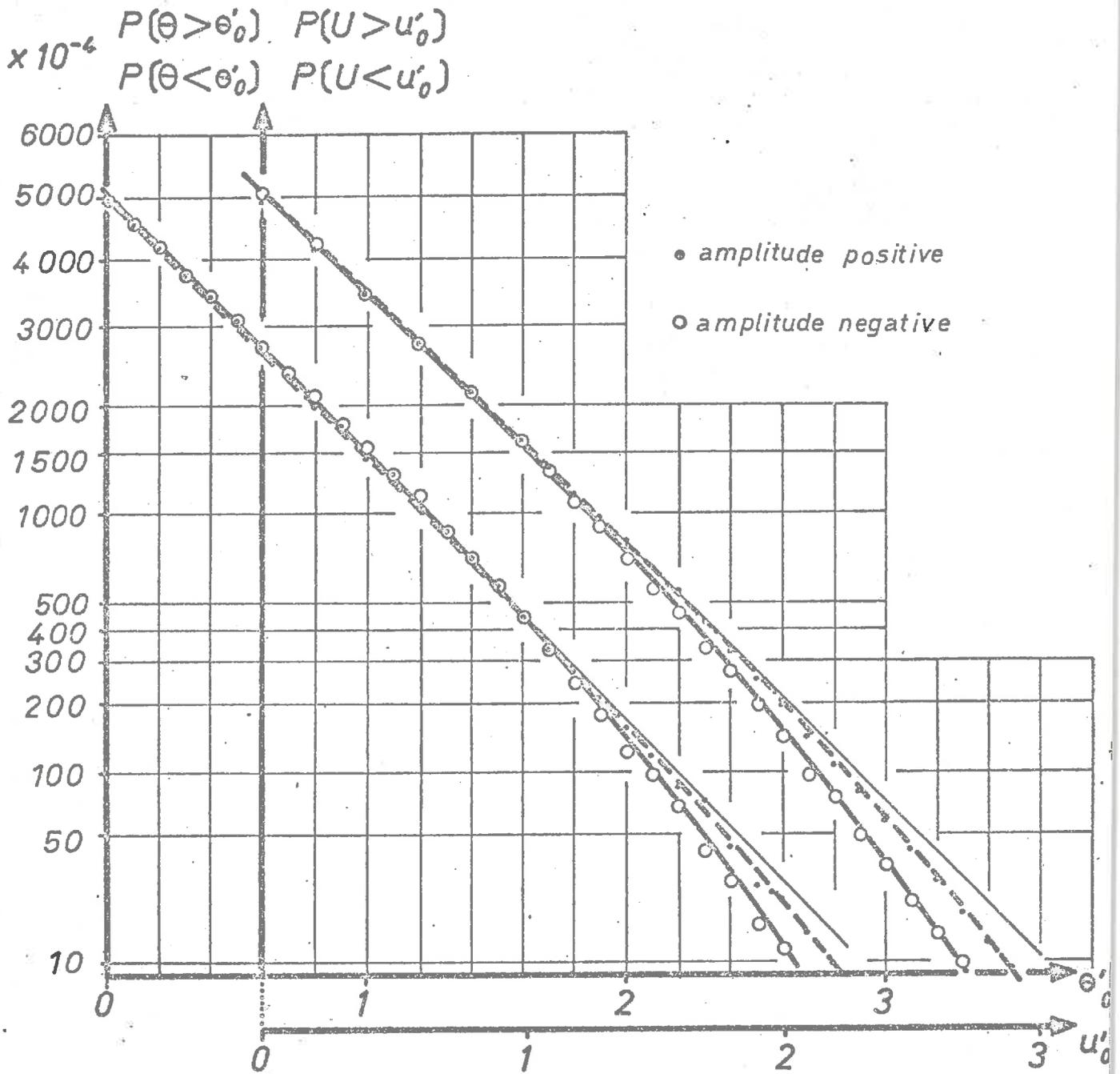


Fig. 4.1.1. Fonction de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations thermiques. Fil amont. Courbes  $P(\overline{U} > u'_{0'})$ ,  $P(\overline{U} < u'_{0'})$  en fonction de  $u'_{0'}$ ,  $P(\overline{\theta} > \theta'_{0'})$  et  $P(\overline{\theta} < \theta'_{0'})$  en fonction de  $\theta'_{0'}$ .

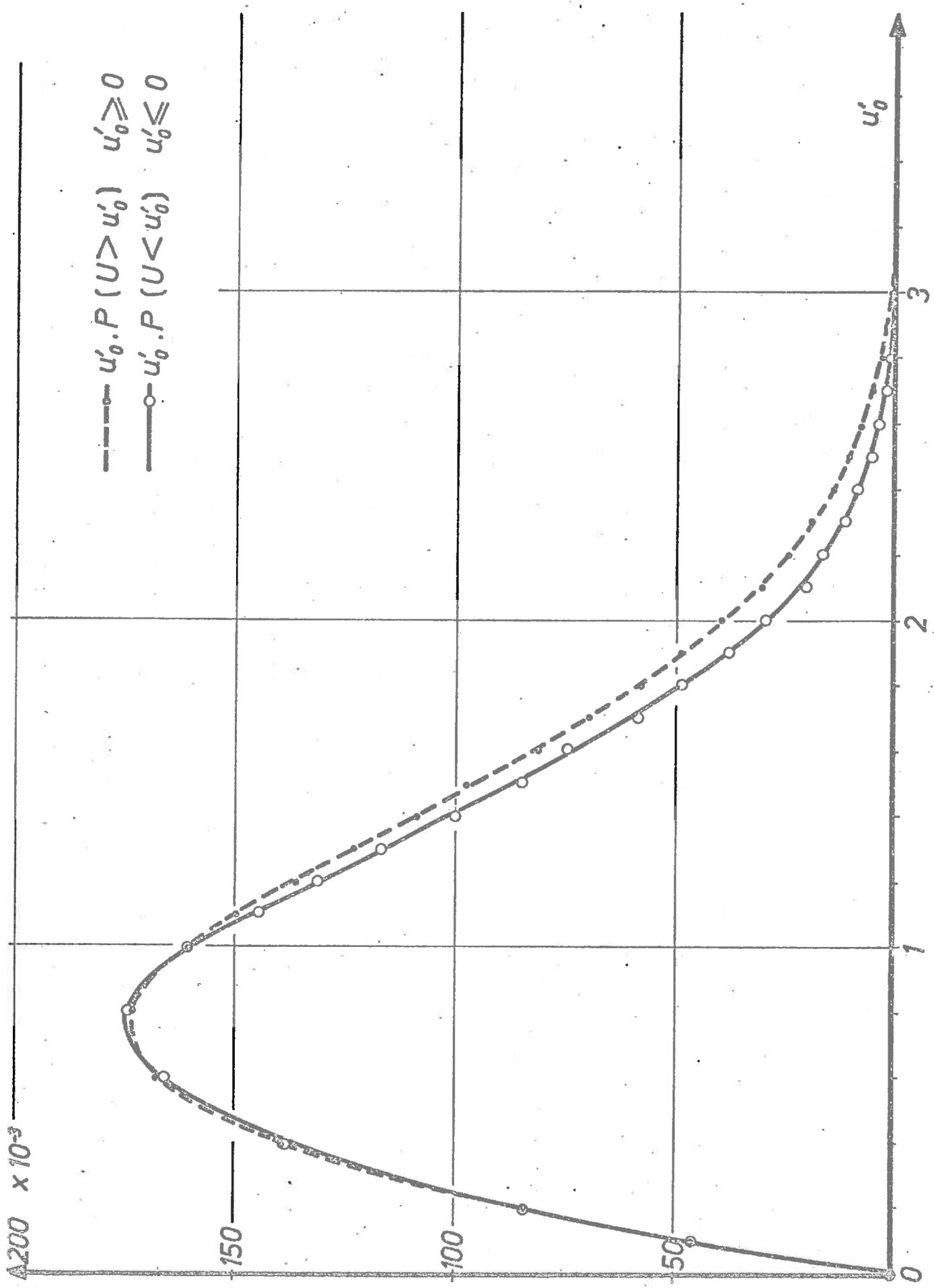


Fig. 4.1.2. Moment d'ordre deux des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'_0 P(U > u'_0)$  et  $u'_0 P(U < u'_0)$  en fonction de  $u'_0$

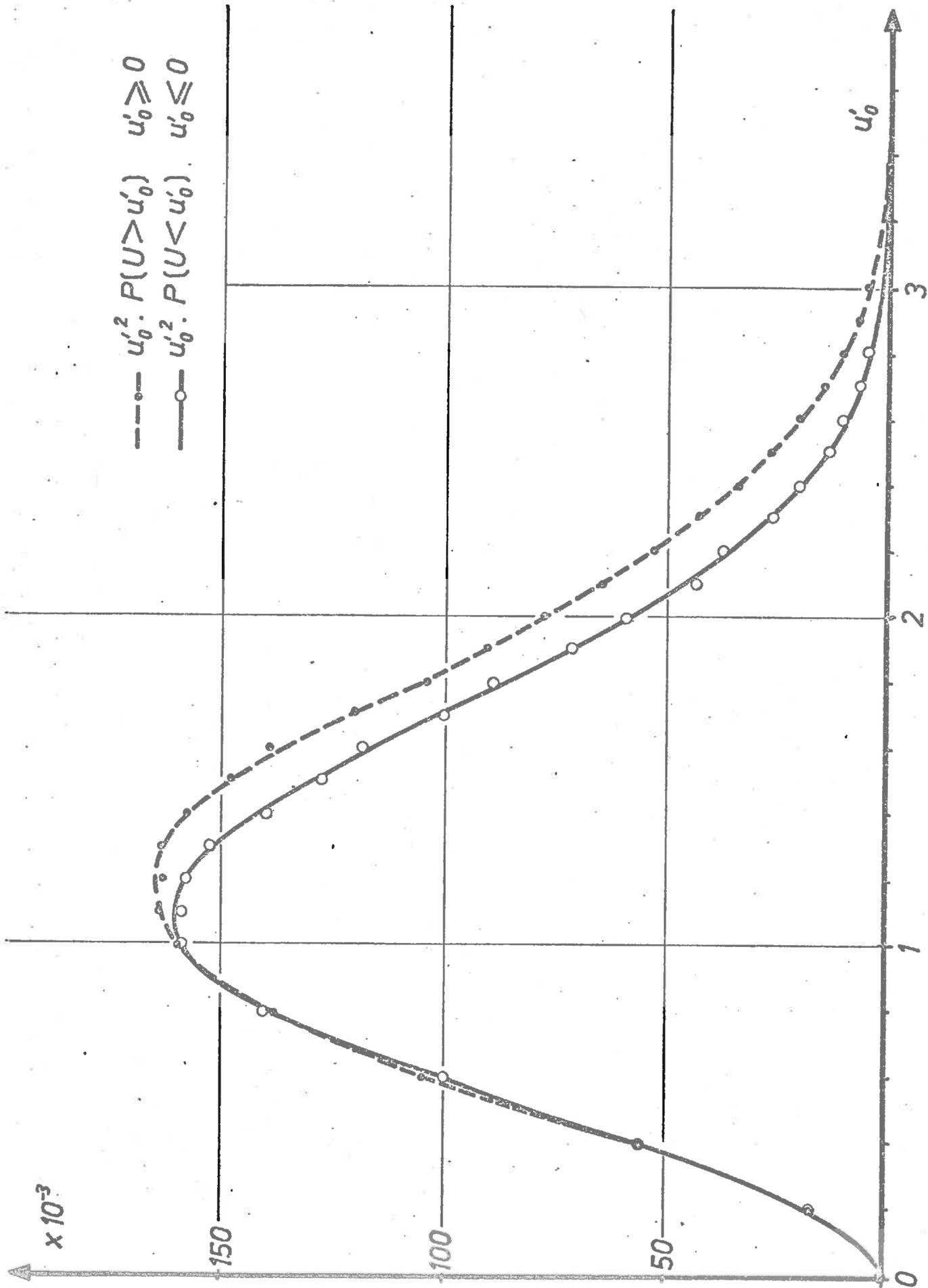


Fig. 4.1.3. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'_{0^2} P(U > u'_0)$  et  $u'_{0^2} P(U < u'_0)$  en fonction de  $u'_0$

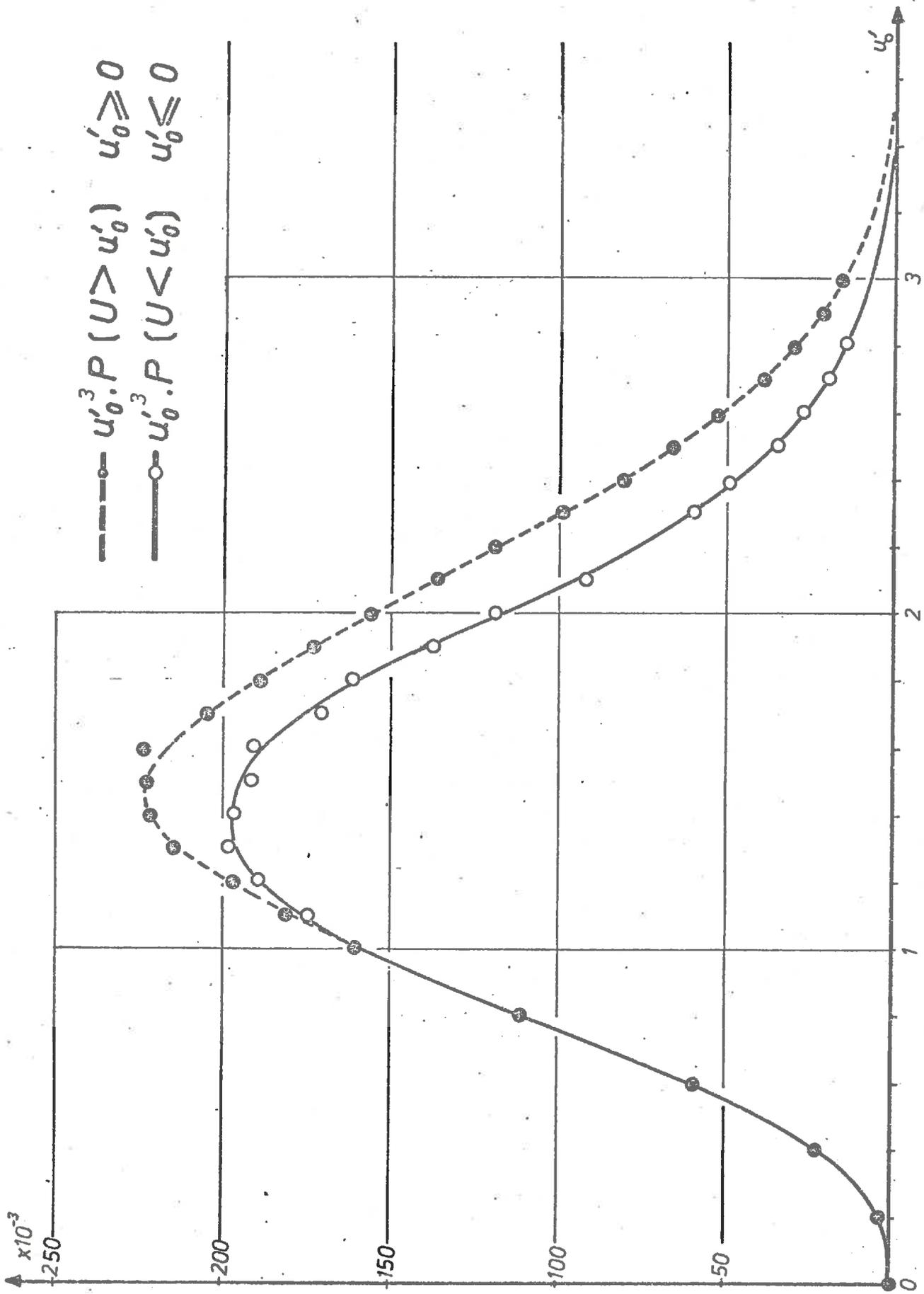


Fig. 4.1.4. Moment d'ordre quatre des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u_0^3 P(U > u_0')$  et  $u_0^3 P(U < u_0')$  en fonction de  $u_0$

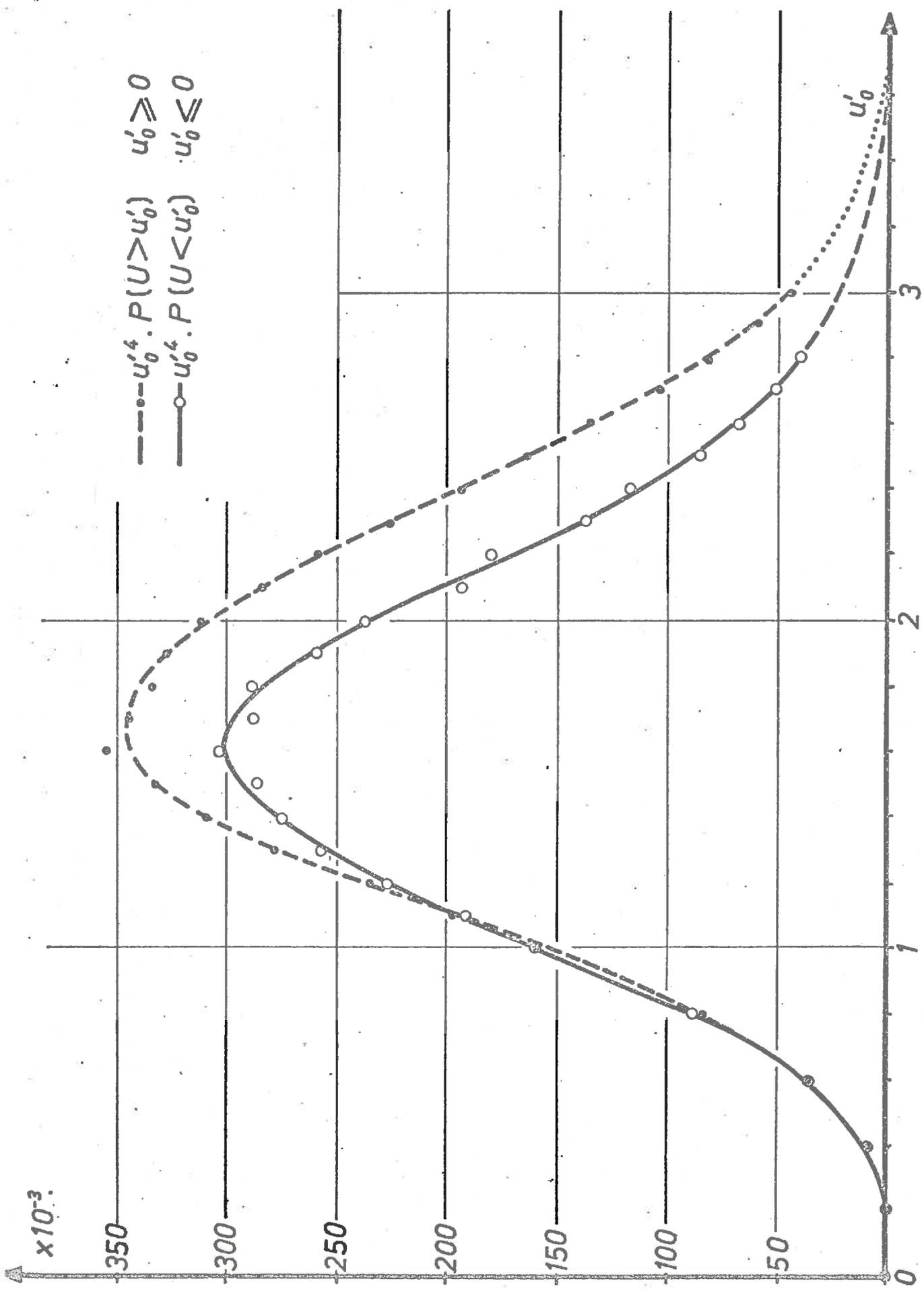


Fig. 4.1.5. Moment d'ordre cinq des fluctuations longitudinales de vitesse. Fil amont. Courbes  $u'_0 P(U > u'_0)$  et  $u'_0 P(U < u'_0)$  en fonction de  $u'_0$

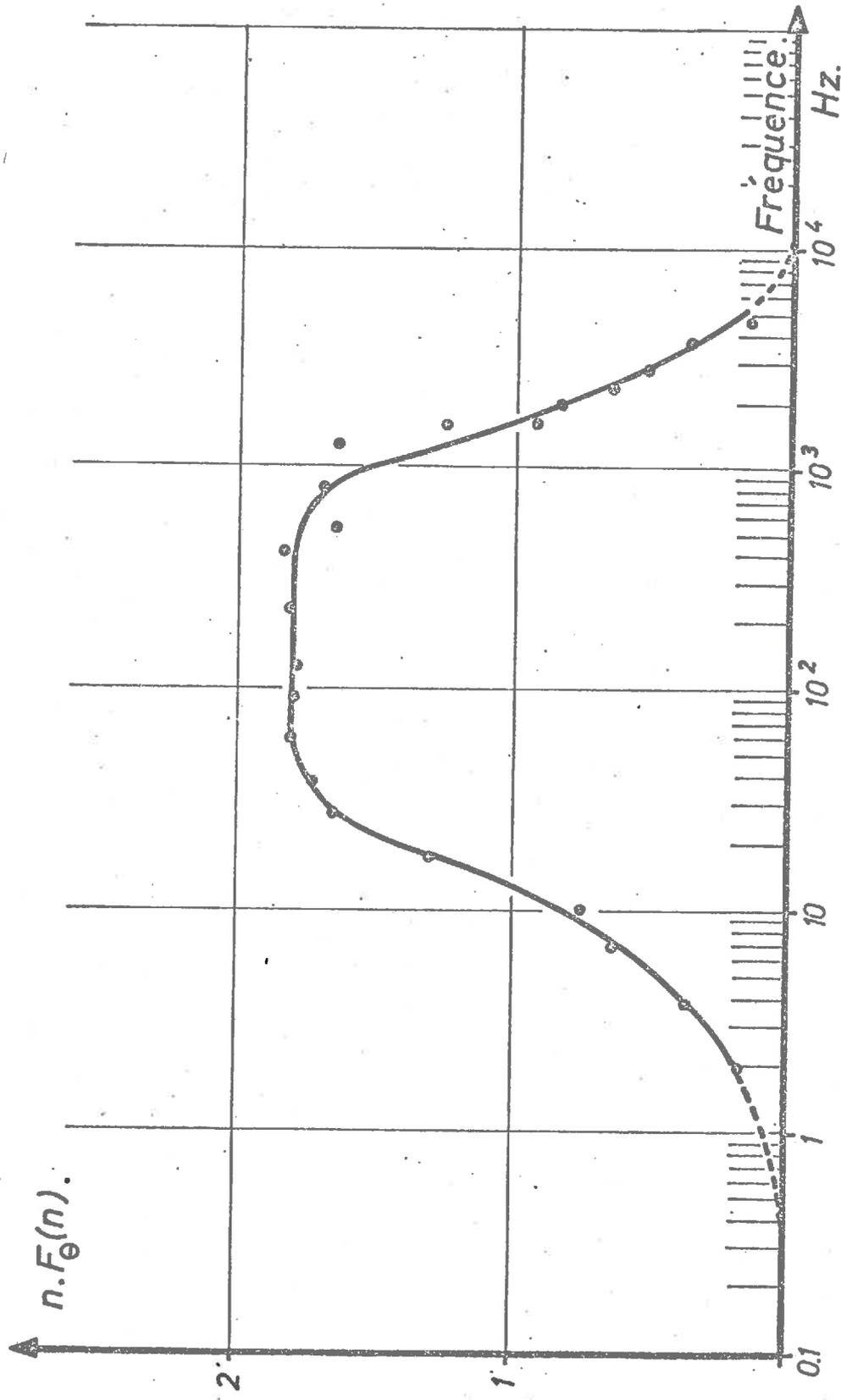


Fig. 4.1.6. Spectre d'énergie des fluctuations de température. Courbe  $nF_{\theta}(n)$  en fonction de la fréquence  $n$

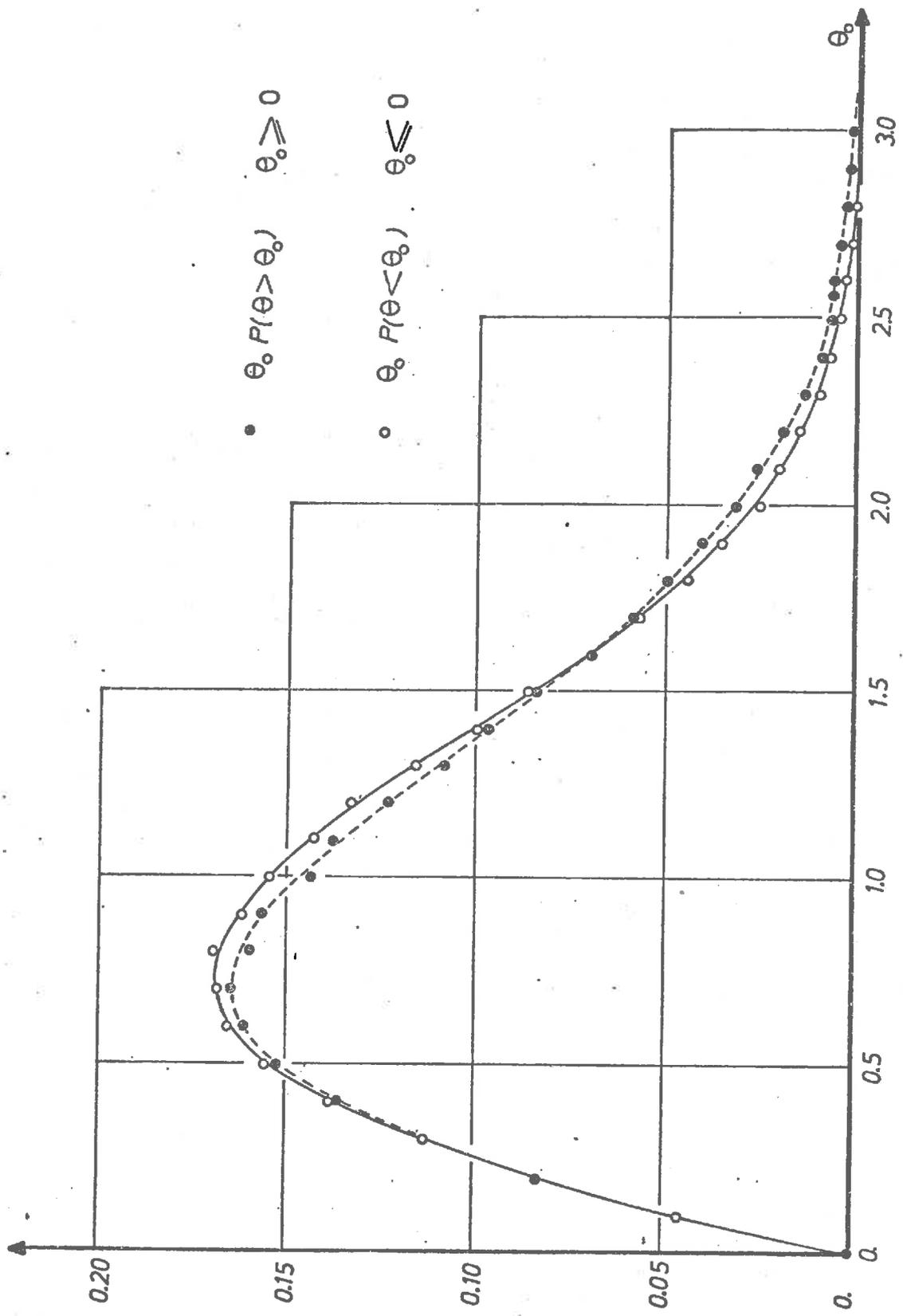


Fig. 4.1.7. Moment d'ordre deux des fluctuations thermiques. Fil amont.  
Courbes  $\theta_0 P(\theta > \theta_0)$  et  $\theta_0 P(\theta < \theta_0)$  en fonction de  $\theta_0$

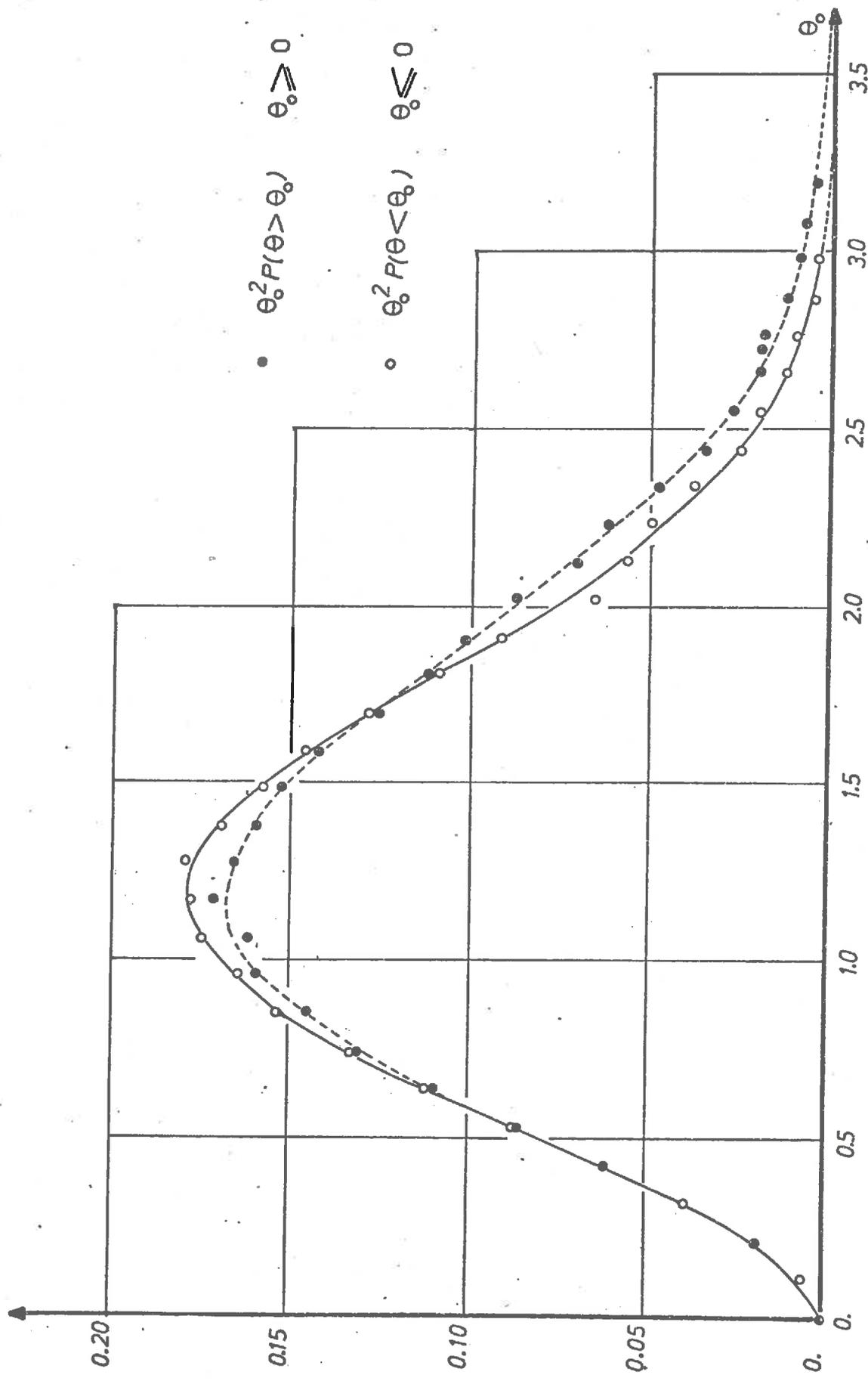


Fig. 4.1.8. Moment d'ordre trois des fluctuations thermiques. Fil amant.  
Courbes  $\theta_0^2 P(\theta > \theta_0)$  et  $\theta_0^2 P(\theta < \theta_0)$  en fonction de  $\theta_0$

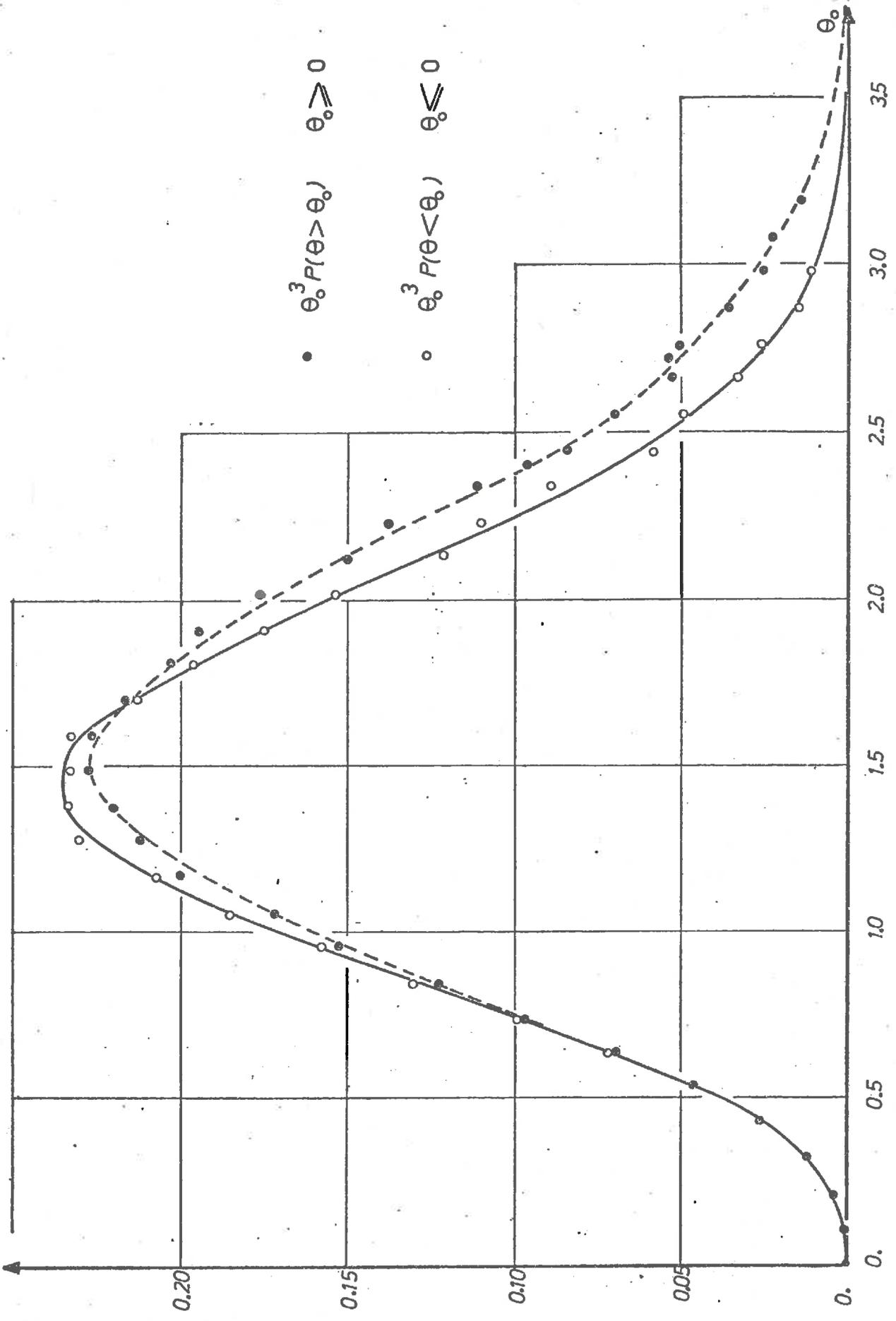


Fig. 4.1.9. Moment d'ordre quatre des fluctuations thermiques. Fil amont.  
Courbes  $\theta_0^3 P(\theta > \theta_0)$  et  $\theta_0^3 P(\theta < \theta_0)$  en fonction de  $\theta_0$

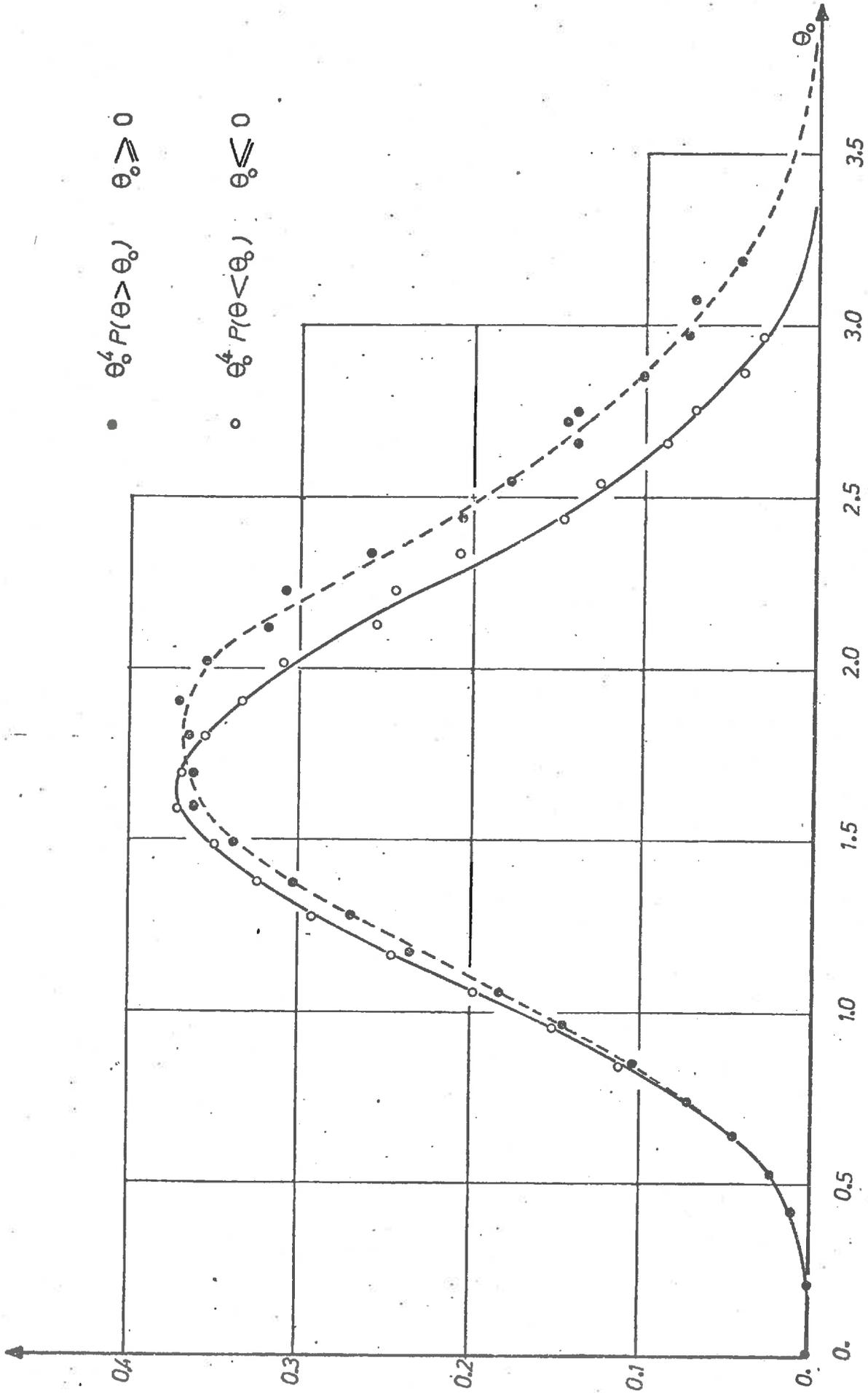


Fig. 4.1.10. Moment d'ordre cinq des fluctuations thermiques. Fil amont.  
Courbes  $\theta_0^4 P(\theta > \theta_0)$  et  $\theta_0^4 P(\theta < \theta_0)$  en fonction de  $\theta_0$

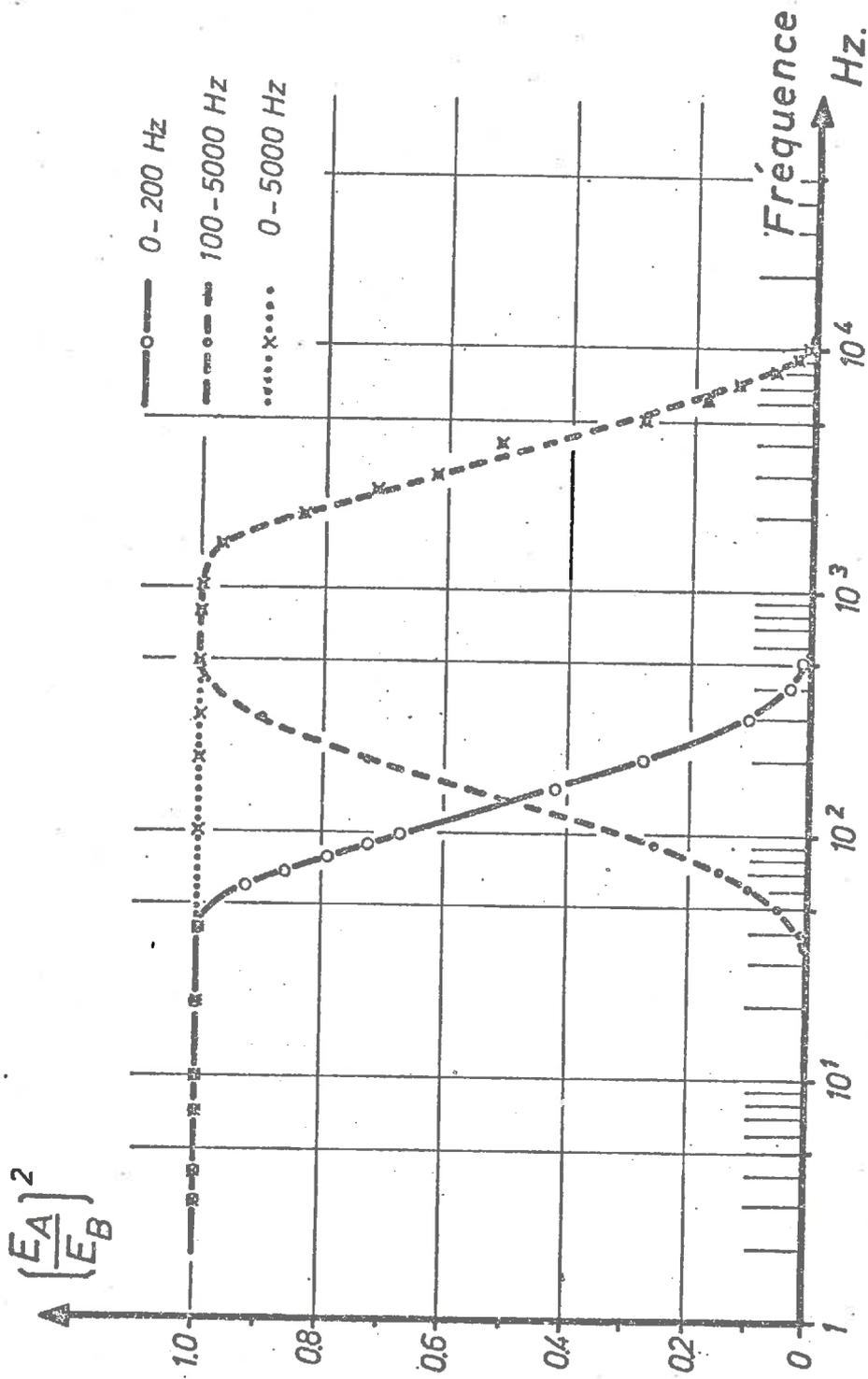


Fig. 4.1.11. Bande passante des deux filtres en série. Rapport  $(\frac{E_A}{E_B})^2$  en fonction de la fréquence  $n$  pour trois valeurs de la bande passante

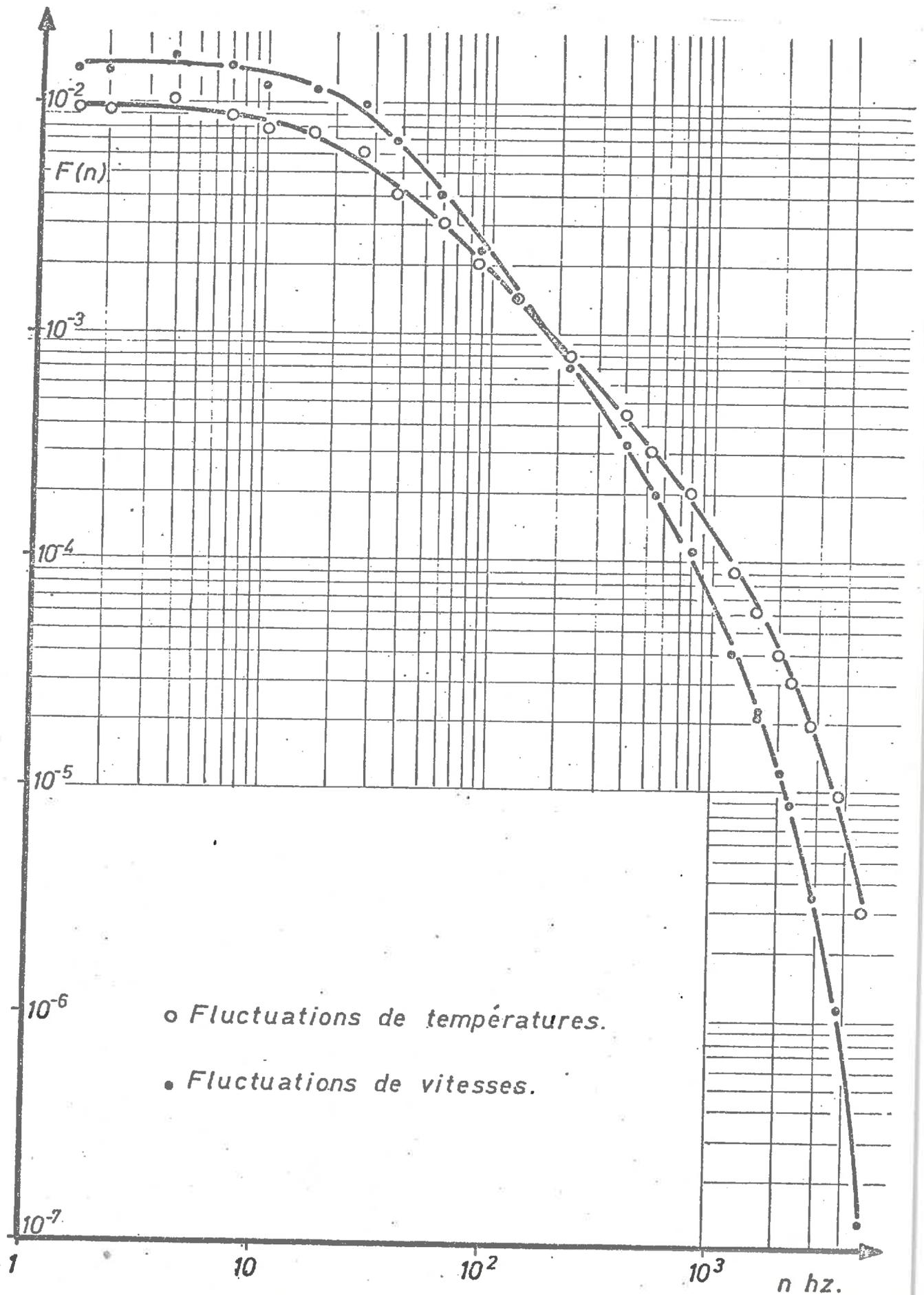


Fig. 4.1.12. Spectres d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse et des fluctuations de température. Courbes  $F(n)$  en fonction de la fréquence  $n$

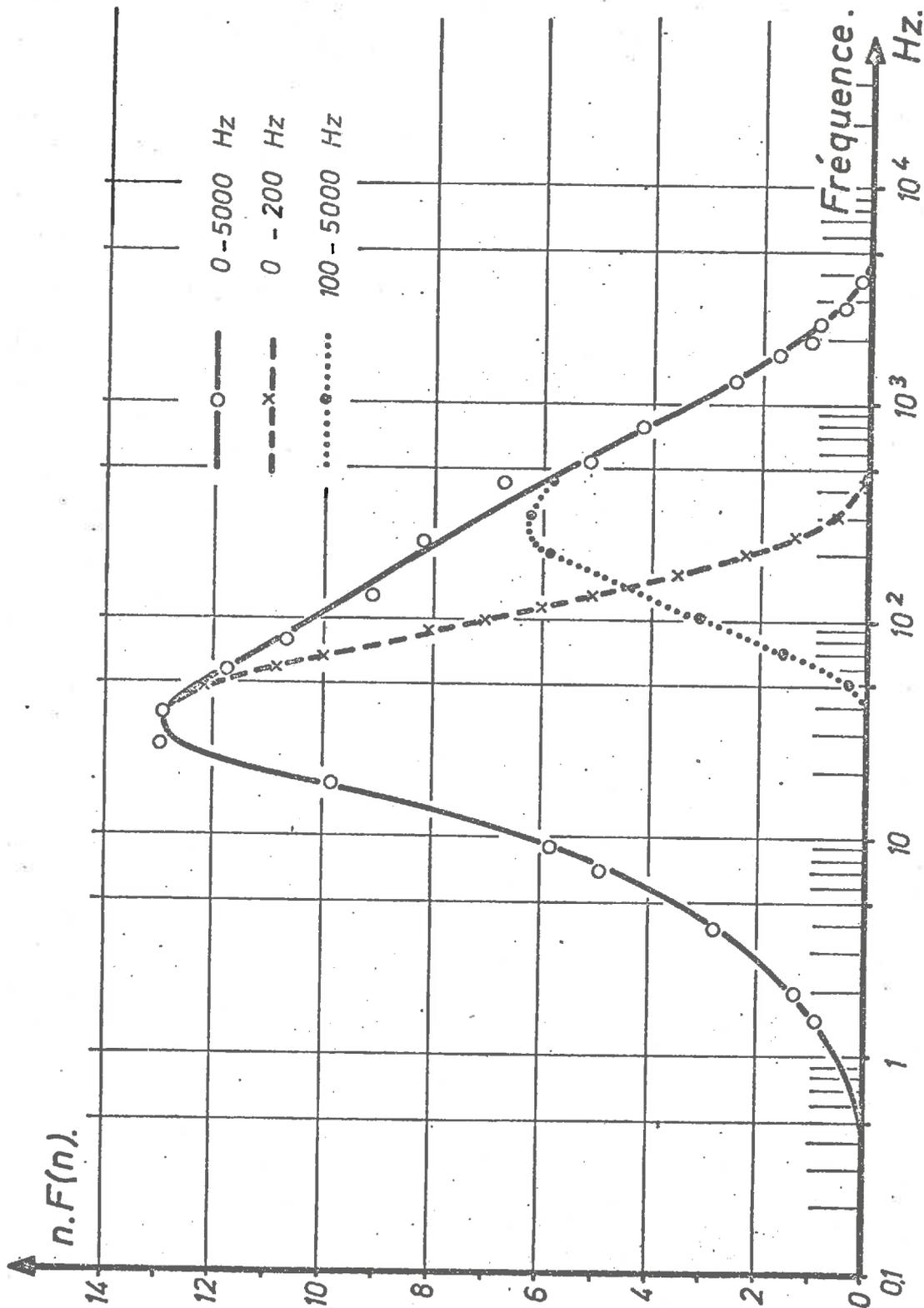


Fig.4.1.13. Spectres d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse en fonction de la bande passante de la chaîne de mesure. Courbes  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$

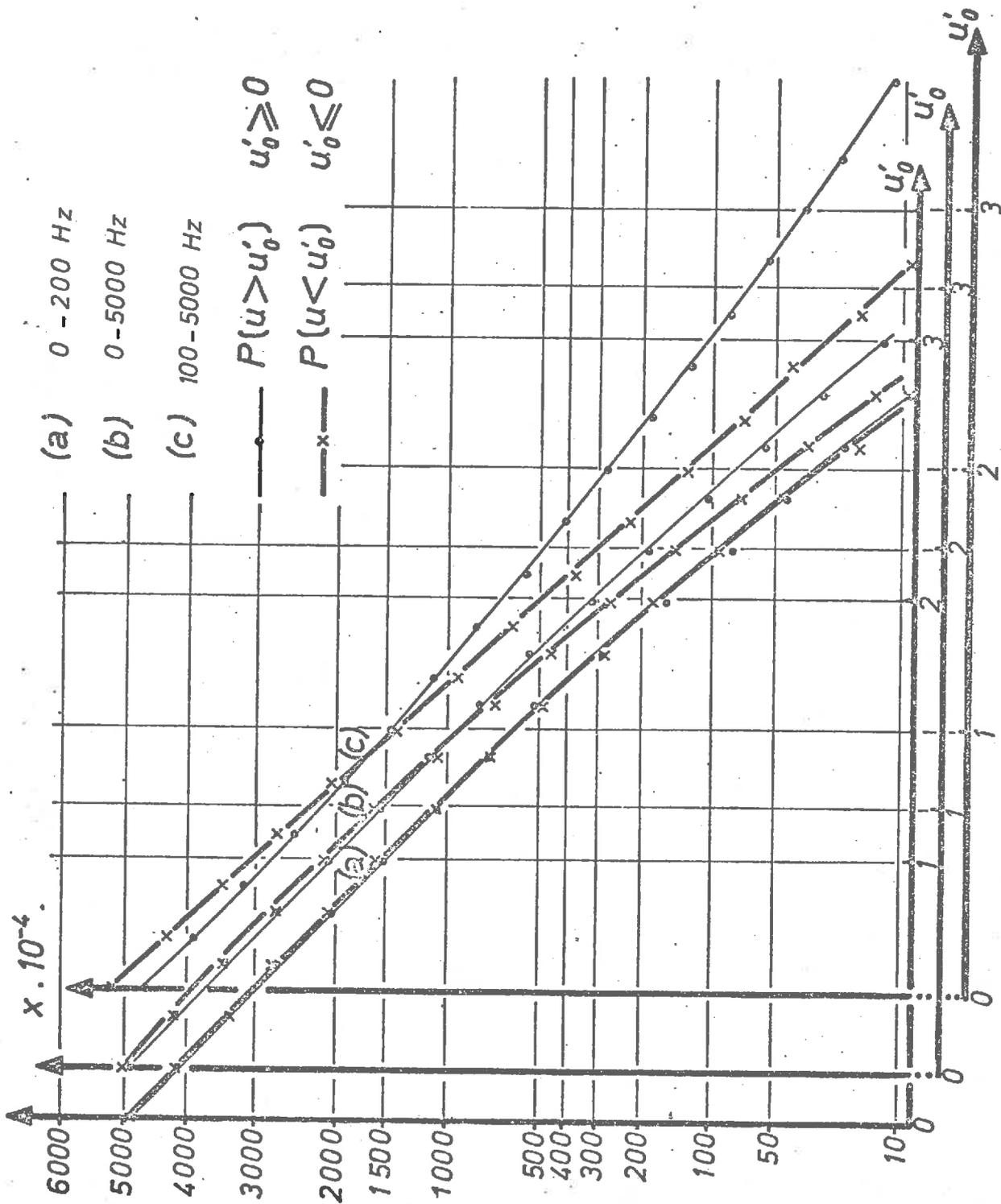


Fig. 4.1.14. Fonctions de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées. Courbes  $P\{u > u'_0\}$  et  $P\{u < u'_0\}$  pour trois bandes passantes en fonction de  $u'_0$

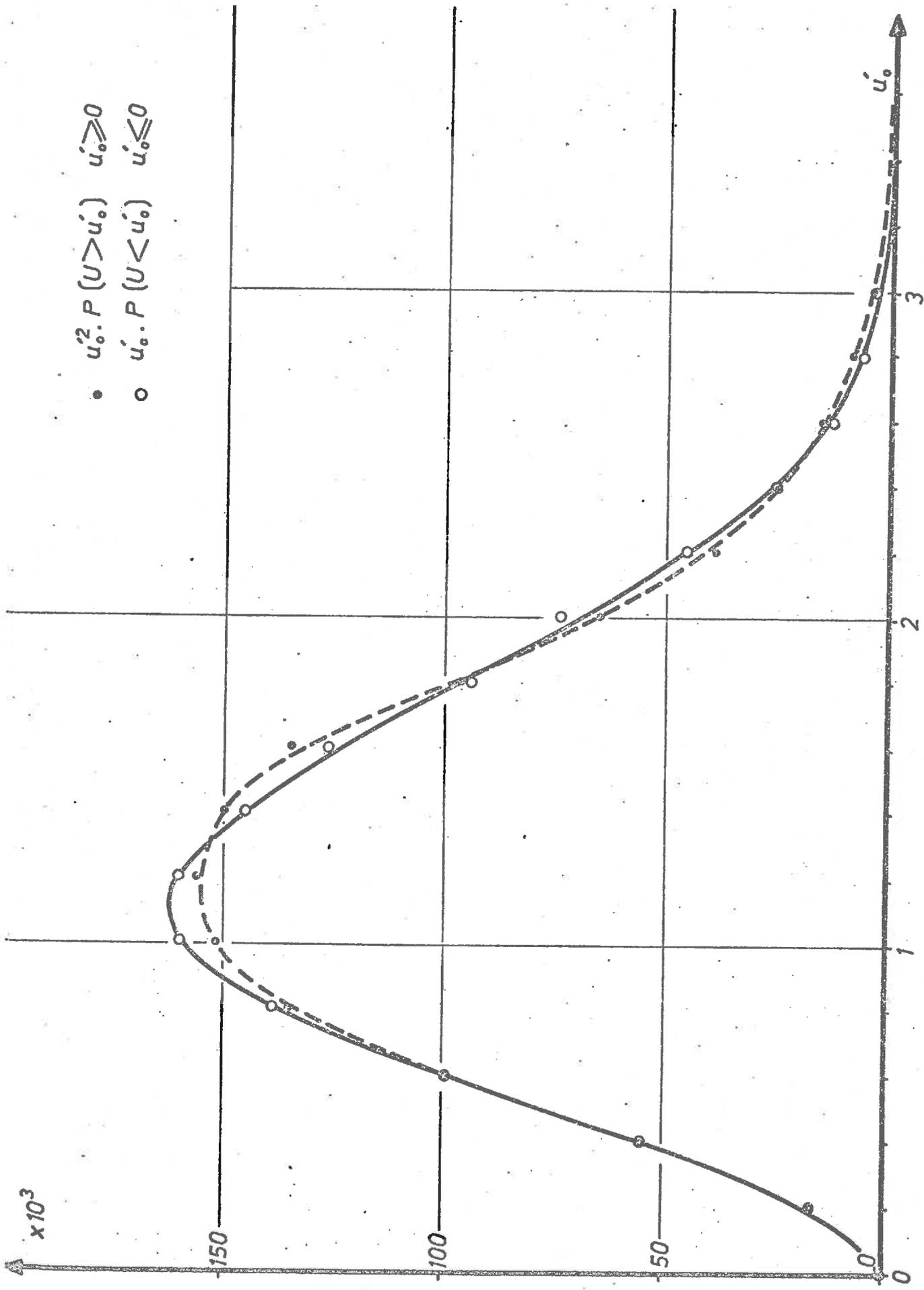


Fig. 4.1.15. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées (0-200 Hz). Courbes  $u_0^2 \cdot P(U > u_0)$  et  $u_0^2 \cdot P(U < u_0)$  en fonction de  $u_0$ .

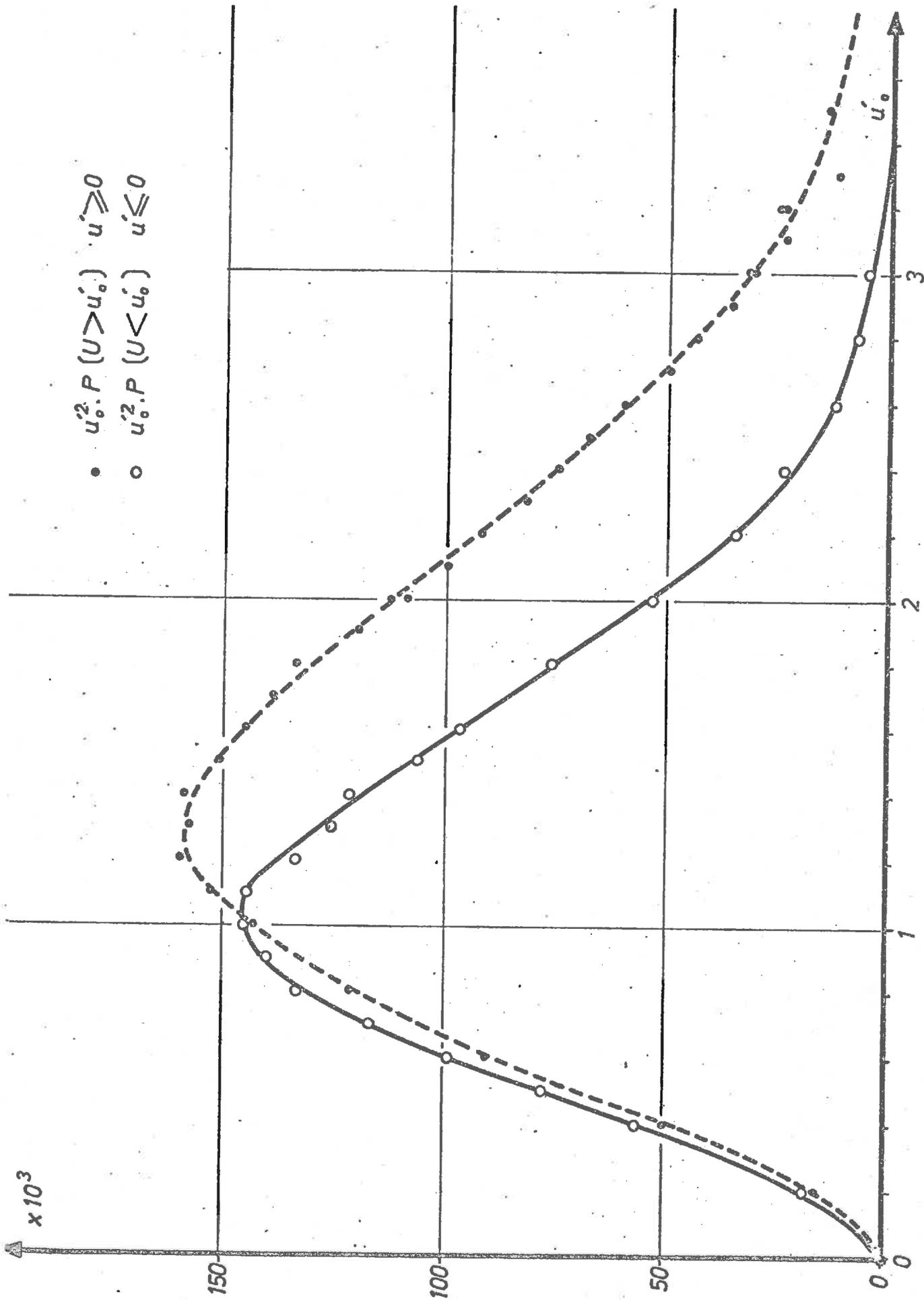


Fig. 4.1.16. Moment d'ordre trois des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées (100-5000 Hz). Courbes  $u_0^2 P[U > u_0']$  et  $u_0^2 P[U < u_0']$  en fonction de  $u_0$

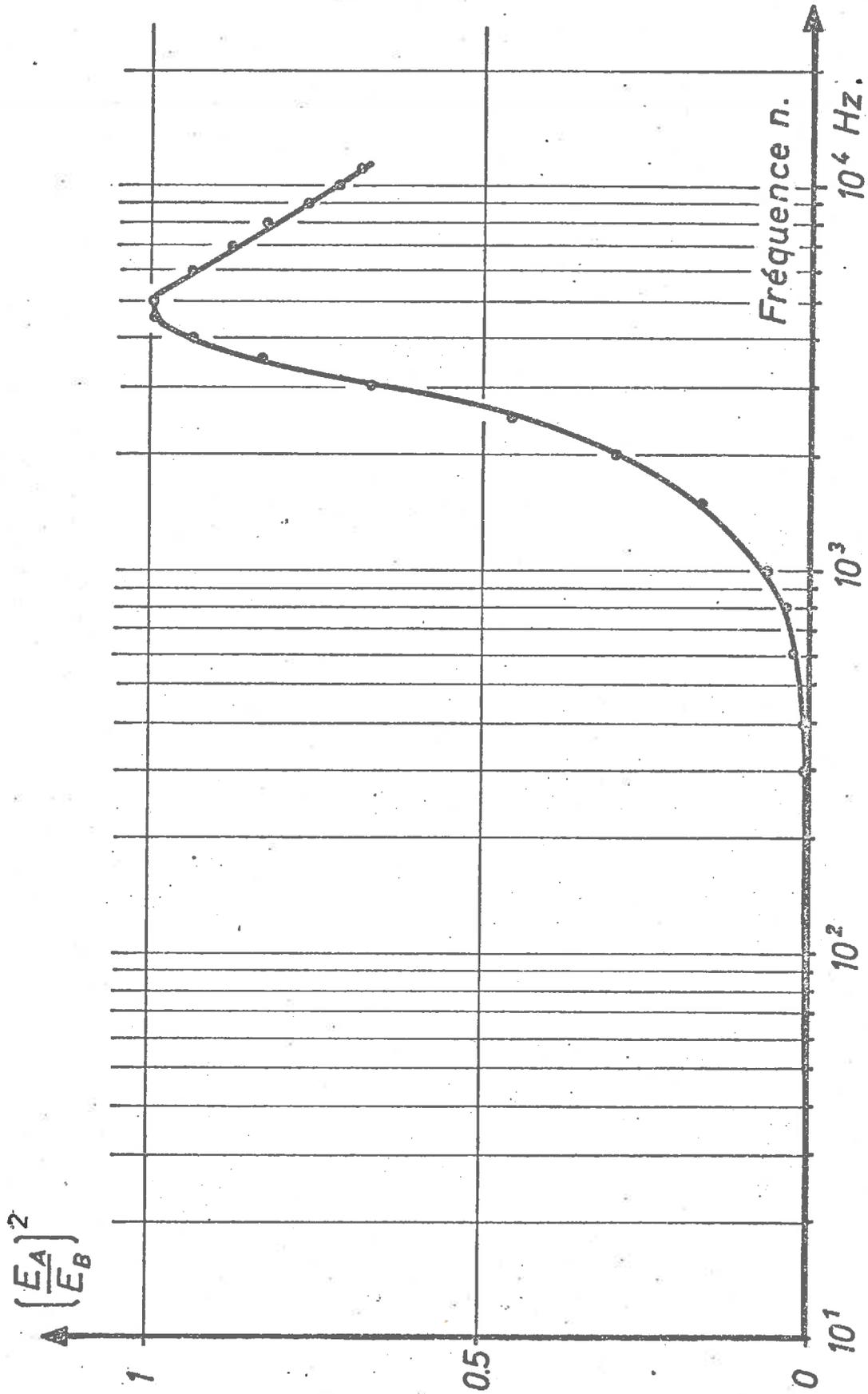


Fig. 4.1.17. Bande passante du dérivateur. Rapport  $(\frac{EA}{EB})^2$  en fonction de la fréquence  $n$

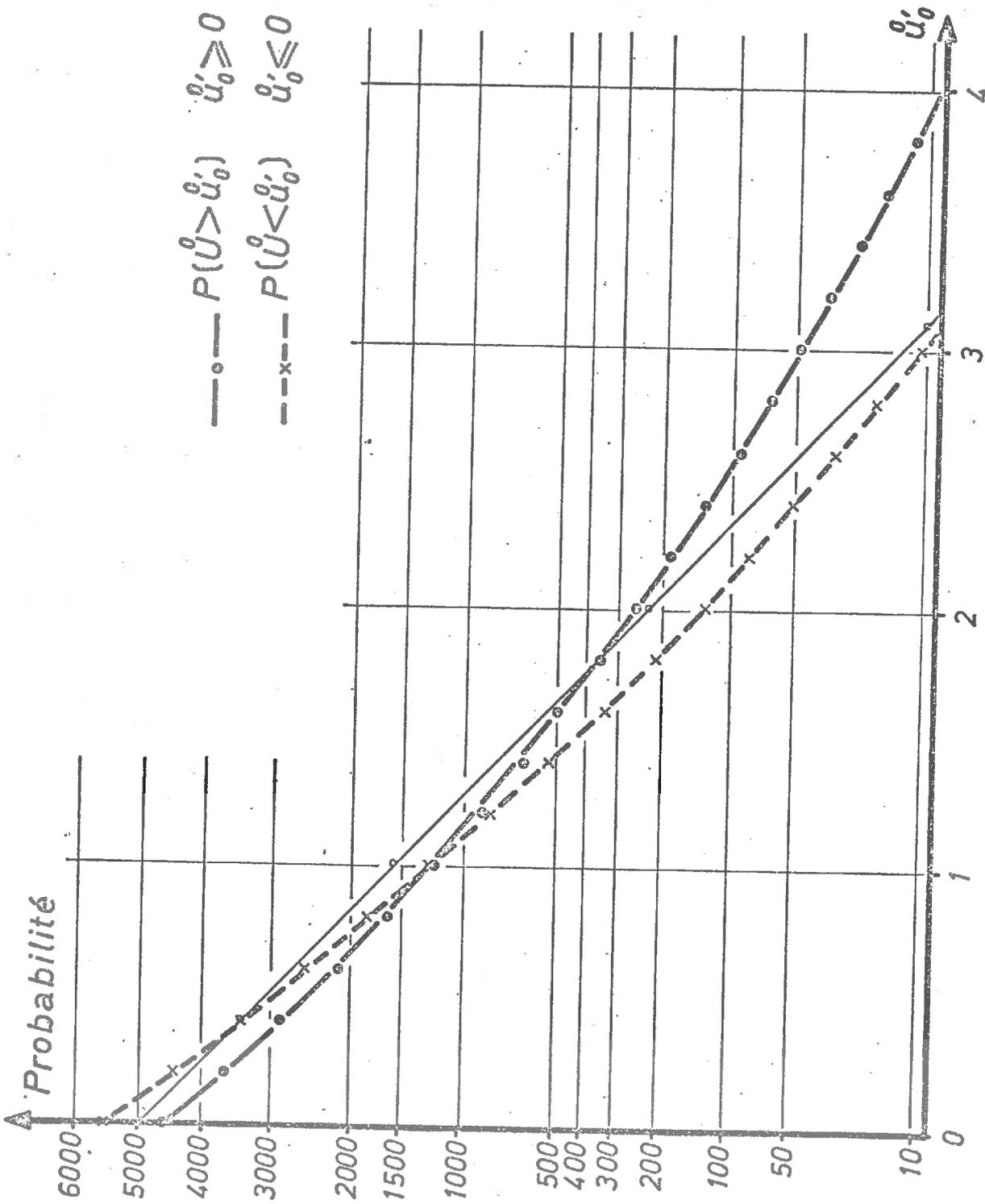


Fig. 4.1.18. Fonction de répartition des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Courbes  $P(u'_0 > u'_0)$  et  $P(u'_0 < u'_0)$  en fonction de  $u'_0$

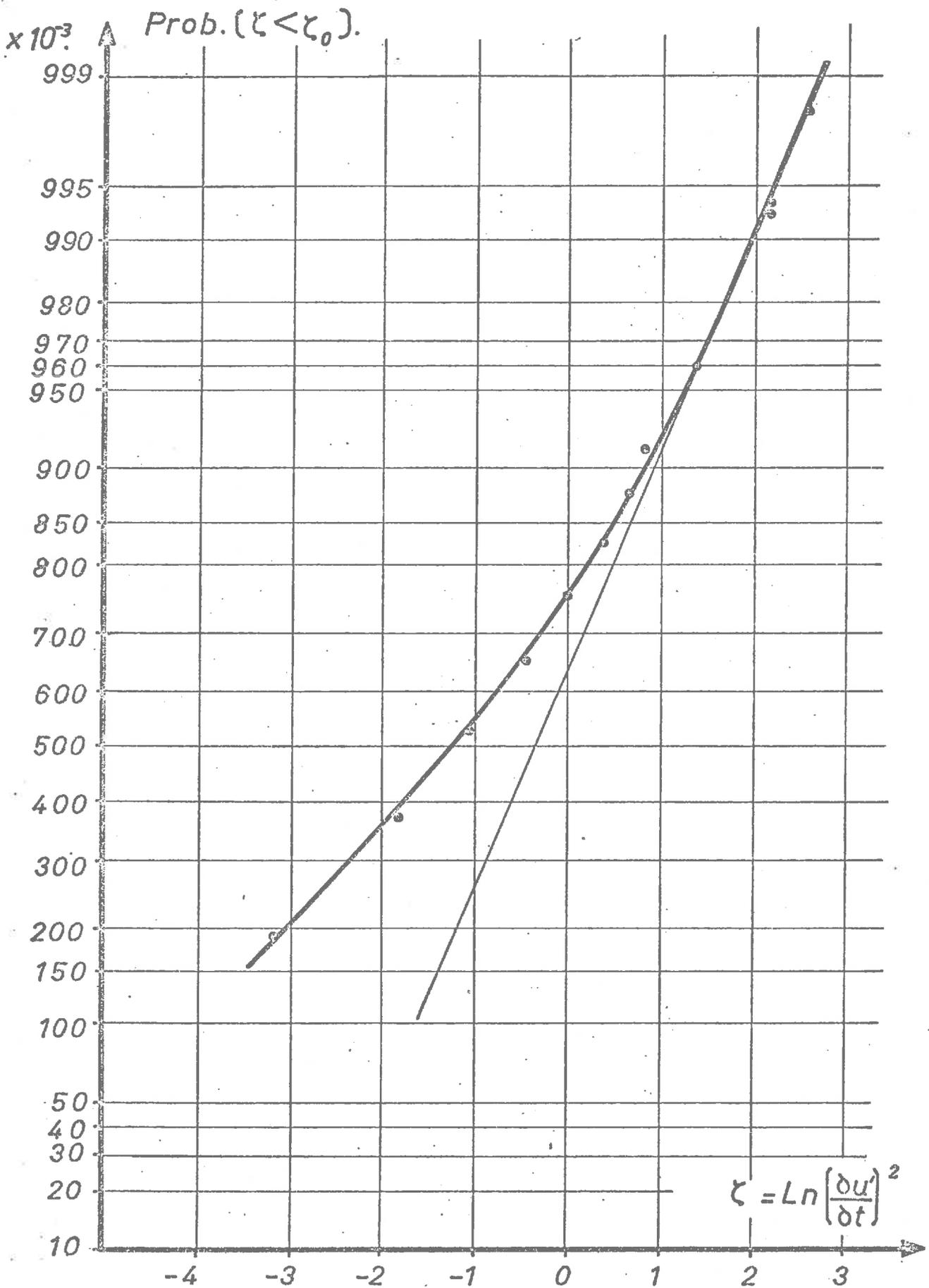


Fig. 4.1.19. Fonction de répartition du carré des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Comparaison avec la loi log-normale. Courbe  $P/\zeta < \zeta_0$  en fonction de  $\zeta = \text{Ln} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$



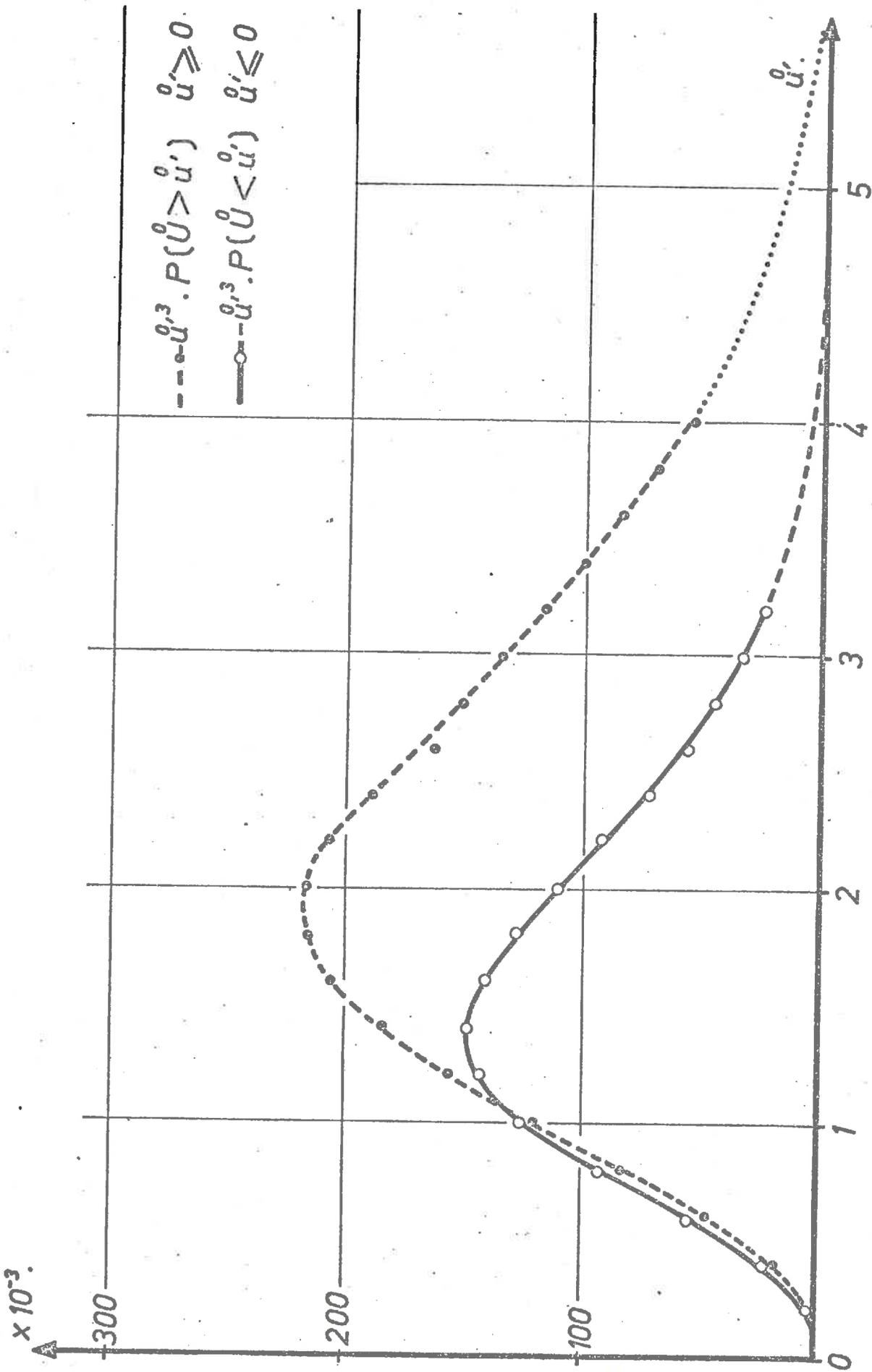


Fig. 4.1.21. Moment d'ordre quatre des fluctuations longitudinales de vitesse dérivées. Courbes  $\ddot{u}'^3 P(\dot{u}' > \ddot{u}')$  et  $\ddot{u}'^3 P(\dot{u}' < \ddot{u}')$  en fonction de  $u''$ .

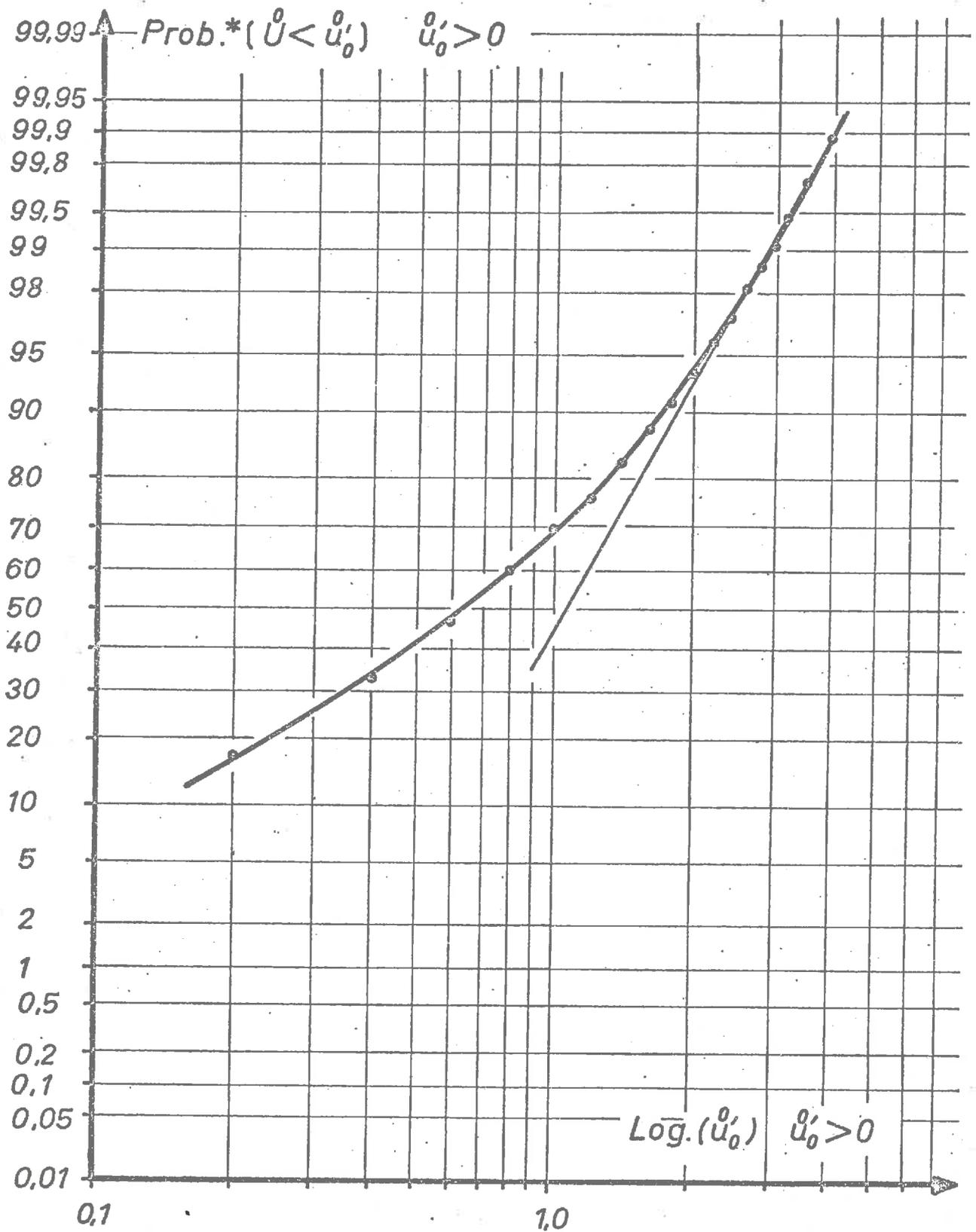


Fig: 4.1.22. Fonction de répartition des amplitudes positives des fluctuations longitudinales de vitesse filtrées (100-5000 Hz). Courbe  $P \left[ \bar{U} < u'_0 \right]$  en fonction de  $u'_0$

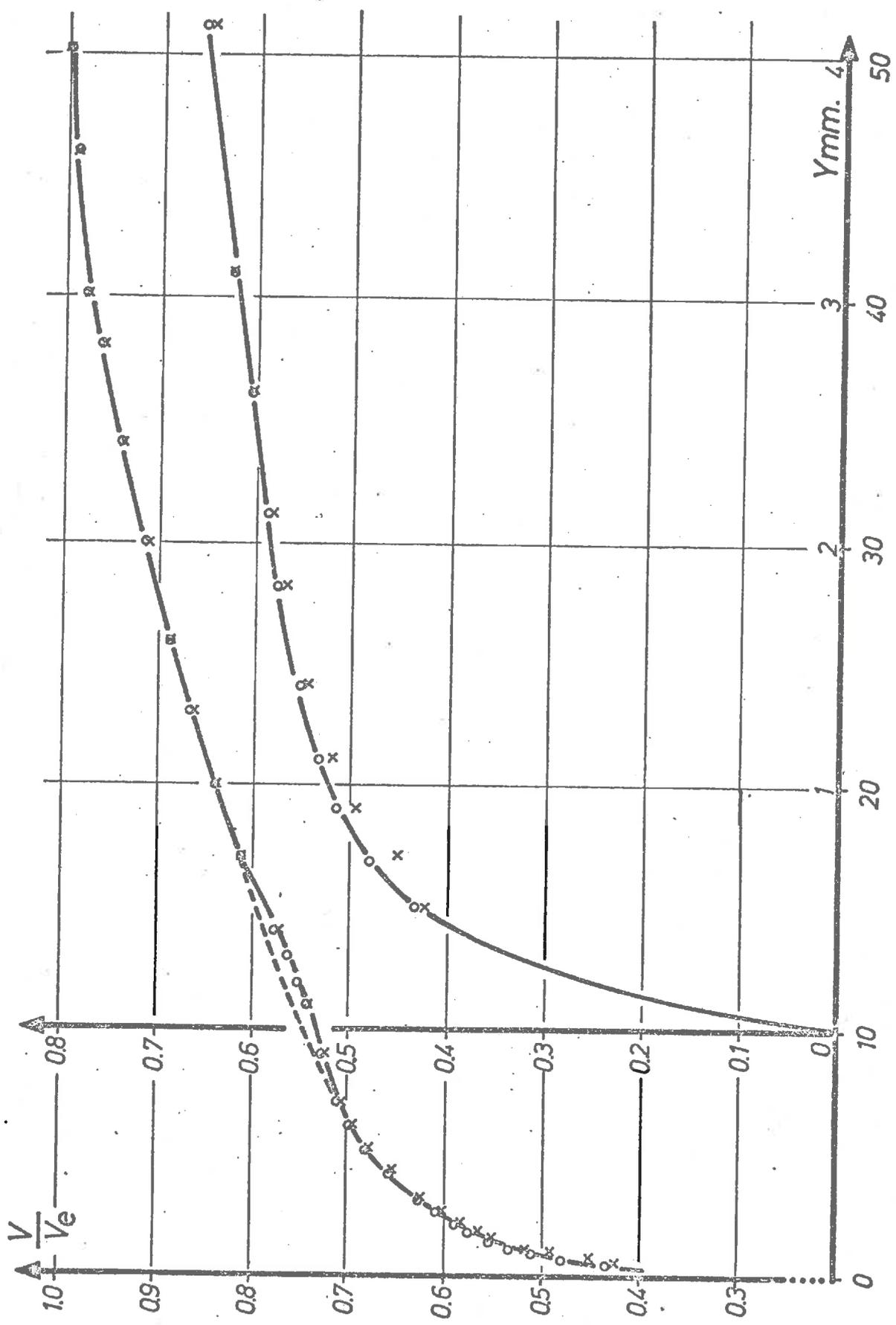


Fig. 4.1.23. Profil de vitesse moyenne. Influence du sillage du fil amont sur le fil aval. Fil amont en plaque  $X_1 = 75$  mm. Courbe  $V/V_e$  en fonction de la distance  $y$  à la paroi.

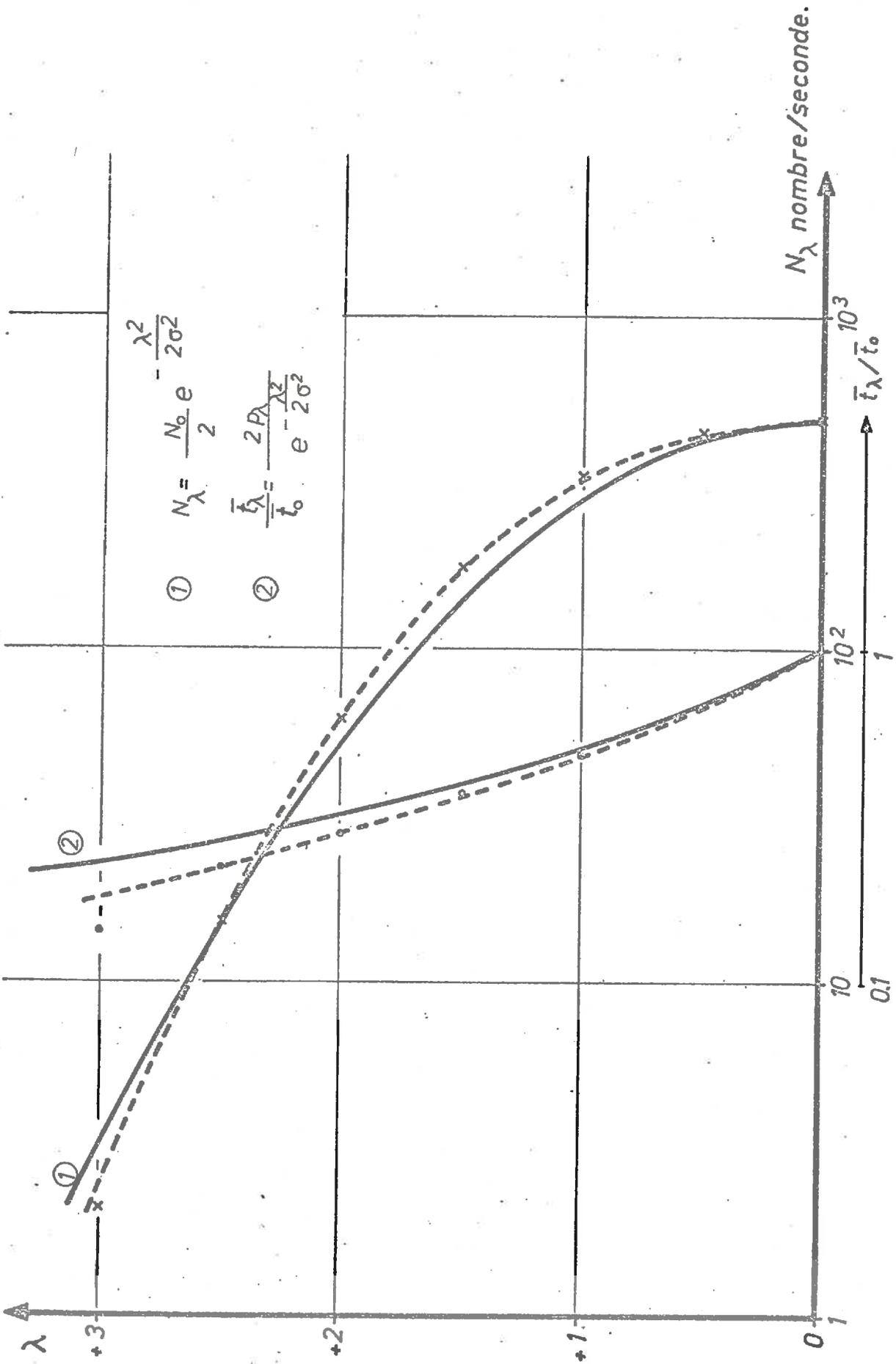


Fig. 4.2.1. Nombre et durée moyenne de passage par un niveau  $\lambda$  donné des fluctuations longitudinales de vitesse. Courbes N et  $\bar{t}/E_0$  en fonction du seuil  $\lambda$ . Comparaison avec la loi de Gauss

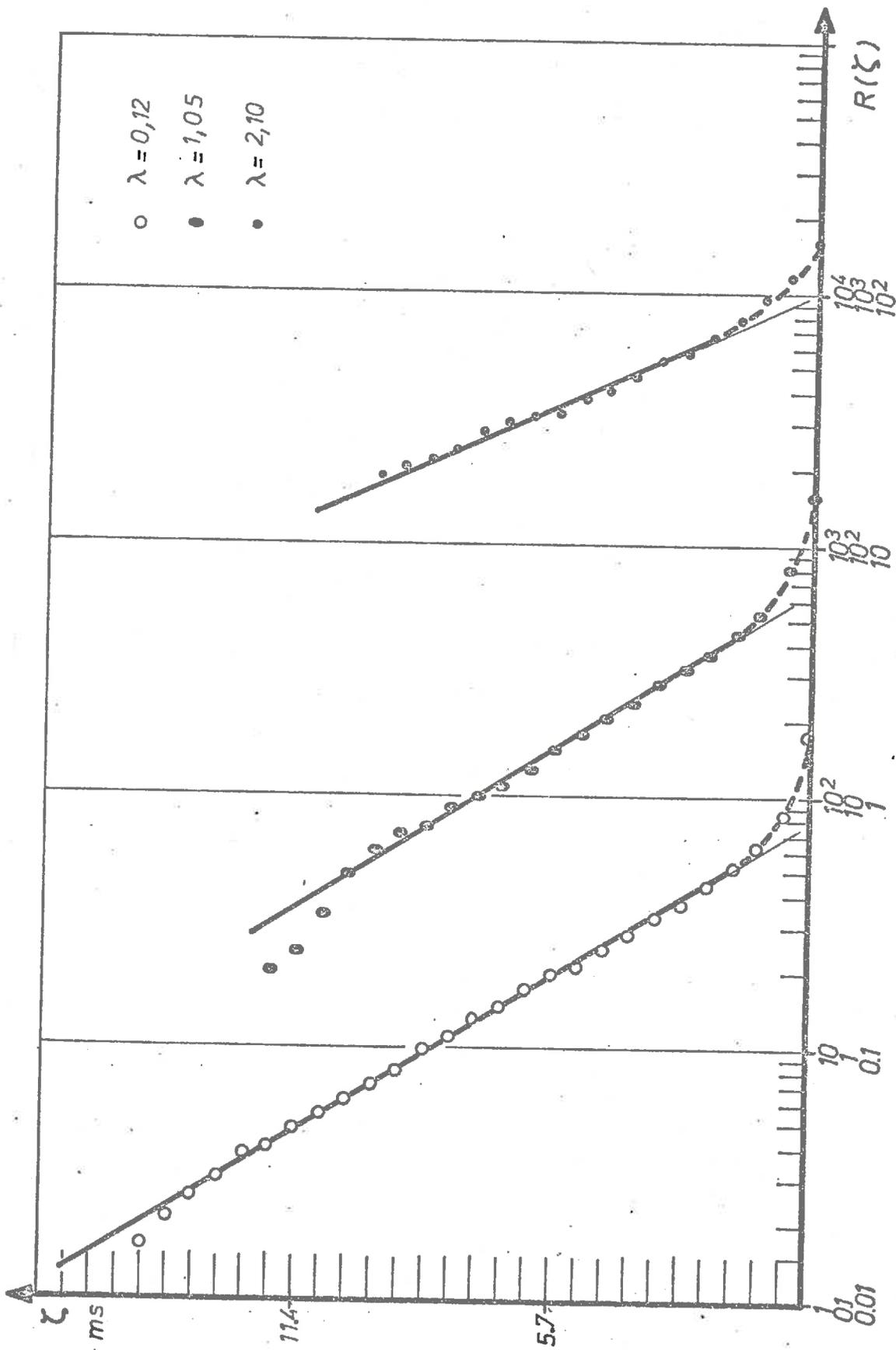


Fig. 4.2.2. Autocorrélation temporelle de l'indicatrice de dépassement d'un seuil  $\lambda$  des fluctuations longitudinales de vitesse. Courbes  $R(\zeta)$  en fonction de  $\zeta$  pour trois seuils  $\lambda$  donnés

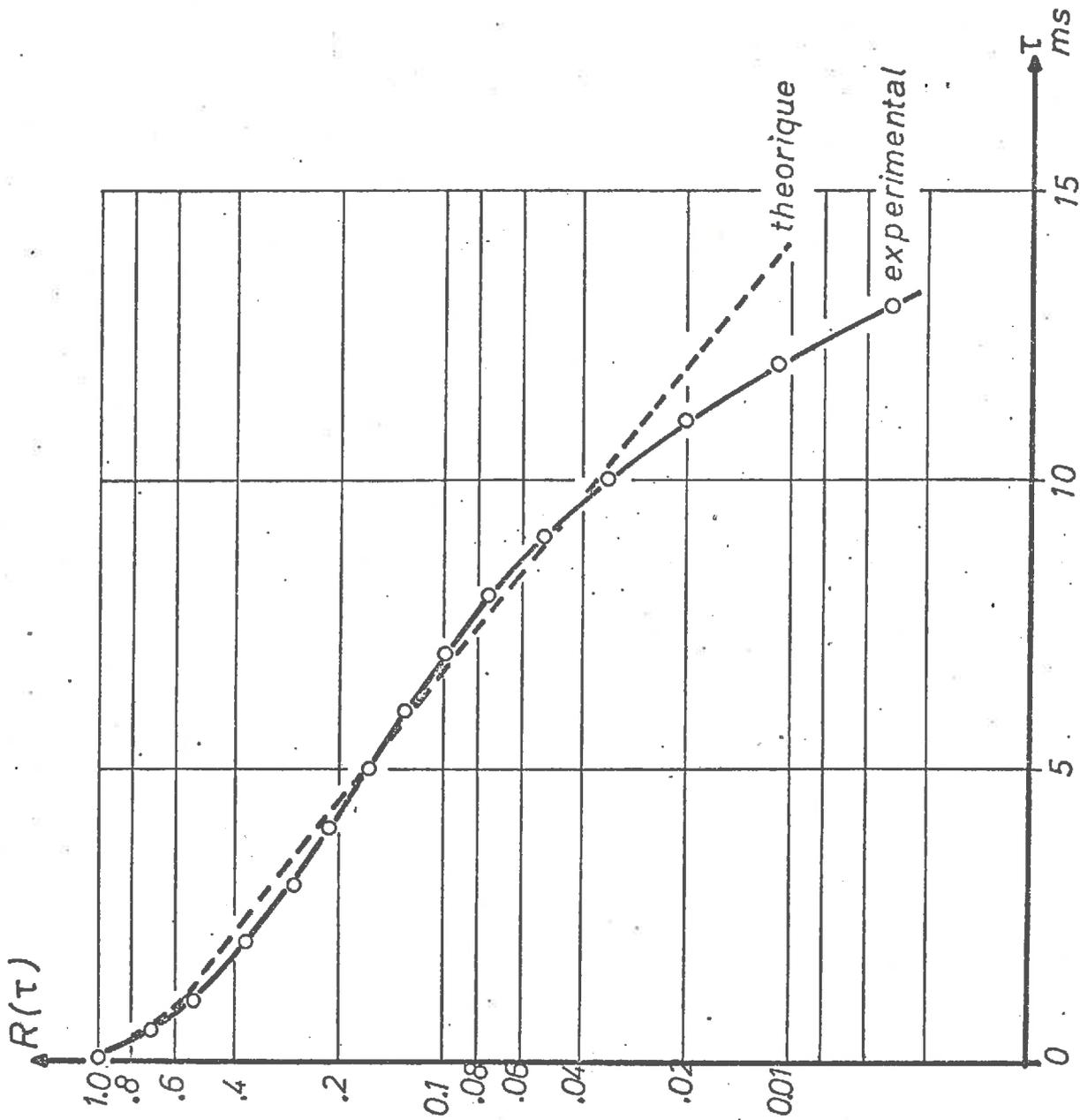
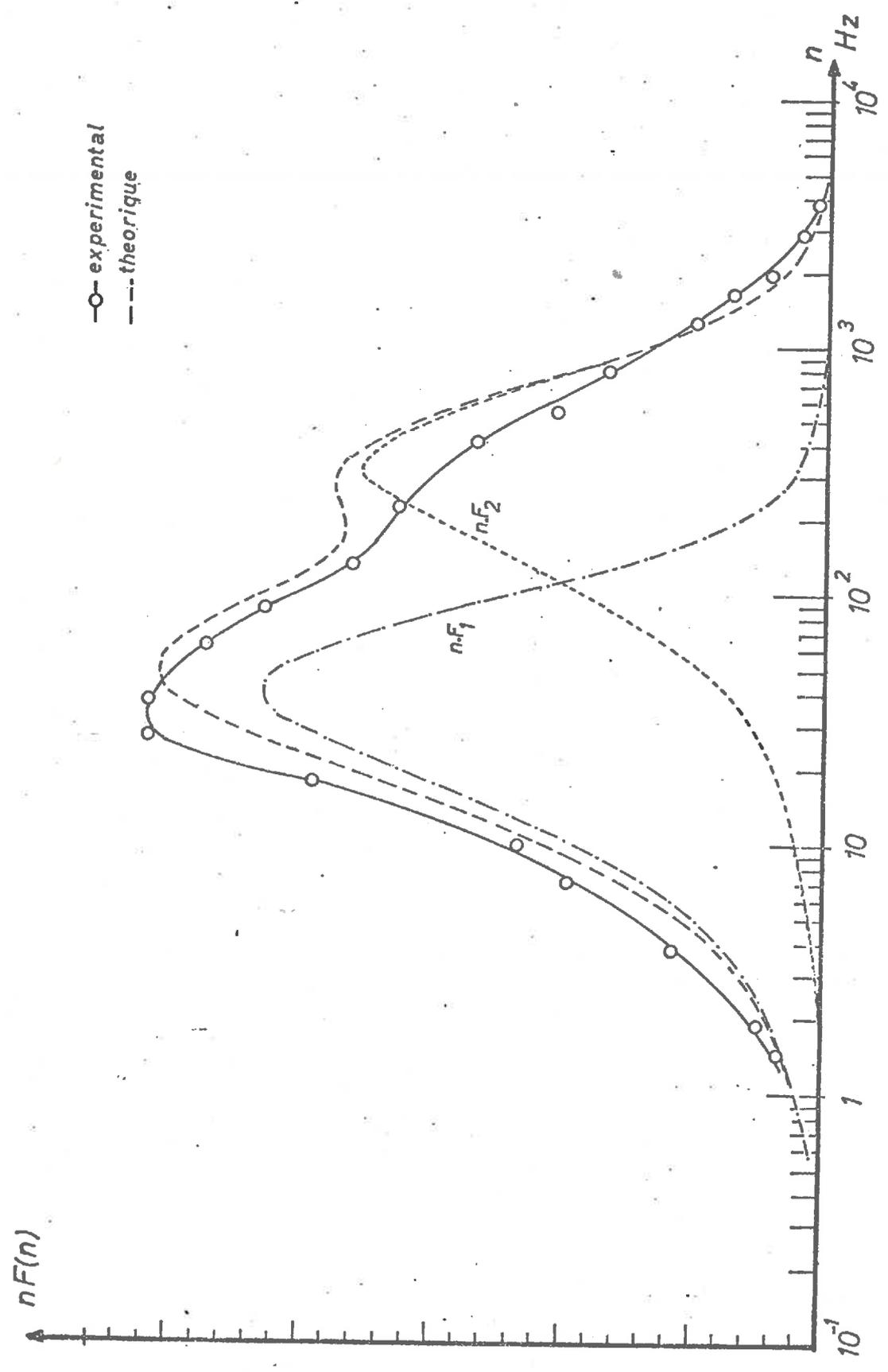


Fig. 4.2.3. Comparaison de la courbe d'autocorrélation temporelle expérimentale avec la courbe théorique. Courbes  $R(\zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$



—○— experimental  
--- theorique

Fig. 4.2.4. Comparaison du spectre d'énergie des fluctuations longitudinales de vitesse avec le spectre théorique. Courbes  $nF(n)$  en fonction de la fréquence  $n$ .

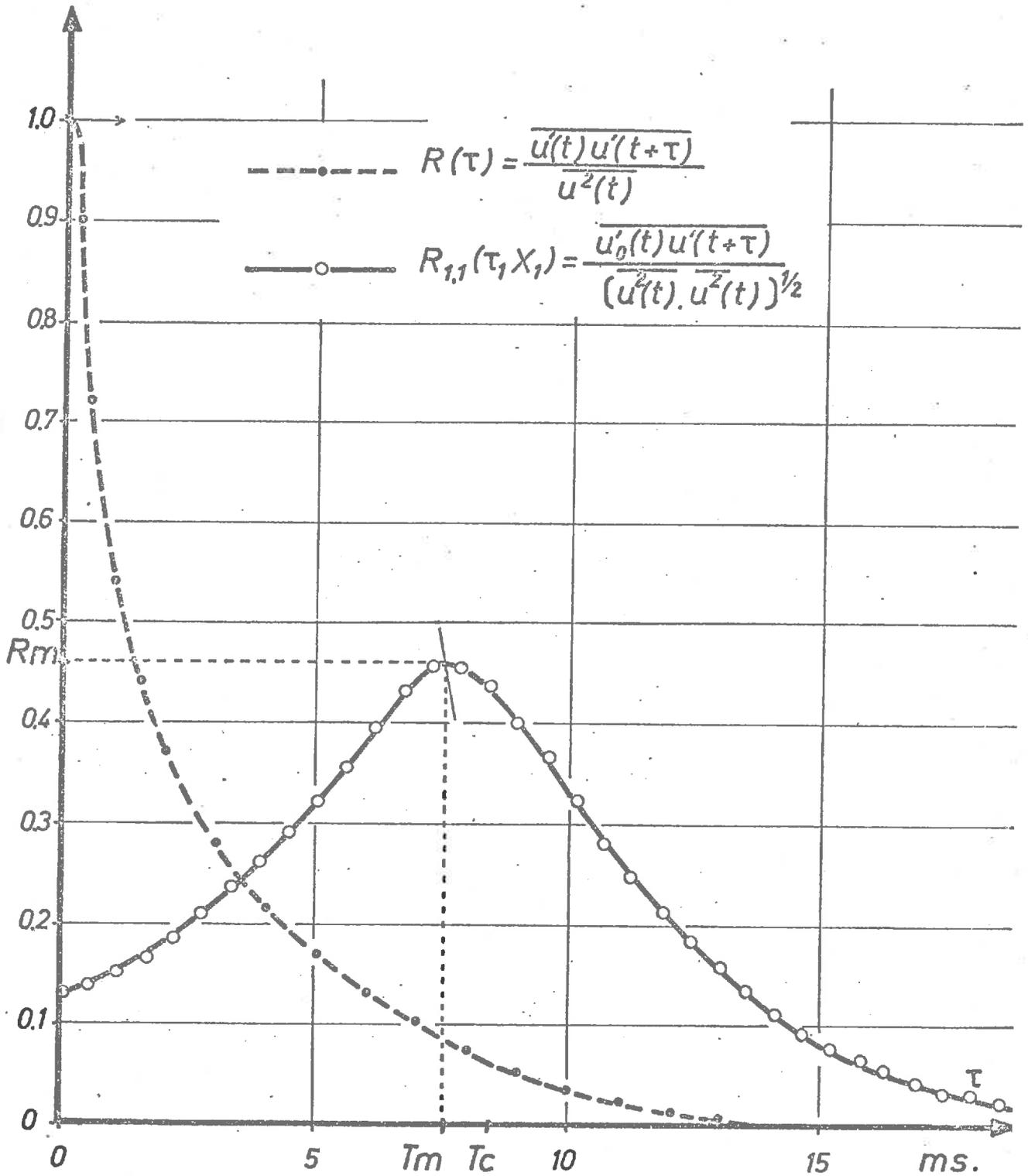


Fig. 4.3.1. Courbes d'autocorrélation temporelle et de corrélation spatio-temporelle. Courbes  $R(\zeta)$  et  $R_{1,1}(\zeta, X_1)$  en fonction du temps retard  $\zeta$

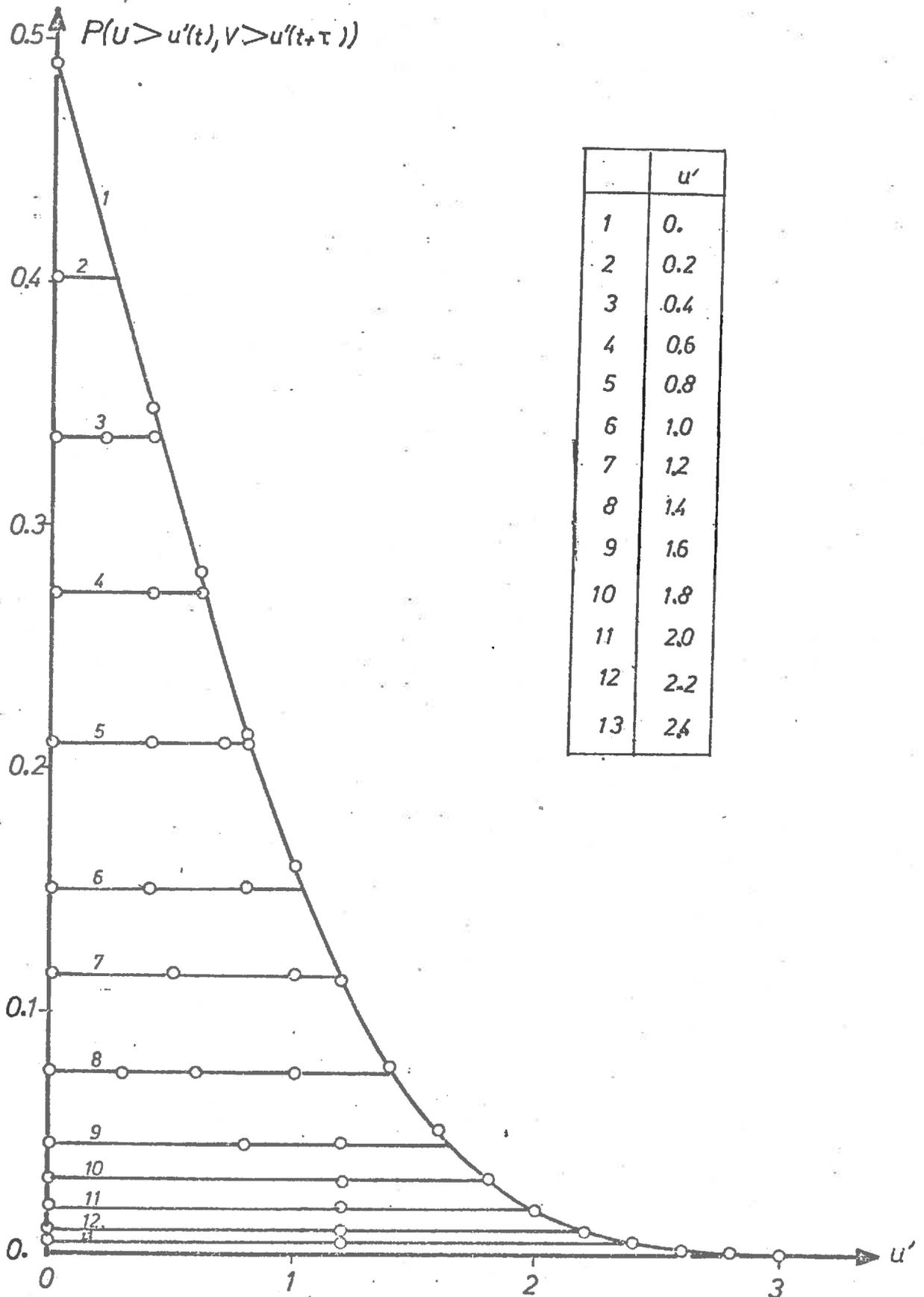


Fig. 4.3.2. Réseau des probabilités liées  $P[U > u'(t), V > u'(t+\zeta)]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 0$  ms

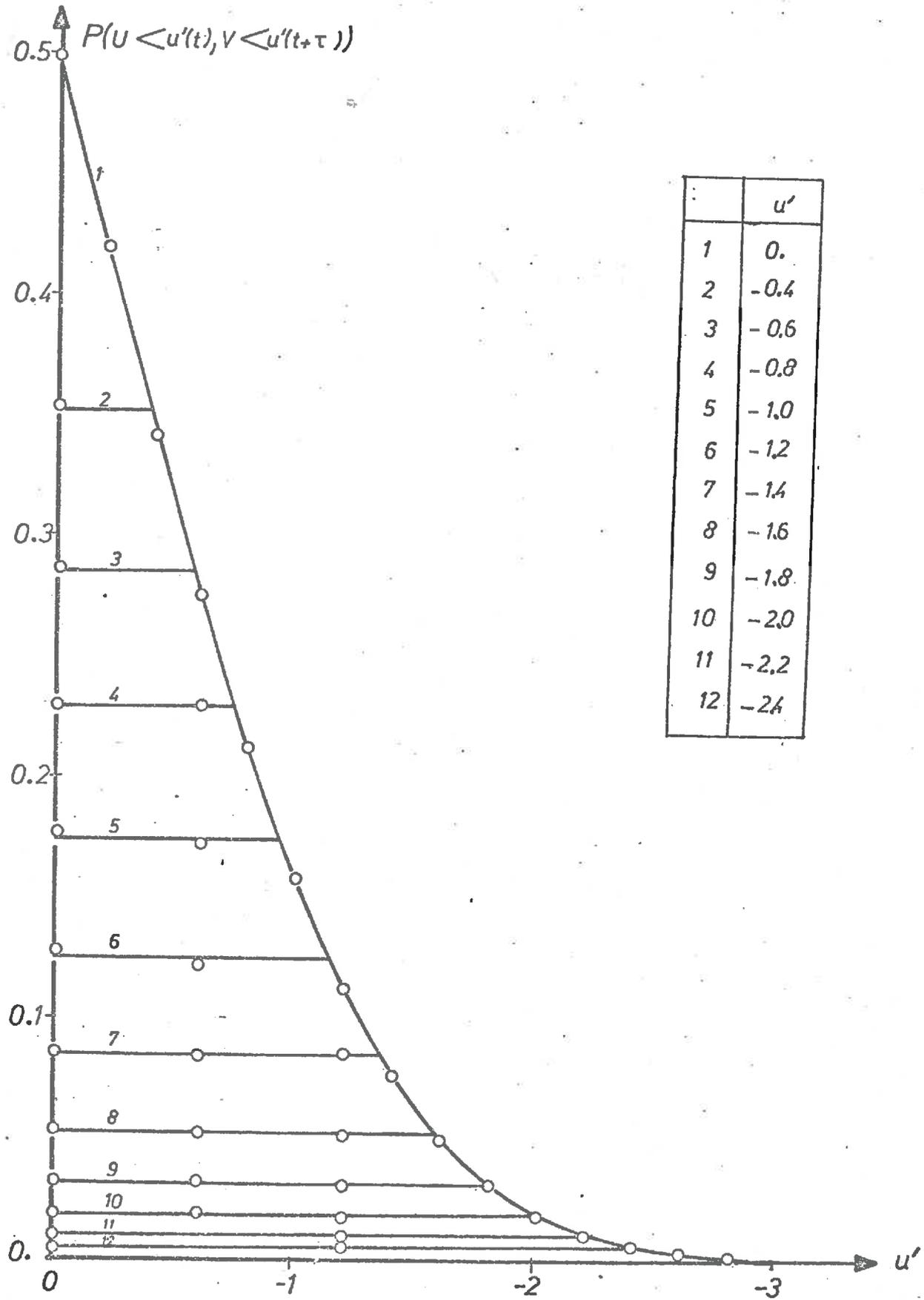


Fig. 4.3.3. Réseau des probabilités liées  $P\{\overline{U < u'(t), V < u'(t+\zeta)}\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 0$  ms

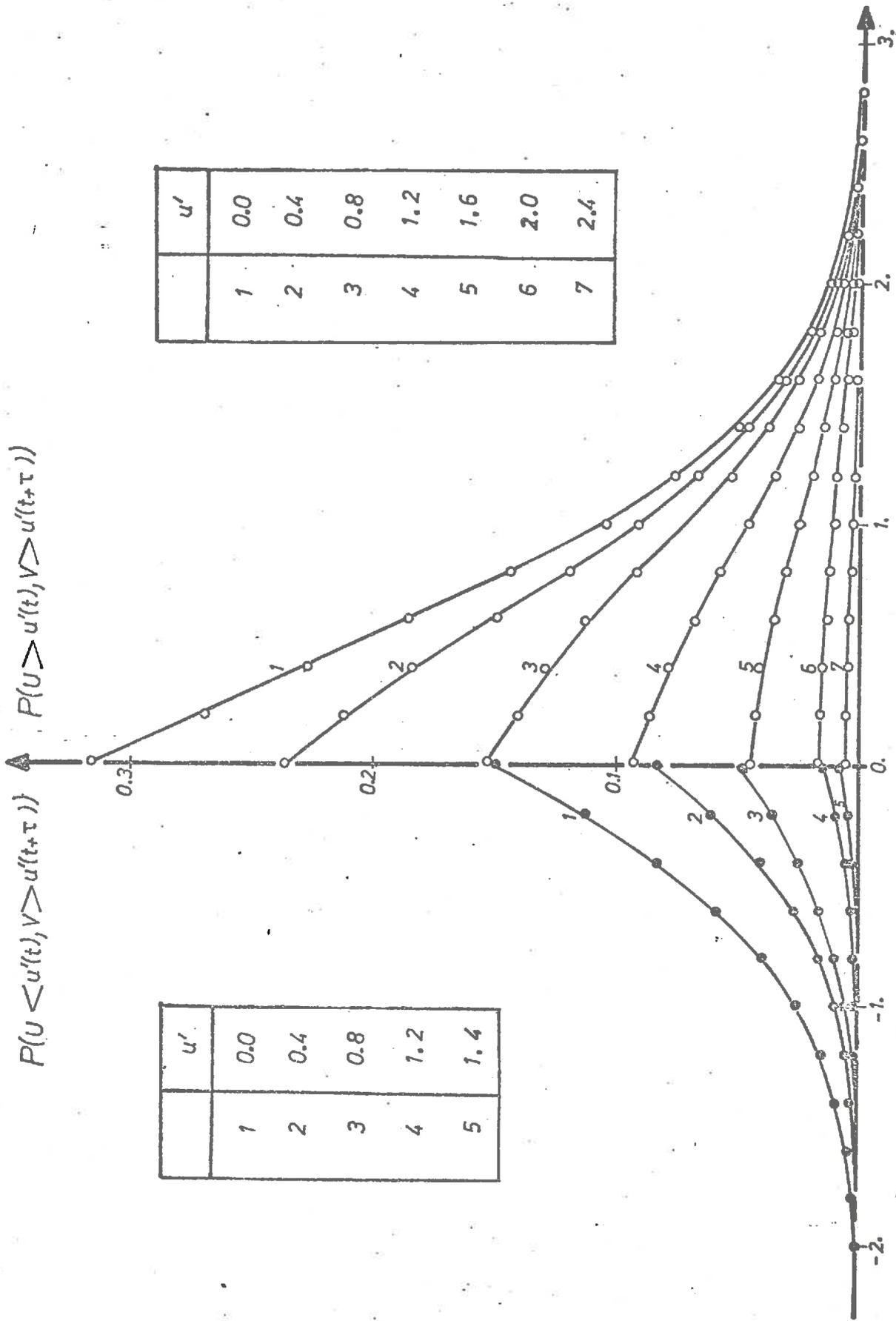
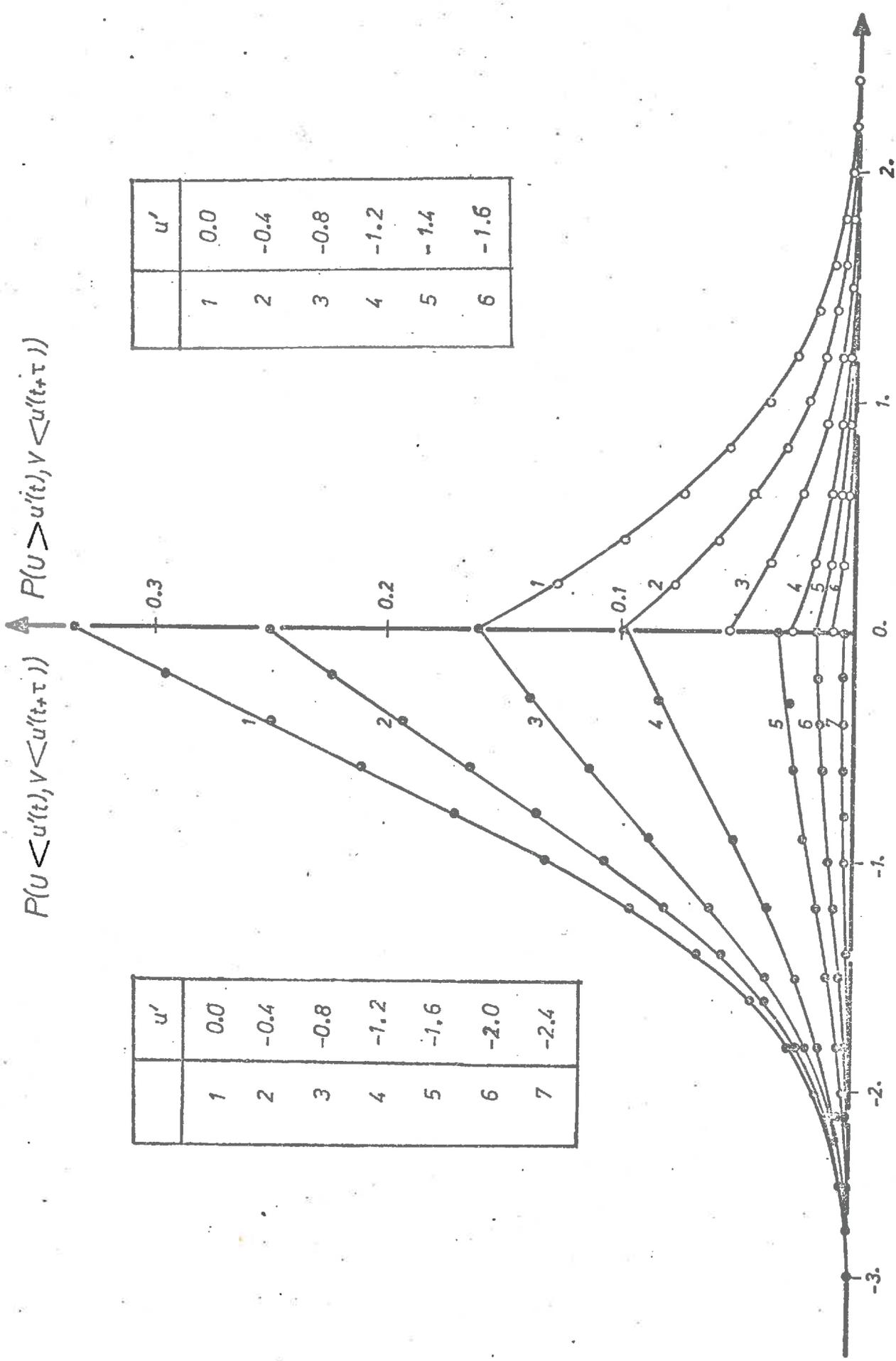


Fig. 4.3.4. Réseau des probabilités liées  $P(\sqrt{U} > u'(t), V > u'(t+\zeta))$  et  $P(\sqrt{U} < u'(t), V > u'(t+\zeta))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 1,3$  ms



	$u'$
1	0.0
2	-0.4
3	-0.8
4	-1.2
5	-1.6
6	-2.0
7	-2.4

	$u'$
1	0.0
2	-0.4
3	-0.8
4	-1.2
5	-1.4
6	-1.6

Fig. 4.3.5. Réseau des probabilités liées  $P[U < u'(t), V < u'(t+\zeta)]$  et  $P[U > u'(t), V < u'(t+\zeta)]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 1,3$  ms

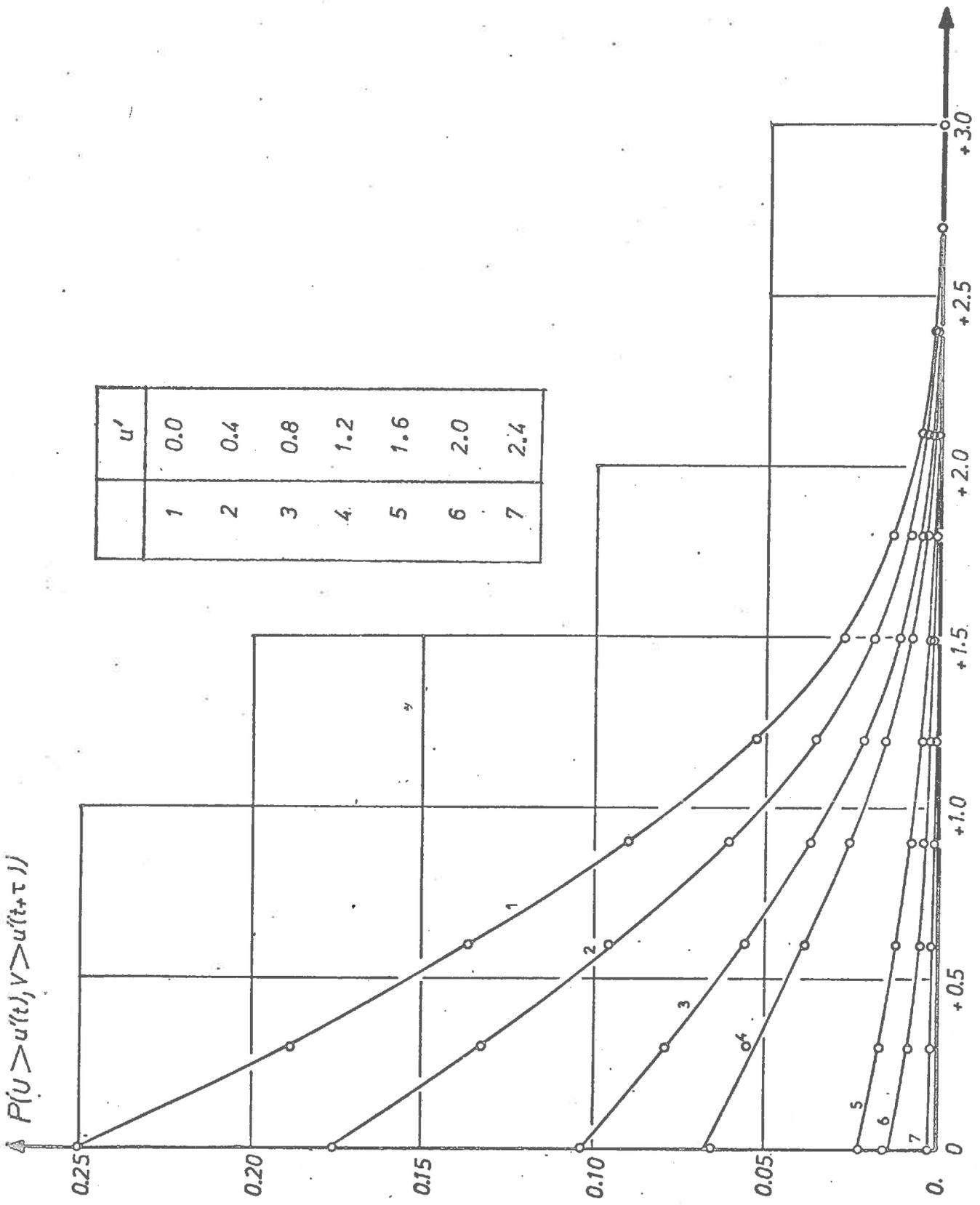


Fig. 4.3.6. Réseau des probabilités liées  $P(\overline{U} > u'(t), V > u'(t+\zeta))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 17,6$  ms

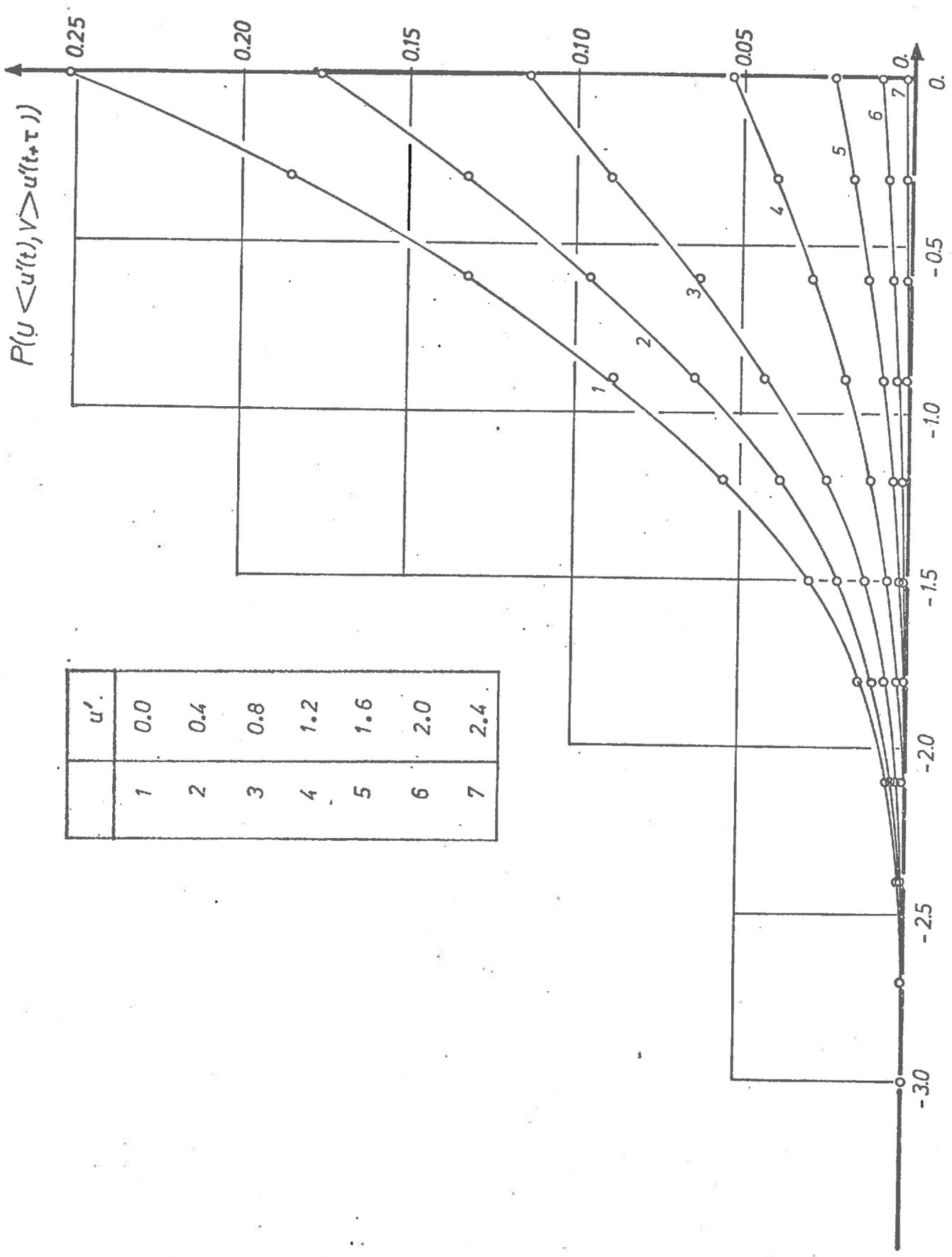


Fig. 4.3.7. Réseau des probabilités liées  $P[U < u'(t), V > u'(t+\tau)]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\tau) > 0$   $\zeta = 17,6$  ms

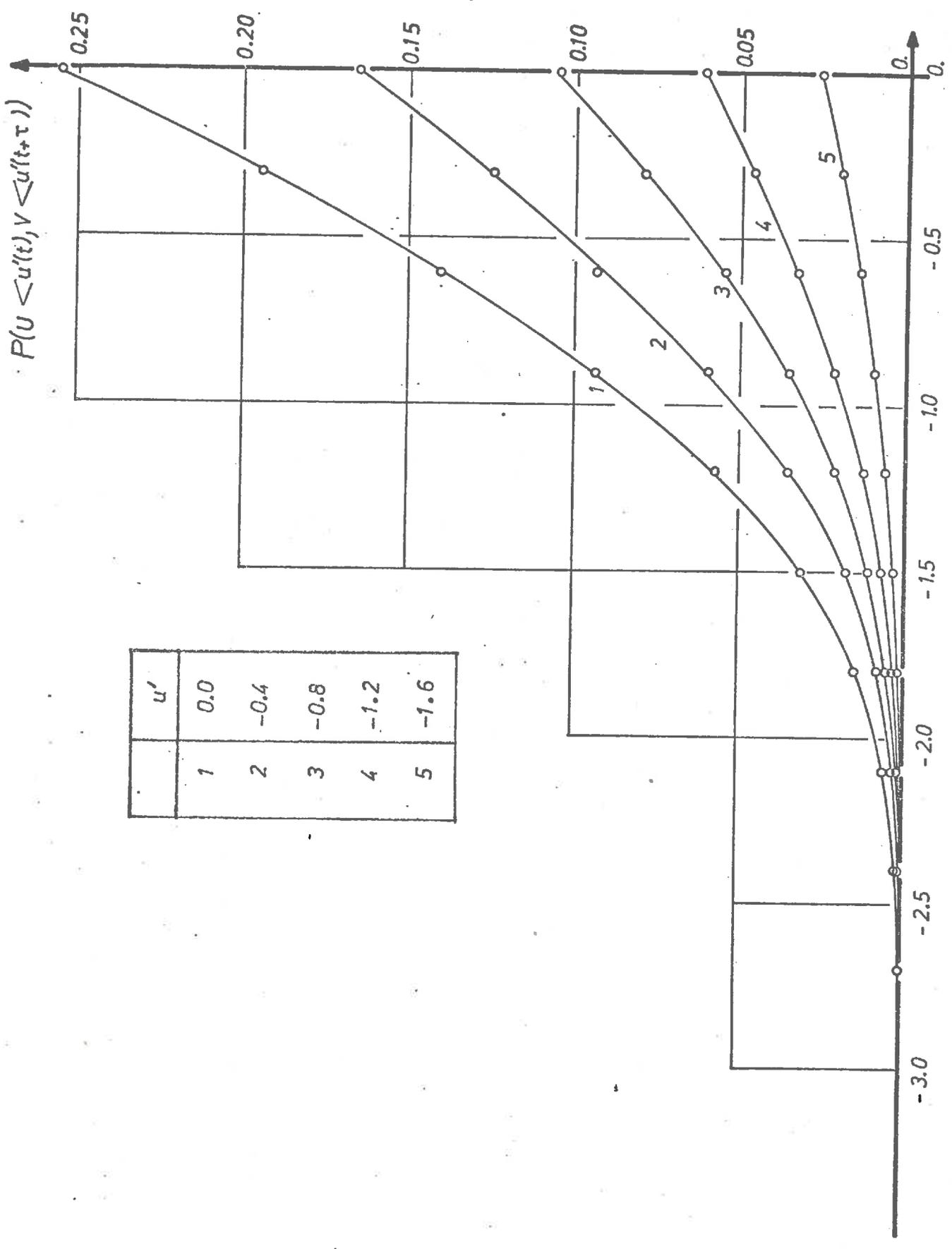


Fig. 4.3.0. Réseau des probabilités liées  $P\{U < u'(t), V < u'(t+\tau)\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\tau) < 0$   $\zeta = 17,6$  ms

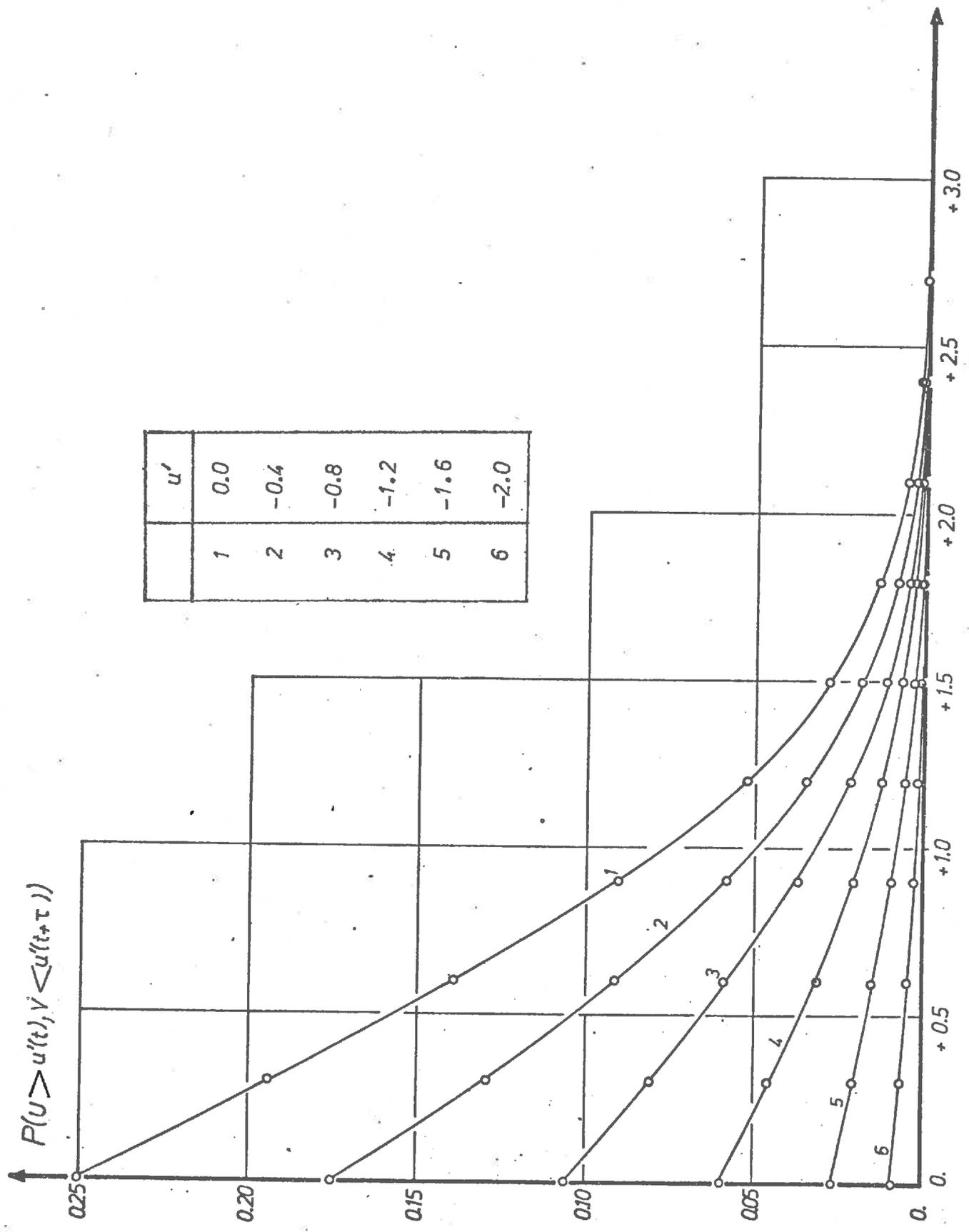


Fig. 4.3.9. Réseau des probabilités liées  $P(\overline{u} > u'(t), V < u'(t+\zeta))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$   $\zeta = 17,6$  ms

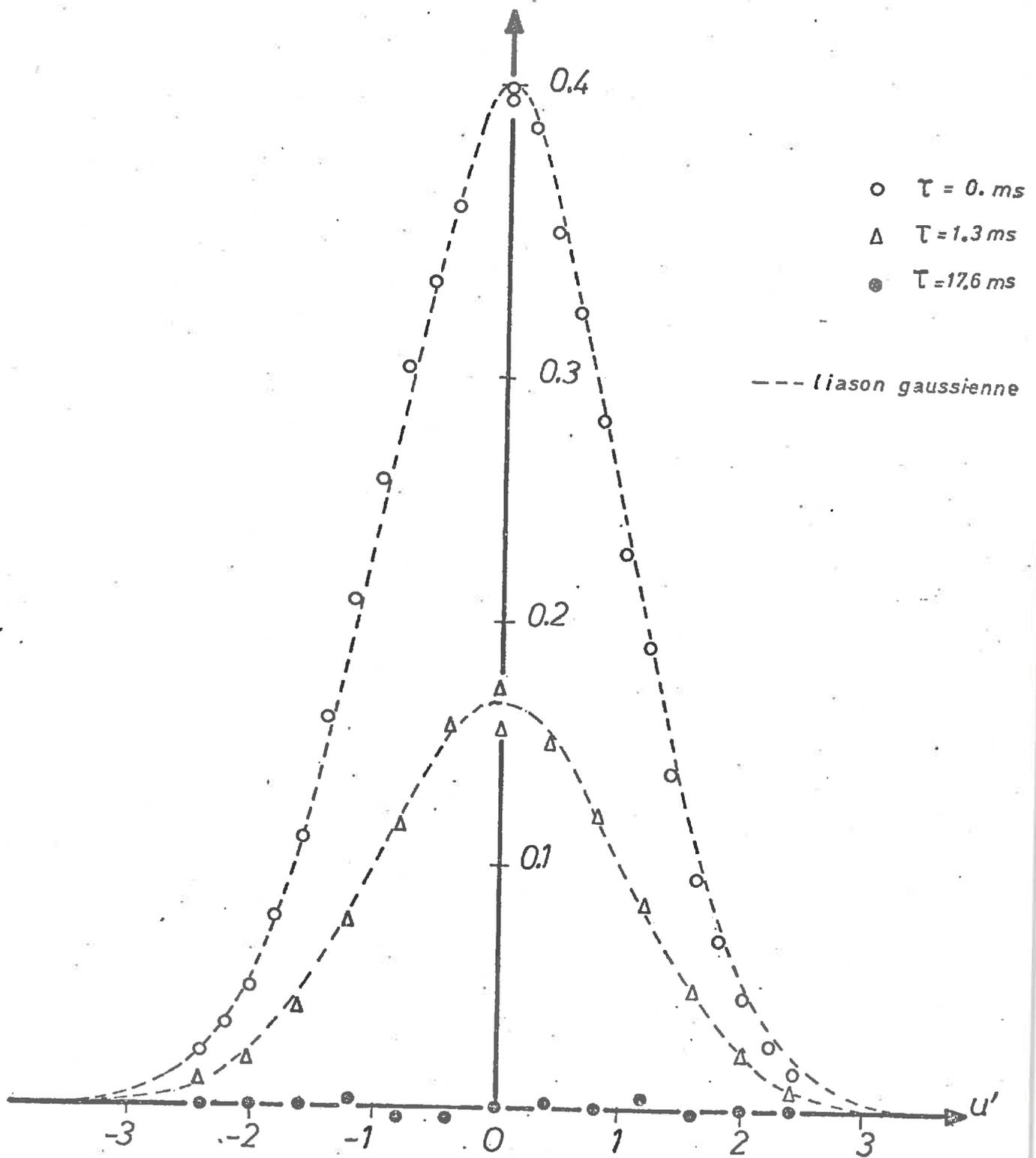


Fig4.3.10. Courbes intégales donnant le coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude du signal  $u'(t+\zeta)$ .  $\zeta = 0, 1,3 ms$  et  $17,6 ms$ . Comparaison avec une loi de Gauss.

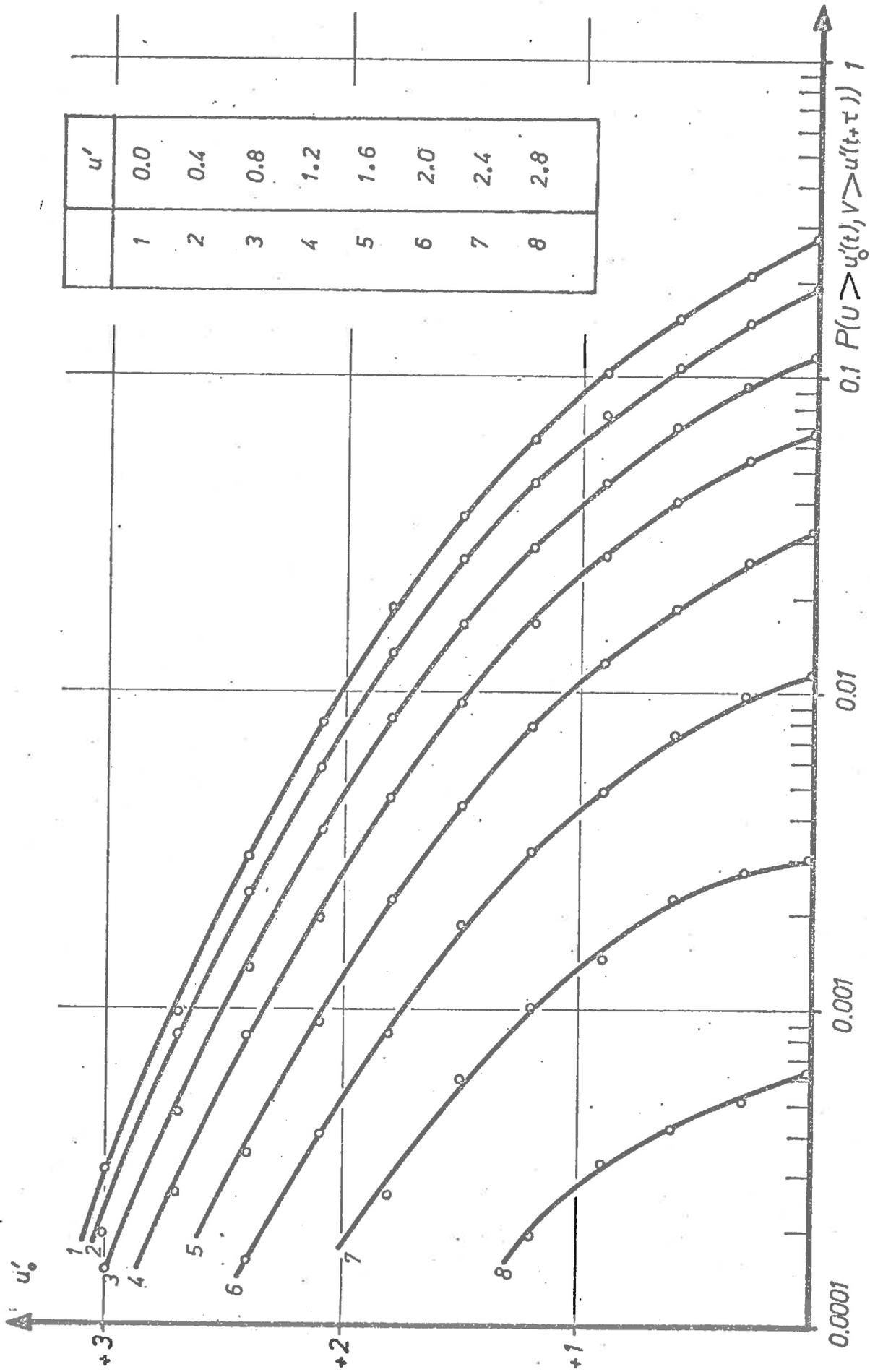


Fig.4.3.11. Réseau des probabilités liées  $P\{U > u'_0(t), V > u'(t+\zeta)\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0, \zeta = 0$  ms

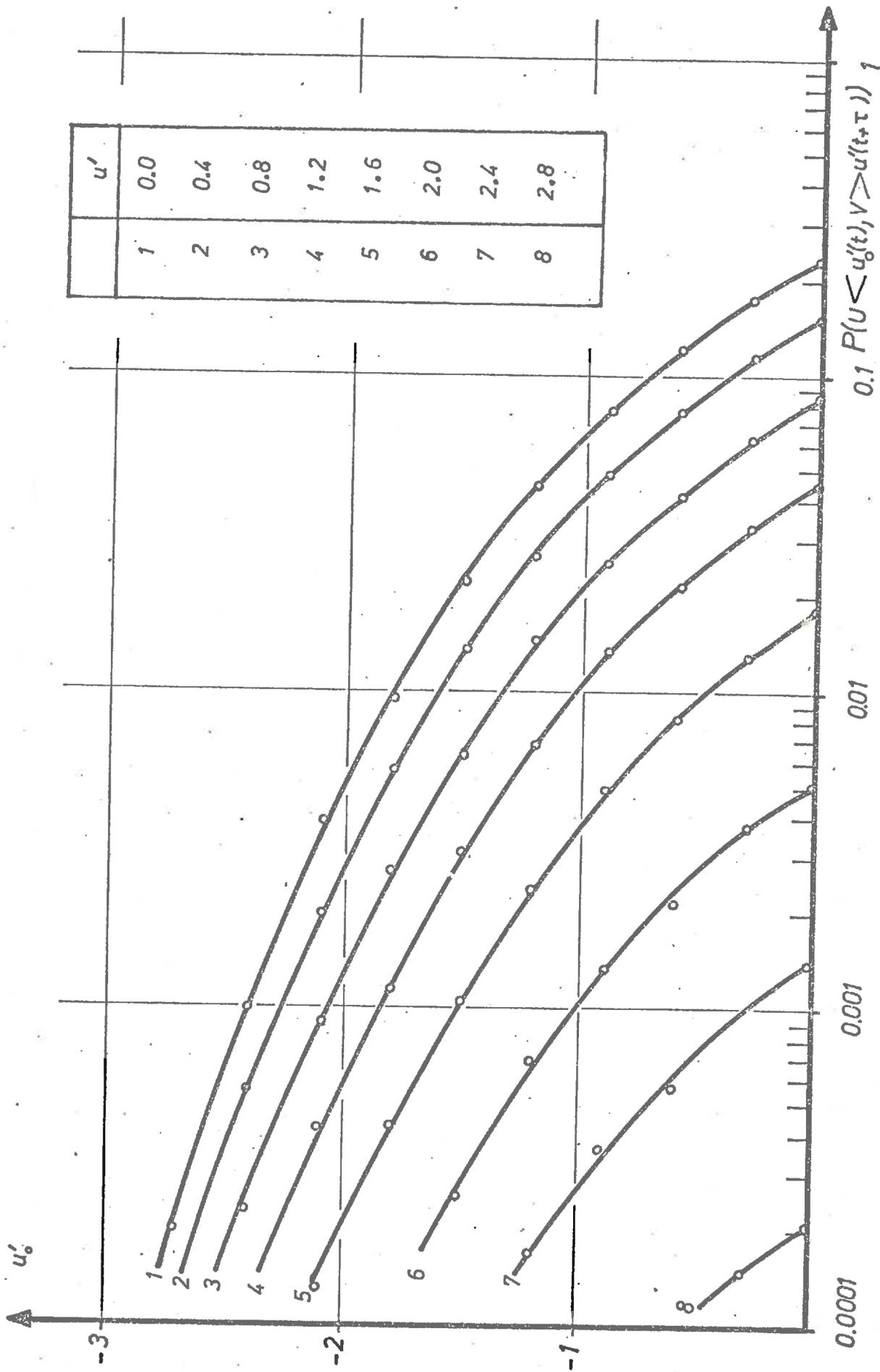


Fig. 4.3.12. Réseau des probabilités liées  $P\{\underline{U} < u'_0(t), V > u'(t+\zeta)\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$   $\zeta = 0$  ms

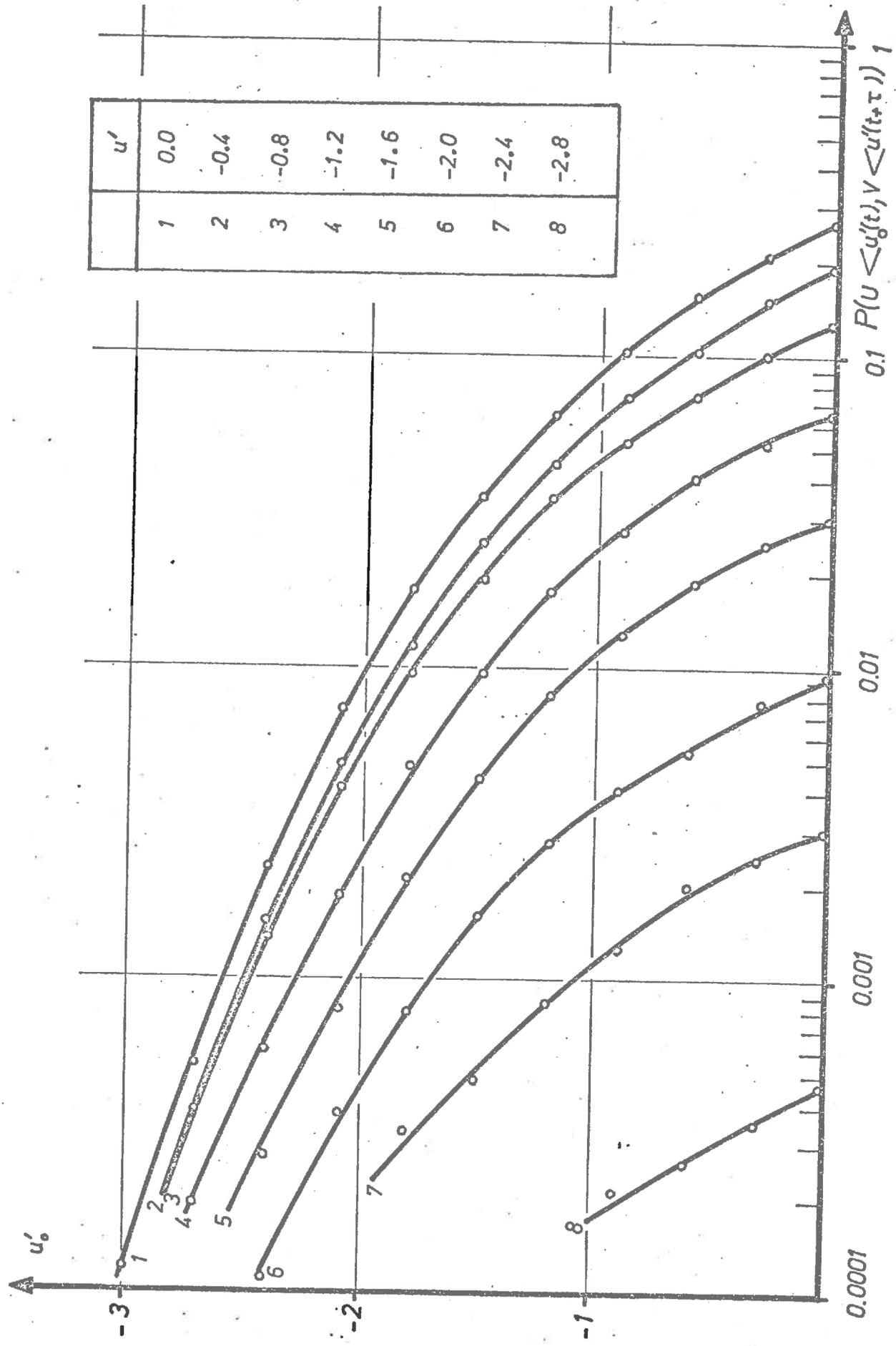


Fig. 4.3.13. Réseau des probabilités liées  $P(\overline{U} < u'_0(t), V < u'(t+\zeta))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 0$  ms

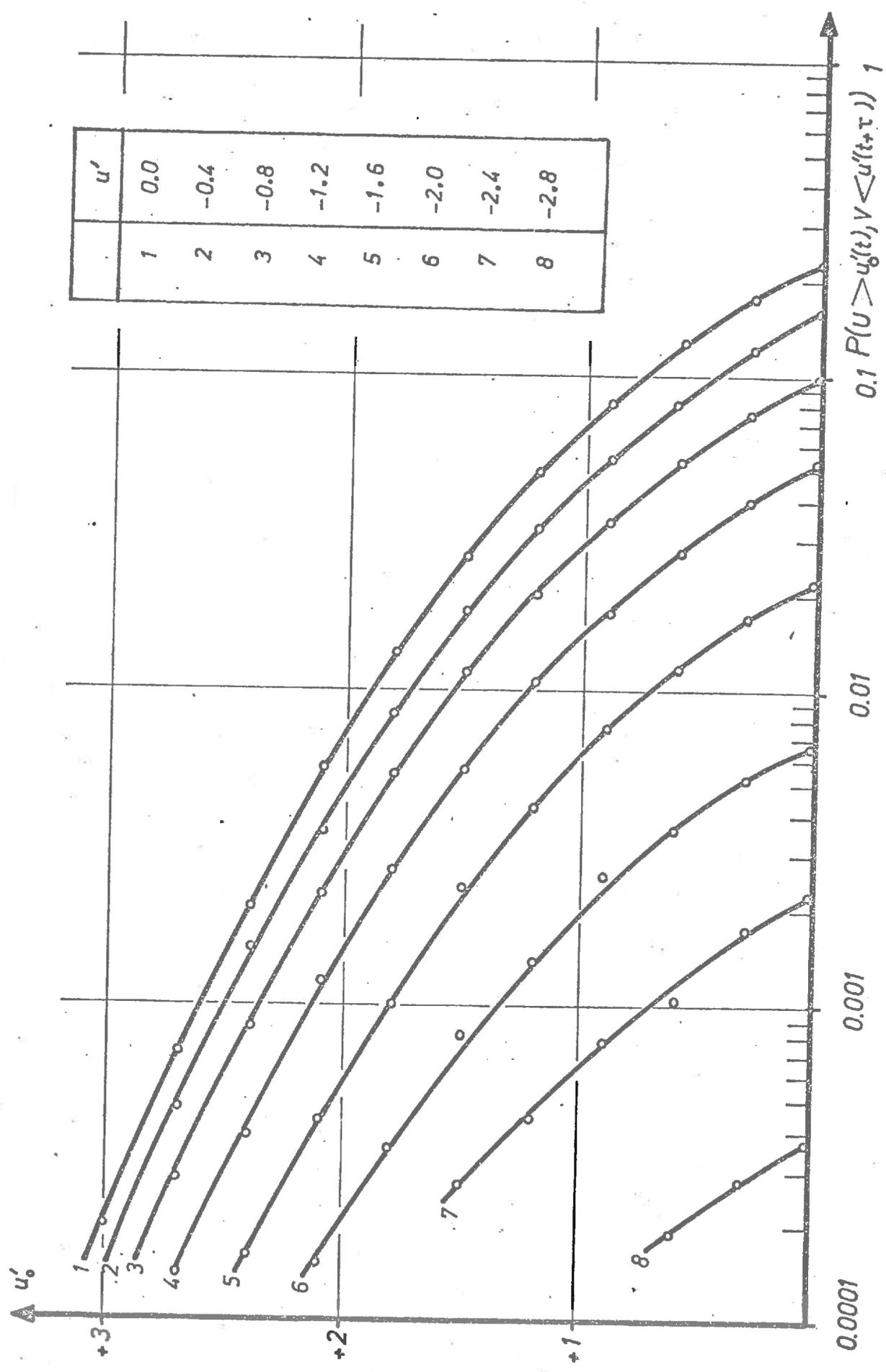


Fig. 4.3.14. Réseau des probabilités liées  $P[U > u'_0(t), V < u'(t+\zeta)]$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) \leq 0$ ,  $\zeta = 0$  ms

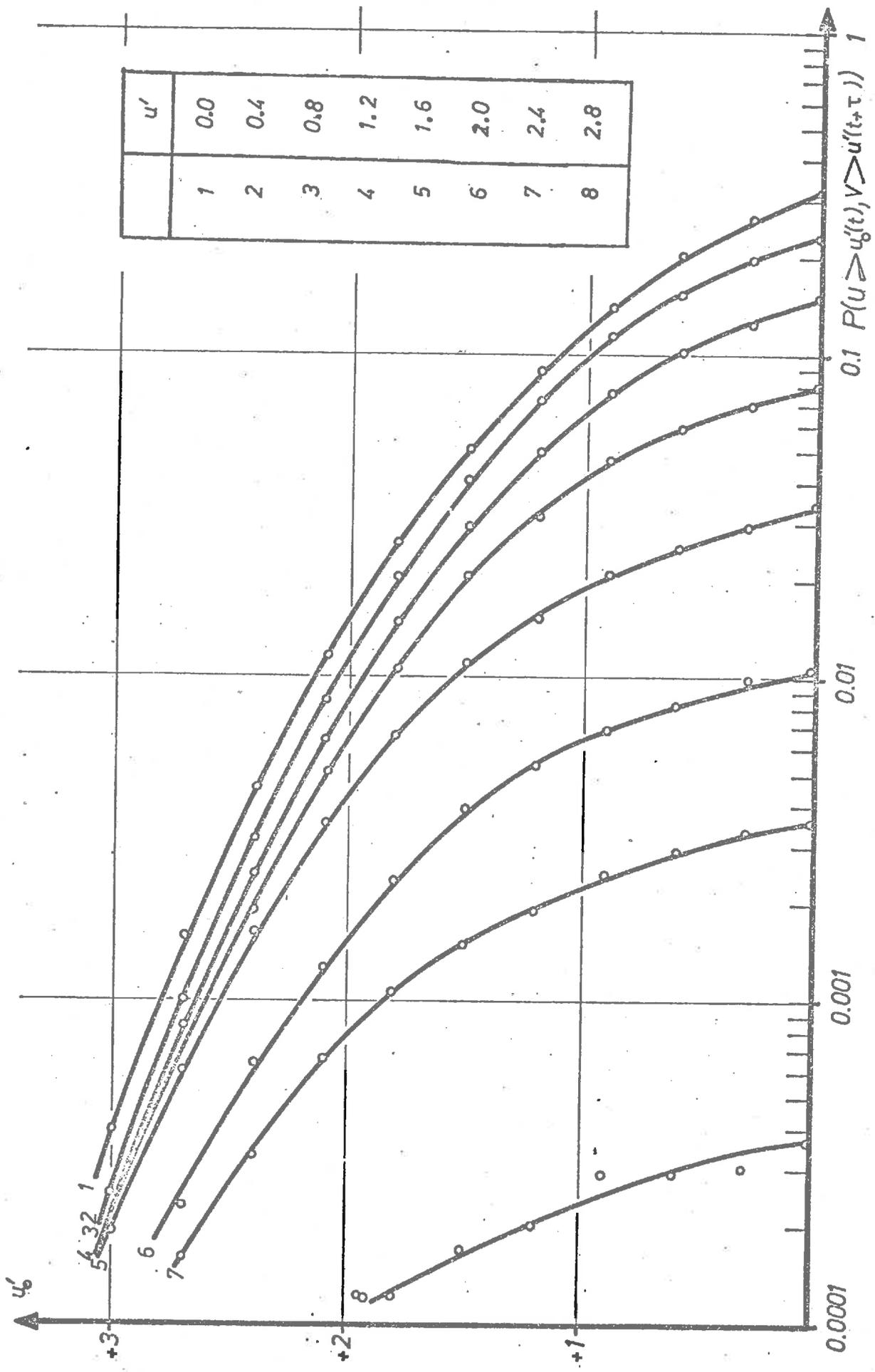


Fig. 4.3.15. Réseau des probabilités liées  $P\{U > u'_0(t), V > u'(t+\tau)\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\tau) > 0$ .  $\tau = 7,5$  ms

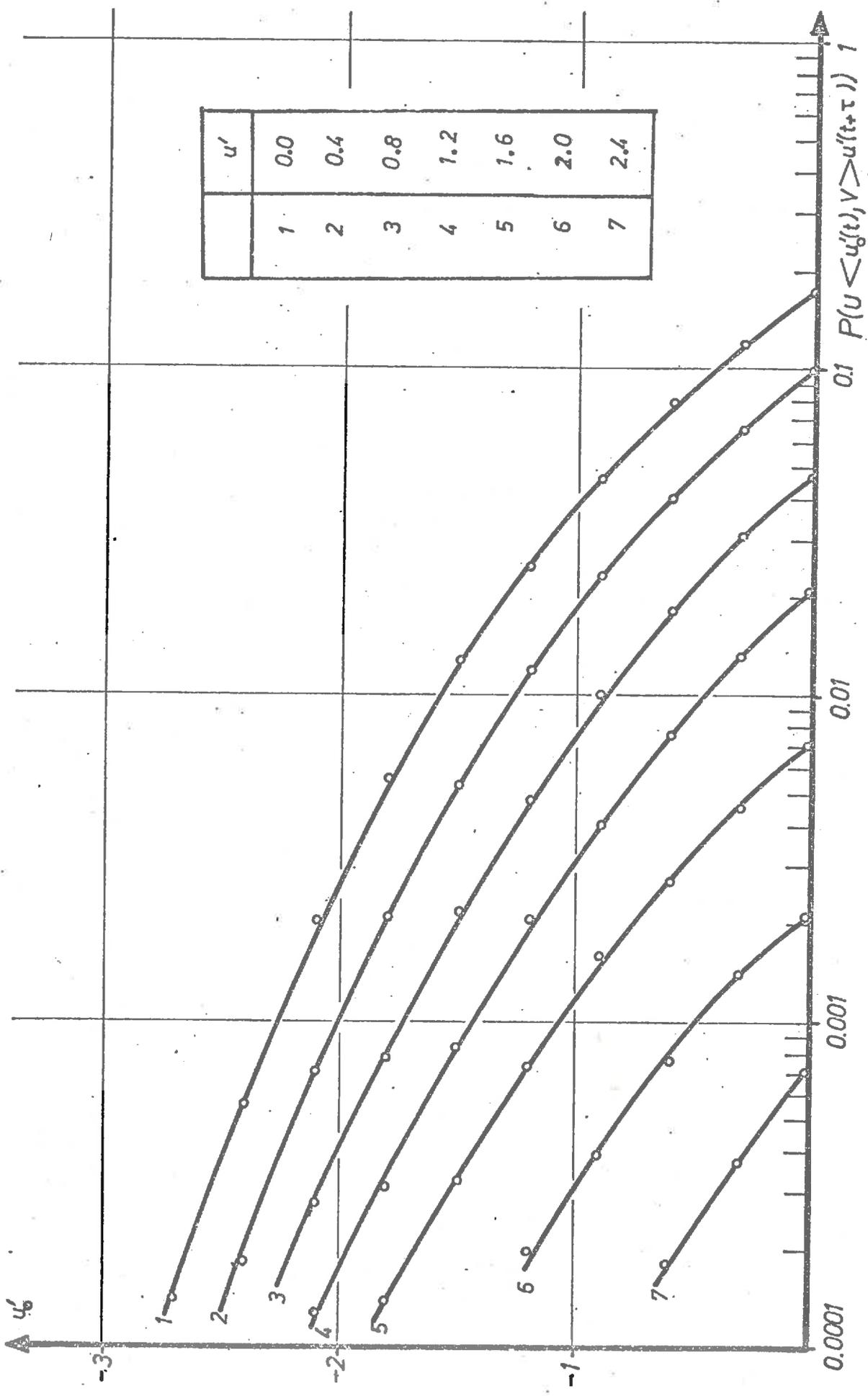


Fig. 4.3.16. Réseau des probabilités liées  $P\{\underline{U} < u'_0(t), V > u'(t+\zeta)\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) > 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms

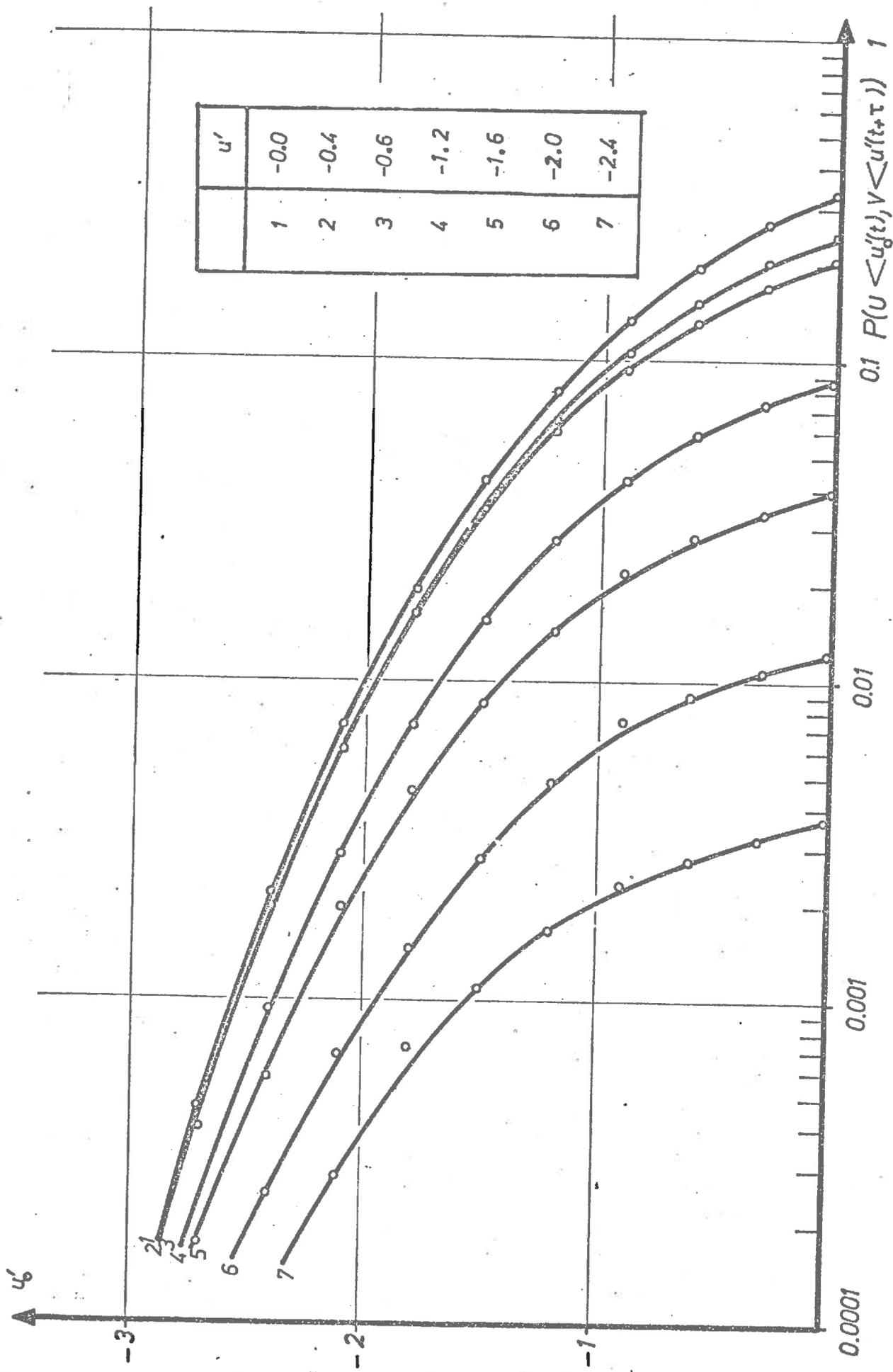


Fig. 4.3.17. Réseau des probabilités liées  $P\{U < u'_0(t), V < u'(t+\zeta)\}$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms

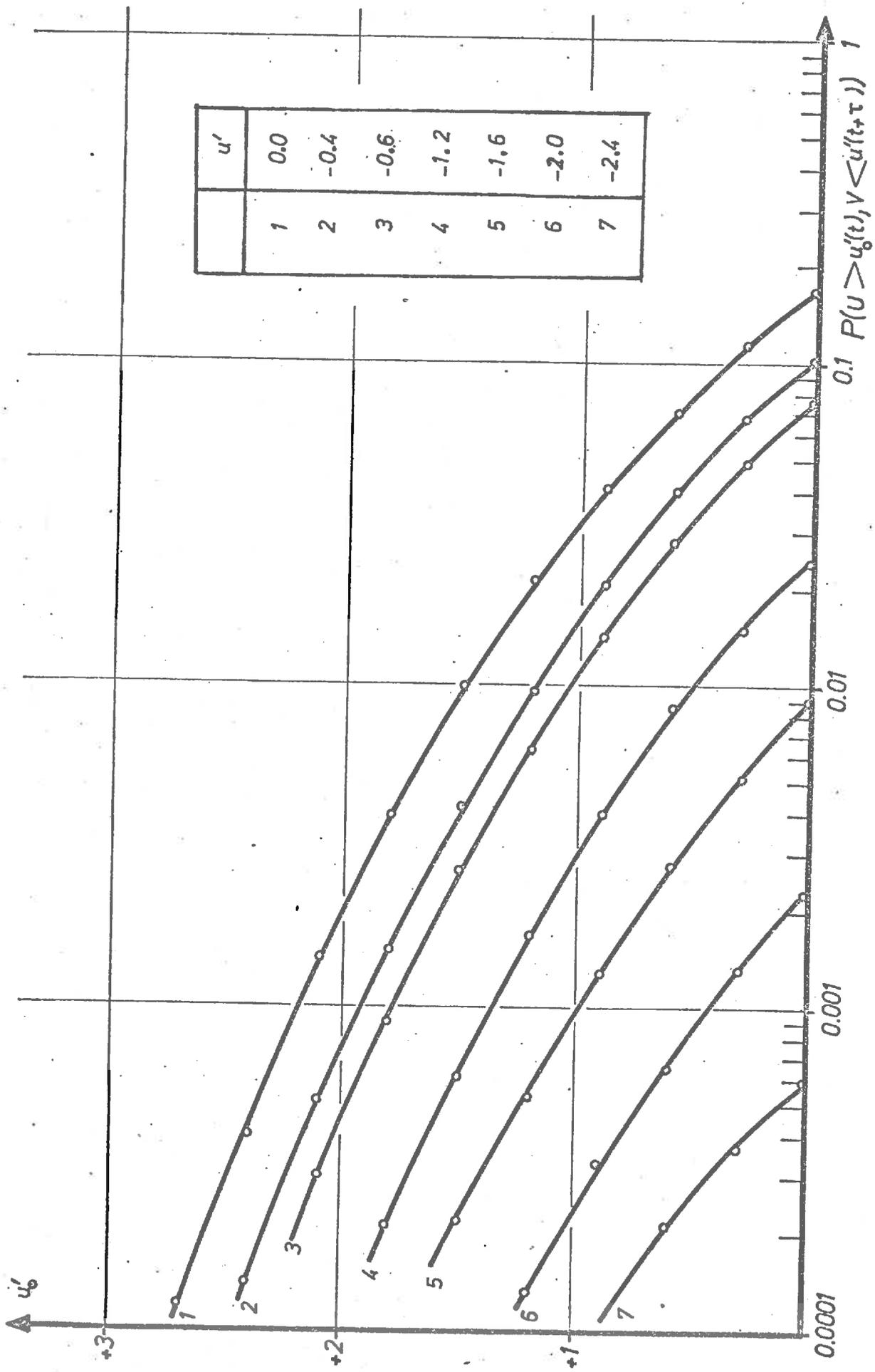


Fig. 4.3.16. Réseau des probabilités liées  $P(\underline{U} > u'_0(t), \underline{V} < u'(t+\zeta))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'_0(t)$  pour les différentes valeurs de  $u'(t+\zeta) < 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms

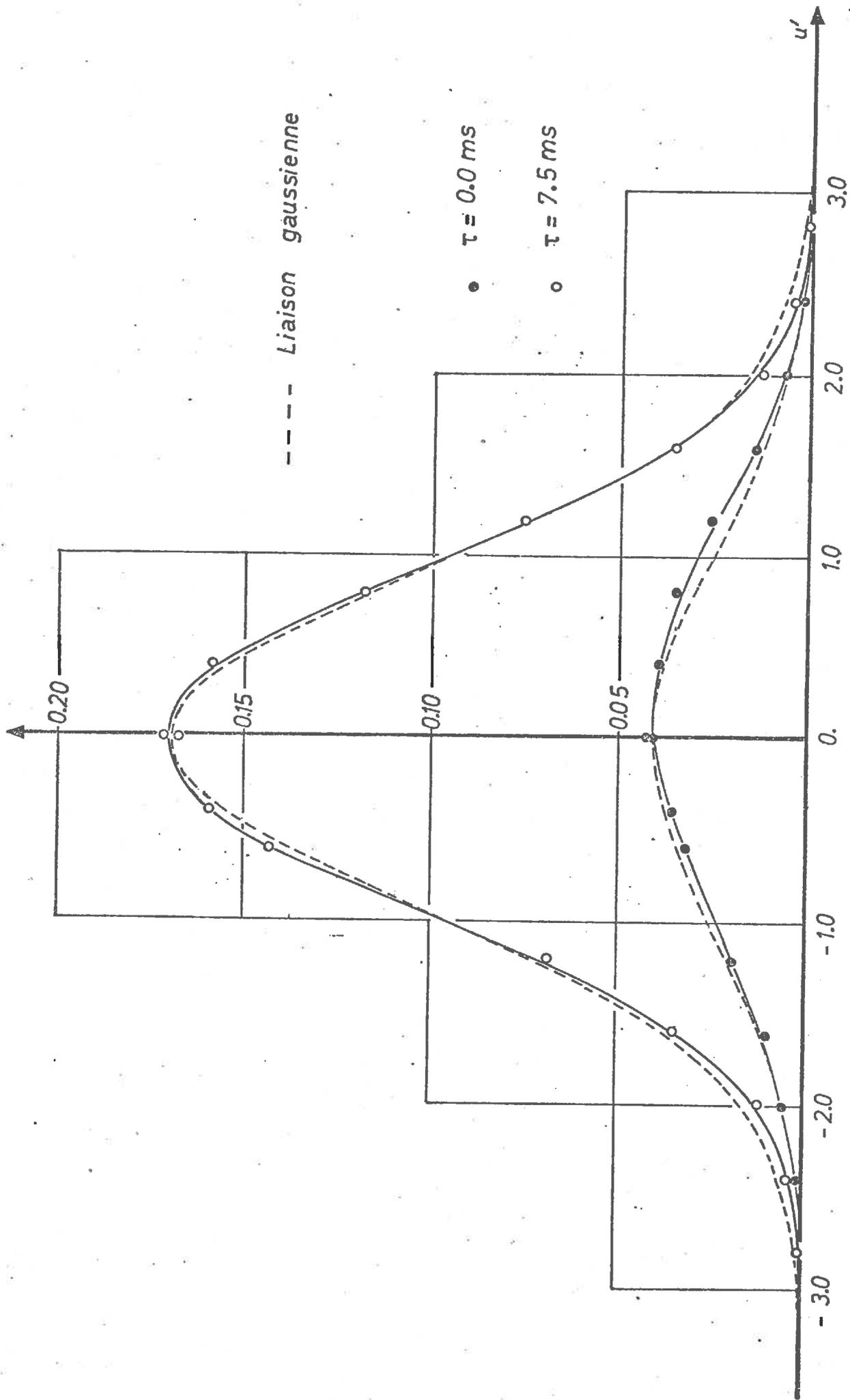


Fig. 4.3.19. Courbes intégrales donnant le coefficient de corrélation en fonction de l'amplitude  $u'(t+\zeta)$ .  $\zeta = 0$  et 7,5 ms. Comparaison avec une loi de Gauss

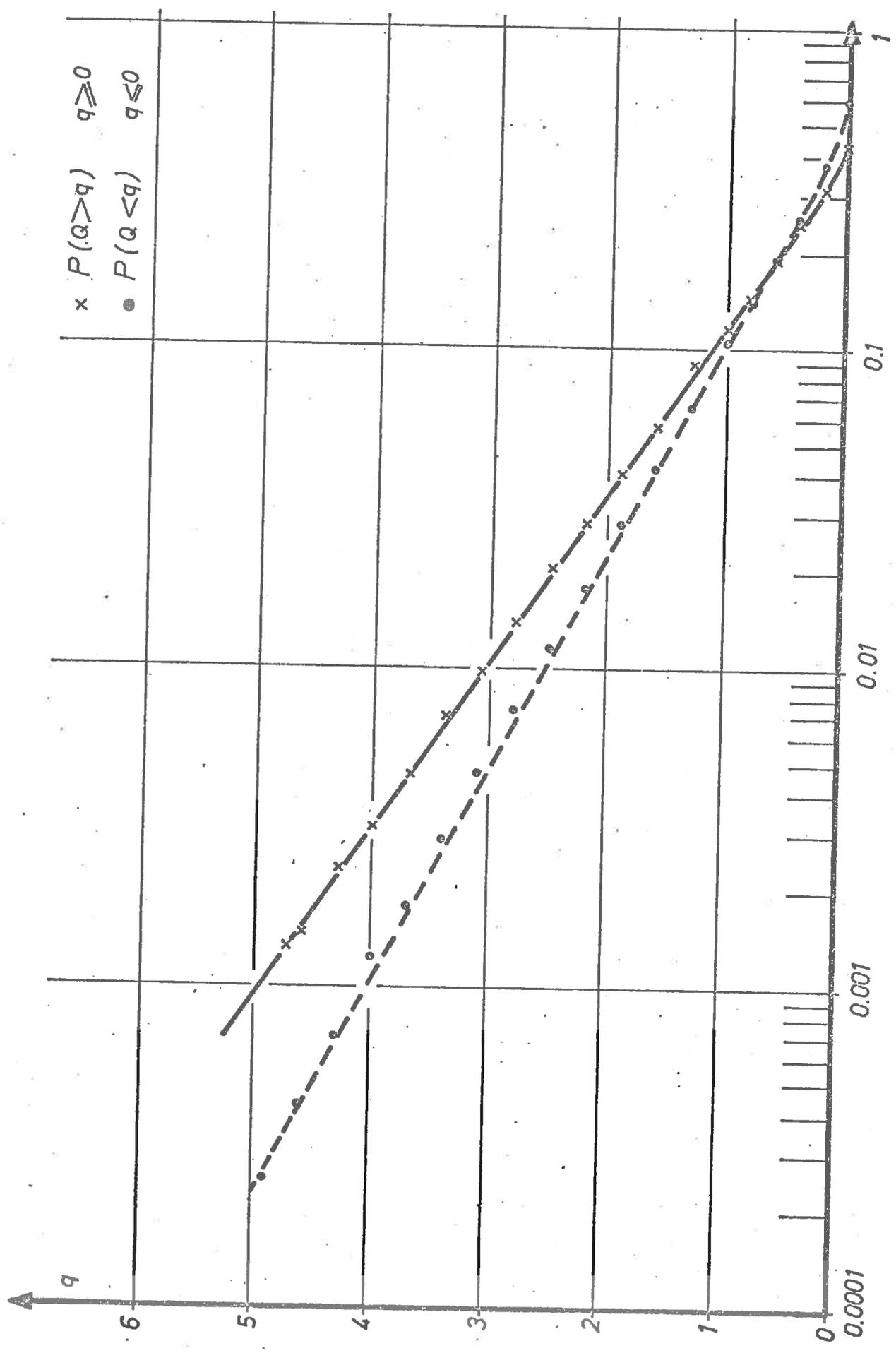


Fig. 4.3.20. Fonction de répartition du produit instantané  $u'_0(t) u'(t)$ . Courbes  $P_{\bar{q}} > q_{\bar{q}}$  et  $P_{\bar{q}} < q_{\bar{q}}$  en fonction de  $q$

•  $q.Prob(Q > q) \quad q > 0.$   
x  $q.Prob(Q < q) \quad q \leq 0.$

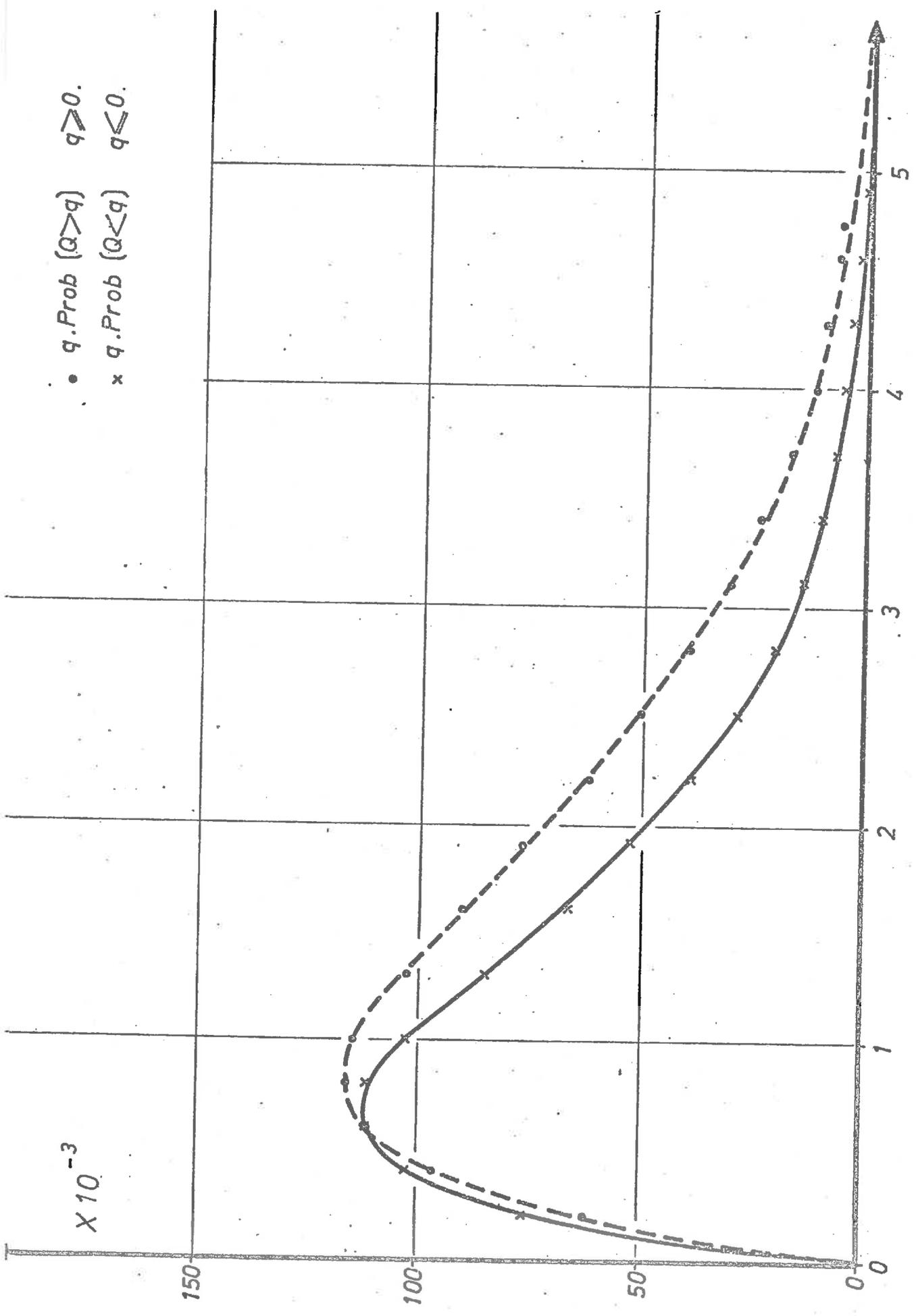


Fig. 4.3.21. Moment d'ordre deux du produit instantané  $u'_0(t) u'(t)$ . Courbes  $qP/Q > q$  et  $qP/Q < q$  en fonction de q

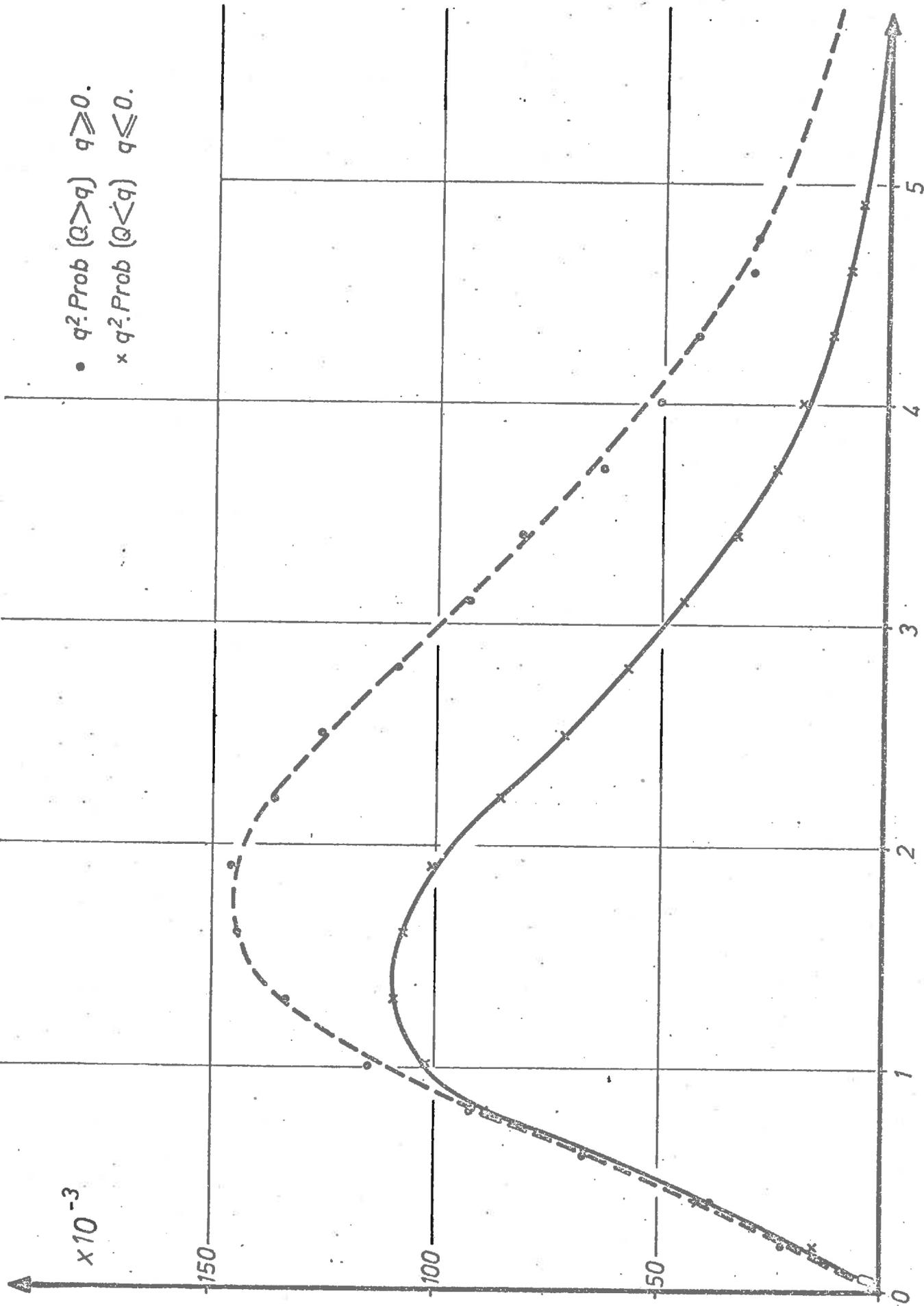


Fig. 4.3.22. Moment d'ordre trois du produit instantané  $u'_0(t) u'(t)$ . Courbes  $q^2 P_{\overline{Q} > q}$  et  $q^2 P_{\overline{Q} < q}$  en fonction de  $q$

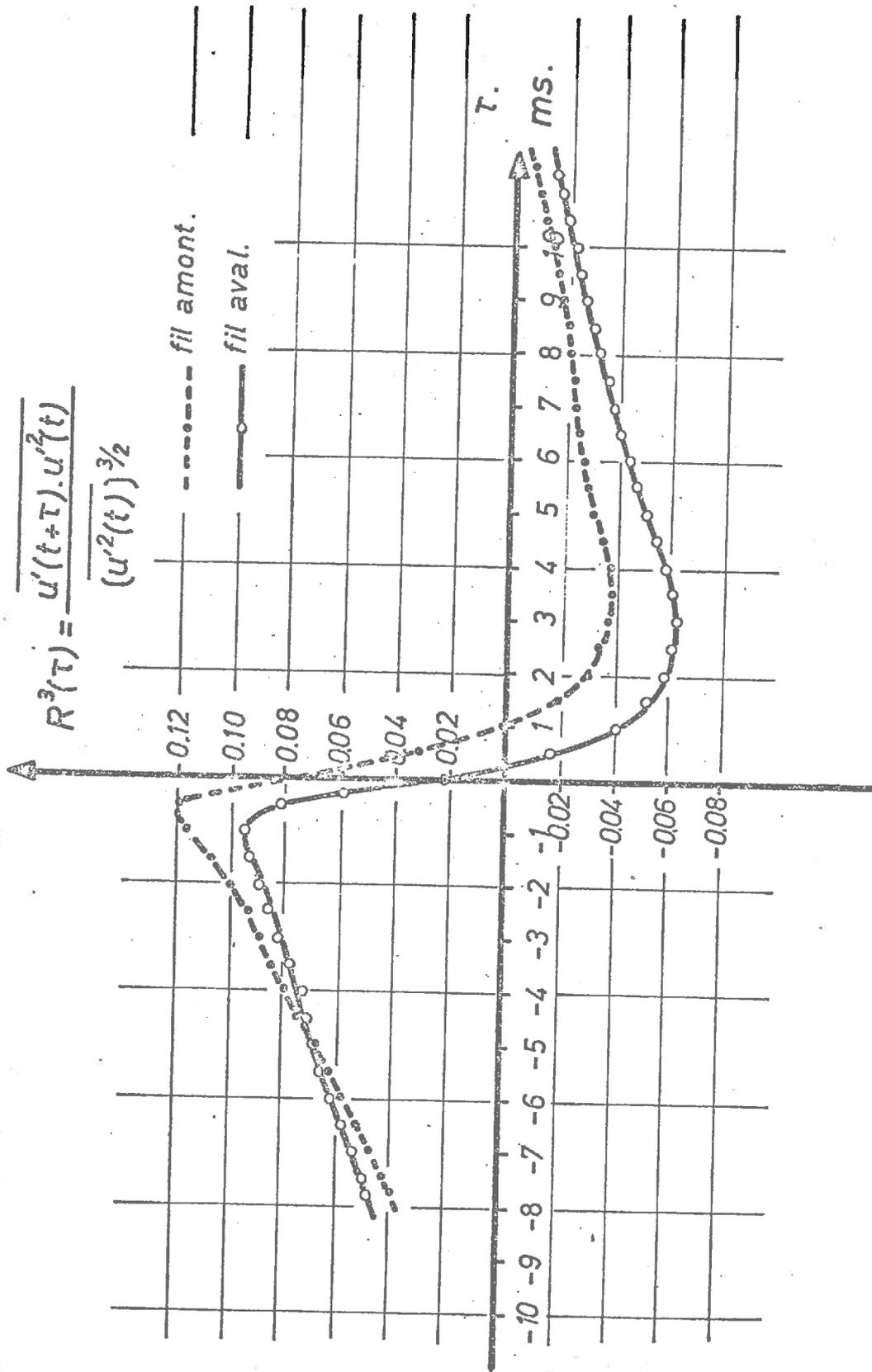


Fig. 4.4.1. Courbes de corrélation temporelle triple. Courbes  $R_3(\zeta)$  pour les deux fils chauds amont et aval en fonction du temps retard  $\zeta$

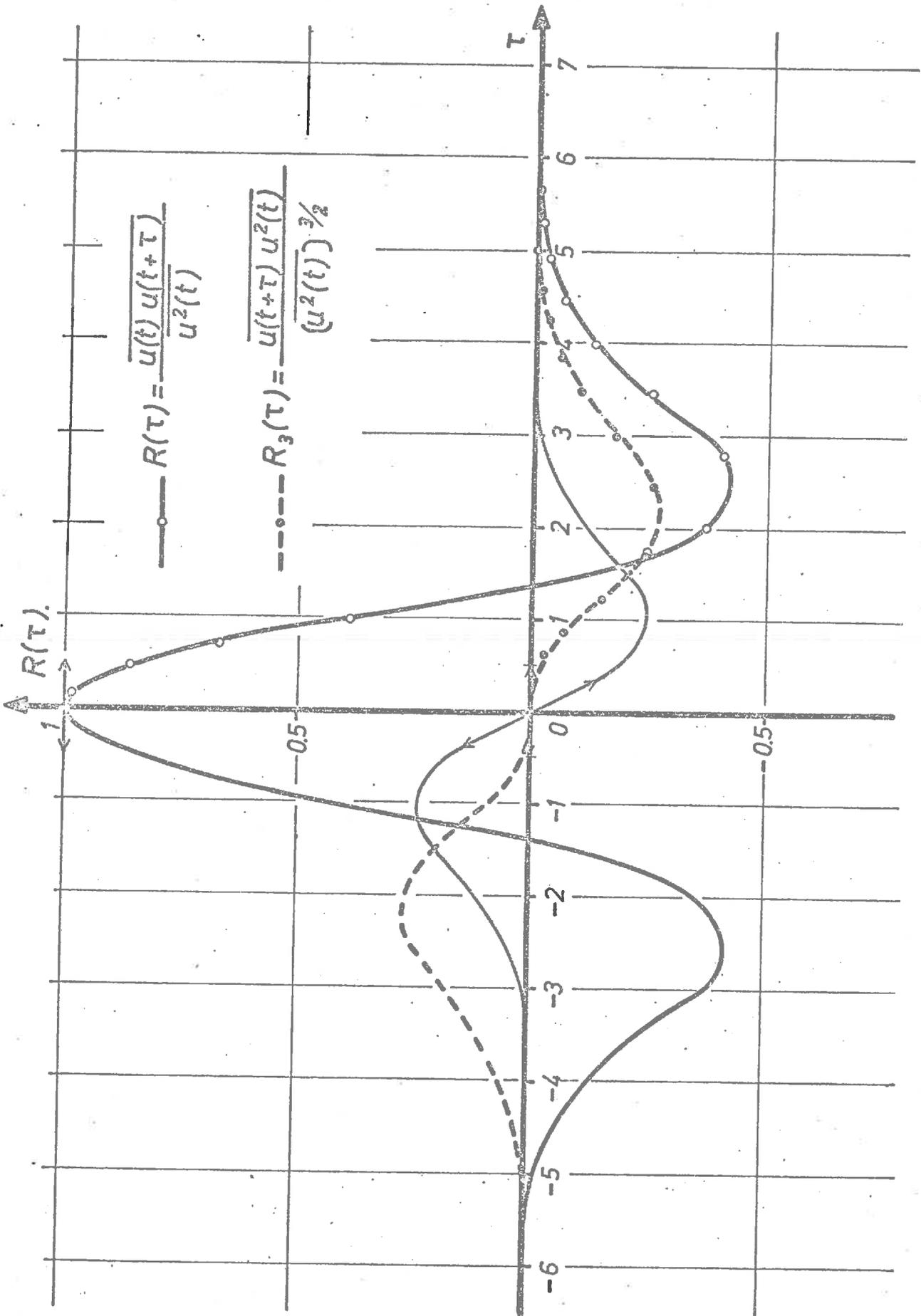


Fig. 4.4.2. Courbes de corrélation temporelle triple et double en fonction du temps retard  $\zeta$ . Modèle de perturbation

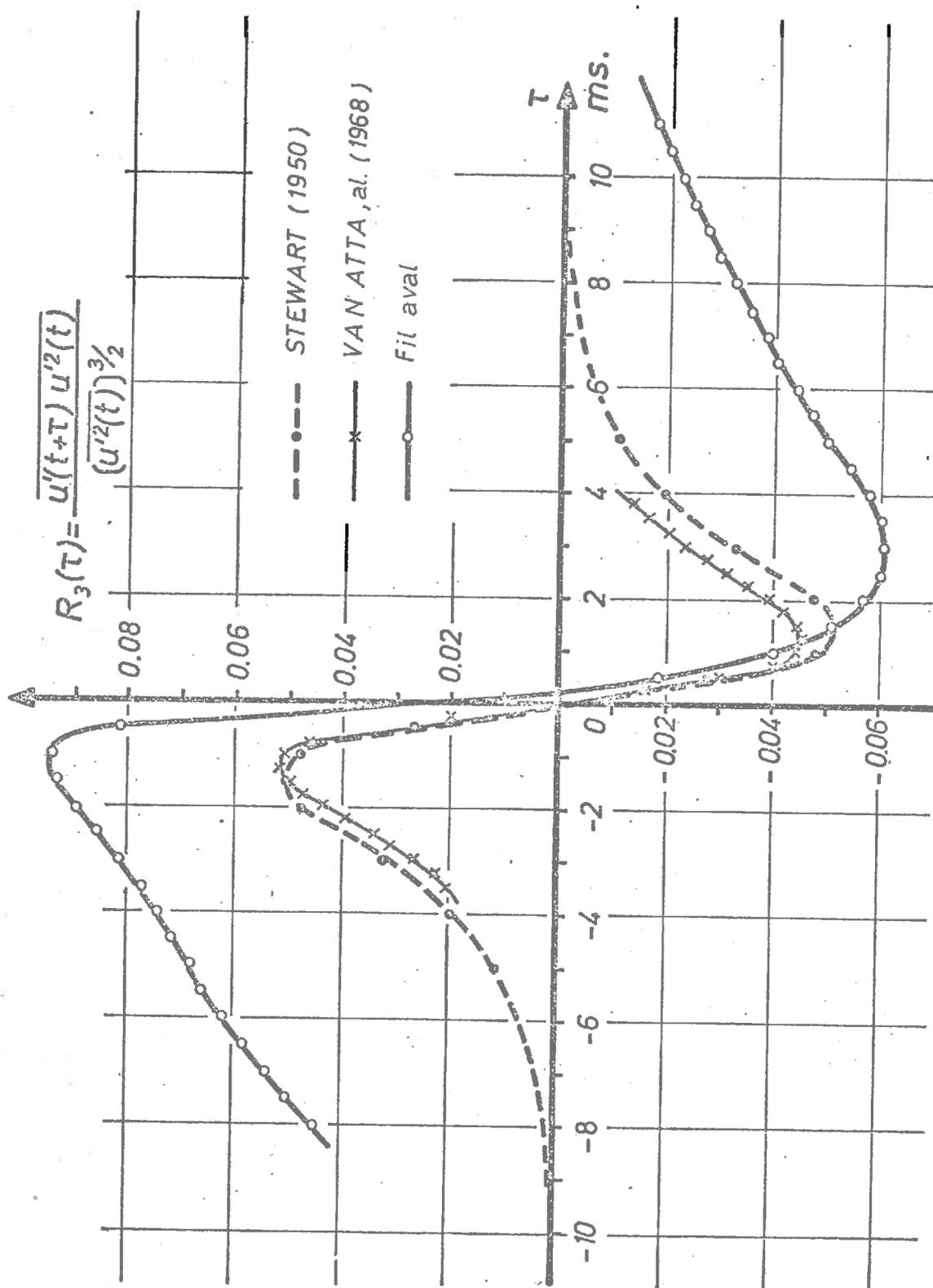


Fig. 4.4.3. Comparaison des courbes de corrélation temporelles en fonction du temps retard  $\zeta$ . Comparaison avec les mesures de Van ATTA et STEWART

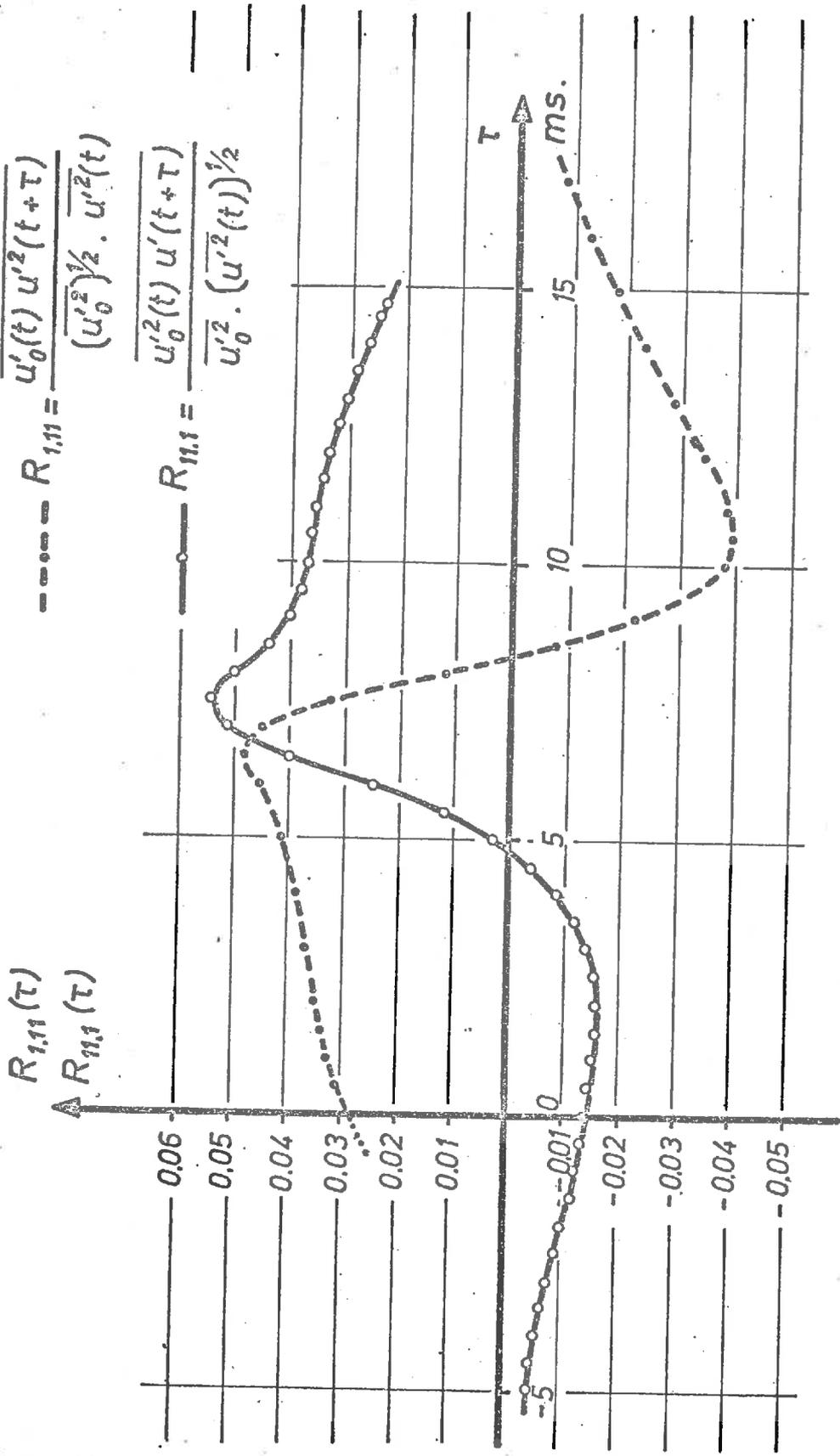


Fig. 4.4.4. Courbes de corrélation spatio-temporelle triple  $R_{1,11}(\zeta)$  et  $R_{11,1}(\zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$

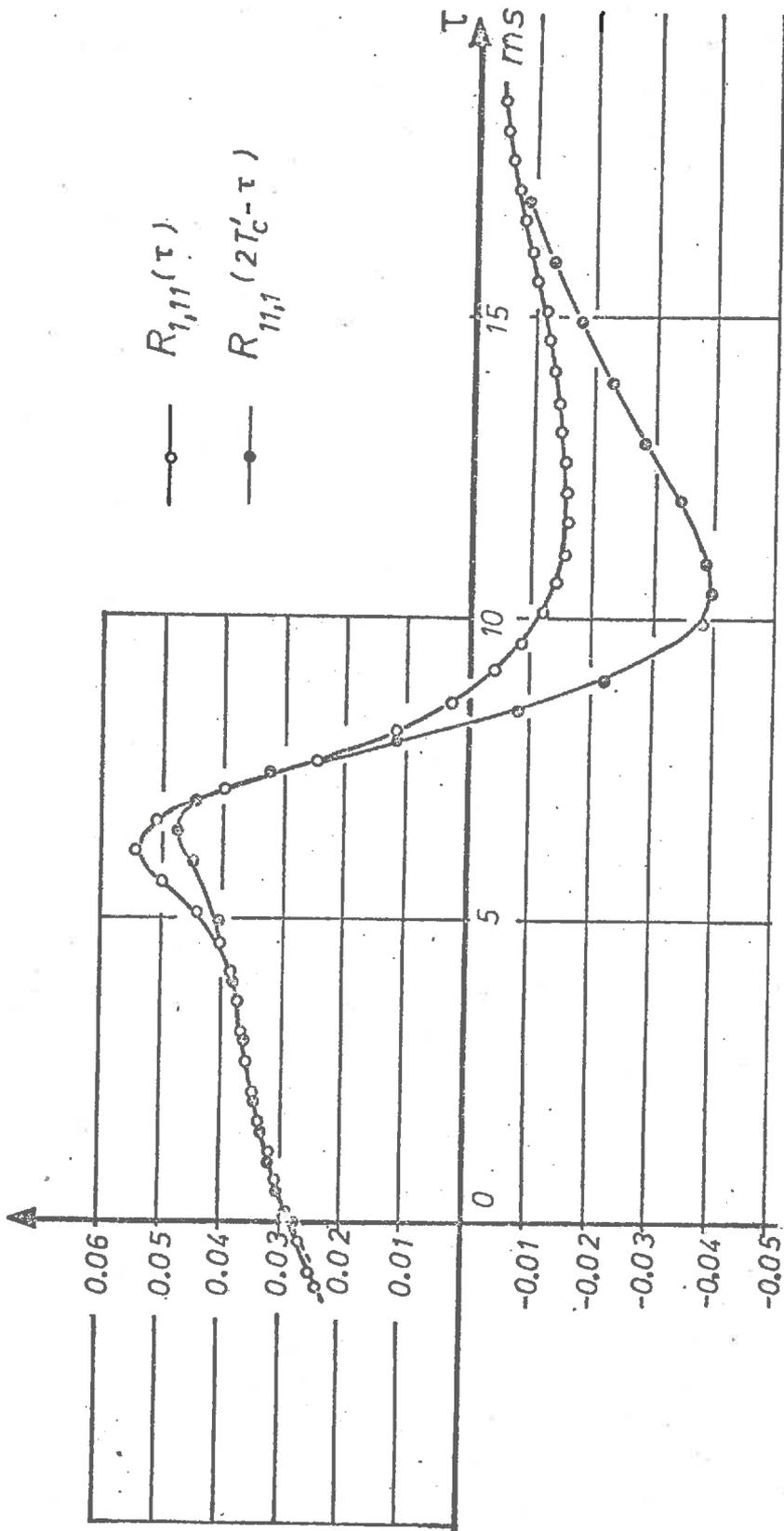


Fig. 4.4.5. Comparaison des courbes de corrélation spatio-temporelle triple avec l'hypothèse de Taylor. Courbes  $R_{1,11}(\zeta)$  et  $R_{1,11}(2T'_c - \zeta)$  en fonction du temps retard  $\zeta$

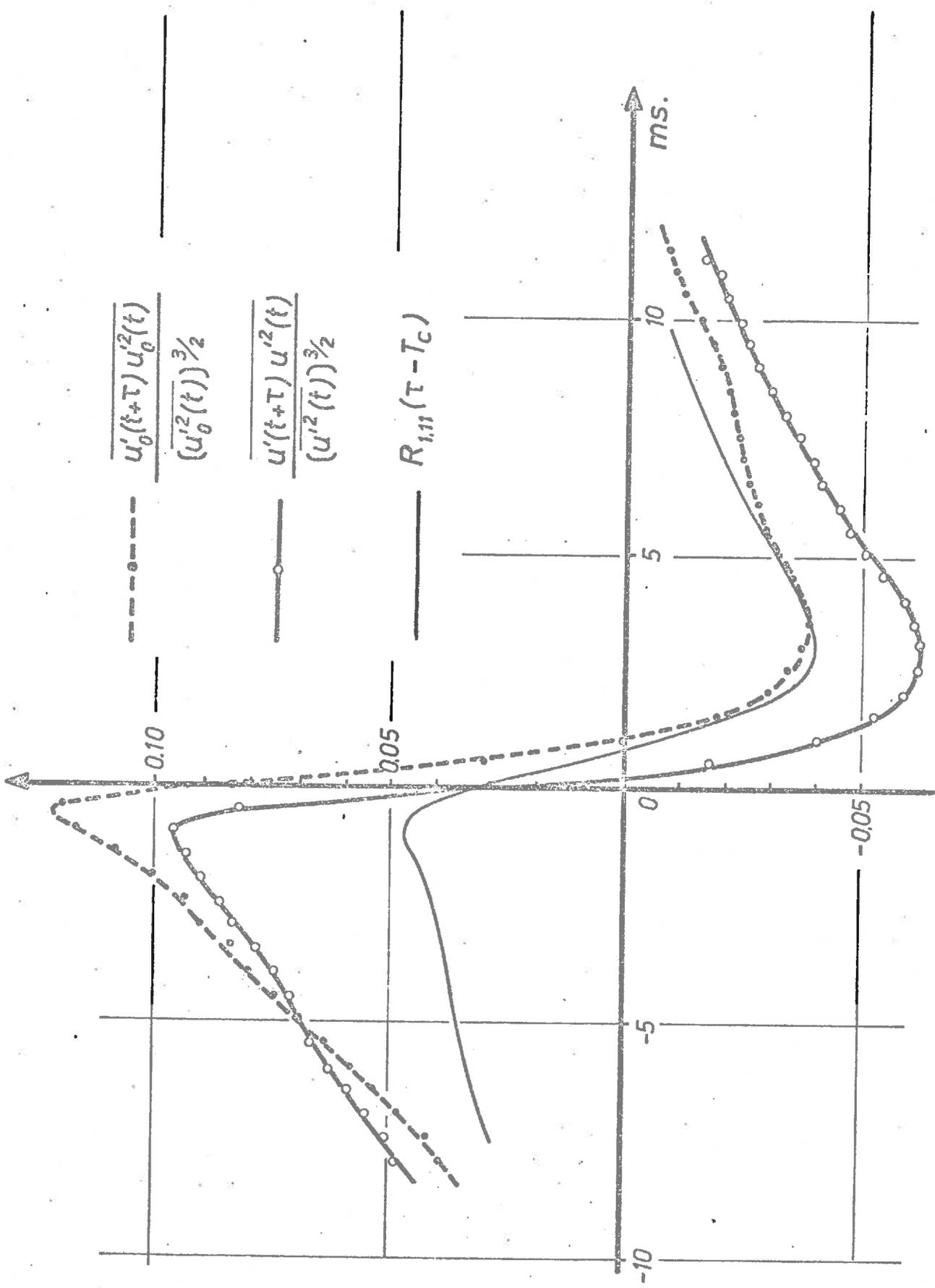


Fig. 4.4.6. Comparaison des courbes de corrélation temporelle triple et de corrélation spatio-temporelle triple avec l'hypothèse de Taylor. Courbes  $R3(\zeta)$  pour les deux fils chauds et  $R_{1,11}(\zeta - T_c)$  en fonction du temps retard  $\zeta$

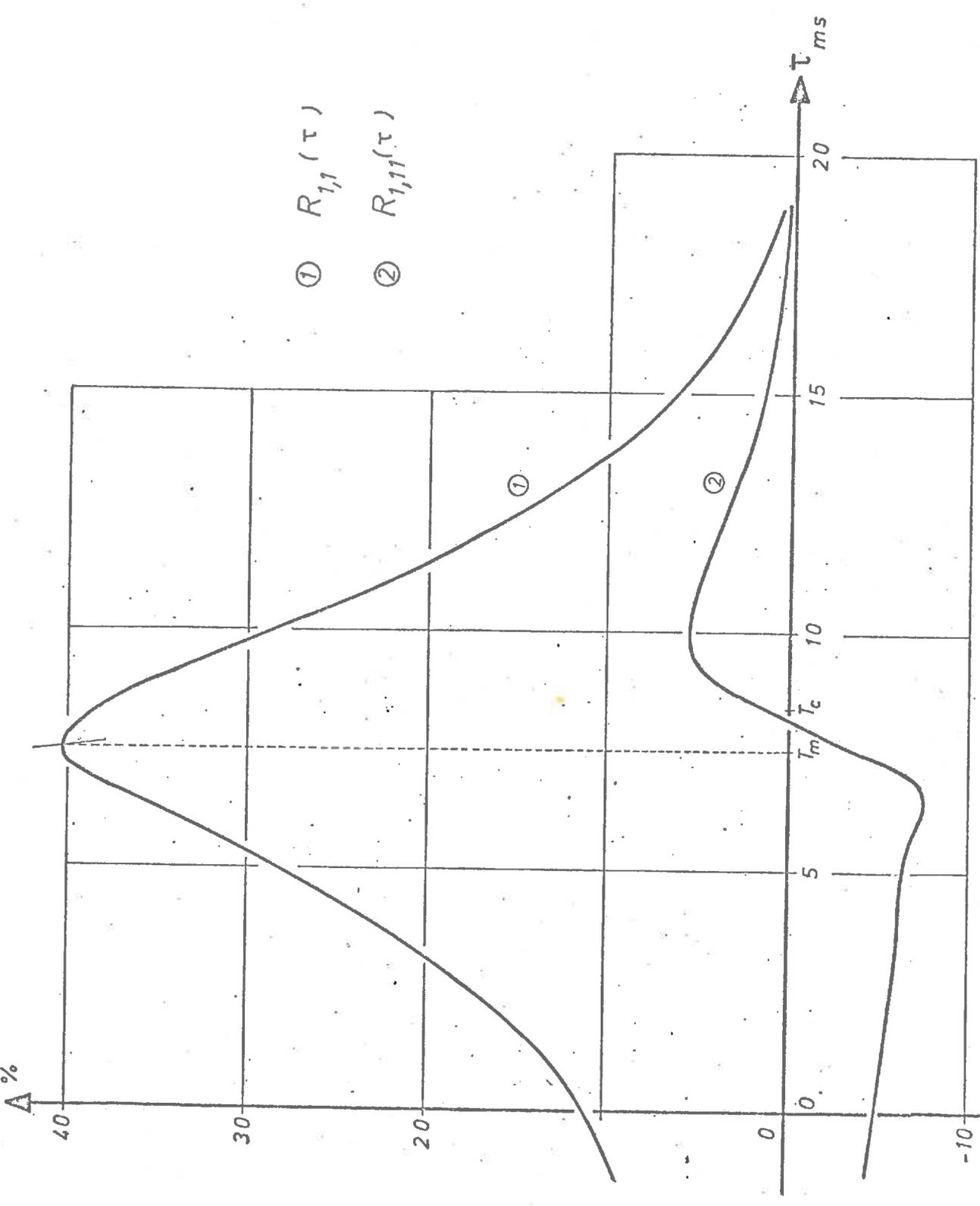


Fig. 4.4.7. Comparaison des courbes de corrélation spatio-temporelle triple et double. Courbes  $R_{1,1}(\zeta)$  et  $R_{1,1}(\tau)$  en fonction du temps retard  $\zeta$

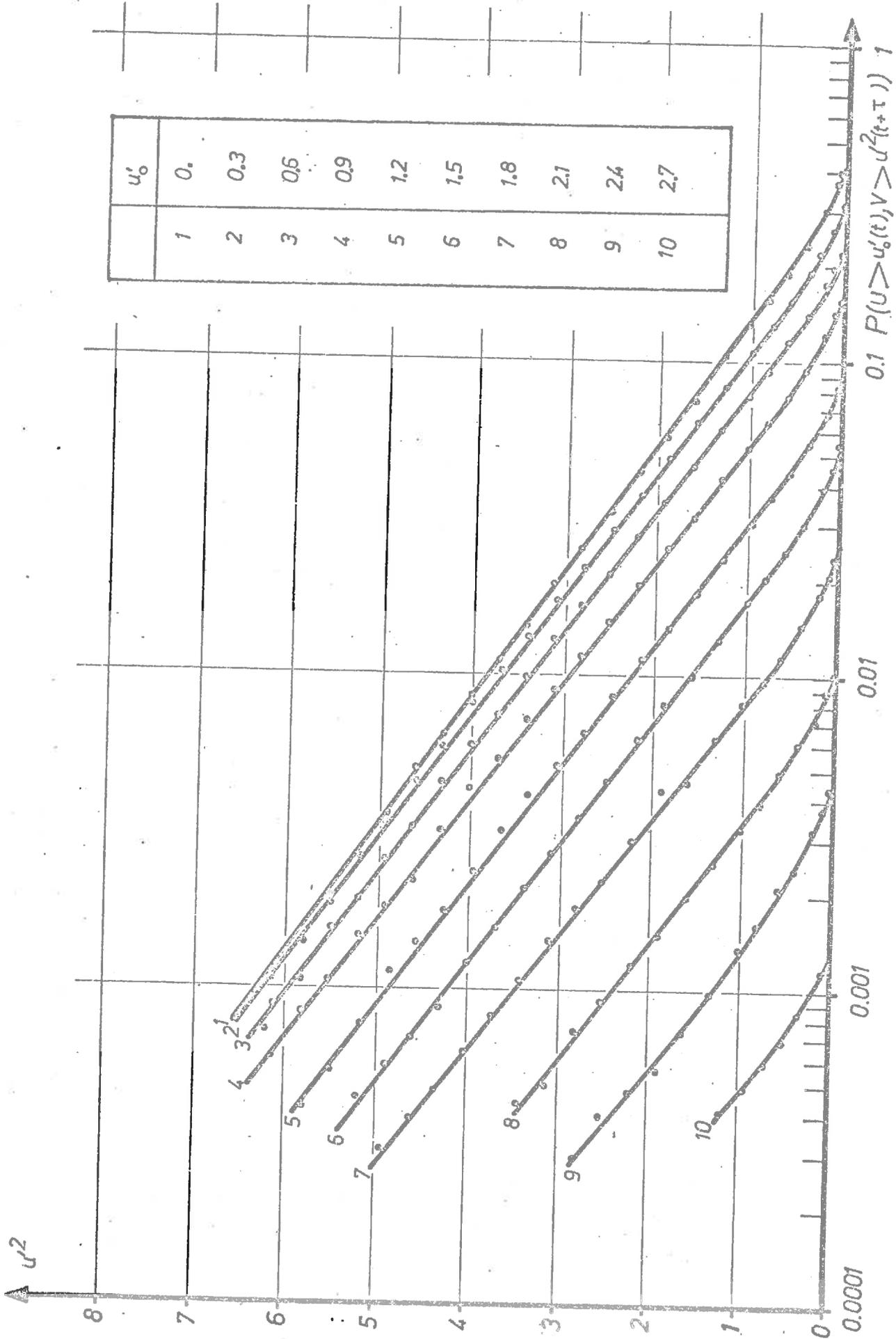


Fig. 4.4.8. Réseau des probabilités liées  $P(\sqrt{U} > u_0(t), V > u^2(t), V > u^2(t+\tau))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u^2(t)$  pour les différentes valeurs de  $u_0 > 0$

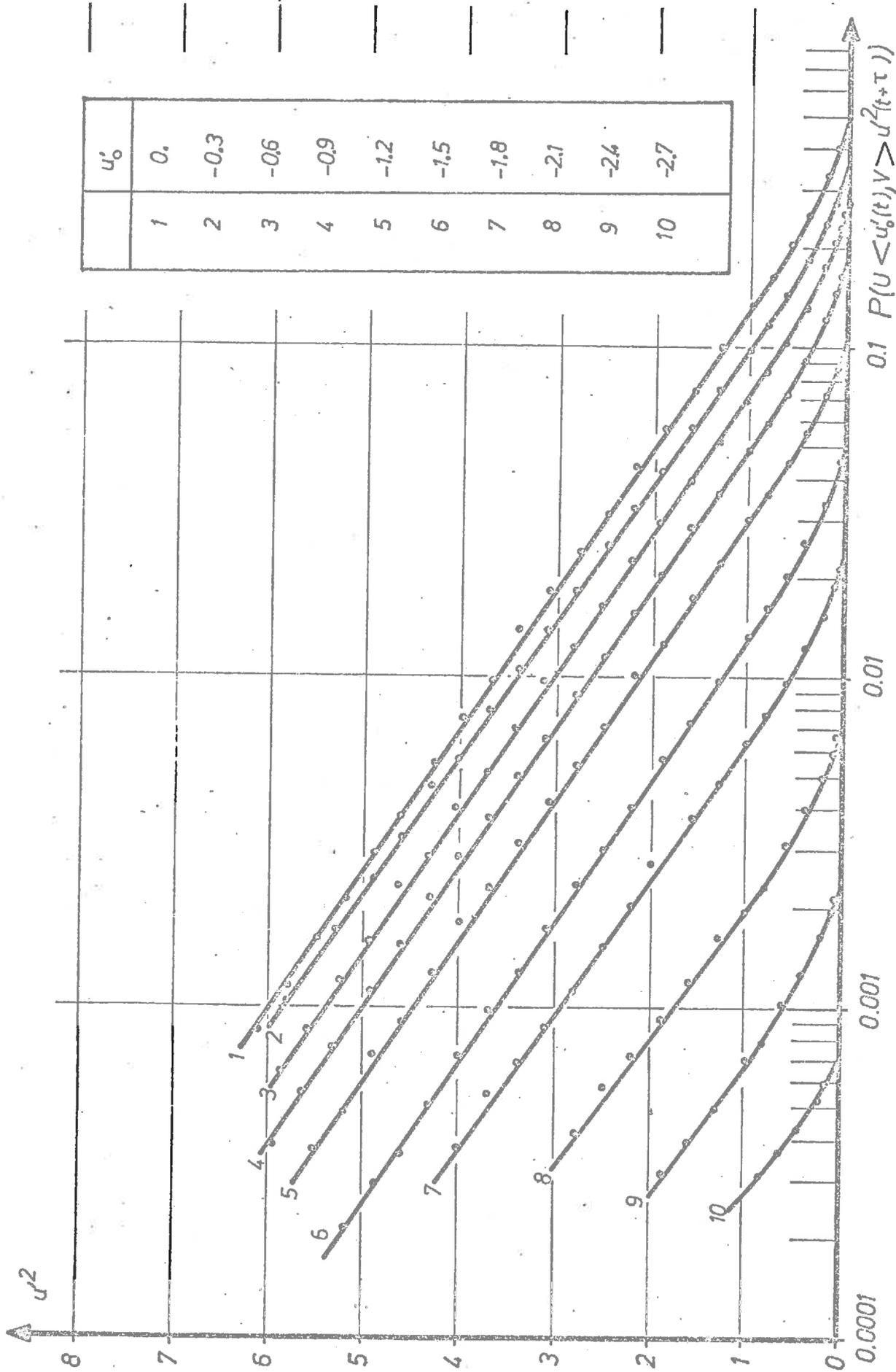


Fig. 4.4.9. Réseau des probabilités liées  $P(\sqrt{U} < u_0(t), \sqrt{V} > u^2(t+\tau))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u^2(t)$  pour les différentes valeurs de  $u_0 < 0$

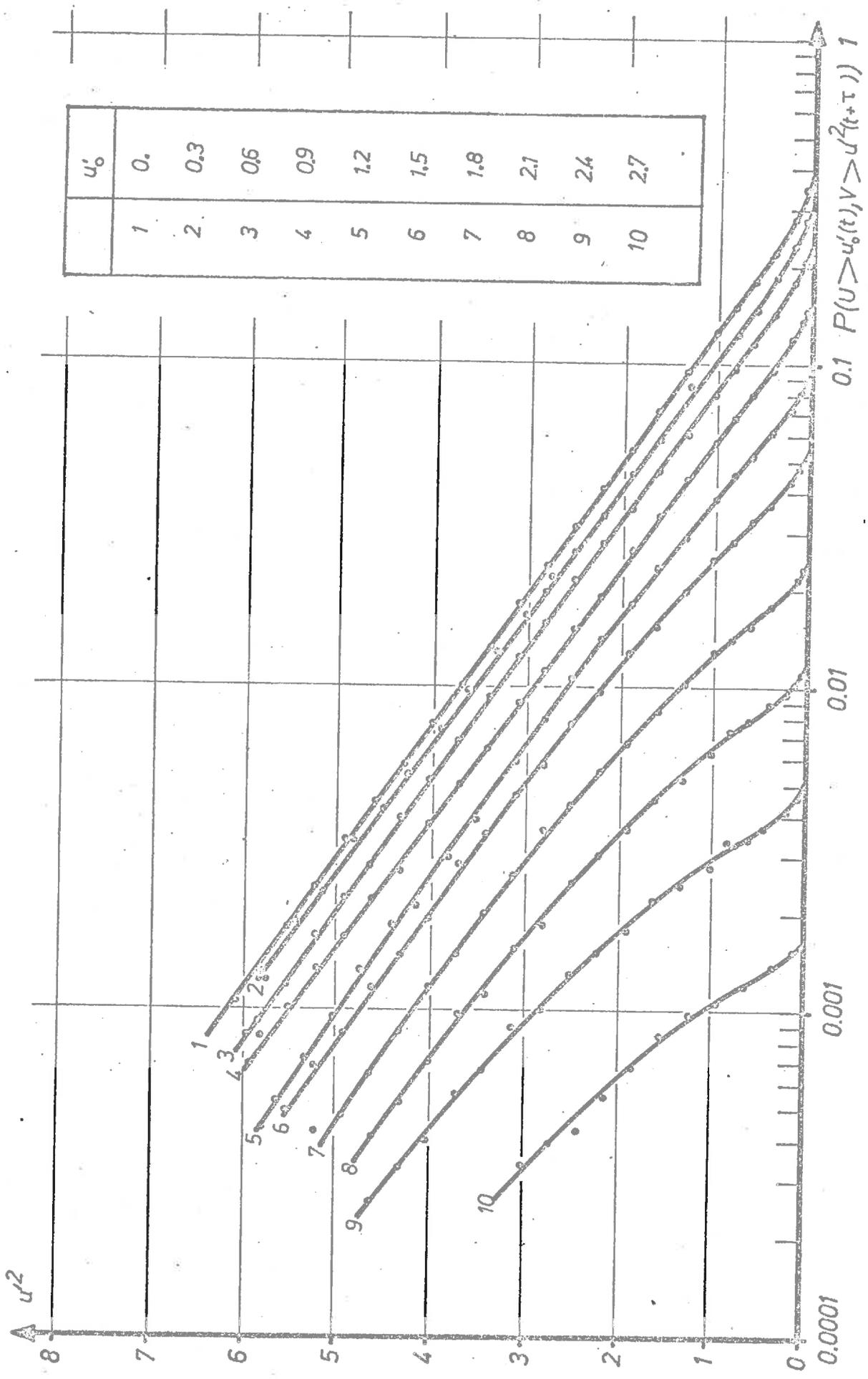


Fig. 4.4.10. Réseau des probabilités liées  $P(u > u_0(t), V > u^2(t+\tau))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u^2(t+\zeta)$  pour les différentes valeurs de  $u_0 > 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms

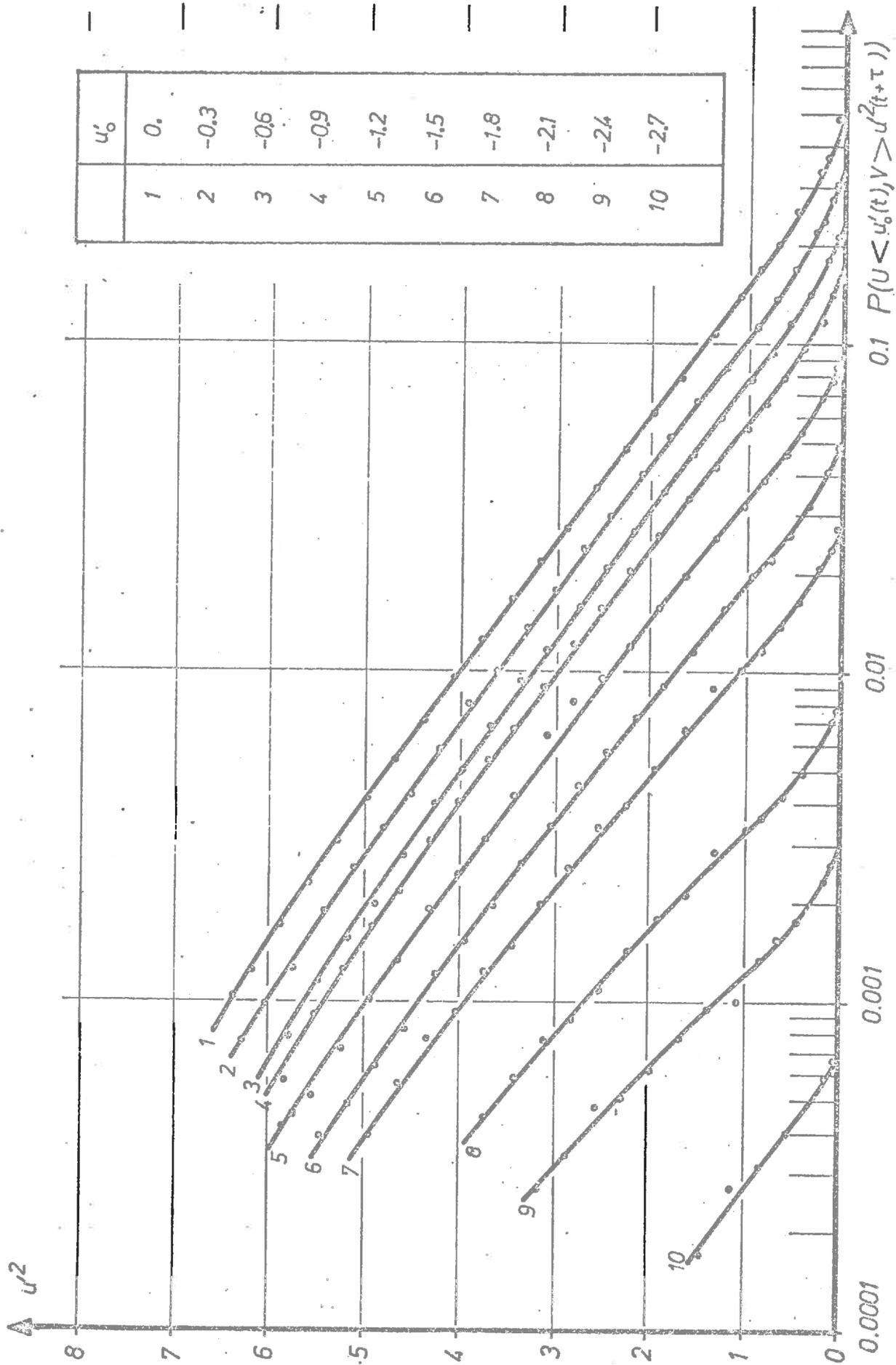


Fig. 4.4.11. Réseau des probabilités liées  $P(u < u'_0(t), v > u'^2(t + \tau))$  en fonction de l'amplitude du signal  $u'^2(t + \tau)$  pour les différentes valeurs de  $u'_0 < 0$ .  $\zeta = 7,5$  ms

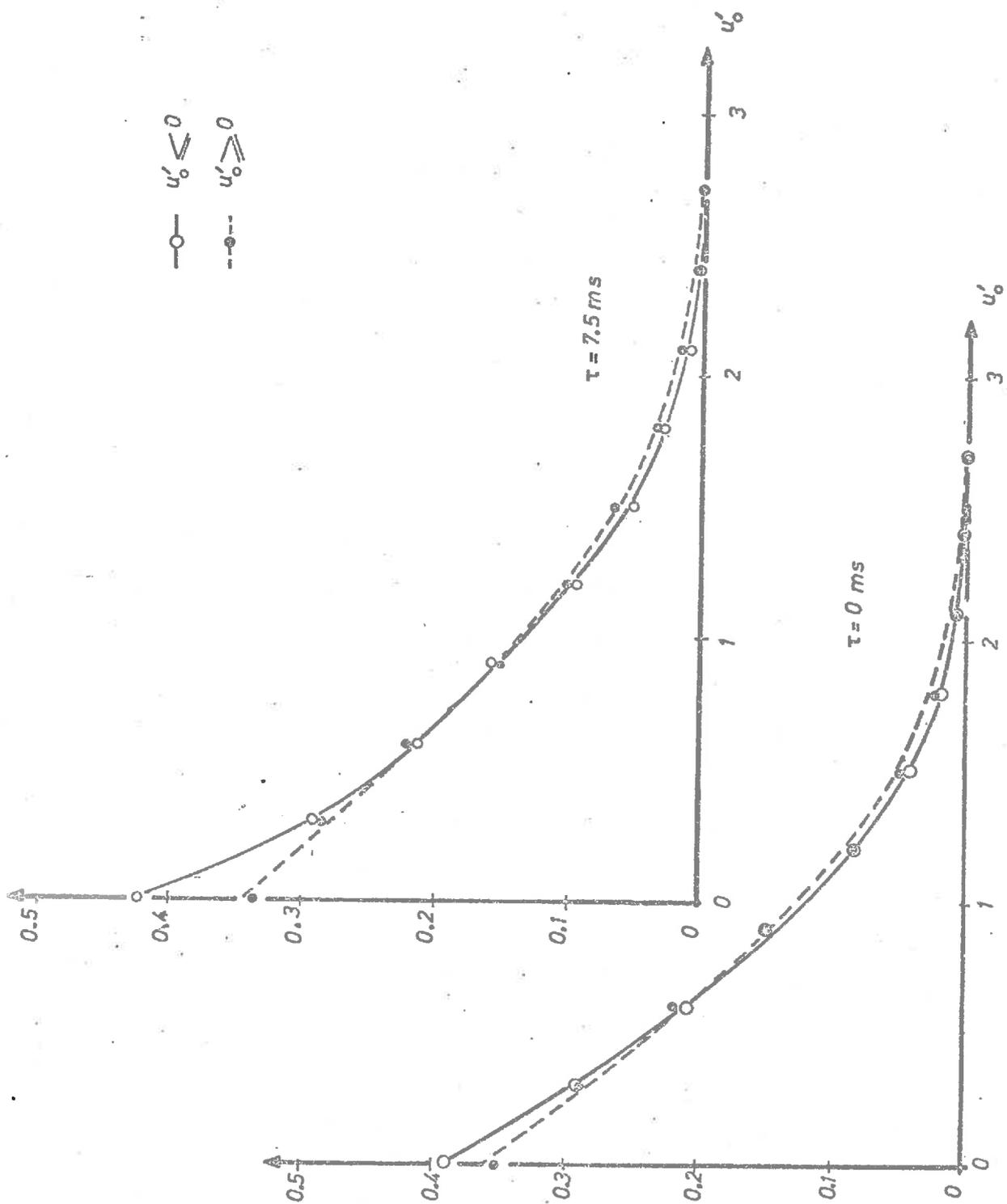


Fig. 4.4.12. Courbes intégrales  $\int_0^{\infty} P \sqrt{U} u'_0(t), V > u'^2(t+\zeta) \int d(u'^2)$  et  $\int_0^{\infty} P \sqrt{U} u'_0(t), V > u'^2(t+\zeta) \int d(u'^2)$  donnant le moment d'ordre 3.  $\zeta = 0 \text{ ms}$ , et  $\zeta = 7,5 \text{ ms}$

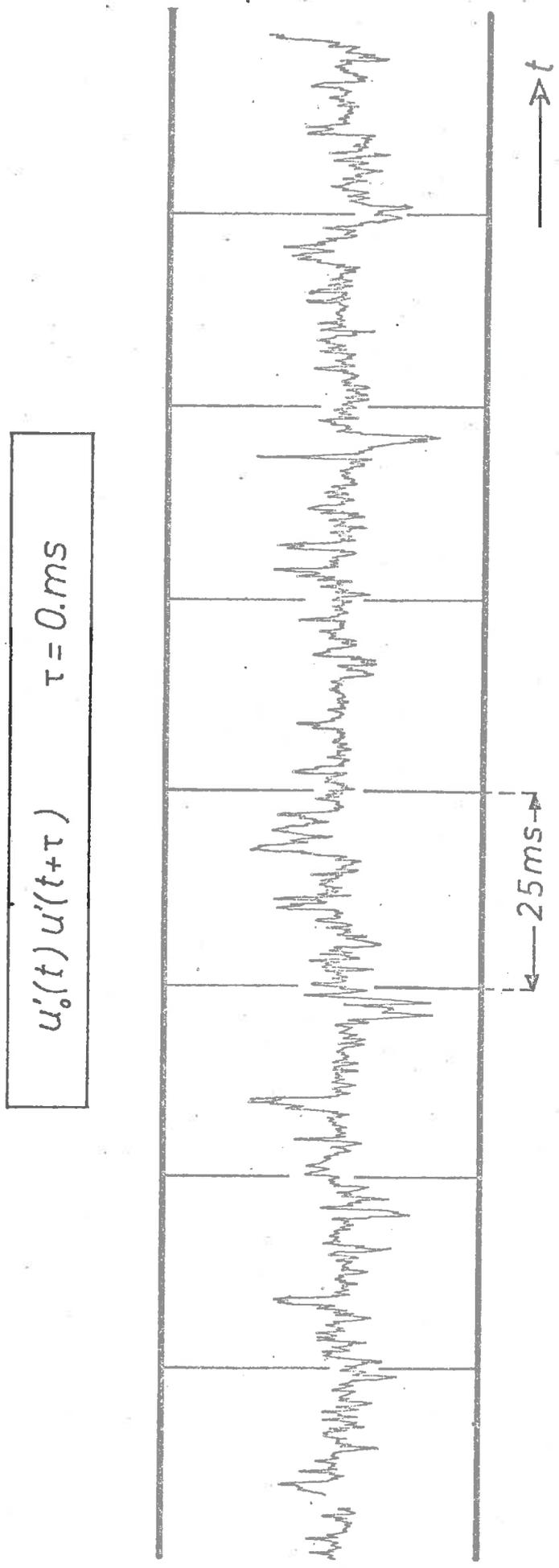


Fig. 4.5.1. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle doublée pour un temps retard  $\zeta = 0$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$ .

$$u_0(t) \quad u(t+\tau) \quad \tau = 7.50 \text{ ms}$$

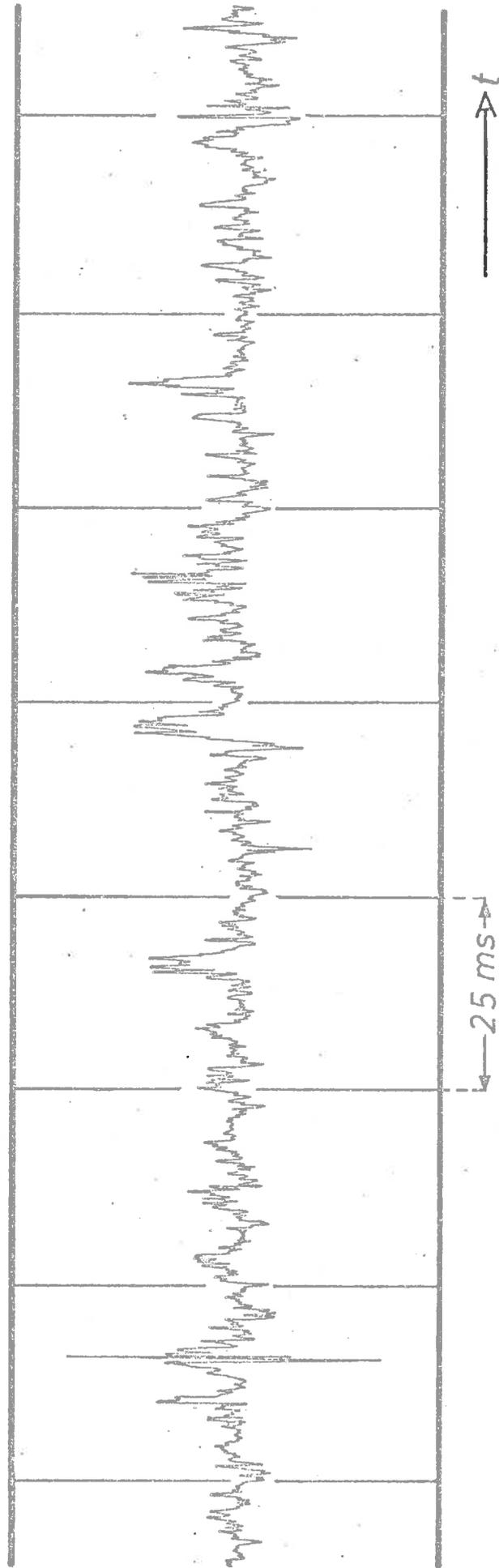


Fig. 4.5.2. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 7,5$  ms. Courbe  $u_0(t)$   $u(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

$$u_0(t) \quad u'(t+\tau) \quad \tau = 17.50 \text{ ms}$$

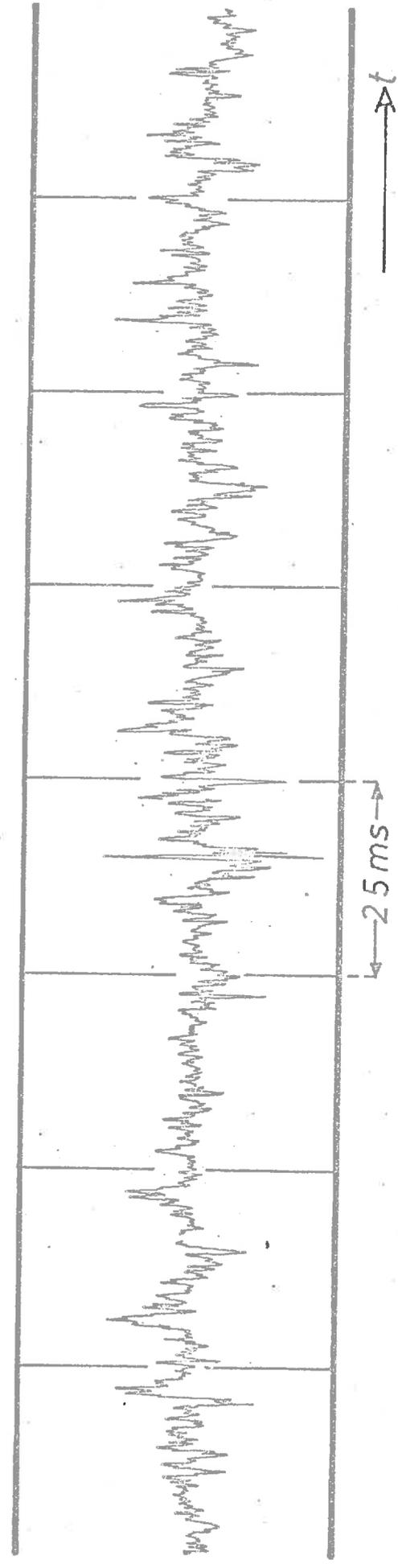


Fig. 4.5.3. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 17,5$  ms. Courbe  $u_0(t)$   $u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

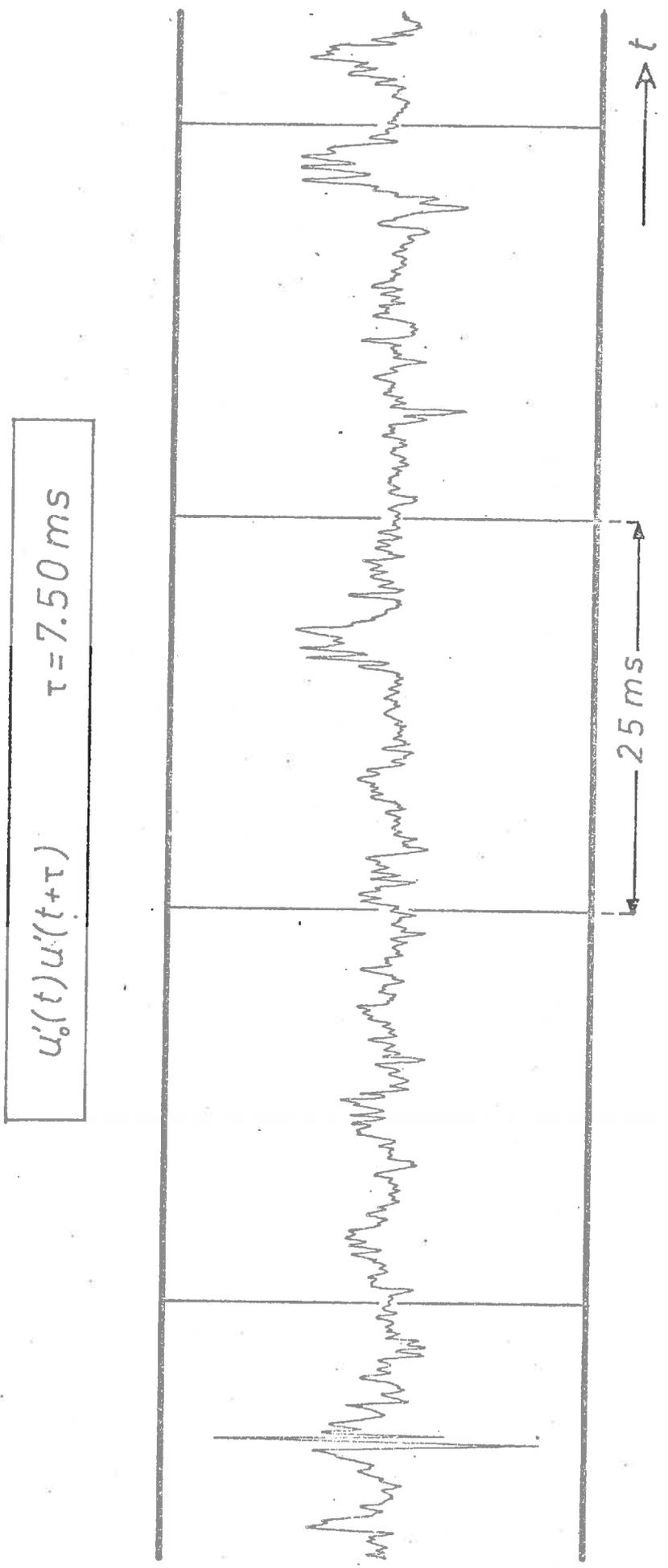


Fig. 4.5.4. Enregistrement de la corrélation spatio-temporelle double pour un temps retard  $\zeta = 7,5 \text{ ms}$ . Courbe  $u_0(t)u_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

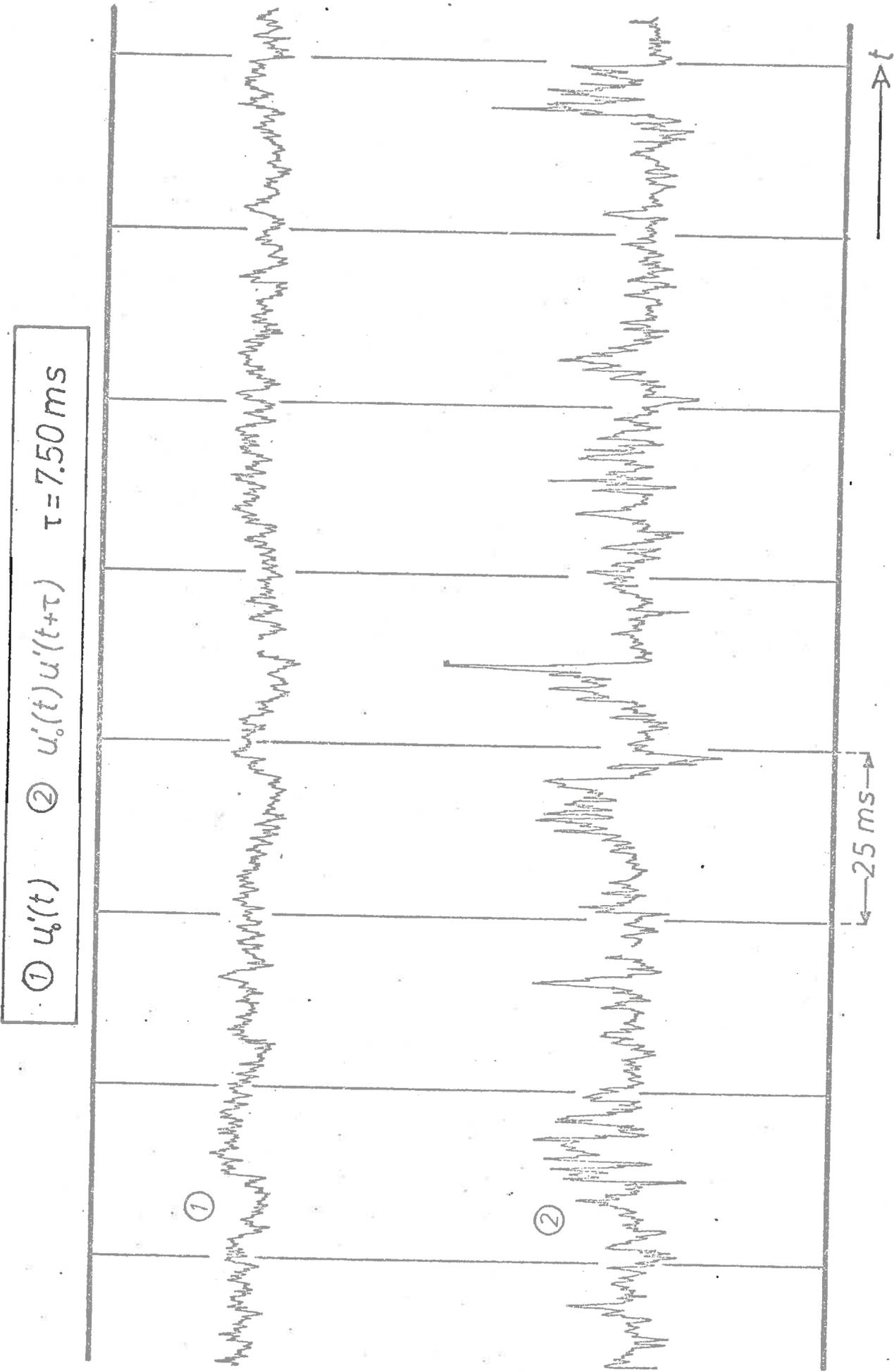


Fig. 4.5.5. Comparaison des enregistrements du signal direct de la corrélation spatio-temporelle pour un temps retard  $\zeta = 7,5 \text{ ms}$ . Courbes  $u_0(t)$  et  $u_0(t)u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

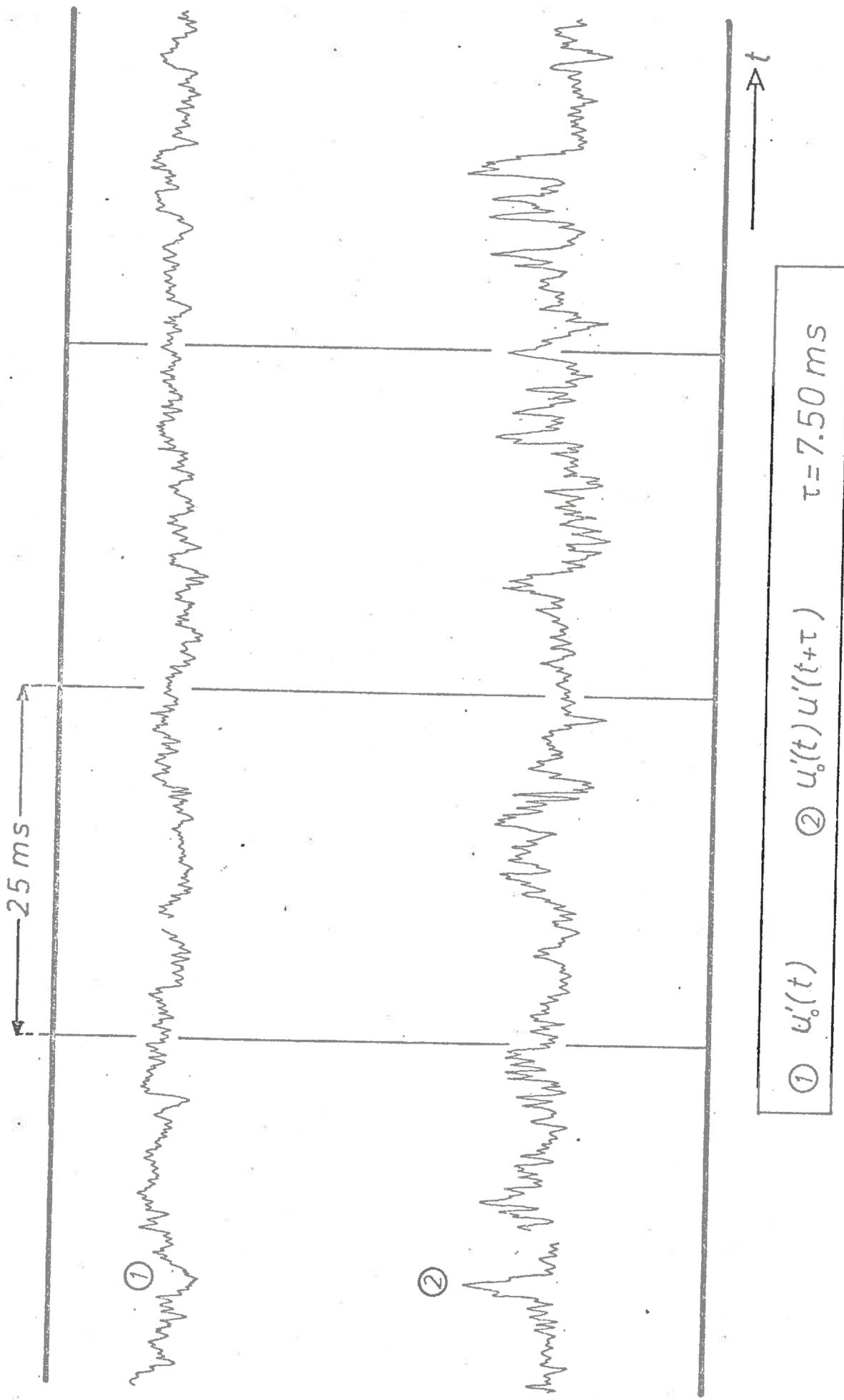


Fig. 4.5.6. Comparaison des enregistrements du signal direct et de la corrélation spatio-temporelle pour un temps retard  $\zeta = 7,5\text{ ms}$ . Courbes  $u'_0(t)$  et  $u'_0(t) u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

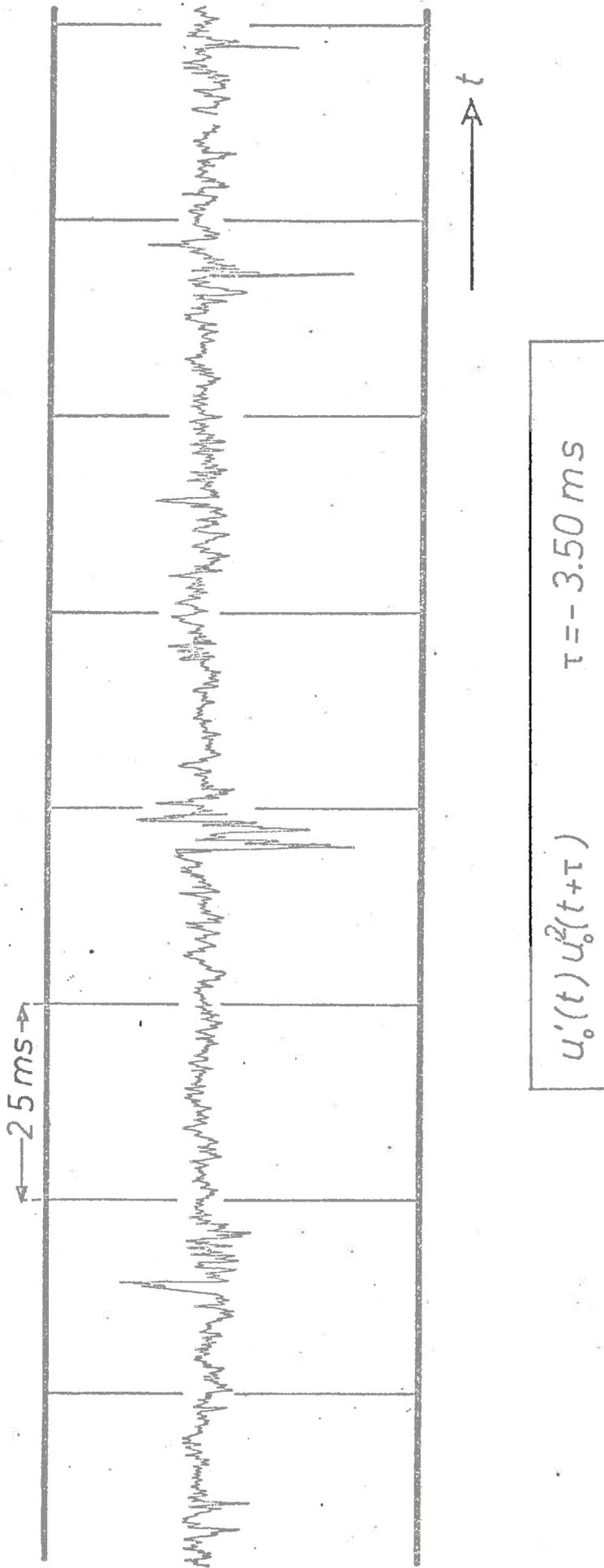


Fig. 4.5.7. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard  $\zeta = -3,5$  ms. Courbe  $u'_0(t) u'_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

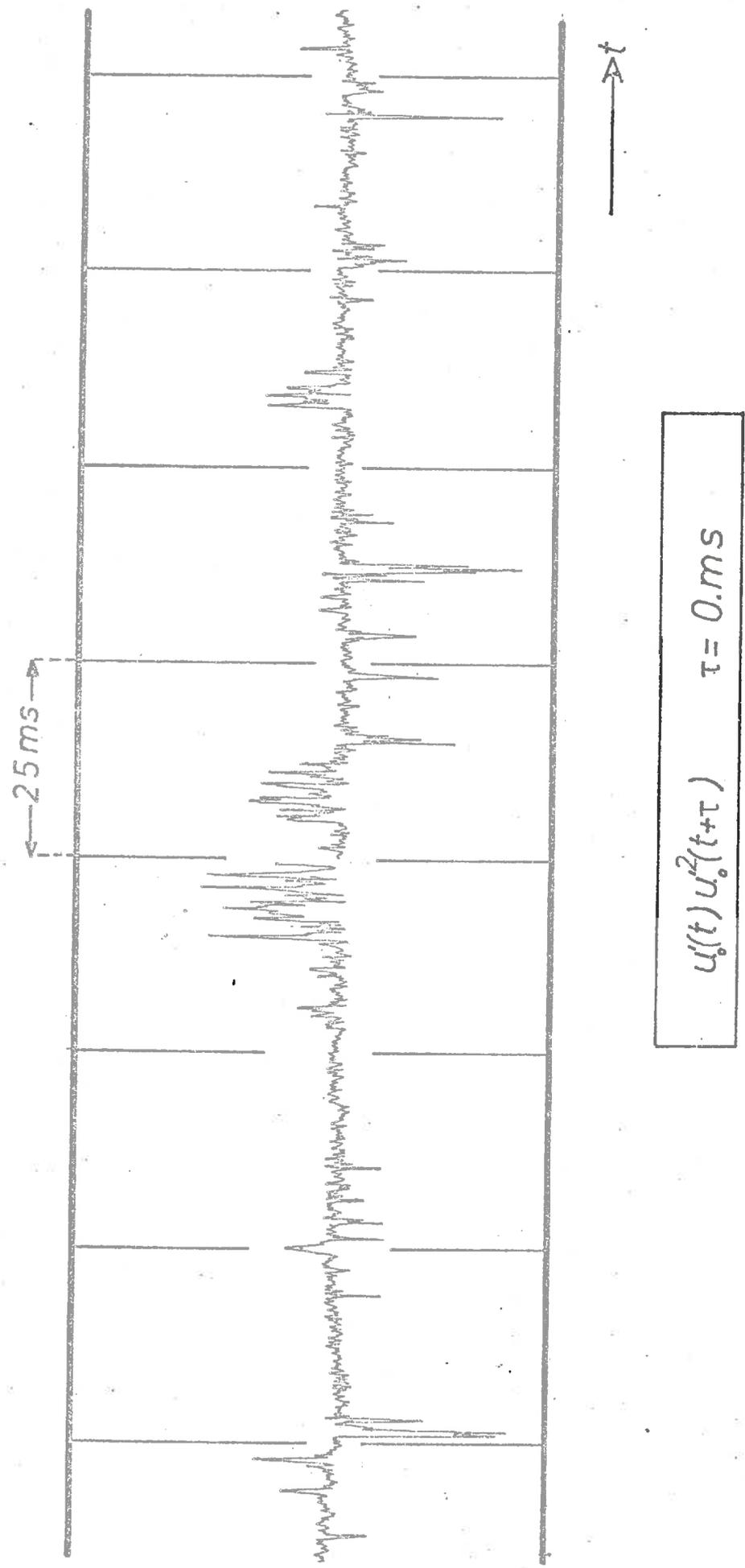


Fig. 4.5.8. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard nul. Courbe  $u_0(t) u_0^2(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

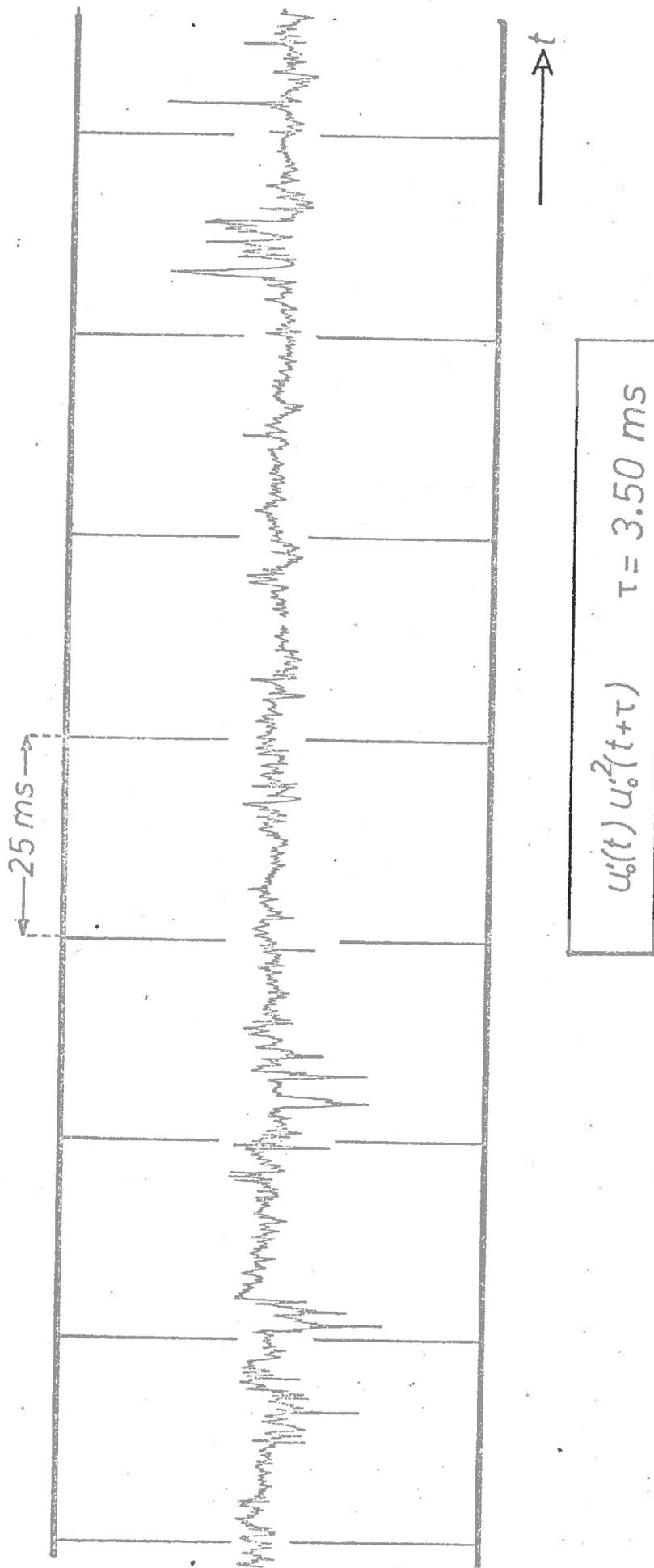


Fig. 4.5.9. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard  $\zeta = + 3,5 \text{ ms}$ . Courbe  $u_0(t) u_0^2(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

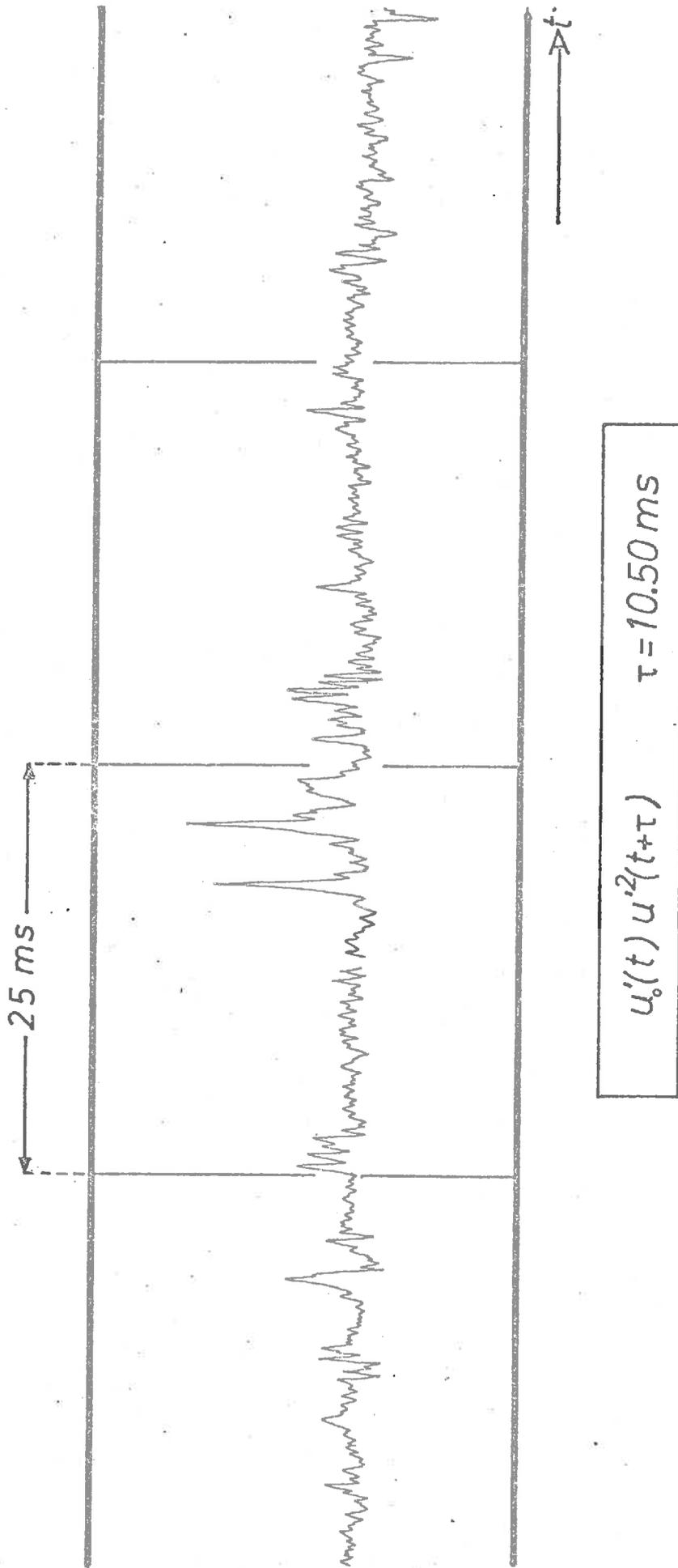
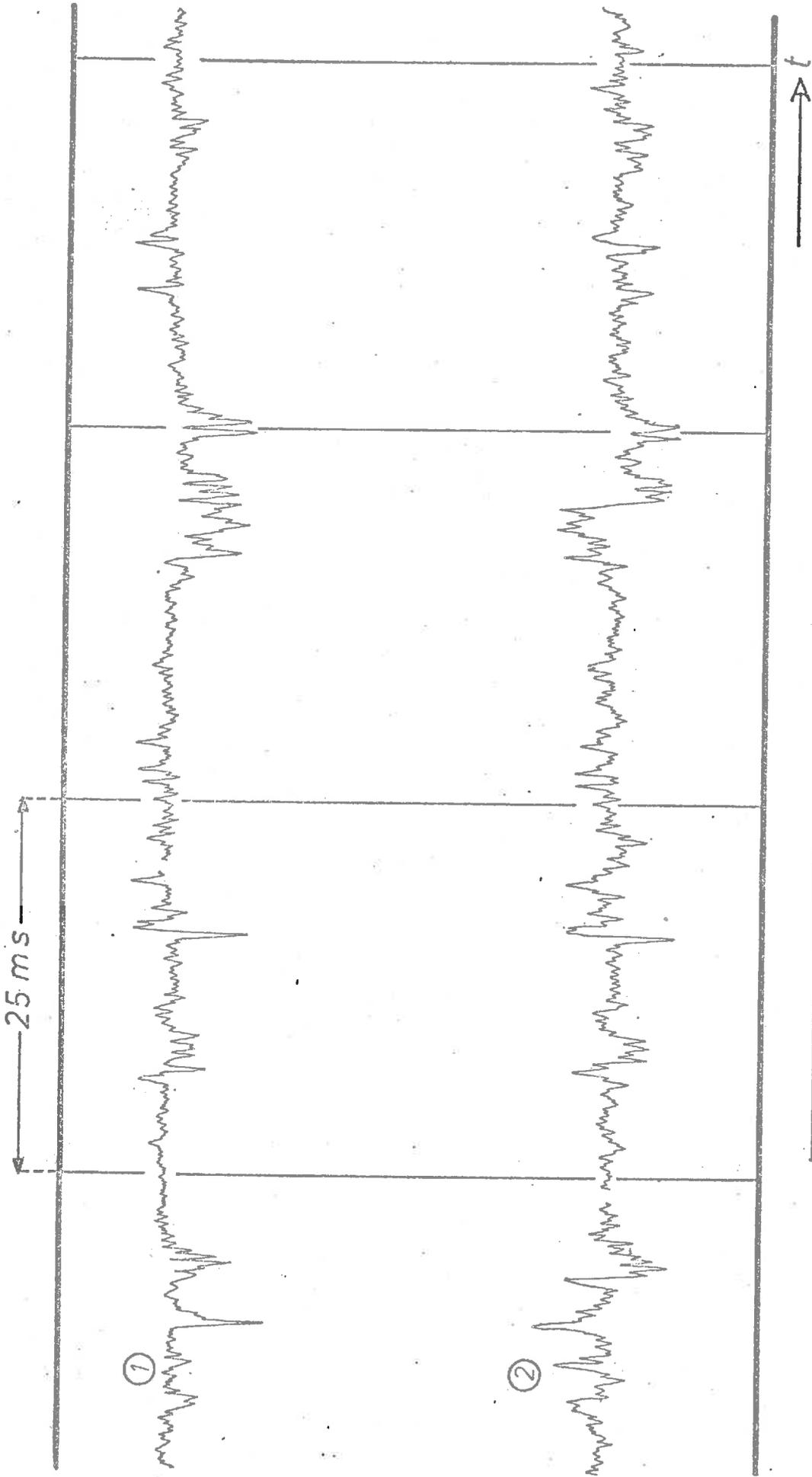


Fig. 4.5.10. Enregistrement de la corrélation triple temporelle pour un temps retard  $\zeta = + 10,5\text{ ms}$ . Courbe  $u'_0(t)u'_0(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$



①  $u'_0(t)u'^2(t+\tau)$       ②  $u'_0(t)u'(t+\tau)$        $\tau = 0.0\text{ms}$

Fig. 4.5.11. Comparaison des enregistrements des corrélations spatio-temporelles triple et double pour un temps retard nul. Courbes  $u'_0(t)u'^2(t+\zeta)$  et  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$ .

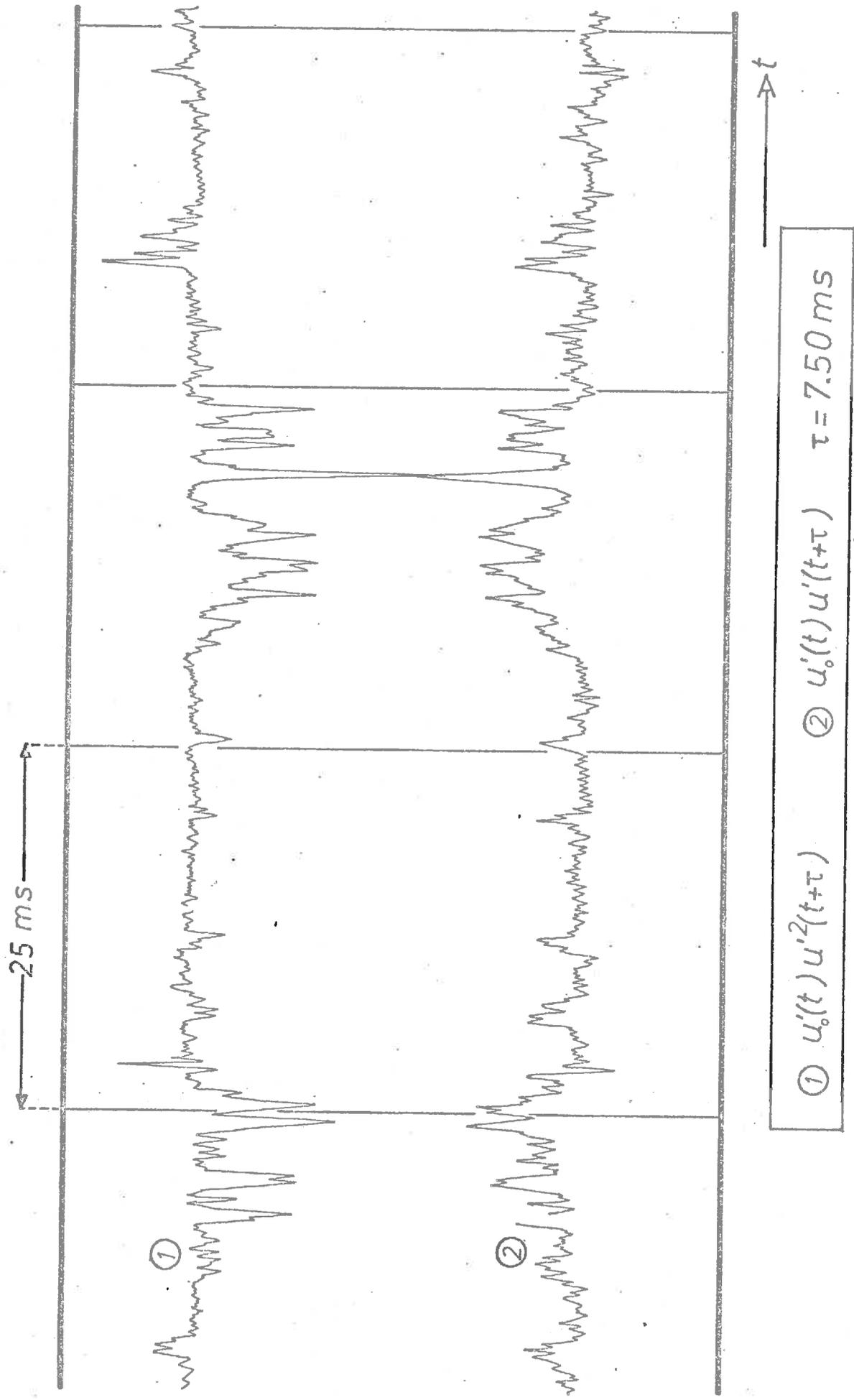


Fig. 4.5.12. Comparaison des enregistrements des corrélations spatio-temporelles triple et double pour un temps retard  $\zeta = 7,5 \text{ ms}$ . Courbes  $u'_0(t)u'^2(t+\zeta)$  et  $u'_0(t)u'(t+\zeta)$  en fonction du temps courant  $t$

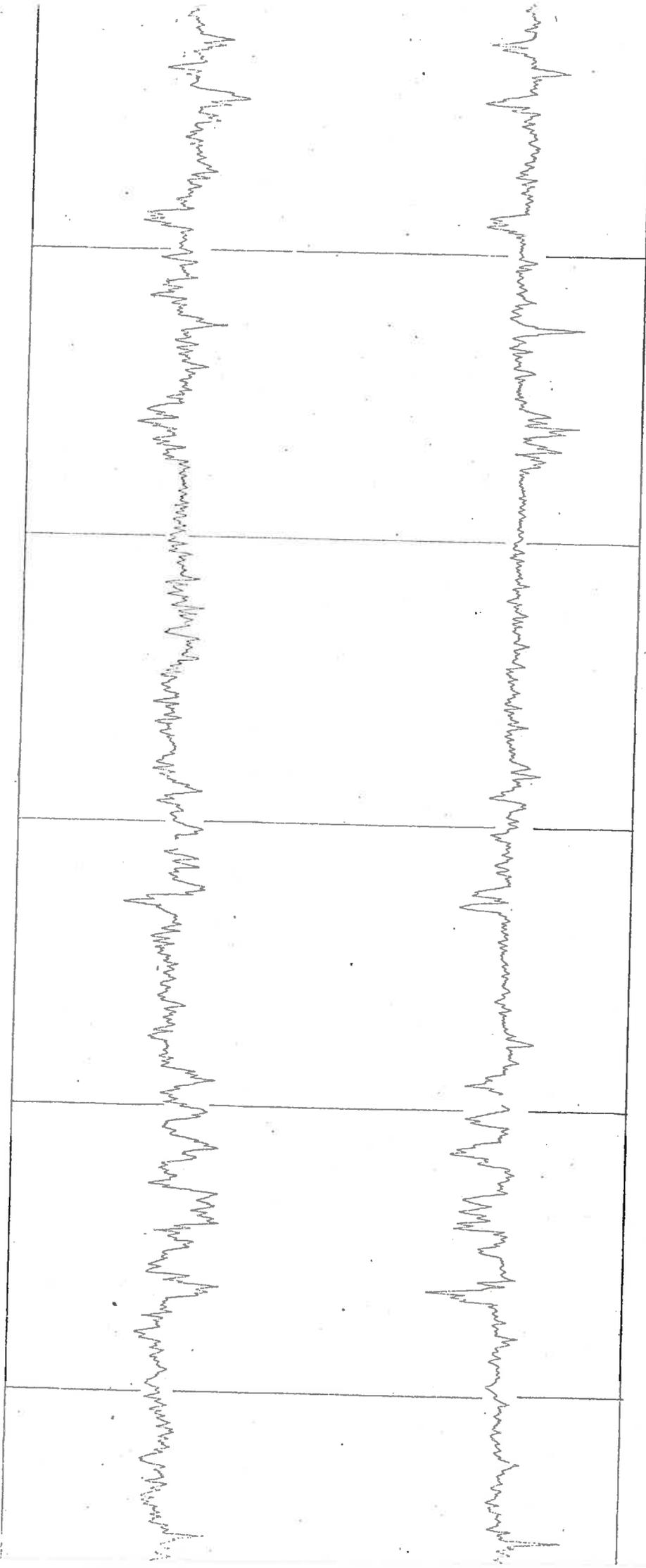


Fig. 4.5.13. Comparaison des enregistrements des corrélations spatio-temporelle triple et double pour un temps retard nul. Courbes  $u'_0(t)$   $u'^2(t+\xi)$  et  $u'_0(t)$   $u'(t+\xi)$  en fonction du temps courant  $t$ .

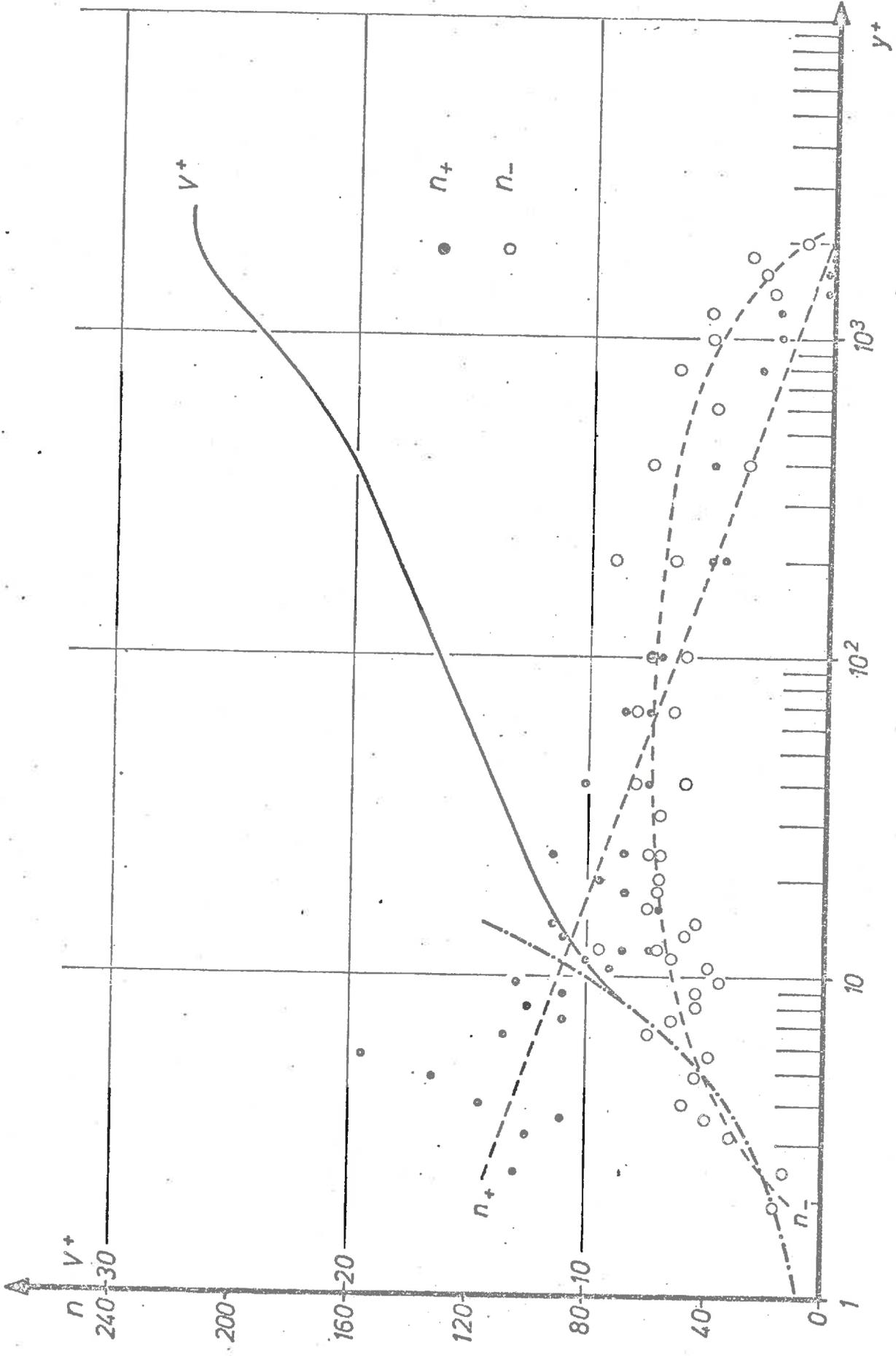


Fig. 4.5.14. Fréquence d'occurrence des grandes amplitudes positives et négatives en fonction de la distance à la paroi. Courbes  $n_+$ ,  $n_-$ ,  $V^+$  en fonction de  $y^+$

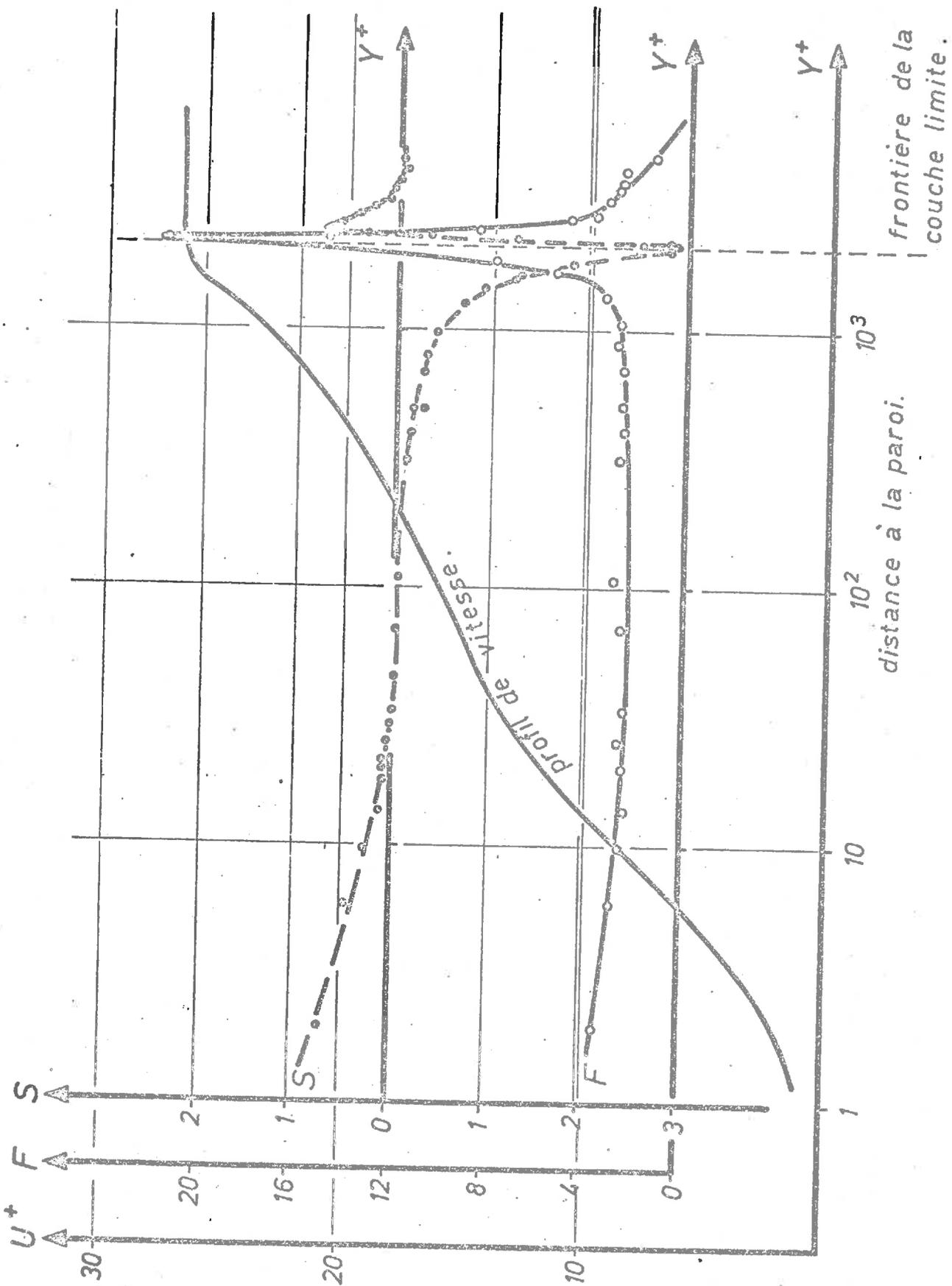


Fig. 4.5.15. Coefficients de dissymétrie et d'aplatissement en fonction de la distance à la paroi. Courbes S, F et  $U^+$  en fonction de  $y^+$

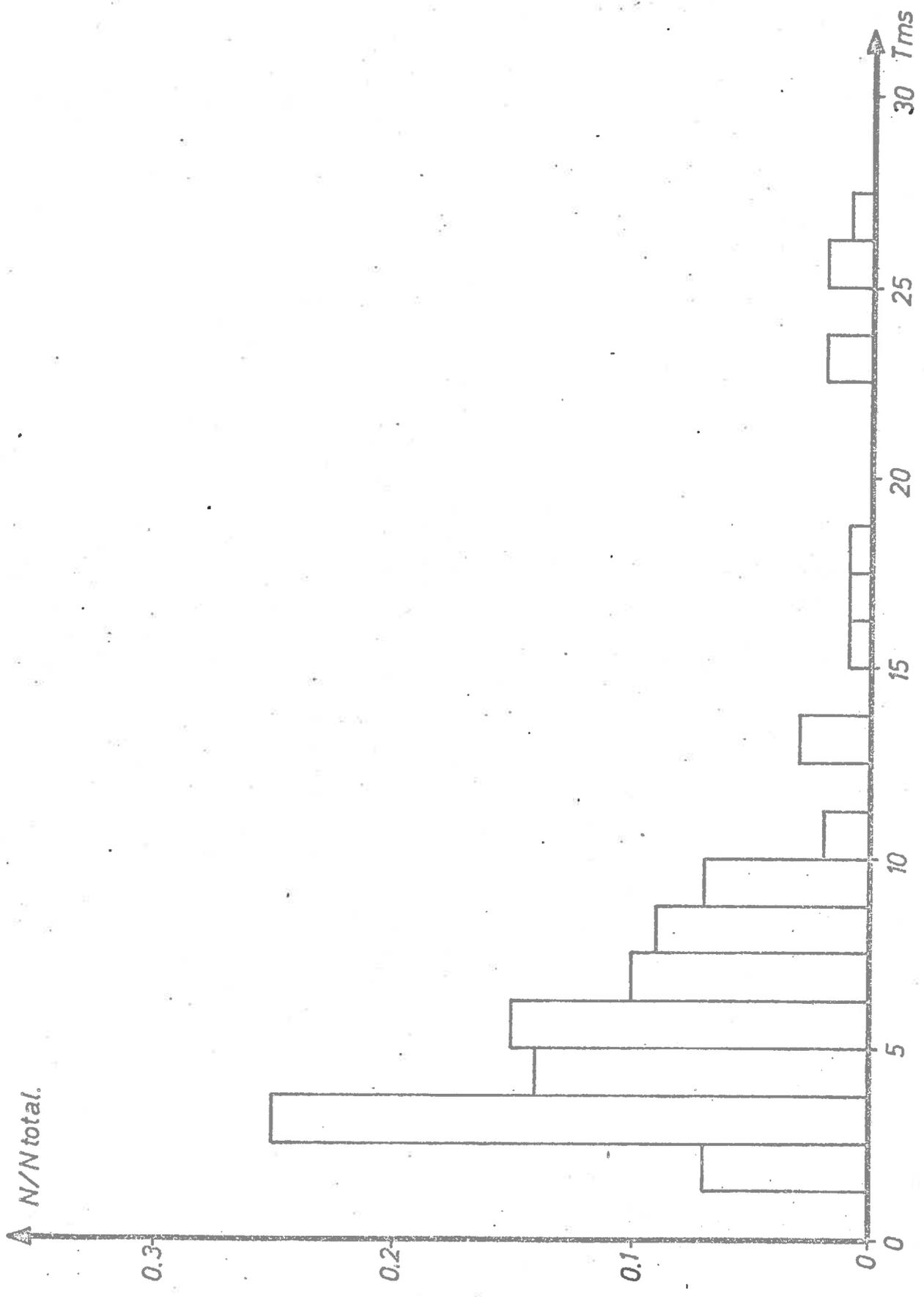


Fig: 4.5.16. Distribution d'intervalles de temps entre "bursts". Courbe  $N/N_{total}$  en fonction du temps  $t$

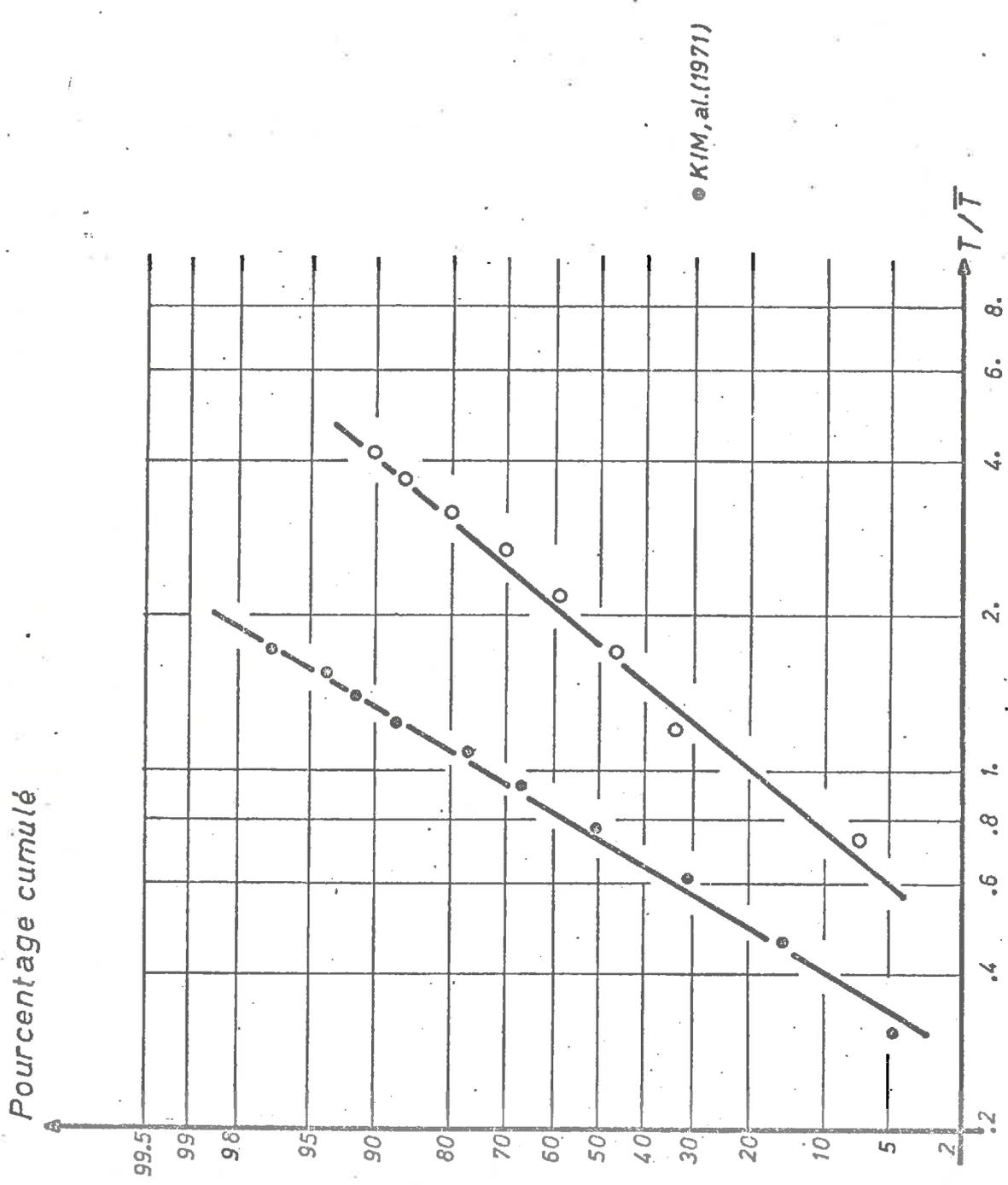


Fig. 4.5.17. Fonction de répartition des intervalles de temps entre "bursts".  
Courbe du pourcentage cumulé en fonction du rapport  $t/\bar{t}$ . Comparaison  
avec la loi log-normale et les travaux de KIM et al (1971)