

CRN/GSTS 86-02  
N. d'ordre 1607

# THESE

présentée

A L'U.E.R. DES SCIENCES DE LA MATIERE  
DE L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG

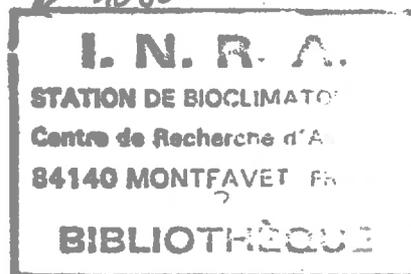
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES  
(Doctorat d'état)

par

Marcel RAFFY

6 OCT. 1986



AHTh6

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU PROBLEME INVERSE THERMIQUE EN TELEDETECTION  
SUR DES MILIEUX HOMOGENES ET HETEROGENES

Soutenue le 20 novembre 1985 devant la commission d'examen

M. G. MONSONEGO  
M. P. SABATIER  
M. F. BECKER  
M. G. CHAVENT  
M. A. PERRIER  
M. T. CARLSON

Président  
Rapporteur externe  
Rapporteur interne

Examineurs

1941  
STATE OF MICHIGAN  
DEPARTMENT OF REVENUE  
DIVISION OF TAXES  
LANSING

LISTE DES PROFESSEURS, MAITRES DE CONFÉRENCES  
DIRECTEURS ET MAITRES DE RECHERCHE C.N.R.S. ET I.N.S.E.R.M.

|                       |            |            |
|-----------------------|------------|------------|
| Président             | Professeur | H.DURANTON |
| Vice-Présidents       | Professeur | M.ROOS     |
|                       | Professeur | C.CONRAUX  |
|                       | M.de Rech. | A.CORET    |
| Présidents Honoraires | Professeur | G.OURISSON |
|                       | Professeur | P.KARLI    |
|                       | Professeur | F.MARCOUX  |
| Secrétaire Général    | Monsieur   | G.KIEHL    |

U.E.R. DES SCIENCES MÉDICALES

|                                  |             |                  |
|----------------------------------|-------------|------------------|
| U.E.R. des Sciences Médicales    | : Directeur | Jean-Marie MANTZ |
| U.E.R. des Sciences Biomédicales | : Directeur | Jean SCHWARTZ    |

Doyens honoraires : J.CALLOT - J.CLAVERT - F.ISCH - M.DORNER.

Professeurs honoraires : A.BASSET - P.BEYER - P. BUCK - J.CALLOT - J.CLAVERT - E.FORSTER - G.GREINER - A.JUNG - T.KAMMERER - P.MANDEL - H.METZGER - A.ROHMER - F.ROHMER - E.SCHNEEGANS - J.SEROR - F.STEPHAN - J.VEDRINE - R.VOEGTLIN - J.WARTER - G.WINCKLER.

Professeurs :

|                   |                                     |             |                                    |              |  |
|-------------------|-------------------------------------|-------------|------------------------------------|--------------|--|
| M.ADLOFF          | Chirurgie générale                  | J.HERAN     | Méd.et Chir.expérim.et comparée    | B.METZ       | Physiologie appliquée                  |
| N.APROSIO         | Anatomie et Organogénèse            | L.HOLLENDER | Chirurgie digestive et générale    | R.MINCK      | Bactériol. Virol. Immunol. gén.        |
| C.ARON            | Histologie                          | J.L.IMBS    | Pharmacologie                      | G.MORAND     | Chirurgie thoracique                   |
| L.ASCH            | Rhumatologie                        | M.IMLER     | Médecine interne                   | F.OBERLING   | Maladies du sang                       |
| A.BATZENSCHLAGER  | Anatomie pathologique               | F.ISCH      | Rééducation fonctionnelle          | J.C.OTTENI   | Anesthésiologie                        |
| M.BIENTZ          | Epidémiologie et prévention         | L.ISRAEL    | Psychiatrie d'Adultes              | E.PHILIPPE   | Anatomie pathologique                  |
| P.BLOCH           | Radiologie                          | D.JAECK     | Chirurgie générale                 | R.RENAUD     | Gynécologie et obstétrique             |
| R.BLOCH           | Pharmacologie                       | H.JAHN      | Néphrologie                        | P.REVILLE    | Endocrinol. métabol. et Nutrit.        |
| R.BOCKEL          | Hépatologie, Gastro-entérologie     | M.JESEL     | Rééducation fonctionnelle          | P.REYS       | Chir.gén. Hôp.L.Pasteur - Colmar       |
| Cl.BOLLACK        | Urologie                            | J.JUIF      | Pédiatrie et Puériculture          | J.RITTER     | Gynécol. et Obstétrique                |
| A.BRINI           | Ophthalmologie                      | P.KARLI     | Neurophysiologie                   | E.ROEGEL     | Pneumologie phthisiologie              |
| A.BRONNER         | Clinique ophtalmologique            | B.KELLER    | Clin.gynécol. et obstétricale      | J.V.RUCH     | Biologie médicale                      |
| F.BUCHHEIT        | Neurochirurgie                      | F.KEMPF     | Radiologie                         | Y.RUMPLER    | Embryol. et Morphol. générale          |
| G.BURGHARD        | Clin.et Prophylaxie de la tubercul. | I.KEMPF     | Orthopédie et Traumatologie        | A.SACREZ     | Cardiologie                            |
| P.CHAMBON         | Biochimie                           | T.T.KIEN    | Parasitologie                      | P.SAUVAGE    | Chirurgie infantile                    |
| J.CHAMBRON        | Physique biologique                 | R.KIENY     | Pathol. et Clin. Sémiol. chir.     | G.SAVA       | Chirurgie générale                     |
| M.CHAMPY          | Stomatologie                        | A.KIRN      | Virologie                          | G.SCHAFF     | Physiologie                            |
| A.CHAUMONT        | Méd.Légale et Méd.Sociale           | J.G.KORITKE | Anatomie normale                   | E.SCHVINGT   | Clin.chir.orthop. et traumat.d'adultes |
| M.COLLARD         | Clinique neurologique               | M.KREMER    | Parasitol. et pathologie tropicale | J.SCHWARTZ   | Pharmacol.et Médecine expérimentale    |
| C.CONRAUX         | Oto Rhino Laryngologie              | D.KURTZ     | Histologie                         | A.SIBILLY    | Clinique chirurgicale A                |
| P.DELLENBACH      | Gynécol. et Obstétrique             | G.LANG      | Orthop. et traumatologie           | H.SICK       | Anatomie et organogénèse               |
| M.DORNER          | Clin. Médicale B                    | Y.LE GAL    | Anatomie pathologique              | L.SINGER     | Clinique psychiatrique d'Adultes       |
| R.EBTINGER        | Psychiatrie infantile               | J.M.LEVY    | Pédiatrie, Génétique médicale      | D.STORCK     | Clinique médicale A                    |
| M.FABRE           | Histologie                          | J.M.MANTZ   | Réanimation médicale               | J.D.TEMPE    | Réanimation médicale                   |
| L.FINCKER         | Clin. médicale B Cardiologie        | F.MARCOUX   | Médecine du travail                | G.VINCENDON  | Biochimie                              |
| R.GANDAR          | Clin. gynécol. et obstétricale      | J.MARESCAUX | Histologie                         | A.WACKENHEIM | Radiologie                             |
| P.GAUTHIER-LAFAYE | Anesthésiologie                     | Ch.MARX     | Physiologie                        | J.P.WALTER   | Radiologie                             |
| J.P.GERHARD       | Ophthalmologie                      | S.MAYER     | Hématologie                        | P.WARTER     | Radiologie                             |
| J.GRENIER         | Chirurgie générale                  | J.MEHL      | Médecine du travail                | J.P.WEILL    | Gastro-entérol.et hydrol.thérapeutique |
| E.GROSSHANS       | Clin.dermatol.et Syphiligraphique   | G.METHLIN   | Physique biologique                | D.WILLARD    | Pédiatrie, Génétique Médicale          |
| P.HABEREY         | Physiologie                         |             |                                    | J.P.WITZ     | Chirurgie thoracique                   |

Professeurs conventionnés : G.LECLERC (Chim. org.) - A.PETROVIC (Physiologie).

Maitres de Conférences Agrégés :

|                  |                               |             |                               |                |                                     |
|------------------|-------------------------------|-------------|-------------------------------|----------------|-------------------------------------|
| S.BABIN          | Orthopédie et Traumatologie   | A.JAEGER    | Réanimation médicale          | J.M.MOSSARD    | Cardiologie et maladies vasculaires |
| P.BAREISS        | Médecine interne              | P.KEHR      | Orthopédie et traumatologie   | G.OBERT        | Virologie                           |
| P.BOURJAT        | Radiologie                    | R.KEILING   | Cancérologie                  | M.PATRIS       | Psychiatrie d'adultes               |
| C.BRECHENMACHER  | Cardiologie                   | J.KEMPF     | Biochimie                     | G.PAULI        | Pneumologie phthisiologie           |
| J.M.BROGARD      | Médecine interne              | G.KLOTZ     | Oto-rhino-laryngologique      | M.PINGET       | Endocrinologie et maladies métabol. |
| C.BURSZEJN       | Pédo-psychiatrie              | F.KUNTZMANN | Médecine interne              | M.ROOS         | Histologie                          |
| J.CINQUALBRE     | Urologie                      | J.M.LANG    | Maladies du sang              | J.P.SCHIEBER   | Physiologie                         |
| A.CONSTANTINESCO | Physique Biologique           | D.MAITROT   | Neurochirurgie                | G.SCHLAEDER    | Gynécologie et obstétrique          |
| J.P.DUPEYRON     | Anesthésiologie               | J.L.MANDEL  | Biochimie                     | J.L.SCHLIENGER | Médecine interne                    |
| B.EISENMANN      | Chirurgie cardio-vasculaire   | C.MARESCAUX | Neurologie                    | C.STOLL        | Pédiatrie, Génétique médicale       |
| J.FLAMANT        | Ophthalmologie                | J.MARESCAUX | Chirurgie générale            | J.TONGIO       | Radiologie                          |
| J.GEISERT        | Pédiatrie, Génétique médicale | J.MARK      | Biochimie                     | J.M.WARTER     | Neurologie                          |
| P.GERLINGER      | Embryologie                   | J.MESSER    | Pédiatrie, génétique médicale | A.WILK         | Stomatologie                        |
| G.HAUPTMANN      | Immunologie (opt. biol.)      | C.MEYER     | Chirurgie générale            |                |                                     |
| E.HEID           | Dermato-vénérologie           | H.MONTEIL   | Bactériologie                 |                |                                     |

Maître de Conférences Associé : J.H.JAEGER (Orthopédie).

Maîtres de Conférences Conventionnés : A.MALAN (Physiologie respiratoire) - J.J.VOGT (Thermophysiology)

Directeurs de Recherche : M.JACOB\* (Biochimie) - A.PETROVIC\* (Physiologie).

**Maîtres de recherche :**

A.M.AUBERTIN\* Virologie  
D.AUNIS\* Neurochimie  
J.P.CAZENAVE\* Hémostase  
A.EBEL † Neurochimie  
J.M.EGLY † Biologie moléculaire  
L.FREYSZ † Neurochimie  
M.GAUTHERIE † Thermologie biomédicale  
G.GOMBOS † Neurochimie

\* I.N.S.E.R.M. † C.N.R.S.

K.HAFFEN-STENGER † Endocrinologie  
G.LECLERC † Chimie organique  
G.REBEL † Neurochimie  
R.RECHENMANN\* Biophys. des rayonnements  
L.SARLIEVE\* Neurochimie  
M.SENSENBRENNER † Neurochimie  
J.STEVENIN\* Biologie moléc.et cellulaire

C.STOCK-DAMGE\* Physiologie  
J.VELLY+ Pharmacologie  
M.VERGNES\* Neurophysiologie  
N.VIRMAUX-COLIN † Neurochimie  
J.J.VOGT † Thermophysiology  
A.WAKSMAN † Neurochimie

## U.E.R. D' ODONTOLOGIE

Directeur Robert FRANK

**Professeurs :**

M.DOCQ Odontologie conservatrice, endodontie  
R.FRANK Sciences biologiques (Biochimie), Immunologie, Histologie, Embryologie, Génétique,  
Anatomie Pathologique, Bactériologie, Pharmacologie.  
P.KLEWANSKY Parodontologie

J.LITZLER Prothèses (prothèse conjointe, adjointe  
partielle, prothèse complète, prothèse  
maxillo-faciale  
J.L.LACOSTE Orthopédie dento-faciale

**Professeurs de premier grade :**

C.ALLEMANN Odontologie conserv., endodontie  
M.BASTIAN Prothèses (prothèse conjointe, adj.  
partielle, prothèse complète,  
prothèse maxillo-faciale  
C.BOLENDER Orthopédie dento-faciale  
A.COMTE Odontologie conserv., endodontie

R.HAAG Chirurgie buccale, pathol. et thérap.,  
Anesthésiologie et réanimation  
M.LANGER Prothèses (prothèse conjointe, adj.  
partielle, prothèse complète,  
prothèse maxillo-faciale  
idem  
M.LEIZE

P.NICOLAS Chirurgie buccale, pathol. et thérap.,  
Anesthésiologie et réanimation  
J.J.ROTH Parodontologie  
A.SCHLIENGER Prothèses (prothèse conjointe, adjointe  
partielle, prothèse complète, prothèse  
maxillo-faciale  
Pédodontie  
J.SOMMERMATER

**Professeurs de deuxième grade :**

P.CAHEN Prévention, épidémiologie, économie de la Santé,  
Odontologie légale  
J.P.CHARLIER Orthopédie dento-faciale

B.KAESS Chirurgie buccale, pathol. et thérap.,  
Anesthésiologie et réanimation  
H.TENENBAUM Parodontologie

Maître de recherche : I.N.S.E.R.M. : A.BELCOURT (Odontologie)

## U.E.R. DES SCIENCES PHARMACEUTIQUES

Directeur Alexis GAIRARD

Doyens honoraires : P.DUQUENOIS - M.HASSELMANN - G.DIRHEIMER - P.METAIS.

Professeurs honoraires : P.CORDIER - J.P.EBEL - G.GAZET du CHATELIER - M.HASSELMANN - P.JAEGER - J.SCHREIBER

**Professeurs :**

R.ANTON Pharmacognosie  
J.J.BEFORT Biologie cellulaire  
R.CARBIENER Botanique  
G.DIRHEIMER Toxicologie  
G.FERARD Biochimie  
J.L.FRESLON Pharmacodynamie  
A.GAIRARD Physiologie  
D.GERARD Physique et biophysique  
M.GOELDNER Chimie organique  
C.HASSELMANN Chimie analytique

L.JUNG Pharmacie chimique  
J.C.KOFFEL Pharmacie chimique  
H.LAMI Mathématiques  
Y.LANDRY Pharmacologie  
C.LAPP Chimie générale et minérale  
P.LAUGEL Chimie analytique  
G.LAUSTRIAT Physique  
A.LUGNIER Toxicologie  
J.MALGRAS Immunologie

C.MATHIS Pharmacie galénique  
P.METAIS Biochimie  
B.PESSON Parasitologie  
P.POINDRON Virologie  
A.STAHL Biochimie pharmaceutique  
A.STAMM Pharmacie galénique  
J.C.STOCLET Pharmacodynamie  
D.VIDON Bactériologie  
C.G.WERMUTH Chimie organique

Professeur émérite : J.SCHREIBER (Chimie organique).

Chargé de cours : M.KRISTENSEN (Hygiène, nutrition et diététique).

Professeur associé : R.MILLER (Pharmacodynamie).

Professeur conventionné : R.HEINTZ (Pharmacocinétique) - B.ROTH-SCHECHTER (Pharmacodynamie).

Maître de recherche : I.N.S.E.R.M. : J.BIETH (Enzymologie).

## U.E.R. DES SCIENCES HUMAINES

U.E.R. de Géographie

: Directeur Henri VOGT

U.E.R. des Sciences du Comportement et de l'Environnement : Directeur Philippe ROPARTZ

Professeurs honoraires : E.JUILLARD - R.RAYNAL.

**Professeurs :**

J.M.AVENARD Géographie  
L.LEGRAND Sciences de l'éducation  
P.LIMOZIN Géographie  
P.MICHEL Géographie

A.MOLES Psychologie sociale  
H.NONN Géographie  
H.REYMOND Géographie

A.TABOURET-KELLER Psychologie  
M.TARDY Psycho-pédagogie  
J.TRICART Géographie  
H.VOGT Géographie physique

Maître de Conférences Conventionnés : J.P.BAUER (Psycho-pédagogie).

Directeur de recherche : C.N.R.S. : S.RIMBERT (Géographie).

Maître de recherche : C.N.R.S. : J.P.MARTIN (Géographie).

## U.E.R. DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

Directeur Michel DEVOLUY (Chargé de l'intérim)

Doyens honoraires : P.CHAMLEY - J.P.FITOUSSI - R.DOS SANTOS FERREIRA - J.L.GAFFARD.

Professeurs honoraires : A.CHABERT - P.CHAMLEY.

Professeurs :

|           |                      |                       |                      |             |                     |
|-----------|----------------------|-----------------------|----------------------|-------------|---------------------|
| P.ARTZNER | Mathématiques        | R.DOS SANTOS FERREIRA | Sciences Economiques | J.J.OBRECHT | Sciences de gestion |
| F.BILGER  | Sciences Economiques | J.J.DURAND            | Sciences Economiques | P.PONCET    | Sciences de gestion |
| P.COHNDET | Sciences Economiques | G.KOENIG              | Sciences Economiques | J.THEPOT    | Sciences de gestion |

Professeurs émérites : A.CHABERT (Sciences Economiques) - P.CHAMLEY (Sciences Economiques).

Professeurs associés : W.HILDENBRAND - J.P.VIAL.

Professeur conventionné : R.UHRICH (Ec.rég. et europ.).

Chargés de conférences : J.ARROUS - R.ERBES.

## U.E.R. DES SCIENCES EXACTES

|  |                              |
|--|------------------------------|
| Mathématiques                                  | : Directeur Daniel BERNARD   |
| Sciences de la Matière                         | : Directeur Henri BENOIT     |
| Sciences de la Vie et de la Terre              | : Directeur Thierry JUTEAU   |
| Sciences du Comportement et de l'Environnement | : Directeur Philippe ROPARTZ |
| Ecole d'Application des Hauts Polymères        | : Directeur Morand LAMBLA    |
| Ecole Nationale Supérieure de Chimie           | : Directeur Marc DAIRE       |
| Observatoire                                   | : Directeur Alphonse FLORSCH |
| Physique du Globe                              | : Directeur Roland SCHLICH   |
| Ecole Nationale Supérieure de Physique         | : Directeur Gilbert SUTTER   |
| I.U.T.   | : Directeur Michel GENEVAUX  |

Doyens honoraires : P.LACROUTE - J.H.VIVIEN - G.MILLOT.

Professeurs honoraires : J.BRENET - Mme M.BRINI - J.BYE - H.CARTAN - C.CHABAUTY - A.CHRETIEN - A.DELUZARCHE - J.DENY - Mme A.GAGNIEU - Mme S.GILLET - G.GLAESER - S.GORODETZKY - L.HIRTH - R.HOCART - P.JOLY - P.LACROUTE - R.LECOLAZET - G.LEMEE - P.L'HERITIER - A.LICHNEROWICZ - A.MAILLARD - G.MILLOT - L.NEEL - G.REEB - A.ROCHE - R.ROHMER - J.P.ROTHE - L.SACKMANN - Ch.SADRON - H.SAUCIER - F.SCHALLER - F.STUTINSKY - H.VILLAT - J.H.VIVIEN - Et.WOLFF - J.WUCHER - B.WURTZ.

Professeurs :

|                 |                                |                     |                                   |                    |                                     |
|-----------------|--------------------------------|---------------------|-----------------------------------|--------------------|-------------------------------------|
| A.ACKER         | Astronomie                     | P.FELTZ             | Physiologie Animale               | J.MARTINET         | Mathématiques                       |
| J.P.ADLOFF      | Chimie nucléaire               | X.FERNIQUE          | Mathématiques                     | P.MIALHE           | Physiologie animale                 |
| R.ARMBRUSTER    | Physique                       | J.G.FISCHER         | Chimie                            | A.MICHARD          | Géologie                            |
| P.ARTZNER       | Mathématiques                  | D.FOATA             | Mathématiques                     | M.MIGNOTTE         | Informatique                        |
| V.AVANISSIAN    | Analyse supérieure             | E.FOLLENIUS         | Zoologie                          | P.MIRABEL          | Chimie                              |
| G.BARBANÇON     | Mathématiques                  | J.J.FRIED           | Mécanique des Fluides             | G.MONSONEGO        | Physique théorique                  |
| F.BECKER        | Physique mathématique          | D.FROELICH          | Chimie générale et chimie phys.   | B.MORIN            | Mathématiques I                     |
| N.BEFORT        | Biochimie                      | A.FUCHS             | Mécanique rationnelle             | P.NANOPOULOS(dét.) | Probabilités et Statistiques        |
| G.BELLIARD      | Botanique                      | J.C.GALL            | Géologie                          | B.OBRECHT          | Mécanique                           |
| C.BENEZRA       | Dermato-chimie                 | A.GALLMANN          | Physique                          | J.OSBORN           | Chimie                              |
| D.BENNEQUIN     | Mathématiques                  | F.GAUTIER           | Physique                          | E.OSTERTAG         | Electr. et Electrotechnique         |
| H.BENOIT        | Physicochimie macromol.        | R.GERARD            | Mathématiques                     | L.OTTEN            | Pathologie moléculaire végétale     |
| P.BENVENISTE    | Physiologie végétale           | A.GIRAUDEAU         | Chimie physique (IUT)             | G.OURISSON         | Chimie                              |
| D.BERNARD       | Méth.math.de la physique       | C.GODBILLON         | Mathématiques                     | J.M.PAULUS         | Chimie générale                     |
| J.C.BERNIER     | Chimie générale                | A.GOLTZENE          | Optique, phys.atom. et moléc.     | J.P.RAMIS          | Mathématiques générales             |
| J.BONNIN        | Géophysique interne            | M.GOUNOT            | phys. du sol et cristallographie  | P.RICHARD          | Physiologie animale                 |
| Y.BOULANGER     | Biochimie                      | M.GROSMANN          | Botanique                         | J.J.RIEHL          | Chimie                              |
| J.F.BOUTOT      | Mathématiques                  | M.GROSS             | Physique                          | P.RIMMELIN         | Chimie organique (IUT)              |
| J.BROSSAS       | Chimie macromolécul.           | Y.GUEGUEN           | Chimie physique                   | C.ROBERT           | Physique                            |
| R.BROUILLARD    | Chimie org.et chimie analyt.   | C.HIRTH             | Géophysique interne               | P.ROPARTZ          | Psycho-physiologie                  |
| C.BURGGRAF      | Minéralogie                    | J.C.HUBERT          | Chimie organique                  | J.ROUX             | Botanique                           |
| H.BURNAGE       | Mécanique des Fluides          | B.JARRY             | Microbiologie                     | G.SCHIFFMANN       | Mathématiques                       |
| M.CARA          | Géophysique Interne            | C.JASCHEK           | Biochimie génétique               | A.SCHMITT          | Physique                            |
| H.CARAYOL       | Mathématiques                  | G.JONARD            | Astronomie                        | P.SCHMITT          | Psycho-physiol.et physiol.du comp.  |
| R.CERF          | Physique générale              | J.P.JOUANOLOU(dét.) | Virologie                         | J.P.SCHWING        | Chimie                              |
| P.CHARTIER      | Chimie                         | F.JUNDT             | Mathématiques                     | M.J.SCHWING        | Chimie physique                     |
| P.CHEVALLIER    | Physique                       | T.JUTEAU            | Phys.nucl.et corpusc.et théo.phys | J.C.SENS           | Phys.nucl.et corpusc.et théor.phys. |
| A.CLAUSS        | Chimie                         | C.KEDINGER          | Minéralogie                       | M.SIESKIND         | Physique                            |
| A.COCHÉ         | Physique nucléaire             | A.KIENEMANN         | Biochimie                         | G.SOLLADIE         | Chimie organique                    |
| M.DAIRE         | Chim.phys.indus.et Sc.des Mat. | R.KIRSCH            | Chimie appl. et génie chimique    | J.SOMMER           | Chimie appliquée                    |
| H.DANAN         | Phys.atom.et phys.du solide    | F.LACROUTE          | Zoologie                          | S.SORIN            | Mathématiques                       |
| E.DANIEL        | Physique expérimentale         | J.C.LAFON           | Biologie végétale                 | G.SUTTER           | Physique électronique               |
| M.DAUNE         | Biophysique                    | A.M.LAMBERT         | Informatique appliquée            | C.TANIELAN         | Chimie appl.et chimie des matériaux |
| J.DEHAND        | Chimie générale                | M.LAMBLA            | Biologie                          | Y.TARDY            | Géologie                            |
| J.DEMUYNCK      | Chimie organique               | G.LEBEURIER         | Chimie générale                   | J.TERRISSE         | Chimie                              |
| J.P.DESCLÉS     | Inform.fond.et appl.(Univ.II)  | J.M.LEHN            | Microbiologie                     | J.J.THIEBOLD       | Biologie animale                    |
| J.F.DUFOURD     | Inform.fond.et appl.           | J.L.LEIBENGUTH      | Chimie (Collège de France)        | D.VIAUD            | Mathématiques                       |
| G.DUNOYER de    | Géologie                       | H.LEISMANN          | Chimie appl. et chimie des matér. | R.VOLTZ            | Physique théorique                  |
| SEGONZAC (dét.) | Botanique                      | J.LEITE-LOPES       | Chimie                            | J.H.WEIL           | Biochimie                           |
| H.DURANTON      | Biochimie                      | P.LEMOINE           | Phys. nucl. et corpusculaire      | G.WEILL            | Physique                            |
| J.P.EBEL        | Biochimie                      | M.LEROY             | Chimie physique (IUT)             | R.WEISS            | Chimie                              |
| J.P.EBERHART    | Minéralogie                    | J.C.LIONS           | Chimie                            | P.L.WENDEL         | Physique                            |
| B.EHRESMANN     | Biochimie                      | F.LOOR              | Zoologie et Ecologie              | B.WILL             | Psycho-physiologie                  |
| V.ERN           | Physique                       | J.LUCAS             | Immunologie                       | C.WINTER           | Chimie                              |
| J.FARAUT        | Mathématiques                  | D.MAGNAC            | Géologie                          | C.WIPPLER          | Physicoch.des Hauts Polymères       |
| P.FEDERLIN      | Chimie                         |                     | Physique                          |                    |                                     |

Professeurs émérites : G.GLAESER (Math.) - L.HIRTH (Microbiologie) - R.LECOLAZET (Phys. du Globe) - G.MILLOT (Géologie Paléontologie).

Professeur adjoint : J.SITTLER (Géologie).

**Professeurs associés :**

|              |                                  |            |                                     |                 |               |
|--------------|----------------------------------|------------|-------------------------------------|-----------------|---------------|
| Z.AKCASU     | Optique physique                 | J.GROVES   | Chimie minérale                     | L.MEZZA-BASSO   | Biochimie     |
| K.BHATT      | Physique nucléaire théorique     | T.HOFMOKL  | Physique nucléaire et corpusculaire | J.L.MORAN-LOPEZ | Physique      |
| P.BIRD       | Chimie minérale                  | A.KORANYI  | Mathématiques                       | I.SATAKE        | Mathématiques |
| H.BJELKHAGEN | Electronique et Electrotechnique | G.LETTA    | Mathématiques                       | H.SCHMIED       | Physique      |
| C.CAMACHO    | Mathématiques                    | A.MELFI    | Géochimie                           | H.UMEMURA       | Mathématiques |
| P.CARSKY     | Chimie                           | P.MEYRUEIS | Robotique productive                | H.YEH           | Géochimie     |
| M.CONSTANTIN | Chimie organique                 |            |                                     |                 |               |

**Professeurs conventionnés :** P.DEJOURS (Physiol.respir.) - Y.NAKATANI (Chimie) - P.SMIGIELSKI (Physique).

**Astronomes adjoints :** A.FLORSCH - A.FRESNEAU (dét.) - M.JASCHEK.

**Physiciens adjoints (Physique du Globe) :** P.HOANG TRONG (Géophysique int.) - R.MONTIGNY (Géophysique int.).

**Directeurs de recherche C.N.R.S. :**

|                  |                                 |             |                                 |                   |                                |
|------------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| P.ALBRECHT       | Chimie                          | J.LAHAYE    | Coordination et catalyse        | A.SKOULIOS        | Physicochimie macromoléculaire |
| J.F.BIELLMANN    | Chimie                          | G.MAIRE     | Chimie                          | M.VAN REGENMORTEL | Virologie                      |
| S.CANDAU         | Physique                        | J.MARCHAL   | Physicochimie macromoléculaire  | R.VAROQUI         | Physicochimie macromoléculaire |
| P.DEJOURS        | Physiologie respiratoire        | A.J.P.MEYER | Physique des solides            | A.VELLARD         | Chimie moléculaire             |
| M.FRANCK-NEUMANN | Chimie organique                | P.A.MEYER   | Mathématiques                   | R.ZANA            | Physicochimie macromoléculaire |
| J.HOFFMANN       | Biologie animale                | A.PORTE     | Biologie cellulaire             | W.S.ZHOU          | Astr. environnement planétaire |
| A.KNIPPER        | Physique nucl. et corpusculaire | P.REMPF     | Physicochimie macromoléculaire  | A.ZUKER           | Physique théorique             |
| A.KOVACS         | Physicochimie macromoléculaire  | R.SCHLICH   | Géophysique marine              |                   |                                |
|                  |                                 | P.SIFFERT   | Physique nucl. et corpusculaire |                   |                                |

**Maîtres de recherche C.N.R.S. :**

|                |                                       |                |                                     |                           |                                     |
|----------------|---------------------------------------|----------------|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| J.Ch.ABBE      | Physicoch.des interact.et interfaces  | H.GIRARD       | Physiologie respiratoire            | L.PINCK                   | Virologie                           |
| J.J.ANDRE      | Physicochimie macromoléculaire        | P.GRAMAIN      | Physicochimie macromoléculaire      | P.POIX                    | Chimie                              |
| E.ASLANIDES    | Physique nucléaire et corpusculaire   | J.B.GRUN       | Physique                            | J.POUYET                  | Biophysique                         |
| H.BARREAU      | Philo.,Epistémol.Hist.des Sc.et Tech. | H.GUILLEY      | Biochimie, Biologie végétale        | B.REES                    | Chimie                              |
| F.BECK         | Physique nucléaire et corpusculaire   | F.HAAS         | Physique nucléaire et corpusculaire | J.REINBOLT                | Biochimie                           |
| G.BECK         | Biochimie                             | J.HERZ         | Physicochimie macromoléculaire      | P.REMY                    | Biochimie                           |
| J.P.BECK       | Physiologie                           | F.HIBOU        | Physique nucléaire                  | K.RICHARDS                | Virologie                           |
| J.P.BEHR       | Chimie                                | L.HILAIRE      | Chimie physique                     | J.RICHERT                 | Physique nucléaire théorique        |
| M.BENARD       | Chimie quantique                      | G.JENNER       | Chimie                              | J.RINGEISSEN              | Physique                            |
| H.BRAUN        | Physique nucléaire et corpusculaire   | G.KAUFMANN     | Chimie                              | O.ROHFRIITSCHE            | Phytomorphogénèse                   |
| P.BRAUNSTEIN   | Chimie                                | G.KEITH        | Biochimie                           | J.P.ROTH(à Dir.Inst.Rech) | Physicochimie macromoléculaire      |
| G.BURKARD      | Biochimie végétale                    | H.KESSLER      | Matériaux inorganiques              | J.P.SAUVAGE               | Chimie physique                     |
| M.C.CADEVILLE  | Physique des solides                  | J.P.KINTZINGER | Chimie                              | R.SCHANTZ                 | Physiologie végétale                |
| H.CALLOT       | Chimie                                | B.KOCH         | Physiologie                         | F.SCHEIBLING              | Physique nucléaire et corpusculaire |
| F.CANDAU       | Physicochimie macromoléculaire        | E.KOCHANSKI    | Struct.et dynam.molécul.            | F.SCHUBER                 | Chimie organique                    |
| J.CHEVELLIER   | Physique nucléaire et corpusculaire   |                | Chimie de coordination              | N.SCHULZ                  | Physique nucléaire et corpusculaire |
| M.R.CHEVALLIER | Biologie cellulaire                   | M.LAGUEUX      | Bio organismes/dév.                 | C.SCHWAB                  | Physique                            |
| N.CLAUER       | Géologie                              | B.LANG         | Cristallographie                    | O.SCRIVENER               | Sc. phys. pour l'Ingénieur          |
| J.P.COFFIN     | Physique nucléaire et corpusculaire   | J.LANG         | Physicochimie macromoléculaire      | R.SELTZ                   | Physique nucléaire et corpusculaire |
| A.CORET        | Physique                              | P.LAURENT      | Physiol. comparée des régulations   | B.SIFFERT                 | Coordination et catalyse            |
| M.CROISSIAUX   | Physique nucléaire et corpusculaire   | C.LERAY        | Physiol. comparée des régulations   | P.SIMPSON                 | Bio organismes/dév.                 |
| E.CROUSE       | Biochimie végétale                    | R.LEVY         | Physique                            | C.SITTLER                 | Géologie                            |
| C.DECKER       | Chimie théorique et macromoléc.       | F.LEYENDECKER  | Chimie                              | A.SOLLADIE                | Chimie                              |
| D.DIDIER       | Physique nucléaire et corpusculaire   | J.L.LODAY      | Mathématiques                       | M.E.STOECKEL              | Biol. des interactions cellulaires  |
| J.DOUBINGER    | Géologie                              | B.LOTZ         | Physicochimie macromoléculaire      | C.STRAZIELLE              | Physicochimie macromoléculaire      |
| F.DURST        | Physiologie végétale                  | B.LUU          | Chimie organique                    | M.SUFFERT                 | Physique nucléaire et corpusculaire |
| R.EHRBURGER    | Coordination et catalyse              | A.MALAN        | Physiologie respiratoire            | J.C.THIERRY               | Chimie                              |
| S.E.L.KOMOSS   | Physique                              | E.MARCHAL      | Physicoch. molécul.et macromol.     | K.TRAORE                  | Physicochimie atomique et ionique   |
| J.FLECK        | Virologie                             | P.MARTINOTY    | Sc. Physique pour l'Ingénieur       | J.P.VIVIEN                | Physique nucléaire et corpusculaire |
| B.FRANÇOIS     | Physicochimie macromoléculaire        | J.C.MERDINGER  | Physique nucléaire                  | P.WAGNER                  | Physique nucléaire et corpusculaire |
| J.FRANÇOIS     | Physicochimie macromoléculaire        | C.MIOSKOWSKI   | Chimie                              | G.WALTER                  | Physique nucléaire et corpusculaire |
| E.FRANTA       | Physicochimie moléculaire             |                |                                     | F.WEBER                   | Géologie                            |
| J.M.FRIEDT     | Physicoch.des interact.et interfaces  | D.MORAS        | Chimie                              |                           |                                     |
| B.FRITIG       | Virologie                             | T.MULLER       | Physique nucléaire et corpusculaire | J.P.WENIGER               | Zoologie                            |
| R.FUCHS        | Biophysique                           | G.MUNSCHY      | Physique                            | M.WESTPHAL                | Géophysique                         |
| J.C.GALLIN     | Physicochimie macromoléculaire        | E.PAPIREY      | Chimie théor. et macromol.          | J.C.WITTMANN              | Chimie théor. et macromol.          |
| Y.GALLOT       | Physicochimie macromoléculaire        | H.PAQUET       | Géologie                            | J.WITZ                    | Biologie cellulaire                 |
| J.GANGLOFF     | Biochimie                             | M.PATY         | Physique nucléaire et corpusculaire | R.WOLFF                   | Chimie                              |
| J.P.GERBER     | Physique nucléaire et corpusculaire   | P.PEVET        | Zoologie                            | J.P.ZIELINGER             | Physique                            |
| R.GIEGE        | Biochimie                             | C.PICOT        | Physicochimie macromoléculaire      | L.ZILLIOX                 | Mécanique des Fluides               |
| C.GIGOT        | Virologie                             |                |                                     |                           |                                     |

## REMERCIEMENTS

Pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail et pour leur présence à ce jury, je remercie très vivement :

- Le Professeur P. SABATIER qui m'a accueilli à ses stimulantes réunions annuelles (RCP 264, Montpellier) sur les problèmes inverses. Les travaux sur la formulation des problèmes inverses généraux et en géophysique m'ont beaucoup appris.
- Le Professeur G. CHAVENT rencontré à ces réunions et dont les articles sur les problèmes inverses m'étaient bien connus.
- Le Professeur A. PERRIER dont les importants travaux sur la modélisation de l'interface sol-atmosphère m'ont beaucoup apporté.
- Le Professeur T. CARLSON dont les travaux sont souvent complémentaires à celui-ci.
- Le Professeur G. MONSONEGO qui, malgré ses nombreuses charges, en a accepté la présidence.

C'est au Professeur F. BECKER que je dois de connaître la télédétection. Qu'il me permette de rendre hommage ici à son exceptionnelle disponibilité scientifique et humaine. La vitalité qu'il insuffle au Groupe de Télédétection est à la base de tous nos travaux.

Ce travail a nécessité une campagne de mesures dans la Crau en juillet 1984 ; je remercie J.L. MERCIER, J. TRAUTMANN, P. de FRAIPONT de m'avoir accueilli parmi eux pour ce travail de terrain.

Merci à D. RAUFFER, secrétaire du Groupe d'avoir déchiffré et tapé le manuscrit de ce texte avec une égale bonne humeur.



## SOMMAIRE

### REMERCIEMENTS

### INTRODUCTION

### PREMIERE PARTIE : MODELISATION - PROBLEME DIRECT SUR UN PIXEL

#### I.1. MODELE LOCAL DES TRANSFERTS DE MASSE ET DE CHALEUR ENTRE LE SOL ET L'ATMOSPHERE

I.1.1. Conditions aux limites

I.1.2. Problème direct général

#### I.2. RESOLUTION DU PROBLEME DIRECT SUR UN PIXEL

I.2.1. Le modèle thermique à une dimension

I.2.2. Aspects théoriques

I.2.3. Deux méthodes de résolution numérique du problème (P)

I.2.4. La condition initiale

#### I.3. VALIDITE DU MODELE THERMIQUE

I.3.1. Comparaison avec le modèle de Soer

I.3.2. Autre comparaison

### DEUXIEME PARTIE : PROBLEME INVERSE SUR UN PIXEL

#### II.1. PROBLEMES POSES EN TELEDETECTION

#### II.2. PRINCIPE GENERAL

II.2.1. Expression linéarisée des flux

II.2.2. Problème inverse pour les équations couplées

#### II.3. PROBLEME INVERSE POUR (P)

II.3.1. Les équations normales

II.3.2. Aspects théoriques

II.3.3. Remarque sur le rapport de Bowen

## II.4. STABILISATION OPTIMALE ET CAS NON LINEAIRE

II.4.1. Instabilité des systèmes (13) et (18)

II.4.2. Stabilisation

II.4.3. Résolution du problème inverse avec erreurs sur les données par itérations

II.4.4. Stabilisation optimale

II.4.5. Cas non linéaire

## II.5. APPLICATIONS

II.5.1. Validation des méthodes par simulation

II.5.2. Résultats obtenus sur l'expérience du Niger

II.5.3. Une remarque sur l'erreur de modélisation

II.5.4. Résultats obtenus sur l'expérience de la Crau

II.5.5. Une méthode de calcul de la température de surface pour des terrains homogènes

## TROISIEME PARTIE : CAS NON HOMOGENES

### III.1. ETUDE D'UN MILIEU A COUCHES

III.1.1. Matrice de transfert

III.1.2. Milieux homogènes équivalents

III.1.3. Cas d'une couche mince

III.1.4. Influence de l'hétérogénéité sur les mesures de surface.  
Matrice de l'hétérogénéité

III.1.5. Résultats numériques

III.1.6. Interprétation du problème inverse : sol homogène le plus proche d'un sol hétérogène

III.1.7. Résultats numériques de l'inversion sur des sols hétérogènes

III.1.8. Sol homogène le plus proche d'un sol hétérogène donné pour des mesures en profondeur

### III.2. HETEROGENEITES DE SURFACE

- III.2.1. Les problèmes de l'extension spatiale des modèles
- III.2.2. Les problèmes de l'extension spatiale d'un modèle avec mesures à toute échelle
- III.2.3. La température de surface et l'émissivité homogénéisées à l'altitude  $a$
- III.2.4. Température mesurée, température de brillance
- III.2.5. Extension à toute échelle du modèle de flux de rayonnement net
- III.2.6. Définition des flux de chaleur sensible et d'évapotranspiration à l'altitude  $a$ . Solutions homogénéisées du problème inverse linéaire

### III.3. HETEROGENEITES HORIZONTALES

- III.3.1. Invalidité du modèle thermique local pour un milieu à hétérogénéités horizontales vu à l'altitude  $a$
- III.3.2. Milieux voisins, matrice de l'hétérogénéité
- III.3.3. Inertie thermique à l'altitude  $a$

### CONCLUSION

### APPENDICE

### REFERENCES



## INTRODUCTION

Les géographes, les cartographes, les géologues, les agronomes, les météorologues, les militaires et parallèlement, les opticiens, les électroniciens, les informaticiens, les traiteurs d'images, les économistes, sont intéressés par l'observation éloignée de la terre. Cela explique en partie la pluridisciplinarité de la télédétection. Mais il y a une autre raison à cette diversité des points de vue et des méthodes de la télédétection, c'est sa relative jeunesse.

Par exemple, intéressés par les potentialités agronomiques du sol à grande échelle, on trouve des techniques de traitement d'images de luminances (voir par exemple les nombreux travaux présentés à l'ERIM et IGARSS de 1979 à 1984) aussi bien que des modèles à plusieurs couches régis par des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles reliant la température et l'humidité (voir par exemple, Vauclin, 1978 ; Brutsaert, 1984 ; de nombreux travaux de l'INRA).

Le but final commun à ces travaux de télédétection est de contribuer à utiliser la vision globale du satellite (ou de l'avion) pour caractériser des propriétés globales du sol.

On peut schématiser cette démarche de la façon suivante :

- Ecriture d'un modèle reliant des paramètres caractéristiques du sol et des grandeurs mesurables (par satellite et au sol)
- En se basant sur un modèle, recherche des paramètres à partir de la connaissance des grandeurs mesurables (cette étape est la résolution du problème inverse).

L'écrasante majorité des travaux actuels en télédétection se classe dans l'une ou l'autre de ces deux démarches. Deux caractéristiques importantes se dégagent alors de ces deux catégories de travaux.

La première est le contraste entre la finesse (et donc la sophistication) des travaux de modélisation et la simplification souvent extrême des modèles lorsqu'il s'agit de la résolution du problème inverse. Cela s'explique par le fait que les modèles sont élaborés au sol (par exemple, Perrier, 1976 ; Itier, 1977 ; Vauclin, 1978 ; Brunet, 1984) alors que la résolution d'un problème inverse avec

un grand nombre de paramètres inconnus est un problème délicat et même impossible si le nombre de mesures est trop faible (par exemple si l'on se contente d'une ou de deux mesures journalières de température de surface) (voir entre autres, Jackson et al., 1977 ; Seguin et al., 1983 ; Watson, 1975).

La deuxième constatation est l'extrême disparité des échelles :

Les modèles sont élaborés à l'aide de mesures portant sur des  $\text{mm}^3$  ou  $\text{cm}^3$  alors que les satellites donnent des mesures sur plusieurs hectares ou  $\text{km}^2$ . Or résoudre un problème inverse basé sur un modèle régissant les échanges d'énergie au niveau du sol à l'échelle du  $\text{m}^2$  à partir de mesures obtenues portant sur un  $\text{km}^2$ , sous-entend une extension de la validité du modèle extrêmement hardie. Et à supposer qu'une telle extension de l'échelle spatiale des modèles soit justifiée, que signifiaient les résultats du problème inverse ? Seraient-ils valables à toute échelle ? Peut-on les raccorder à leurs valeurs mesurables au sol ? Très peu de travaux étudient ce problème de la validité des modèles en télédétection lorsqu'on modifie l'échelle des mesures. Citons toutefois, dans le domaine de l'hydrologie, les travaux de Brunet (1984) et les travaux présentés aux colloques de l'INRA qui se basent sur une description statistique de la variabilité locale pour appliquer des méthodes de krigeage et sur l'intéressante méthode du facteur d'échelle en hydrodynamique.

L'objet de ce travail est de contribuer à éclaircir ces points dans le cas d'un sol nu ou à végétation rase et en supposant résolu le problème de la déconvolution atmosphérique.

On définit (deuxième partie) des méthodes stables de calcul du flux d'évapotranspiration, du flux de chaleur sensible et de l'inertie thermique à la surface à partir de mesures satellite et de certaines mesures météorologiques basées sur une modélisation thermique du sol sans faire appel à une connaissance des résistances aérodynamiques que l'on calcule. Toutes les méthodes proposées jusqu'ici pour le calcul de ces flux utilisent une connaissance de ces résistances aérodynamiques (Jackson et al., 1977 ; Seguin et Itier, 1983 ; Soer, 1980). D'autre part, aucune méthode d'inversion, qu'il s'agisse de l'inertie thermique (Watson, 1975 ; Price, 1977 ; Kahle et al., 1981) ou des flux, n'a été testée quant à sa stabilité vis à vis des erreurs de mesure sur les données. Nous montrons que ces méthodes sont instables et donnons des procédés de stabilisation.

Mais, comme pour toutes les méthodes d'inversion existantes, nous faisons l'hypothèse d'un sol homogène. Cette hypothèse repose sur l'idée implicite que pour tout terrain, il existe un sol homogène "équivalent".

Dans la troisième partie, nous étudions la validité de cette notion dans le cas de différents types d'hétérogénéités. Puis après avoir précisé ce qu'on doit attendre d'un modèle en télédétection, nous étudions la validité du modèle thermique pour un sol "vu" à toute altitude  $a \gg 0$ .

Nous verrons que ces notions couramment utilisées ne sont pas valables à toute échelle sans définir des grandeurs nouvelles "à l'échelle a".

Mais les études sur l'inversion et l'homogénéité nécessitent des procédés fiables de simulation. La première partie définit et teste sur des cas réels des méthodes de résolution du problème direct et justifie une modélisation basée sur un modèle conductif où l'humidité intervient comme paramètre.

Nos travaux personnels repris en partie dans cette thèse sont fondés sur notre contribution propre aux articles suivants (non systématiquement rappelés dans le texte) : (Raffy, 1981), (Hechinger-Raffy-Becker, 1982) dans la première partie ; (Abdellaoui-Becker-Olory-Raffy, 1982), (Raffy-Busquet-Becker, 1984), (Raffy-Becker, 1985), (Raffy-Becker, 1986), (Raffy-Nerry, 1986) pour la deuxième partie. Les résultats de la troisième partie ne sont pas encore publiés. Enfin, d'autres travaux comme (Raffy, 1985) qui généralisent le problème inverse à  $\mathbb{R}^n$  ou (Raffy-Ramstein-Becker, 1986) qui ne sont pas encore directement liés à ce travail ne sont pas mentionnés.

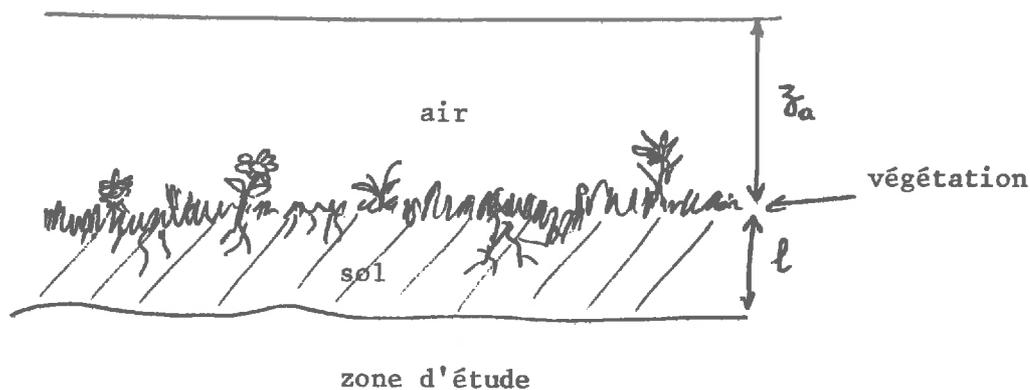


PREMIERE PARTIE  
MODELISATION - PROBLEME DIRECT SUR UN PIXEL

Ce chapitre rappelle un modèle local classique régissant les échanges de masse et de chaleur à la surface du sol, donne des méthodes numériques de résolution du système couplé en température-humidité et justifie un découplage des équations.

Dans toute la suite la description des modèles concernera un domaine comprenant une couche atmosphérique de 2 mètres et une couche de terrain de profondeur  $l$  (fig. ci-dessous). Toutefois, les transferts convectifs de la couche atmosphérique ainsi que les propriétés de la végétation que nous supposons rase (2 à 3 décimètres au plus) seront pris en compte dans l'expression du flux à l'interface.

En fait, nous serons donc amenés à l'étude d'un milieu conducteur à une couche (de sol) avec une condition de flux à l'interface sol-atmosphère décrivant les transferts d'énergie dus au végétal et à l'atmosphère.



I.1. MODELE LOCAL DES TRANSFERTS DE MASSE ET  
DE CHALEUR ENTRE LE SOL ET L'ATMOSPHERE

La description qui suit concerne des zones de l'ordre de quelques m<sup>2</sup> à la surface du sol et comprises dans la couche de terrain limitée par la surface et la profondeur où l'on peut estimer la température et l'humidité comme constantes durant une journée. Cette profondeur est de l'ordre de 1 m et peut être définie par exemple par la nappe phréatique. Elle est donnée par la distance de pénétration de l'onde thermique diurne. Pour un sol nu, les transferts de masse et de chaleur sont conditionnés par le comportement de la surface qui dépend de l'énergie disponible et du comportement de la couche de terrain définie ci-dessus, d'épaisseur  $l$ .

Dans le cas où les transferts de chaleur se font exclusivement par conduction et à condition de négliger les transferts horizontaux, l'équation de conservation de la chaleur s'écrit :

$$c_T(\theta, T) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (K_T(\theta, T) \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \quad , \quad x \in ]0, l[ \quad (1)$$

où  $x$  désigne la profondeur,  $\theta$  est la teneur en eau volumique,  $T$ , la température, les fonctions  $c_T$  et  $K_T$  respectivement la capacité calorifique volumique et la conductivité thermique.

Cette équation est valable pour les zones non saturée et saturée à condition que dans ce dernier cas les phénomènes convectifs soient négligeables devant la conduction, ce que nous supposons toujours.

D'autre part, en négligeant encore les transferts horizontaux, l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

où  $q$  est le flux volumique exprimé par la loi de Darcy généralisée par

$$q = - K_h(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right)$$

où  $h$  est la pression effective de l'eau exprimée en hauteur de liquide et  $K_h(\theta)$  la conductivité hydraulique. Donc, en introduisant la capacité capillaire

$$c(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h}$$

on a

$$c_h(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{\partial K_h(h)}{\partial x} \quad x \in ]0, \ell[ \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) régissent le comportement en température et humidité de la couche de sol comprise entre la surface et la profondeur  $\ell$ .

Toutefois, dans les zones arides et semi-arides, les transferts de masse dans la zone non saturée sous forme de vapeur et les transferts de chaleur associés peuvent devenir prépondérants (Vauclin, 1978). Le flux massique  $q$  est alors donné par

$$q = - K_h(h, T) \left( \frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) - K_\tau(h, T) \frac{\partial T}{\partial x}$$

où  $K_h$  est maintenant la conductivité totale

$$K_h = K_{\ell h} + K_{vh}$$

$K_{\ell h}$  étant la conductivité à la phase liquide,  $K_{vh}$ , la conductivité à la phase vapeur ;  $K_\tau$  est la diffusivité totale par unité de température liée au gradient de température définie par

$$K_\tau(h, T) = K_{\ell \tau} + K_{v \tau}$$

$K_{\ell \tau}$  étant la diffusivité relative à la phase liquide et  $K_{v \tau}$ , la diffusivité relative à la phase vapeur.

Ainsi, l'équation (2) devient

$$c_h(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(K_h(h,T) \frac{\partial h}{\partial x}) = - \frac{\partial}{\partial x}(K_h(h) + K_\tau(h,T) \frac{\partial T}{\partial x}) \quad (3)$$

### I.1.1. Conditions aux limites

En  $x = \ell$ , nous adopterons les conditions

$$T(\ell) = T_\ell \quad , \quad h(\ell) = h_\ell \quad (4)$$

où  $T_\ell$  et  $h_\ell$  sont des constantes, ce qui est en accord avec le choix fait pour  $\ell$ .

Le point essentiel de la modélisation réside dans l'expression des flux à la surface ( $x = 0$ ). A ce sujet, on peut noter de très faibles différences entre les modélisations présentées par les différents auteurs (Rosema, 1975 ; Watson, 1975 ; Vauclin, 1978 ; Brunet, 1984).

La surface du sol est le siège de flux radiatifs (car la terre se comporte vis à vis du rayonnement solaire comme un émetteur-récepteur) et de flux convectifs dûs à la circulation de l'air et de vapeur à la surface. Nous allons brièvement décrire ces différents termes.

#### \* Rayonnement net $R_N$

C'est le bilan des flux radiatifs dûs au rayonnement solaire, au rayonnement atmosphérique, au rayonnement terrestre propre.

Le rayonnement solaire s'écrit

$$[1 - a(\theta, t)] R_G(t)$$

où  $R_G(t)$  représente le rayonnement solaire de courte longueur d'onde (0.15 à 4  $\mu$ ) et  $a(\theta, t)$  l'albédo qui dépend de la teneur volumique en eau  $\theta$  et du temps et modélisable par exemple par

$$a(\theta, t) = \frac{a'(\theta)}{1 + b \cos z'} \quad (\text{Ross, 1975})$$

où  $z'$  est l'angle zénithal local,  $b$  une constante dépendant du couvert et  $a'(\theta)$  une expression obtenue empiriquement (van Bavel et Hillel, 1976 ;

Sellers, 1965 ; Linacre, 1969). On peut modéliser  $R_G$  comme dans (Watson, 1975) mais nous le considérerons toujours comme mesuré dans la suite.

Le rayonnement atmosphérique  $R_a$  est également une grandeur mesurée (à l'aide de radio-sondages) mais on peut toutefois l'écrire sous la forme  $\epsilon_a \sigma T_a^4$  où  $T_a$  est la température de l'air à 2 m du sol,  $\sigma$  la constante de Stefan et  $\epsilon_a$  l'émissivité effective de l'atmosphère ; il en existe plusieurs modélisations (Brunt, 1939 ; Sellers, 1965). Nous adopterons  $\epsilon_a = 1.24 \left(\frac{e_a}{T_a}\right)^{1/7}$  (Brutsaert, 1975),  $e_a$  étant l'humidité de l'air. La partie absorbée de ce rayonnement est  $\epsilon(\theta)R_a$  où  $\epsilon(\theta)$  est l'émissivité du sol que l'on peut écrire par exemple

$$\epsilon(\theta) = \theta f_1 + f_2 \quad (5)$$

formule empirique (où  $f_1$  et  $f_2$  sont des constantes) proposée par Sellers (1965) et Conway et van Bavel (1967).

Enfin, un troisième flux intervient dans le rayonnement net, le flux dû au rayonnement de la terre elle-même :

$$- \epsilon(\theta) \sigma T^4$$

où  $T$  est la température de la surface.

D'où l'expression du rayonnement net rentrant dans le sol (vers les  $x > 0$ )

$$R_N = (1 - a(\theta, t)) R_G(t) + \epsilon(\theta)\epsilon_a \sigma T_a^4 - \epsilon(\theta) \sigma T^4 \quad (6)$$

Notons que dans une bonne partie de ce qui suit, le rayonnement net sera considéré comme mesuré. Les satellites actuels permettant de déterminer le rayonnement solaire (Gautier, 1982 ; Dedieu et Deschamps, 1985),  $T$  est estimé grâce à la mesure de la luminance du sol dans l'infrarouge thermique (10-12  $\mu\text{m}$ ), comme on l'examinera plus loin et  $T_a$  est estimé par des mesures météo in situ.

Bien entendu, on pourrait se dispenser de cette mesure en considérant un modèle à deux milieux englobant l'atmosphère jusqu'à la couche limite planétaire. Ce genre de modèle est particulièrement étudié au CRPE (Taconet et al., 1984 ; Carlson et al., 1978).

Précisons maintenant les flux convectifs qui sont le flux de chaleur sensible H et le flux de chaleur latente LE.

\* Flux de chaleur sensible H

Ce flux s'écrit classiquement

$$H = \frac{\rho_a(t) c_p}{r_a(T_a, T, u_a)} (T_a(t) - T(t))$$

où  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air,  $c_p$  la chaleur spécifique de l'air à pression constante,  $r_a$  la résistance au transfert de chaleur entre la surface et la hauteur où l'on mesure  $T_a$  (2 m). Cette fonction relie de façon assez complexe la vitesse horizontale du vent  $u_a$ ,  $T_a$  et  $T$ . Son expression fait intervenir la longueur d'Obukhov (Obukhov, 1946) introduite à la suite d'une analyse dimensionnelle du transfert. Pour sa définition précise on pourra se reporter à Businger et al., 1971 ; Dyer, 1967 ; Vauclin, 1978 ; Brunet, 1984, par exemple.

De plus, pour des conditions de convection forcée (Keith et Sellers, 1975 ; Vauclin et al., 1977 ; Abdellaoui et al., 1985) on peut écrire

$$\frac{\rho c_p}{r_a(T_a, T_s, u_a)} = \chi_0 f(T_a, T_s, u_a) \quad (7)$$

où  $\chi_0$  est l'inverse de la résistance à la neutralité pour un vent de 1 m/sec,  $f(T_a, T_s, u_a)$  une fonction que l'on postule universelle et que l'on vérifie être valable à quelques pourcents pour de nombreux milieux (Abdellaoui et al., 1985). On peut étendre cette formule à la convection libre en ajoutant une constante à la vitesse du vent (Brunet, 1984). Ce modèle a été testé dans de nombreuses situations atmosphériques et conduit à de bonnes estimations sauf pour des conditions très stables avec vents très faibles.

L'expression du flux de chaleur sensible devient alors

$$H = \chi_0 f(T_a, T_s, u_a) (T_a(t) - T(t)) \quad (8)$$

modèle que nous adopterons.

\* Flux de chaleur latente LE .

C'est le flux de chaleur qui provient de l'évaporation de l'eau à la surface.

Il en existe plusieurs formulations. On adopte ici l'expression

$$LE = \frac{\rho_a(t) c_p}{\gamma(r_a+r_c)} q \{e_a P_s(T_a) - P_s(T_c)\} + \frac{\rho_a(t) c_p}{\gamma r_a} (1-q) \{e_a P_s(T_a) - e_s P_s(T_s)\} \quad (9)$$

où

$r_c$  est une fonction de résistance du couvert ;

$\gamma$ , la constante psychrométrique ;

$e_a(t)$ , l'humidité relative de l'air ;

$e_s(t)$ , l'humidité relative de surface du sol ;

$P_s(T)$ , la pression de vapeur saturante à la température T ;

q, la portion moyenne du sol couverte de végétation au point considéré ;

$T_c$ , la température de surface du couvert végétal.

La résistance aérodynamique  $r_c(T_a, T, u_a)$  est encore une fonction assez complexe décrite de façon empirique, qui dépend de plus du rayonnement solaire à cause du mécanisme de régulation par les stomates.

Compte tenu du fait que par satellite on ne distingue pas T de  $T_c$  et qu'il s'agira en fait de moyennes (comme il sera discuté au chapitre III), on posera  $T_c = T$  et l'on écrira (9) sous la forme

$$LE = \frac{\chi_0 M_a e_a}{\gamma} [f P_s(T_a)] - \frac{\chi_0 M_s}{\gamma} [f P_s(T)] \quad (10)$$

où

$$M_a = \frac{\rho_a c_p}{r_a} \left(1 - \frac{q r_c}{r_a + r_c}\right) = \chi_0 f(T_a, T, u_a) (1 - q M_a)$$

et

$$M_s = \frac{q \rho_a c_p}{r_a + r_c} + e_s (1 - q) \frac{\rho_a c_p}{r_a} = \chi_0 f(T_a, T, u_a) \{(1 - q) e_s + q (1 - M_a)\}$$

Cette hypothèse selon laquelle  $T_c = T$  a été récemment discutée par Hubbard et al. (1985).

En définitive la condition en  $x = 0$  pour la température s'écrit

$$- K_T(h, T) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \phi_T(h, T, t) \quad (11)$$

où

$$\phi_T(h, T, t) = R_N + H + LE \quad (12)$$

les flux  $R_N$ ,  $H$  et  $LE$  étant décrits par (6), (8) et (10).

#### \* Flux hydrique

Le principe de la conservation de la masse impose que la quantité d'eau évaporée à la surface provienne des couches plus profondes, d'où

$$\frac{\rho_a c_p}{\gamma} \frac{e_s P_s(T_s, h, T) - e_a P_s(T_a, h, T)}{r_a(T)} = L K_h(h) \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) - 1 \right]$$

où  $L$  est la chaleur latente de vaporisation. Donc

$$- K_h(h) \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = \phi_h(h, T, t) \quad (13)$$

où, d'après (10)

$$\phi_h(h, T, t) = \frac{\chi_o M_a e a}{\gamma L} [f P_s(T_a)] - \frac{\chi_o M_s}{\gamma L} [f P_s(T)] - K_h(h) = E - K_h(h) \quad (14)$$

#### I.1.2. Problème direct général

Connaissant les propriétés de la couche atmosphérique au niveau du sol, du couvert végétal, les capacités et conductivités hydriques et thermiques du sol entre la surface et la profondeur  $\ell$ , et des profils initiaux de température et d'humidité  $T_0(x)$  et  $h_0(x)$ ,  $x \in [0, \ell]$ , on peut donc prévoir l'évolution hydrique-thermique de la couche  $[0, \ell]$  par la résolution du système d'équations couplées :

$$(I) \begin{cases} c_T(h, T) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (K_T(h, T) \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 & x \in ]0, \ell[ \\ -K_T(h, T) \frac{\partial T}{\partial x} (0, t) = \phi_T(h, T, t) & t > 0 \\ T(\ell, t) = T_\ell & t > 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) & x \in [0, \ell] \end{cases}$$

et

$$(II) \begin{cases} c_h(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (K_h(h) \frac{\partial h}{\partial x}) = f(h, T) & x \in ]0, \ell[ \\ -K_h(h) \frac{\partial h}{\partial x} (0, t) = \phi_h(h, T, t) & t > 0 \\ h(\ell, t) = h_\ell & t > 0 \\ h(x, 0) = h_0(x) & x \in [0, \ell] \end{cases}$$

où  $f(h, T)$  est une fonction définie suivant le type de sol par (2) ou (3).

Le paragraphe suivant propose des méthodes de résolution de ce système et montre que l'on peut en première approximation se limiter au problème thermique seul. On montre également que la connaissance des conditions initiales  $T_0$ ,  $h_0$  n'est pas nécessaire, essentiellement à cause du caractère quasi périodique des flux.

## I.2. RESOLUTION DU PROBLEME DIRECT SUR UN PIXEL

Nous avons proposé et comparé trois méthodes de résolution pour ce problème couplé non-linéaire dans (Raffy, 1981) que nous ne rappelons pas ici pour ne pas alourdir le texte. Pour la résolution du problème inverse qui nous intéresse en télédétection, ces méthodes présentent à l'heure actuelle deux inconvénients majeurs :

- a. Compte tenu du grand nombre de pixels à traiter, le temps de calcul que coûte la résolution de ce système couplé est prohibitif. Même dans le cas où l'on se limite à un petit nombre de pixels et que l'on spatialise par divers types de procédés, cet argument peut demeurer un obstacle.
- b. Le nombre de mesures quotidiennes fournies par les satellites actuels est au maximum de 48 mesures de température de brillance (IRT) et de 30 à 36 mesures de luminance visible, soit au maximum 74 données fortement corrélées (Météosat). Or la paramétrisation nécessaire aux coefficients de capacité et conductivité hydrique et thermique  $c_T, K_T, c_h, K_h, K_T$ , nécessite au moins l'introduction de 3 paramètres par coefficient, comme l'a montré par exemple Becker (1982), ce qui rendrait le nombre d'inconnues du problème inverse beaucoup trop élevé par rapport au nombre de données. Nous donnerons néanmoins en II.2.2 une méthode de résolution pour le problème inverse dans le cas du système couplé.

Nous proposons donc une simplification radicale du système (I)-(II) précédent qui, comme nous le verrons, est justifiée par comparaison avec des modèles déjà testés.

### I.2.1. Le modèle thermique à une dimension

Le modèle régissant l'évolution de la température sera le modèle simple

$$(P) \begin{cases} c(x,t) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (K(x,t) \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 & x \in ]0, \ell[ & (15) \\ -K(0,t) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \phi(T,t) & t > 0 & (16) \\ T(\ell,t) = T_\ell & t > 0 & (17) \\ T(x,0) = T_0(x) & x \in [0, \ell] & (18) \end{cases}$$

où l'on suppose un profil hydrique  $\theta$  constant à l'échelle de la journée. On suppose de plus que les coefficients  $c_T$  et  $K_T$  de (I) ne dépendent pas de la

température (pour simplifier l'écriture on supprime désormais les indices à ces coefficients ainsi qu'à  $\phi_T$ ).

### I.2.2. Aspects théoriques

Nous allons examiner ce que l'on peut affirmer du point de vue théorique sur l'existence et l'unicité de la solution du problème direct (P).

Rappelons sommairement les définitions des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire pour l'ouvert  $\Omega = ]0, \ell[$  : pour  $s$  réel,  $H^s(\Omega)$  = espace des restrictions à  $\Omega$  des fonctions de  $H^s(\mathbb{R})$  défini par  $H^s(\mathbb{R}) = \{u / (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mid u \in L^2(\mathbb{R})\}$ , l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  étant l'espace des fonctions de carré sommable sur  $\mathbb{R}$ .  $H^s(\mathbb{R})$  est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi$$

et les espaces  $H^s(\Omega)$  sont ainsi munis d'une structure d'espace de Hilbert (cf. par exemple Lions-Magenes, 1980).

On a alors les propriétés suivantes pour ces espaces :

a. Pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $s > 0$ , on a :  $H^{s+\varepsilon}(\Omega) \subset H^s(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  topologiquement et algébriquement. De plus,

b. L'injection canonique

$$i : H^{s+\varepsilon}(\Omega) \rightarrow H^s(\Omega)$$

est compacte pour tout  $\varepsilon > 0$ .

c. Pour  $s > 1/2$  toute fonction de  $H^s(\Omega)$  est presque partout égale à une fonction continue sur  $[0, \ell]$ .

D'autre part, on peut définir

$L^2(0, \tau; H^s(\Omega))$  = l'espace des fonctions  $t \rightarrow u(t)$  de  $[0, \tau] \rightarrow H^s(\Omega)$  telles que  $\int_0^\tau \|u(t)\|_{H^s(\Omega)}^2 dt < \infty$  qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, \tau; H^s(\Omega))} = \int_0^\tau \langle u(t), v(t) \rangle_{H^s(\Omega)} dt$$

Enfin, posons pour  $s > 0$

$$W_s = \{v \in L^2(0, \tau; H^s(\Omega)) / \frac{dv}{dt} \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))\}$$

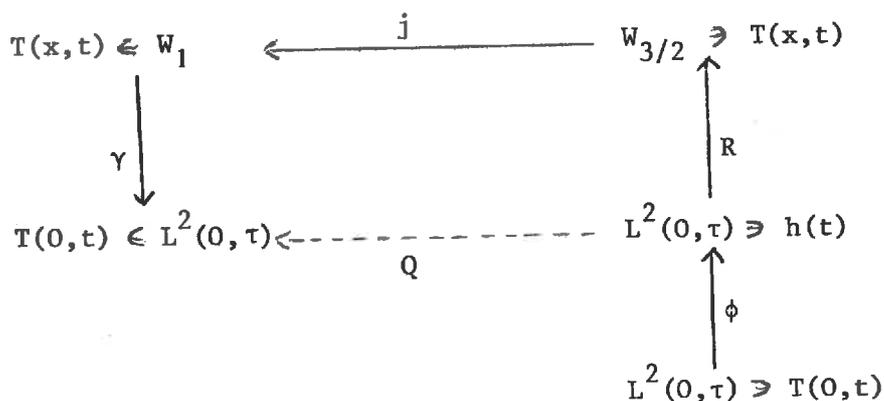
qui est également un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{W_s} = \int_0^\tau \langle u(t), v(t) \rangle_{H^s(\Omega)} dt + \int_0^\tau \langle \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \rangle_{L^2(\Omega)} dt .$$

Existence : Soit  $R : L^2(0, \tau) \rightarrow H^{3/2}(\Omega)$  l'opérateur qui envoie  $h \in L^2(0, \tau)$  sur la solution  $T(x, t) = Rh$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \Omega = ]0, \ell[ \\ -K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = h(t) \\ T(\ell, t) = T_\ell \\ T(x, 0) = T_0(x) \end{array} \right. \quad (19)$$

et  $\gamma : T(x, t) \rightarrow T(0, t)$  l'opérateur (de trace) qui envoie la solution de (19) sur le profil de température de surface. Considérons le schéma suivant :



Ce schéma définit un opérateur  $Q = \gamma j R$  de  $L^2(0, \tau)$  dans lui-même.

Or, l'opérateur  $R$  est continu d'après Lions (1962). L'injection canonique  $j$  est compacte d'après la compacité

$i : H^{3/2}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  et Lions (1969). Enfin, l'opérateur  $\gamma$  est continu

d'après Lions-Magenes (1968), par exemple. Donc l'opérateur  $Q$  est compact ainsi que l'opérateur  $Q\phi$  grâce à la continuité du modèle de flux  $\phi$  décrit précédemment (voir fig. I.1a et b).

Ainsi, les méthodes de résolution proposées au paragraphe suivant pour le problème direct (P) consistent à rechercher le (ou les) point(s) fixe(s) pour l'opérateur compact  $Q\phi$  de  $L^2(0,\tau)$ , c'est-à-dire les  $T \in L^2(0,\tau)$  telles que

$$Q\phi(T) = T \quad (20)$$

Ce type de problème a été abordé par de nombreux auteurs. Par exemple, si  $\phi$  est monotone, l'existence et l'unicité peuvent être démontrées comme dans (Duvant-Lions, 1972) ou (Glowinski et al., 1976) ou bien par application du théorème de Schaeffer (Schaeffer, 1955), comme il a été fait dans le cas stationnaire par Witomski (1977). Or, même si des arguments physiques conduisent à admettre que  $T \rightarrow \phi(T)$  est grosso modo monotone, le modèle décrit peut, pour certaines valeurs de la vitesse du vent, donner une fonction non monotone (voir par exemple la fig. I.1a où le vent est constant).

On peut alors remplacer  $\phi$  par une fonction  $\tilde{\phi}$  continue égale à  $\phi$  pour les valeurs réalistes des températures et telle que  $\tilde{\phi}$  soit prolongée par une constante au-delà de cet ensemble de valeurs (par exemple,  $\tilde{\phi}(T) = \phi(T)$  pour  $T \in ]260^\circ\text{K}, 360^\circ\text{K}[$  (fig. I.1b). On peut donc considérer que  $\tilde{\phi}$  est une fonction continue bornée sur  $L^2(0,\tau)$ . Par commodité, nous noterons encore  $\phi$  cette fonction.

Dans ces conditions, rappelons le théorème de Schauder (Schwartz, 1969) : si  $E$  est un espace de Banach et  $C$  un convexe compact non vide de  $E$ , alors tout opérateur continu de  $C$  dans  $C$  possède un point fixe (non nécessairement unique).

Or  $\phi$  étant bornée, l'image de  $L^2(0,\tau)$  est incluse dans une boule  $\bar{B}$ . L'opérateur  $Q$  étant compact,  $Q\phi(\bar{B})$  est un convexe relativement compact dans  $L^2(0,\tau)$ .

Soit  $C = \overline{Q\phi(\bar{B})}$ . Cet ensemble est un convexe compact non vide. Donc  $Q\phi|_C : C \rightarrow C$  possède un point fixe  $T$ . Cette fonction est une solution de (20), c'est-à-dire de (P). D'où l'existence d'une solution.

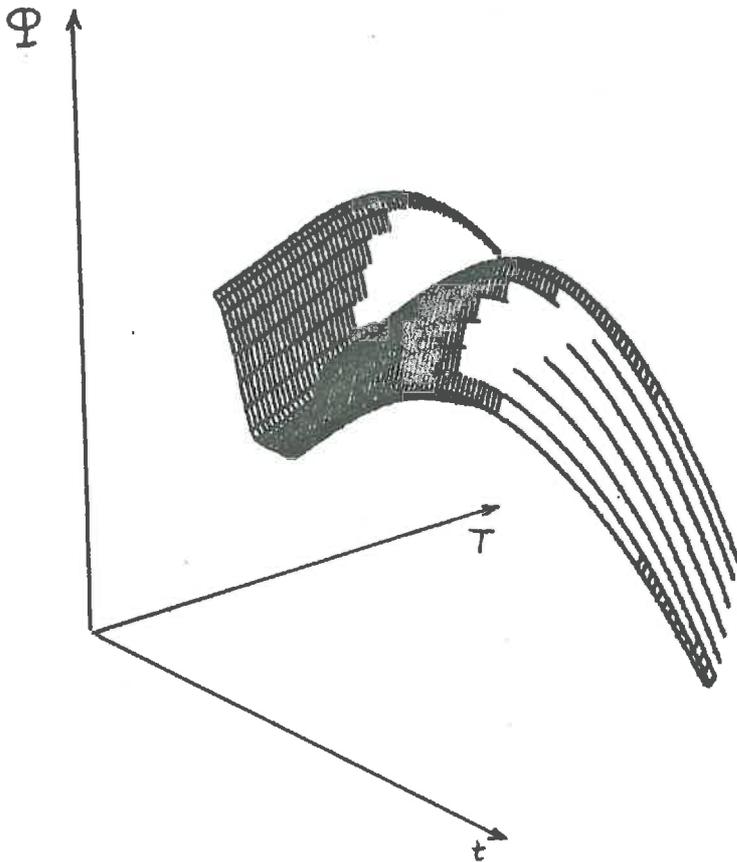


Fig. I.1a : Fonction  $\phi(T, t)$   
 pour  $t \in [0^h, 24^h]$ ,  
 $T \in [275^*K, 380^*K]$ , les bornes  
 de l'intervalle ne sont pas  
 réalistes.  
 (le vent est ici pris constant).

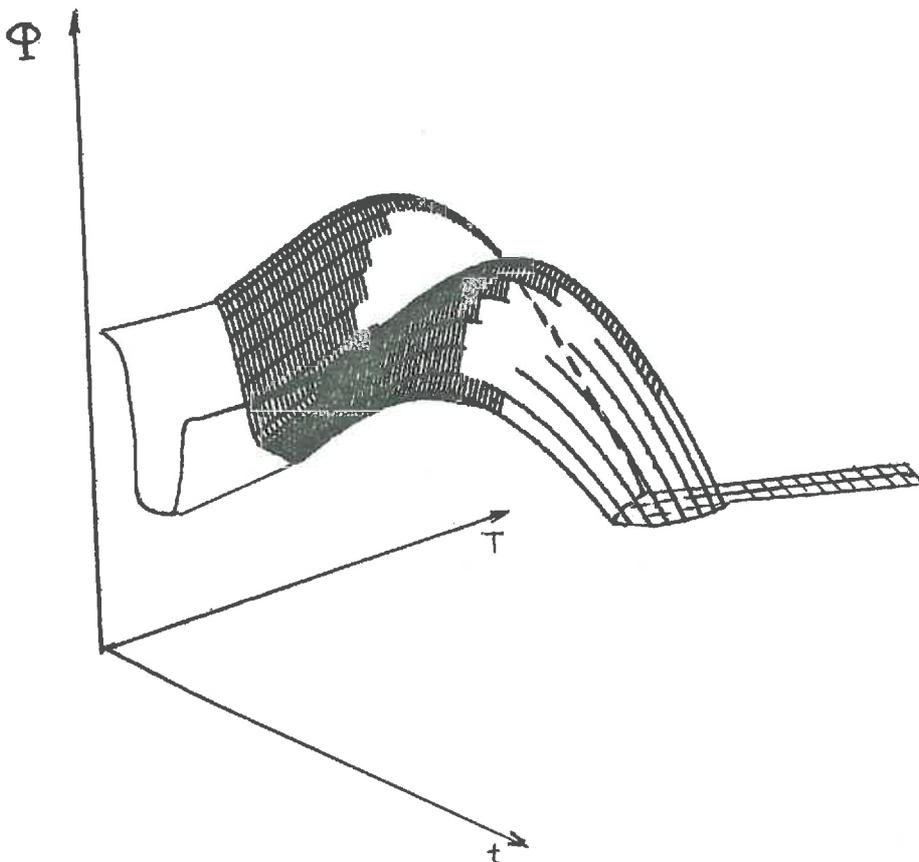


Fig. I.1b : Fonction  $\phi(T, t)$   
 tronquée de façon à stabiliser  
 l'algorithme.

Unicité : A partir de la fonction  $T \rightarrow \phi(T)$  construisons une fonction  $\psi(T)$  affine par morceaux définie comme suit :

Soient  $T_1, T_2, \dots, T_q \in \tilde{\Omega} = [260^\circ\text{K}, 360^\circ\text{K}]$ , les valeurs de température pour lesquelles  $\phi(T)$  change de signe. On pose  $T_0 = 260^\circ\text{K}$ ,  $T_{q+1} = 360^\circ\text{K}$ ,  $\tilde{\Omega}_i = [T_i, T_{i+1}]$  et  $M_k = \sup_{T \in \tilde{\Omega}_0 \cup \dots \cup \tilde{\Omega}_k} |\dot{\phi}(T)|$ , pour  $k = 0$  à  $q$ .

On a bien sûr  $M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_q$ . Définissons  $\psi$  par

$$\psi(T) = M_i T + B_i \quad \text{pour } T \in \tilde{\Omega}_i$$

$B_i$  étant une constante assurant la continuité de  $\psi$  (fig. 2),

$B_0$  prise par exemple égale à  $\phi(T_0)$ .

La fonction  $\psi$  est alors convexe et vérifie donc pour toutes valeurs  $u$  et  $v$  de  $\tilde{\Omega}$

$$\psi(v) - \psi(u) \geq \phi(u) (v-u) \quad (*)$$

En multipliant la 1ère équation de (19) par une fonction  $v$  (telle que les intégrales aient un sens) et en intégrant pour  $x \in (0, l)$ , il vient

$$c \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) v(x, t) dx - K \int_0^l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) v(x, t) dx = 0$$

d'où en prenant  $v-T$  au lieu de  $v$  et en intégrant

$$c \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t} v dx + K \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = + K \left[ \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) v(x, t) \right]_{x=0}^{x=l}$$

Soit

$$c \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t} v dx + K \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \phi(T) v(0, t) + K \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) v(l, t)$$

Remplaçons  $v$  par  $T-v$  dans cette équation et ajoutons  $\psi(v) - \psi(T)$  dans chaque membre. Il vient

$$c \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t} (T-v) dx + K \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (T-v) dx + \psi(v) - \psi(T) =$$

$$\left[ \psi(v) - \psi(T) - \phi(T) \cdot (v-T) \right]_{x=0} + K \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) \cdot (T-v)(l, t).$$

Si l'on choisit  $v$  telle que  $v(l, t) = T_l$ , et d'après (\*)

$$c \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t} (v-T) dx + K \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (v-T) dx + \psi(v) - \psi(T) \geq 0 \quad (**)$$

Toute solution  $T$  vérifie donc cette inégalité quelle que soit  $v$  (suffisamment régulière) et telle que  $v(l,t) = T_l$ .

Soit  $\tilde{T}$  une autre solution. Posons  $w = T - \tilde{T}$ , prenons  $v = \tilde{T}$  dans (\*\*), et  $v = T$  dans l'équation (\*\*) relative à la solution  $\tilde{T}$ . Par addition des deux inégalités ainsi obtenues, on a

$$-c \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t} w dx - K \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \geq 0, \text{ soit}$$

$$-\frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l w^2 dx \geq K \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \geq 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction  $t \rightarrow \int_0^l w^2(x,t) dx$  est décroissante. Or  $w(x,0) = T(x,0) - \tilde{T}(x,0) = 0$  pour  $x \in [0, l]$ , donc  $\int_0^l w^2(x,t) dx$  est nulle pour tout  $t$  et  $T \equiv \tilde{T}$ , ce qui montre l'unicité de la solution dans  $L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$ .

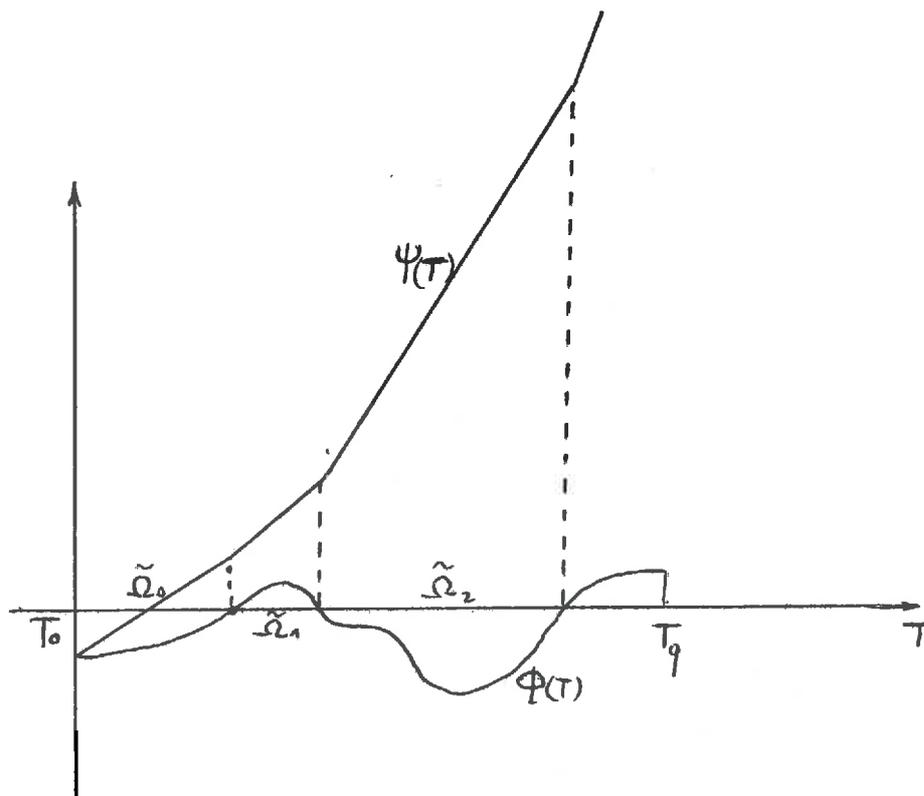


Fig. I.2 : Construction de  $\psi$ .

### I.2.3. Deux méthodes de résolution numérique du problème (P)

La résolution de ce problème non-linéaire (à cause de la dépendance non-linéaire de  $\phi$  en température) peut se faire en résolvant à chaque pas de temps  $t$ , par une méthode de gradient, le problème

$$\min_{\mu} |T_{\mu}(0,t) - \mu(t)| \quad (21)$$

où  $\mu(t)$  est un nombre réel et  $T_{\mu}(0,t)$  la valeur en  $x = 0$  de la solution du problème (15), (17), (18) ainsi que

$$-K(0,t) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \phi(\mu,t) \quad (22)$$

La valeur de  $\mu$  réalisant le minimum (qui est nul d'après l'unicité de la solution) est donc telle que  $T_{\mu}(x,t)$  soit solution de (P).

Une autre méthode est la méthode itérative suivante : Soit  $T_0$  un réel quelconque choisi de façon à pouvoir représenter une température de surface réaliste.

On résout alors (15), (17), (18) ainsi que

$$-K(0,t) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \phi(T_0,t)$$

ce qui nous donne une solution  $T_1(x,t)$ . On résout alors de nouveau ce problème avec  $T_1(0,t)$  à la place de  $T_0$  et l'on obtient  $T_2(x,t)$  etc... Cette suite de solutions converge vers la solution de (P) comme on peut le vérifier numériquement.

Les deux méthodes donnent des résultats tout à fait du même ordre (à 2 décimales près) en des temps de calculs comparables.

Remarque 1: Chaque calcul de  $T_\mu(0,t)$  ou de  $T_n(x,t)$  repose sur la résolution d'un problème linéaire. Par conséquent, toutes les méthodes standard de résolution sont acceptables ; en particulier si  $K$  et  $c$  sont constantes, on peut utiliser la méthode de Fourier. Dans ce qui suit, on utilisera la méthode implicite de Crank-Nicholson par discrétisation en différences finies avec un pas logarithmique pour tenir compte de la pénétration exponentielle de l'onde journalière. Une discrétisation par éléments finis du 3<sup>è</sup> ordre eût été plus précise mais beaucoup plus lourde car la matrice obtenue pour le système discrétisé n'eût pas présenté la forme tridiagonale dont l'inversion est immédiate par l'algorithme de Thomas (Householder, 1964 ; Le Pourhiet, 1979).

Remarque 2: La première méthode proposée pour résoudre le problème direct (P) en (21) est donc la recherche à chaque pas de temps de

$$\min_{\mu \in \mathbb{R}} |Q\phi(\mu) - \mu|$$

qui est la discrétisation du problème de contrôle dans  $L^2(0,\tau)$  :

$$\min_{T \in L^2(0,\tau)} \|Q\phi(T) - T\|_{L^2(0,\tau)}$$

La deuxième méthode est la méthode itérative

$$\begin{cases} T_0 \in \mathbb{R}, & T_0 \text{ arbitraire} \\ T_{n+1} = Q\phi(T_n) \end{cases}$$

à chaque pas de temps. Notons pour terminer que tous les essais numériques effectués pour des sols homogènes ont conduit à des résultats convergents pour chacune des deux méthodes.

La résolution précédente repose sur la connaissance de la condition initiale. Montrons qu'on peut s'affranchir de cette condition dans le cas où les flux sont périodiques, c'est-à-dire que l'on peut chercher une solution périodique.

#### 1.2.4. La condition initiale

La condition initiale (18) n'étant pas réaliste, nous allons montrer que pour tout choix de  $T_0$ , la solution de (P) converge vers la solution périodique cherchée lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Nous le démontrerons pour  $K$  et  $c$  constants et le vérifierons numériquement pour le cas général.

En effet, soit  $T_{\text{per}}(x,t)$  la solution périodique de même période que  $\phi$  de (15), (16), (17). Posons

$$w(x,t) = T(x,t) - T_{\text{per}}(x,t).$$

Cette fonction satisfait le système

$$\begin{cases} c \frac{\partial w}{\partial t} - K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & x \in ]0, \ell[ \\ K \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0 \\ w(\ell, t) = 0 \\ w(x, 0) = T_0(x) - T_p(x, p) \end{cases}$$

où  $p$  est la période. On résoud aisément ce système, ce qui donne

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\frac{K}{c\ell^2} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 t} \cdot \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{x}{\ell}\right]$$

où les coefficients  $A_k$  sont donnés par la décomposition de Fourier de  $w(x,0)$ .

Donc

$$w(x,0) = T_0(x) - T_{\text{per}}(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{x}{\ell}\right]$$

d'où

$$|w(x,t)| \leq e^{-\frac{K}{c\ell^2} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 t} \cdot |T_0(x) - T_{\text{per}}(x,0)|$$

ce qui montre que pour

$$t \geq \max \left\{ 0, \frac{c}{K} \left(\frac{2\ell}{3\pi}\right)^2 \text{Log} \left| \frac{T_0(x) - T_{\text{per}}(x,0)}{\epsilon} \right| \right\}$$

la différence entre la solution périodique et la solution du problème avec la condition initiale  $T_0(x)$  sera inférieure à  $\epsilon$ .

L'inégalité (22) permet d'estimer le nombre de pas de temps nécessaires pour obtenir la solution périodique de (P) par la méthode de Crank-Nicholson à  $\epsilon$  près. Supposons que l'on pose

$$T_0(x) = \frac{T_\ell}{\ell} x + \frac{(T_{\min} + T_{\max})}{2} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

où  $T_{\min}$  et  $T_{\max}$  sont les valeurs extrêmes estimées de  $T(0,t)$ . Compte tenu des ordres de grandeur usuels, on aura pour tout  $x$ ,  $|T_0(x) - T_{\text{per}}(x,0)| \leq 20^\circ\text{C}$  ; donc on devra avoir pour des ordres de grandeurs usuels une centaine de pas de temps d'une heure pour avoir un écart maximum de  $0,1^\circ\text{C}$  par rapport à la solution périodique.

### I.3. VALIDITE DU MODELE THERMIQUE

Nous allons montrer, par comparaison à d'autres modèles et à des mesures in situ que si l'on suppose le profil hydrique constant durant une journée, les équations (P) avec le modèle de flux décrit précédemment, sont une assez bonne représentation des échanges thermiques à la surface.

#### I.3.1. Comparaison avec le modèle de Soer

Soer (1977, 1980) a fourni des valeurs de température de surface et de flux obtenues d'après des données expérimentales par le modèle Tergra. Nous allons comparer ses résultats à ceux de (P) résolus par la méthode décrite en I.2.2, dans le cas de sols secs, qui sont les cas les plus délicats.

La table I.1 donne les paramètres principaux de l'expérience de Soer. Toutefois, aucune valeur expérimentale de l'humidité relative  $e_s$  n'étant fournie, nous avons adopté la valeur de saturation, ce qui n'est pas nécessairement le meilleur choix. En fait, les mesures expérimentales de  $e_s$  dans différentes situations ont été faites par Seguin (1978) ; ces mesures montrent que la variation de  $e_s$  durant une journée suit à peu près celle de  $e_a$ . Un choix plus réaliste de  $e_s$  conduirait donc à une meilleure évaluation de LE.

Utilisant les données de Soer, nous avons calculé la température de surface (Fig. I.3) et les flux (fig. I.4). Notons que Soer donne la résistance  $r_c$

comme le résultat d'un calcul, alors que nous l'introduisons ici comme une mesure.

Table I.1 : Paramètres principaux de l'expérience de Soer (1977, 1980).

| Paramètres                               | Valeur            | Unité                           |
|--|-------------------|---------------------------------|
| <b>Caractéristiques du milieu</b>        |                   |                                 |
| Contenu volumétrique en eau $\theta$     | 0.075             | $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$    |
| Emissivité $\epsilon$                    | 0.95              |                                 |
| Albedo $\langle a \rangle$               | $\approx 0.24$    |                                 |
| Conductivité thermique K                 | 0.2               | $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ |
| Capacité thermique volumique $\rho c$    | $1.2 \times 10^6$ | $\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$ |
| Hauteur de végétation $h_c$              | 0.10              | m                               |
| <b>Paramètres météorologiques</b>        |                   |                                 |
| Température de l'air $T_a$               | 11.7 à 30.5       | $^{\circ}\text{C}$              |
| Humidité relative de l'air $e_a$         | 37 à 93           | pourcent                        |
| Humidité relative de surface $e_s$       | 100               | pourcent                        |
| Vitesse du vent $u$                      | 0.3 à 2.6         | $\text{m s}^{-1}$               |
| <b>Conditions à la limite inférieure</b> |                   |                                 |
| Température $T_l$                        | 20                | $^{\circ}\text{C}$              |
| Profondeur $l$                           | 0.30              | m                               |

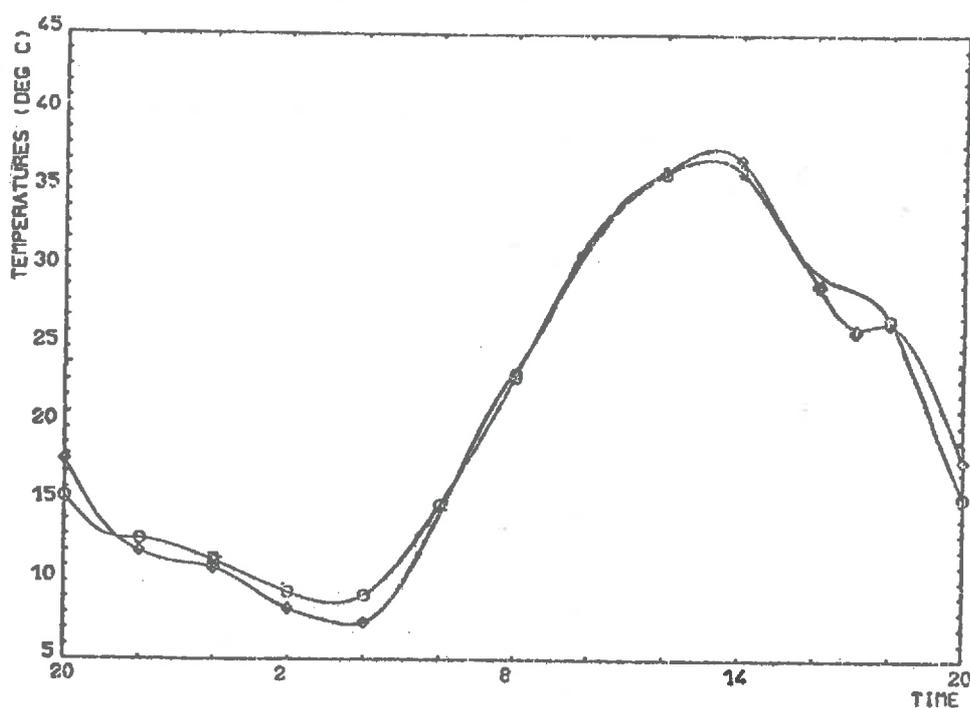


Fig. I.3 : Température de surface fournie par l'expérience de Soer (1977) avec le modèle Tergra et la température que nous avons calculée par (19) avec les mêmes données expérimentales. (C'est E. Hechinger qui a implanté les données de Soer sur notre programme et obtenu ces courbes).

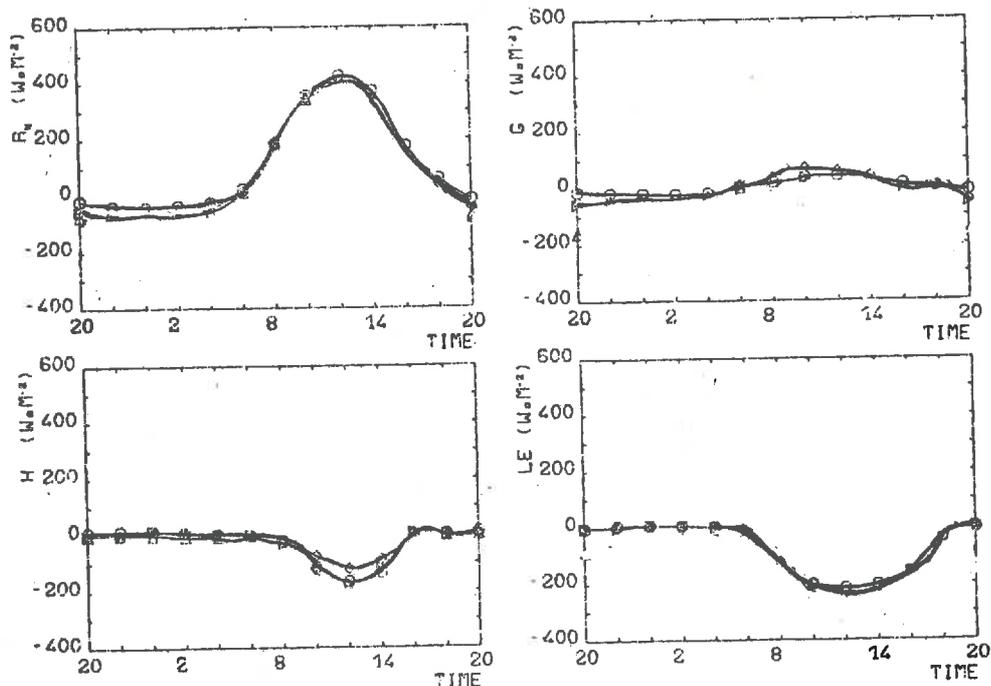


Fig. I.4 : Flux  $R_N$ ,  $G$ ,  $H$  et  $LE$  de l'expérience de Soer (1977), modèle Tergra, comparés aux résultats que nous avons calculés avec les mêmes données expérimentales. (C'est E. Hechinger qui a implanté les données de Soer sur notre programme et tracé les courbes).

La table I.2 montre les écarts moyens entre les résultats fournis par Soer et ceux calculés par (P).

Table I.2 : Comparaison des valeurs moyennes  $T_0$ , des amplitudes  $\Delta T_s$  et des maxima et minima de la température suivant l'expérience Soer (1977) et la simulation décrite ici.

| Méthode :         | Tergra | Simulation par (III) |
|-------------------|--------|----------------------|
| $T_0$ , °C        | 21.4   | 21.0                 |
| $\Delta T_s$ , °C | 28.4   | 30.3                 |
| $T_{smax}$ , °C   | 37.1   | 37.7                 |
| $T_{smin}$ , °C   | 8.7    | 7.4                  |

### I.3.2. Autre comparaison

Nous avons procédé de même avec des données mesurées par Vauclin (1980).

La table I.3 donne les paramètres essentiels de l'expérience. La résolution du problème (P) conduit aux résultats comparés table I.4.

Table I.3 : Principaux paramètres de l'expérience de Vauclin et al. (non publié, 1980).

| Paramètres  | Valeur             | Unité                           |
|---|--------------------|---------------------------------|
| <b>Caractéristiques du milieu</b>                           |                    |                                 |
| Contenu volumétrique en eau $\theta$                        | 0.4                | $\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$   |
| Emissivité $\varepsilon$ (supposée)                         | 0.98               |                                 |
| Albedo $\langle a \rangle$                                  | $\approx 0.19$     |                                 |
| Conductivité thermique K                                    | 2.49               | $\text{Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| Capacité thermique volumique                                | $2.88 \times 10^6$ | $\text{Jm}^{-3} \text{ K}^{-1}$ |
| Hauteur de végétation h                                     | 0.04               | m                               |
| <b>Paramètres météorologiques</b>                           |                    |                                 |
| Température de l'air $T_a$                                  | 15.8 à 28.5        | $^{\circ}\text{C}$              |
| Humidité relative de l'air $e_a$                            | 0.64 à 0.99        |                                 |
| Humidité relative de surface $e_s$                          | 1.                 |                                 |
| Vitesse du vent u   | 0.6 à 2.1          | $\text{ms}^{-1}$                |
| <b>Conditions à la limite inférieure <math>x = L</math></b> |                    |                                 |
| Température $T_l$   | 21.4               | $^{\circ}\text{C}$              |
| Profondeur $l$  | 0.70               | m                               |

Table I.4 : Même légende que dans la table I.2 pour l'expérience de Vauclin et al. (non publié, 1980).

| Méthode :                      | Expérience<br>Vauclin | Simulation |
|--------------------------------|-----------------------|------------|
| $T_o, ^{\circ}\text{C}$        | 24.8                  | 23.5       |
| $\Delta T_s, ^{\circ}\text{C}$ | 11.3                  | 14.4       |
| $T_{smax}, ^{\circ}\text{C}$   | 31.8                  | 32.8       |
| $T_{smin}, ^{\circ}\text{C}$   | 20.5                  | 18.4       |

Les résultats précédents montrent que les équations (P) et le modèle de flux décrit sont "assez réalistes" malgré l'approximation due au découplage des équations. On obtient en effet moins de  $0.6^{\circ}\text{C}$  d'erreur quadratique moyenne sur la température de surface.

On dispose ainsi d'un modèle très simplifié mais qui permet de générer des solutions suffisamment réalistes pour tester les méthodes inverses que nous allons définir.

Nous donnerons toutefois, brièvement, au chapitre II la méthode générale de résolution du problème inverse pour les équations couplées.

DEUXIEME PARTIE  
PROBLEME INVERSE SUR UN PIXEL

II.1. PROBLEMES POSES EN TELEDETECTION

L'un des buts spécifiques de la télédétection est de mesurer sur de longues périodes et des domaines étendus des paramètres décrivant la surface de la terre ainsi que de rendre compte de phénomènes atmosphériques de surface.

Ces paramètres peuvent se décomposer en deux catégories :

- Les paramètres primitifs tels que la température de surface, le flux solaire, l'albédo, l'émissivité spectrale qui peuvent être déduits des mesures de radiance du sol.
- Les paramètres secondaires qui peuvent être déduits des paramètres primitifs moyennant des mesures météorologiques complémentaires.

La caractérisation des paramètres primitifs constitue un problème important (et très étudié) que dans ce chapitre nous supposerons résolu (nous y reviendrons au chapitre III). Nous nous attacherons dans ce chapitre à la détermination des grandeurs secondaires comme les flux de chaleur latente, de chaleur sensible et les capacités et conductivités du sol. Nous montrerons par exemple qu'il est possible de déterminer ces flux sans mesures des résistances aérodynamiques dont des valeurs moyennes seront calculées par la méthode.

Toutes les méthodes proposées jusqu'ici pour déterminer des caractéristiques du sol utilisent la connaissance a priori des résistances aérodynamiques. Parmi les méthodes les plus simples, citons celle proposée par Jackson et al. (1977) qui n'utilise qu'une seule mesure quotidienne de température ainsi que Seguin et Itier (1983) qui déduisent ces coefficients de transferts d'une étude statistique des mesures. Une méthode plus élaborée, utilisant également une mesure par jour est donnée par Soer (1980) et nécessite une description complète a priori des différentes résistances.

L'analyse de Fourier conduit Watson (1975) à montrer, dans le cas de surfaces rocheuses sèches, qu'on peut évaluer l'inertie thermique. Ainsi, Price (1977) introduit l'inertie thermique apparente en examinant les deux premiers termes du développement de Fourier. Toutefois, même si la notion d'inertie thermique apparente peut être significative en géologie (Kahle, 1981), elle paraît peu

significative pour les problèmes agrométéorologiques où l'évapotranspiration intervient fortement (Watson, 1978 ; Carlson et al., 1978 ; Becker, 1980 ; Price, 1980.).

Certains modèles qui permettent d'évaluer l'inertie thermique vraie et l'évapotranspiration ont également été élaborés. Rosema et Bijleveld (1977) ont défini une telle méthode dans le code TELL-US qui ne demande que deux mesures journalières de température et qui est basée sur l'observation d'abaques obtenues à partir du modèle numérique proposé par Rosema (1975). Ce code a été appliqué par Rosema et al. (1978) et Reiniger et al. (1985) pour interpréter les données HCMM. Dans le même ordre d'idées, Price (1980, 1982) et Carlson et al. (1981) ont présenté une méthode donnant l'évapotranspiration et évaluant la capacité en eau d'un sol à partir des données HCMM.

Toutes ces méthodes ont l'avantage de n'utiliser que deux mesures journalières de température, mais leurs inconvénients majeurs résident dans leur très grande sensibilité au flux solaire que deux mesures journalières ne permettent pas de décrire suffisamment bien. De plus, elles nécessitent la connaissance des résistances aérodynamiques qui sont des grandeurs difficiles à mesurer.

Nous allons proposer dans ce chapitre une méthode générale permettant d'obtenir la capacité et la conductivité thermiques ainsi que l'évapotranspiration LE, le flux de chaleur sensible H et éventuellement d'autres flux. Cette méthode, bien qu'elle nécessite plus de deux mesures de température journalières, est peu sensible aux variations du flux solaire et ne nécessite pas la connaissance des résistances aérodynamiques dont elle donne des estimations.

Pour ce faire, nous avons dû essentiellement faire l'hypothèse de l'homogénéité du sol en surface et en profondeur et l'hypothèse d'un profil hydrique constant. Nous examinerons au chapitre III l'influence de l'hétérogénéité.

Toutefois, nous présenterons en II.2 la méthode générale d'obtention des flux pour le problème couplé, dans le cas où les capacités et conductivités sont estimées, puis en II.3 on présentera le cas de la modélisation thermique seule. Au paragraphe II.4, nous examinerons un aspect expérimental pour l'acquisition des données sur le terrain. Enfin en II.5 nous étudierons la stabilité de la méthode proposée et proposerons une méthode itérative stable.

## II.2. PRINCIPE GENERAL

### II.2.1. Expression linéarisée des flux

L'étude des flux du chapitre I nous permet d'écrire le flux thermique sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_T(h, T, t) = & (1 - \alpha) [R_G(t)] + \epsilon \epsilon_a [\sigma T_a^4] - \epsilon [\sigma T^4] \\ & + \chi_0 [f(T_a - T)] + \chi_0 M_a e_a \left[ f \frac{P_s(T_a)}{\gamma} \right] - \chi_0 M_s \left[ f \frac{P_s(T)}{\gamma} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

soit

$$\phi_T = \sum_k p_k \varphi_k(T, T_a) \quad (2)$$

où les fonctions  $\varphi_k$  sont les expressions entre crochets de (1) dont nous avons décrit des modèles au chapitre I.

De même, d'après (I.14), le flux hydrique s'écrit

$$\phi_h = \sum_j p_j \varphi_j(T, T_a) - K_h(h) \quad (3)$$

(en fait, le terme  $\sum_j p_j \varphi_j(T, T_a)$  apparaît déjà dans  $\phi_T$ ).

Dans ce qui suit, nous considérerons les  $p_k$  comme des constantes que nous nous proposons de déterminer. Nous leur donnerons pour simplifier encore les noms des paramètres qu'elles représentent et nous verrons que les valeurs que nous obtenons pour ces constantes sont des valeurs moyennes des paramètres.

Dans la suite, nous noterons P l'ensemble des paramètres (constants) que nous nous proposerons de déterminer. Cet ensemble sera une partie de

$$\mathcal{P} = \{1 - \alpha, \epsilon \epsilon_a, \epsilon, \chi_0, \chi_0 M_a e_a, \chi_0 M_s\}.$$

Au paragraphe II.5 nous y adjoindrons la conductivité et la capacité thermiques.

L'ensemble  $\mathcal{P}$ -P est donc l'ensemble des paramètres connus et l'on pourra alors écrire (2) sous la forme

$$\phi_T = \varphi_0(T, T_a) + \sum_{p_k \in P} p_k \varphi_k(T, T_a) \quad (4)$$

où  $\varphi_0(T, T_a)$  est la partie connue (ou modélisée) du flux thermique.

On peut écrire une expression analogue pour  $\phi_h$

$$\phi_h = \psi_0(h, T, T_a) + \sum_{p_j \in P} p_j \varphi_j(T, T_a) \quad (5)$$

où  $\psi_0(h, T, T_a)$  est la partie connue (ou modélisée) du flux hydrique.

Les fonctions  $\varphi_0$  et  $\psi_0$  dans (4) et (5) représentent donc la partie mesurable des flux.

### II.2.2. Problème inverse pour les équations couplées

On suppose connues :

\* n mesures de température de surface  $T_j^{\text{mes}} = T^{\text{mes}}(0, t_j)$  et de l'humidité  $h_j^{\text{mes}} = h^{\text{mes}}(0, t_j)$  pour  $j = 1$  à  $n$  ;

\* n mesures de température de l'air à 2 mètres du sol  $T_a(t_j)$ ,  $j = 1$  à  $n$  ;

\* n mesures de  $\varphi_0$  et de  $\psi_0$  en  $t_j$ ,  $j = 1$  à  $n$ .  $\varphi_0$  pourra être, pour fixer les idées, le rayonnement net  $R_N$  (pour le calcul de  $R_S$ , voir Gautier, 1982).

Nous supposons les coefficients de capacité et conductivité constants.

Parmi les paramètres non connus intervenant dans le système (I), (II), figurent  $T_\ell$ ,  $h_\ell$  et  $\ell$ . Or une étude numérique montre que lorsque  $\ell$  est de l'ordre de 1 m une variation de  $10^\circ\text{C}$  sur  $T_\ell$  génère des différences de température de surface d'écart moyen inférieur à  $1^\circ\text{C}$  (bien entendu, d'autant plus faible que  $\eta\ell$  est grand). Ceci est démontré de façon analytique en utilisant l'analyse de Fourier, la condition à remplir est que l'onde thermique diurne soit amortie à la profondeur  $\ell$ , c'est-à-dire que le produit  $d\ell$  soit  $\geq 1$  où  $d$  est la diffusivité (Becker, 1980, Hechinger, Raffy, Becker, 1982). On précise un aspect de ce problème en III.1.4c. La même remarque peut se faire sur  $h(0, t)$ . Autrement dit, ces paramètres ne seront pas décelables par des mesures de température et humidité de surface. Inversement, et c'est ce que nous utiliserons, une approximation même assez grossière de ces paramètres n'aura pas d'influence sur la

détermination des autres. (Nous vérifierons par exemple qu'une variation de 10°C sur  $T_\ell$  engendre des écarts inférieurs à 4 % sur les paramètres  $p_k$  cherchés).

Ainsi, en appelant  $p = (p_1, \dots, p_r) \in P$ , les paramètres à déterminer dans les flux, on est amené naturellement à résoudre

$$\min_p ( \|T^{\text{mes}}(0,t) - T(0,t)\|_{L^2(0,\tau)}^2 + \|h^{\text{mes}}(0,t) - h(0,t)\|_{L^2(0,\tau)}^2 ) \quad (6)$$

où  $\tau$  est la période d'une journée ;  $T^{\text{mes}}(0,t)$ ,  $h^{\text{mes}}(0,t)$  sont des interpolées des mesures et  $T(0,t)$ ,  $h(0,t)$  les solutions en  $x = 0$  de (I) et (II) (1ère partie).

Une autre méthode formellement équivalente est de résoudre

$$\begin{aligned} \min_p ( & \|K_T \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) + \phi_T(h^{\text{mes}}, T^{\text{mes}}, t)\|_{L^2(0,\tau)}^2 \\ & + \|K_h \frac{\partial h}{\partial x}(0,t) + \phi_h(h^{\text{mes}}, T^{\text{mes}}, t)\|_{L^2(0,\tau)}^2 ) \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\frac{\partial T}{\partial x}$  et  $\frac{\partial h}{\partial x}$  sont les dérivées des solutions (T,h) du système (I), (II) où les conditions en  $x = 0$  ont été remplacées par les conditions  $T(0,t) = T^{\text{mes}}(t)$ ,

$$h(0,t) = h^{\text{mes}}(t) :$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

$$T(0,t) = T^{\text{mes}}(t)$$

$$T(\ell,t) = T_\ell$$

+ condition initiale ou de périodicité

#### Remarque 1

Les problèmes (6) et (7) sont des problèmes de moindres carrés linéaires. On pourrait adjoindre aux inconnues  $p$ , les coefficients de diffusion  $c_T$ ,  $c_h$ ,  $K_T$ ,  $K_h$ . Les problèmes (6) et (7) seraient alors non linéaires puisque  $T$  et  $h$  dépendent de ces coefficients.

Comme on l'a indiqué plus haut, la résolution de (6) et (7) est actuellement trop lourde pour être efficace en télédétection. Nous nous limiterons dans toute la suite à la modélisation thermique (P).

#### Remarque 2

Le problème (9) consiste à minimiser des énergies alors que (15) minimise des températures.

## II.3. PROBLEME INVERSE POUR (P)

II.3.1. Les équations normales

Si l'on se limite au problème thermique (8), (7) se réduit à

$$\min \int_0^{\tau} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + \varphi_0(T^{\text{mes}}, T_a) + \sum_{k=1}^r p_k \varphi_k(T^{\text{mes}}, T_a) \right]^2 \frac{dt}{\tau} \quad (9)$$

où l'on note pour simplifier  $K = K_T$  et où  $\frac{\partial T}{\partial x}$  est la dérivée de la solution de (8). En écrivant que la solution  $T(0, t)$  est la projection orthogonale de  $T^{\text{mes}}(0, t)$  sur le sous-espace de  $L^2(0, \tau)$  engendré par les solutions de (P) quand  $p \in \mathbb{R}^q$ , on obtient les équations normales associées à (9) :

$$Bp = g \quad (10)$$

où la matrice B d'ordre q est donnée par

$$B_{k\ell} = \int_0^{\tau} \varphi_k(T^{\text{mes}}, T_a) \cdot \varphi_{\ell}(T^{\text{mes}}, T_a) \frac{dt}{\tau} \quad (11)$$

et g est le vecteur défini par

$$g_k = - \int_0^{\tau} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + \varphi_0(T^{\text{mes}}, T_a) \right] \varphi_k(T^{\text{mes}}, T_a) \frac{dt}{\tau} \quad (12)$$

En pratique, puisqu'on ne connaît  $T^{\text{mes}}$  et  $T_a$  qu'aux instants  $t_j$ , il est naturel de discrétiser (10) en

$${}^t_{AAp} = {}^t_{Ab} \quad (13)$$

où A est la matrice  $n \times q$  et b le vecteur d'ordre n définis par

$$A_{jk} = \varphi_k(T^{\text{mes}}(t_j), T_a(t_j)) \quad (14)$$

$$b_j = - \left[ K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t_j) + \varphi_0(T^{\text{mes}}(t_j), T_a(t_j)) \right]$$

pour  $1 \leq k \leq r$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

C'est donc en fait (13) que l'on résoudra.

Le problème (6) s'écrit

$$\min_p \int_0^\tau (T^{\text{mes}}(0,t) - T(0,t))^2 \frac{dt}{\tau} \quad (15)$$

où  $T(0,t)$  est défini par la solution de (P)

Si l'on définit l'opérateur  $Q$  de  $L^2(0,\tau)$  par :

$$Q : \phi(T^{\text{mes}}, T_a) \rightarrow T(0,t) - T_\ell \quad (16)$$

$T(0,t)$  est la solution de (P) avec condition initiale nulle,  $Q$  est linéaire (comme on l'a montré au chapitre I, la condition initiale nulle n'est pas une condition restrictive). Ainsi, (15) s'écrit :

$$\min_p \int_0^\tau [Q \varphi_0(T^{\text{mes}}, T_a) + \sum_{k=1}^r p_k Q \varphi_k(T^{\text{mes}}, T_a) + T_\ell - T^{\text{mes}}(t)]^2 \frac{dt}{\tau} \quad (17)$$

Comme précédemment, les équations normales associées sont

$$\tilde{B}p = \tilde{g}$$

où  $\tilde{B}$  et  $\tilde{g}$  ont des expressions évidentes et dont la discrétisation aux instants  $t_j$ ,  $j = 1$  à  $n$ , donne le système suivant

$$t_{AAp}^{\wedge\wedge} = t_{Ab}^{\wedge\wedge} \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{jk} &= Q \varphi_k(t_j) \\ \tilde{b}_j &= -Q \varphi_0(t_j) - T_\ell + T^{\text{mes}}(t_j) \end{aligned} \quad (19)$$

pour  $1 \leq k \leq r$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Ce sont donc les systèmes (13) ou (18) que l'on se proposera de résoudre.

En fait, comme nous le verrons ce sont des systèmes modifiés de (13) et (18) que nous résoudrons concrètement.

### II.3.2. Aspects théoriques

Le problème inverse général de recherche du flux connaissant la température de surface s'exprime par la recherche de  $\phi \in L^2(0, \tau)$  telle que

$$Q\phi = T^{\text{mes}} \quad (20)$$

où  $T^{\text{mes}} \in L^2(0, \tau)$  est donné.

L'opérateur  $Q$  étant compact, (20) est un problème mal posé au sens de Hadamard (Hadamard, 1932). Ce problème est très abondamment étudié ; citons à titre tout à fait indicatif les travaux de Tichonov (1963, 1964), Tichonov et Arsénine (1976), Lavrentiev (1967), Cassinès (1981), Deuflhand et al. (1982), Chavent et al. (1973), Chavent (1971, 1973), Groetsch (1984) et les très nombreux travaux de l'Ecole de Montpellier (Sabatier, 1978 à 1984). La presque totalité de ces travaux traite du problème en dimension infinie.

Mais dans notre travail, l'expression affine (2) que nous avons adoptée pour  $\phi$  transforme le problème général (20) en un problème de moindres carrés linéaires

$$\sum_k p_k Q\varphi_k(T^{\text{mes}}) = T^{\text{mes}} \quad (21)$$

en dimension finie correspondant à (17). On cherche donc la projection orthogonale de  $T^{\text{mes}}$  sur le sous-espace engendré par les  $Q\varphi_k(T^{\text{mes}}, t)$  dont les équations normales sont données par (18).

De même (9) correspond au problème de moindres carrés

$$\sum_k p_k \varphi_k(T^{\text{mes}}) = Q^{-1}(T^{\text{mes}}) \quad (22)$$

et l'on cherche ici la projection orthogonale de  $Q^{-1}(T^{\text{mes}})$  sur l'espace engendré par les  $\varphi_k(T^{\text{mes}}, t)$  dont les équations normales sont données par (13).

Donc dans les deux problèmes inverses (9) et (17), la question de la dépendance continue des solutions par rapport aux données  $T^{\text{mes}}, T_a, R_N, \dots$  est un problème de conditionnement de système linéaire. Ces problèmes sont abordés dans des situations tout à fait générales dans Nashed (1976).

La compacité de  $Q$  peut suggérer a priori le choix de (21) sur (22). Toutefois, le calcul numérique du conditionnement des matrices de (21) et de (22) donne dans les deux cas des valeurs voisines de 500 (pour la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne). Ce résultat indique que les deux systèmes peuvent être très instables vis à vis de faibles erreurs sur les données. C'est l'étude que nous ferons dans le paragraphe suivant.

### II.3.3. Remarque sur le rapport de Bowen

La méthode proposée précédemment pour le calcul des flux repose sur l'indépendance linéaire des fonctions modélisées  $\varphi_k$ . Numériquement, nous avons toujours travaillé sur un système  $\hat{\varphi}_k$  orthogonalisé (qui engendre le même sous-espace que les  $\varphi_k$ ). Mais dans le cas où deux des  $\varphi_k$  sont homothétiques, la détermination des constantes  $p_k$  associées devient impossible. C'est ce qui se produit en particulier si le rapport de Bowen  $\frac{H}{LE}$  est constant durant une journée. Dans ce cas, on ne pourra donc déterminer séparément  $H$  et  $LE$ .

La résolution de (18) conduit alors à la notion de pseudo-inverse (Penrose, 1955; Nashed, 1976) que nous n'envisagerons pas ici.

## II.4. STABILISATION OPTIMALE ET CAS NON LINEAIRE

Nous verrons dans ce paragraphe que comme il était prévisible, les systèmes (13) et (18) sont instables ; nous définirons des systèmes voisins stables, nous en déduirons des coefficients de stabilisation optimale puis une méthode itérative de résolution de ces systèmes. Nous étendrons ces résultats à la recherche des coefficients de diffusion  $K$  et  $c$ .

### II.4.1. Instabilité des systèmes (13) et (18)

Pour un choix de paramètres  $p_k$  ( $p_1 = \epsilon \epsilon_a$ ,  $p_2 = \chi_0$ ,  $p_3 = \chi_0 M_a e_a$ ,  $p_4 = \chi_0 M_s$ ),  $c$  et  $K$ , nous avons généré par la méthode décrite par (I.19) une solution  $T(x,t)$ . Nous avons appliqué (I.19) où chaque  $T_\mu$  a été calculé, avec une méthode de discrétisation en différences finies par la méthode de Crank-Nicholson et un pas d'espace logarithmique. Nous avons ainsi  $T^{mes}(t) = T(0,t)$ . Puis nous avons appliqué les méthodes décrites par (13) et (18). La table II.1 donne à titre indicatif les résultats obtenus par (13).

Table II.1 : Erreurs relatives sur les  $p_k$  par (13) sans erreur sur les données d'entrée.

|  | $P_k$                |          |                  |              |
|--|----------------------|----------|------------------|--------------|
|  | $\epsilon\epsilon_a$ | $\chi_o$ | $\chi_o M_a e_a$ | $\chi_o M_s$ |
| Erreurs relatives<br>$ \frac{\Delta p_k}{p_k} $ en % | 0.06                 | 0.71     | 0.09             | 0.06         |

Les erreurs ne reflètent donc que les erreurs de discrétisation. Ce résultat indique la précision de l'algorithme, où les erreurs de mesure et de modèle sont nulles par construction.

En simulant des erreurs de mesure sur les données d'entrée on observe l'instabilité du système par rapport aux erreurs de mesure. Par exemple en générant des erreurs selon une loi de densité uniforme sur  $T^{mes}$  (et en gardant exacts  $T_a$  et  $R_s$ ) on obtient les résultats catastrophiques de la table II.2 (sur les erreurs de mesure pour  $T^{mes}$  voir Cooper et al. (1984)).

Table II.2 : Erreurs relatives sur les  $p_k$  par (13) avec une simulation d'erreur sur  $T^{mes}(t_j)$  générée par une loi uniforme d'amplitude moyenne.

| $\sigma$ | $P_k$                |          |                  |              |
|----------|----------------------|----------|------------------|--------------|
|          | $\epsilon\epsilon_a$ | $\chi_o$ | $\chi_o M_a e_a$ | $\chi_o M_s$ |
| 1°C      | 12 %                 | 21 %     | 13 %             | 10 %         |
| 2°C      | 110 %                | 111 %    | 22 %             | 82 %         |

Précisons la résolution de (13) (ou (18)).

Le calcul des matrices  $A$  ou  $\hat{A}$  nécessite la résolution du problème (p). Chaque méthode numérique adoptée constitue donc une variante numérique. Les tables 1 et 2 représentent les calculs faits en appliquant la méthode des différences finies. Toutefois, nous avons également appliqué deux autres tech-

niques de résolution dont nous précisons brièvement le principe.

a. La méthode par décomposition de Fourier

Nous donnons ici la solution de (8) par décomposition en série de Fourier.

Ces formules seront utilisées ultérieurement. Si

$$T_{mes}(t) = \frac{a_0^{(m)}}{2} + \sum_{q \geq 1} a_q^{(m)} \cos \omega_q t + b_q^{(m)} \sin \omega_q t \quad (23)$$

("l'exposant" (m) n'étant que le signe qu'il s'agit de la température mesurée)

$\omega_q = \frac{2q\pi}{\tau}$  ( $\tau$  période journalière) alors la solution de (P) est

$$T(x,t) = \frac{T_\ell - \frac{a_0^{(m)}}{2}}{L} x + \frac{a_0^{(m)}}{2} + \sum_{q \geq 1} a_q(x) \cos \omega_q t + b_q(x) \sin \omega_q t \quad (24)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} a_q(x) &= a_q^{(m)} \left( \frac{\cos w \cos v \operatorname{sh} w \operatorname{sh} v + \sin w \sin v \operatorname{ch} w \operatorname{ch} v}{\sin^2 v + \operatorname{sh}^2 v} \right) \\ &+ b_q^{(m)} \left( \frac{\sin w \cos v \operatorname{ch} w \operatorname{sh} v - \cos w \sin v \operatorname{sh} w \operatorname{ch} v}{\sin^2 v + \operatorname{sh}^2 v} \right) \\ b_q(x) &= -a_q^{(m)} \left( \frac{\sin w \cos v \operatorname{ch} w \operatorname{sh} v - \cos w \sin v \operatorname{sh} w \operatorname{ch} v}{\sin^2 v + \operatorname{sh}^2 v} \right) \\ &+ b_q^{(m)} \left( \frac{\cos w \cos v \operatorname{sh} w \operatorname{sh} v + \sin w \sin v \operatorname{ch} w \operatorname{ch} v}{\sin^2 v + \operatorname{sh}^2 v} \right) \end{aligned} \right. \quad (25)$$

où  $v = \ell \sqrt{\frac{c\omega_q}{2K}}$  ,  $w = (\ell - x) \sqrt{\frac{c\omega_q}{2K}}$  .

Compte tenu des ordres de grandeur des coefficients de diffusion et de la période, on peut écrire

$$\left\{ \begin{aligned} a_q(x) &\approx e^{-\frac{xv}{\ell}} \left[ a_q^{(m)} \cos \frac{xv}{\ell} - b_q^{(m)} \sin \frac{xv}{\ell} \right] \\ b_q(x) &\approx e^{-\frac{xv}{\ell}} \left[ a_q^{(m)} \sin \frac{xv}{\ell} + b_q^{(m)} \cos \frac{xv}{\ell} \right] \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Ainsi, le calcul de  $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$  se fait en dérivant (24) et la résolution du problème inverse par (9) s'obtient immédiatement. Elle a été appliquée dans (Abdellaoui et al., 1982) et précisée dans (Abdellaoui et al., 1985).

L'application de cette technique a l'avantage de fournir des résultats plus rapides que par la méthode des différences finies. Elle a par contre l'inconvénient de mal tenir compte des variations de  $T^{mes}$  dès qu'elles ne sont pas très régulières. Les résultats semblent comparables dans l'ensemble à la méthode adoptée ici (voir par exemple Raffy-Nerry, 1986).

#### b. La méthode par transformation de Laplace de (P)

L'application de la transformation de Laplace pour obtenir la solution de (P) conduit à des résultats décevants pour la solution du problème inverse. En effet, la température est obtenue comme somme d'une série dont la convergence est très mauvaise. Nous ne donnerons donc ici aucun résultat concernant cette possibilité.

#### II.4.2. Stabilisation

Les résultats précédents montrent que si nous n'avons pour toute information que les données d'entrée cela est insuffisant. De nombreux auteurs suggèrent alors d'introduire une information a priori sur les solutions cherchées (Tichonov, 1964 ; Tarantola et Valette, 1982a, 1982b ; Twomey, 1977 ; pour n'en citer que quelques uns).

Nous proposons de remplacer le système (13) ou (18) par

$$({}^t A \Gamma^2 A + \Omega^2)_p = {}^t A \Gamma^2 \beta + \Omega^2_p (o) \quad (27)$$

Les différents termes sont de deux ordres :

#### Informations a priori sur les mesures

\*  $\Gamma = (\gamma_j)$  matrice diagonale d'ordre n (nombre d'instant de mesure) où chaque  $\gamma_j$  est proportionnel à la précision des mesures à l'instant  $t_j$ . Ainsi si l'erreur sur la mesure est  $\Delta T_j$  alors  $\gamma_j = \frac{a}{\Delta T_j}$ , où a est une constante ayant la dimension d'une température. De façon pratique, si le pixel est nuageux à l'instant  $t_j$ ,  $\gamma_j$  sera pris plus petit que si le ciel est clair.

Cette matrice est une donnée et à défaut de toute information elle sera constante.

#### Informations a priori sur les inconnues

\*  $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_r^{(0)})$  est un vecteur estimation a priori sur les solutions. Par exemple, si l'albédo  $p_1 = \alpha$  est une inconnue, on sait que  $0 \leq \alpha \leq 1$  et on pourra sans autre information sur cette inconnue prendre  $p_1^{(0)} = \frac{1}{2}$ . D'une façon générale et à défaut d'autre information que des bornes pour  $p_k$ , on pourra prendre  $p_k^{(0)} = \frac{\nu_k + \mu_k}{1}$  si  $\nu_k \leq p_k \leq \mu_k$ .

On peut aussi utiliser des résultats de la littérature ou d'une banque de données. Une telle méthode est proposée par A. Chedin pour l'inversion des profils atmosphériques.

\*  $\Omega = (\omega_k)$  est une matrice diagonale d'ordre  $r$  (le nombre d'inconnues) que nous allons préciser dans le paragraphe suivant, mais que l'on peut introduire comme suit : chaque  $\omega_k$  est proportionnel à la qualité de l'estimation  $p_k^{(0)}$  que l'on fait de  $p_k$ . Si par exemple on sait que l'on est sur un sol désertique les coefficients  $p_k$  relatifs à l'évapotranspiration seront petits avec une forte probabilité  $\omega_k$  alors qu'au contraire au-dessus de nos régions on prendrait des  $\omega_k$  faibles (sauf autre information). D'une façon générale et sans information on pourrait prendre  $\omega_k^2 = \frac{a_k}{\mu_k - \nu_k}$  (où  $a_k$  est un coefficient introduit pour une raison de dimension).

Avant de donner des résultats numériques, montrons qu'on peut calculer une matrice  $\Omega_{opt}$ , optimale au regard des erreurs de mesure.

#### II.4.3. Résolution du problème inverse avec erreurs sur les données par itérations

Reprenons le problème (27). Le vecteur  $p^{(0)}$  étant une estimation initiale a priori de la solution, la solution  $p = p^{(1)}$  de (27) devra être meilleure puisqu'on fait appel au modèle et aux mesures dans  $\mathcal{A}$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ . D'où la méthode itérative

$$({}^t \mathcal{A} \Gamma^2 \mathcal{A} + \Omega^2) p^{(n+1)} = {}^t \mathcal{A} \Gamma^2 \beta + \Omega^2 p^{(n)}$$

Posons  $U = {}^t A \Gamma^2 A + \Omega^2$ ,  $B = {}^t A \Gamma^2 \beta$  et supposons que le plus grand module des valeurs propres  $\rho(U^{-1} \Omega^2)$  soit tel que

$$\rho(U^{-1} \Omega^2) < 1 .$$

Dans ces conditions,  $I - U^{-1} \Omega^2$  est inversible (Householder, 1964) et la formule de récurrence donne

$$p^{(n+1)} = [I + (U^{-1} \Omega^2) + \dots + (U^{-1} \Omega^2)^n] U^{-1} B + (U^{-1} \Omega^2)^{n+1} p^{(0)}$$

soit

$$p^{(n+1)} = [I - (U^{-1} \Omega^2)^{n+1}] [I - U^{-1} \Omega^2]^{-1} U^{-1} B + (U^{-1} \Omega^2)^{n+1} p^{(0)} .$$

Donc pour que la suite  $(p^{(n)})$  converge il faut et suffit que  $(U^{-1} \Omega^2)^n$  converge vers 0, c'est-à-dire que  $\rho(U^{-1} \Omega^2) < 1$ . Si  $p^*$  est la limite de la suite de  $(p^{(n)})$ ,  $p^*$  vérifie alors

$$p^* = [I - U^{-1} \Omega^2]^{-1} U^{-1} B = ({}^t A \Gamma^2 A)^{-1} \beta$$

autrement dit,  $p^* = p$ , solution du problème de moindres carrés, ceci pour tout choix initial  $p^{(0)}$ .

#### Rémarque :

Dans la pratique, nous n'aborderons pas le calcul des valeurs propres de  $U^{-1} \Omega^2$  et nous observerons la convergence de la suite  $(p^{(n)})$ .

#### II.4.4. Stabilisation optimale

Supposons pour commencer que nous connaissions les erreurs sur les données  $T^{\text{mes}}$ ,  $T_a$ ,  $R_N$ . Soient  $\Delta T(t_j)$  l'erreur sur  $T^{\text{mes}}$ ,  $\Delta T_a(t_j)$  celle sur  $T_a$  et  $\Delta R(t_j)$  celle sur  $R_N$  pour  $j = 1$  à  $n$ .

Rappelons que nous condensons (13) et (18) en

$${}^t A A p = \beta \tag{28}$$

Alors les erreurs sur les données engendrent une erreur  $\Delta \mathcal{A} = (\Delta a_{ij})$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\Delta \beta = (\Delta \beta_j)$  sur  $\beta$ .

Soit donc  $p$  la solution exacte de (28). La solution effective calculée par le système stabilisé (27) avec les données réelles sera  $p + \Delta p$  obtenu par la résolution de

$$[{}^t(\mathcal{A} + \Delta \mathcal{A})\Gamma^2 (\mathcal{A} + \Delta \mathcal{A}) + \Omega^2] (p + \Delta p) = {}^t(\mathcal{A} + \Delta \mathcal{A})\Gamma^2 (\beta + \Delta \beta) + \Omega^2 p^{(o)}$$

Si l'on néglige les termes du second ordre par rapport aux erreurs, on a

$$[{}^t\mathcal{A}\Gamma^2\mathcal{A} + \Omega^2]\Delta p = {}^t\mathcal{A}\Gamma^2[\Delta\beta - \Delta\mathcal{A}p] + \Omega^2(p^{(o)} - p)$$

d'où

$$\Delta p = [{}^t\mathcal{A}\Gamma^2\mathcal{A} + \Omega^2]^{-1} \{ {}^t\mathcal{A}\Gamma^2[\Delta\beta - \Delta\mathcal{A}p] + \Omega^2(p^{(o)} - p) \} .$$

Ainsi, au premier ordre, l'erreur  $\Delta p$  sera nulle si

$$\Omega^2(p^{(o)} - p) = {}^t\mathcal{A}\Gamma^2[\Delta\mathcal{A}p - \Delta\beta]$$

d'où l'on déduit pour les indices pour lesquels  $p_i^{(o)} = p_i$

$$\omega_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ji} \gamma_j^2 \left[ \sum_{k=1}^r (\Delta a_{jk}) p_k - \Delta \beta_j \right]}{(p_i^{(o)} - p_i)} \quad (29)$$

pour  $i = 1$  à  $r$ .

On observe que si  $p_i^{(o)} = p_i$  alors  $\omega_i = \infty$ , ce qui montre que plus la connaissance a priori de  $p_i$  est bonne, plus le poids  $\omega_i$  est grand. On observe de plus que si l'erreur ( $\gamma_j$ ) sur les mesures tend vers 0, alors  $\omega_i$  tend vers 0 et le système stabilisé (27) tend vers (28) qui donne la solution exacte.

Les coefficients donnés par (28) représentent donc les termes diagonaux de la matrice  $\Omega$  optimale  $\Omega_{opt}$ . Toutefois, ne connaissant pas la solution exacte  $p$  et les erreurs  $(\Delta a_{jk})$  et  $(\Delta \beta_j)$ , on doit donner des valeurs approchées de  $\Omega_{opt}$ .

Calcul effectif de  $\Omega_{opt}$

Nous avons appliqué deux méthodes, la deuxième s'avérant plus efficace en temps de calcul et en précision.

La première idée consiste à considérer les données  $T^{mes}$ ,  $T_a$ ,  $R_N$  comme des variables aléatoires gaussiennes d'écart types  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{T_a}$ ,  $\sigma_{R_N}$  que l'on détermine a priori compte tenu de la qualité des mesures. On suppose de plus que chaque inconnue  $p_k$  est une variable aléatoire de loi  $\sigma_k$  ; si l'on n'a aucune connaissance sur ces lois on adoptera une loi uniforme sur l'intervalle  $[v_k, \mu_k]$  défini par les bornes a priori de  $p_k$ . Ainsi, on aura  $\sigma_k = \frac{\mu_k - v_k}{\sqrt{12}}$ .

On choisit alors  $p_k^{(0)}$  comme valeur moyenne de la loi de  $p_k$ . Par exemple  $p_k^{(0)} = \frac{\mu_k + v_k}{2}$  en l'absence de connaissance sur la loi de  $p_k$ .

Ainsi chaque  $\omega_i$  donné par (28) est une variable aléatoire dont on peut simuler la loi. La valeur adoptée étant la valeur moyenne de la distribution obtenue par la variable aléatoire  $\omega_i$  définie par :

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\sigma_i} \sum_{j=1}^n a_{ji} \gamma_j^2 \left[ \sum_{k=1}^r \Delta a_{jk} p_k^{(0)} - \Delta \beta_j \right] \quad (30)$$

Montrons à titre d'exemple sur la fig. II.1 les histogrammes obtenus pour  $\omega_k^2$ ,  $k = 1$  à 4.

La deuxième idée consiste à évaluer les erreurs  $(\Delta a_{ij})$ ,  $\Delta \beta_j$  par un filtrage. En effet, on prendra  $\Delta T(t_j)$  comme différence entre la valeur mesurée en  $t_j$  et la valeur obtenue par un lissage (par splines, par la méthode que nous décrivons dans (Raffy, Nerry, 1986) ou par toute autre méthode du type développé par Parton et al. (1981) et Ramrani (1986). De même pour les autres données d'entrée, d'où  $\omega_i$  par (29).

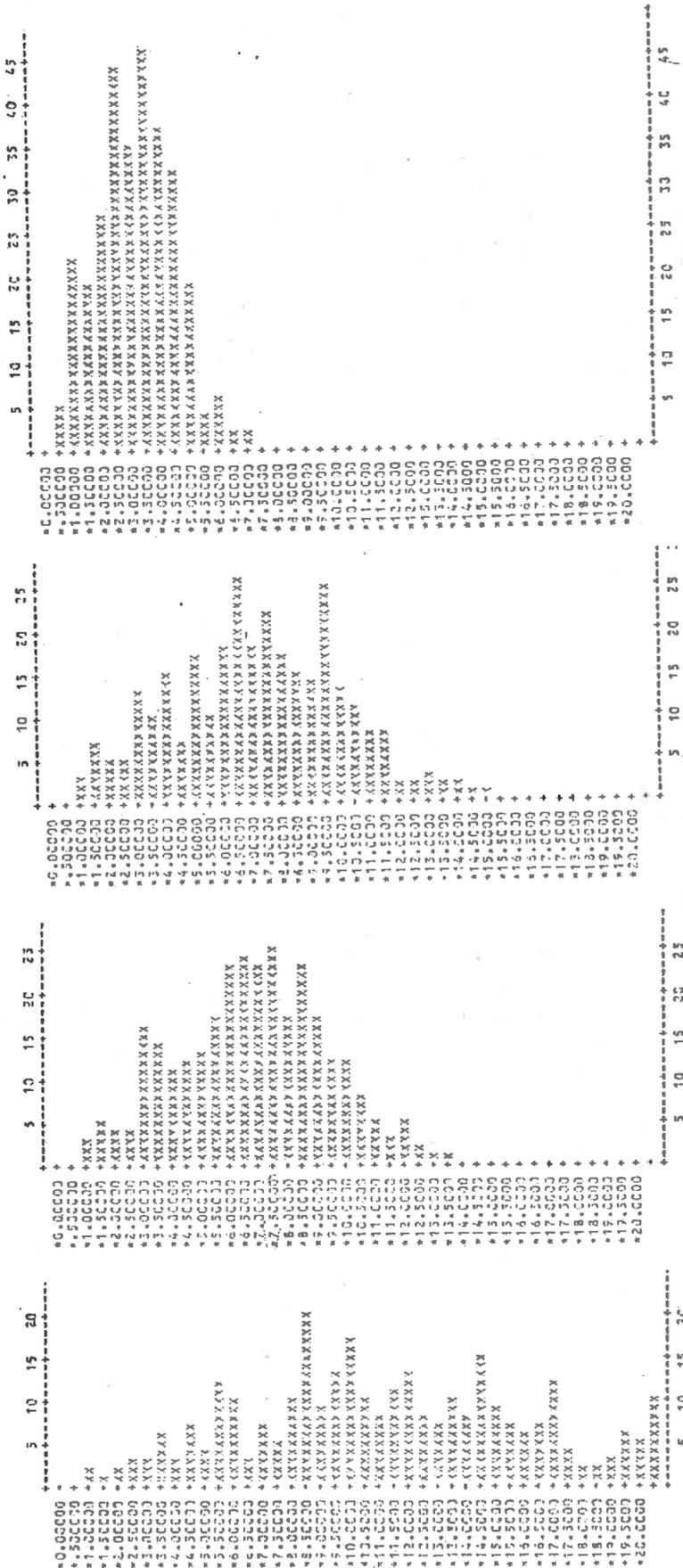


Fig. II.1 : Les inconnues du problème sont  $p_1 = \epsilon \epsilon_a$ ,  $p_2 = X_0$ ,  $p_3 = X_0 M_a e_a$ ,  $p_4 = X_0 M_s$  dans l'expression du flux. On simule des erreurs gaussiennes d'écart types  $\sigma_T = \sigma_{T_a} = 1^\circ C$  sur  $T_{mes}$  et  $T_a$  et  $\sigma_{R_s} = 5 W/m^2$  sur  $R_s$ . La figure représente les histogrammes des valeurs des  $\omega_k$ ,  $k = 1$  à 4 pour 300 essais.

Les essais numériques montrent que la 2ème méthode donne des résultats plus précis. C'est cette méthode que nous adopterons dans la suite.

Puisque la résolution de (27) où  $\Omega = \Omega_{opt}$  annule les erreurs du 1er ordre sur  $p$ , la solution obtenue sera meilleure que  $p^{(0)}$  aussi longtemps que les erreurs du second ordre négligées dans le calcul de  $\Omega_{opt}$  seront petites devant  $\Delta p, \Delta a_{ij}, \Delta \beta_j$ .

D'où la méthode itérative définie par

$$p^{(n+1)} = [{}^t A \Gamma^2 A + (\Omega_{opt}^{(n)})^2]^{-1} [{}^t A \Gamma^2 \beta + (\Omega_{opt}^{(n)})^2 p^{(n)}] \quad (31)$$

où  $\Omega_{opt}^{(n)}$  est la matrice optimale calculée au  $n^i$ ème itéré (elle dépend de  $p^{(n)}$ ).

Les essais numériques montrent que la suite  $p^{(n)}$  est telle que la suite  $\|p^{(n)} - p\|$  décroît jusqu'à une valeur de  $n$  (environ  $n = 50$ ) puis devient croissante, comme le montre par exemple la table II.3.

Table II.3 : Comportement de l'erreur relative  $e_n = \frac{\|p - p^{(n)}\|}{\|p\|}$  en fonction du nombre  $n$  d'itérations données par (30). Le vecteur  $p$  est celui défini en figure II.2, les erreurs sur  $T_{mes}, T_a, R_s$  également.

| n     | 0   | 1    | 5    | 10   | 15   | 30   | 50   | 60   | 70   | 80   | 90 |
|-------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| $e_n$ | 40% | 8.2% | 7.8% | 7.7% | 7.2% | 5.9% | 5.3% | 5.3% | 5.3% | 5.4% | 6% |

Les application numériques seront données en II.5.

II.4.5. Cas non linéaire

On s'intéresse désormais au cas non linéaire du problème inverse où les coefficients de diffusion du sol,  $c$  et  $K$ , -que nous supposons toujours constants- sont des inconnues.

Comme on l'a expliqué en II.2.2 (Remarque 1), la résolution de (6) ou (7) lorsque  $c$  et  $K$  sont des inconnues n'est pas envisageable. Nous allons voir que la méthode stabilisée précédente peut s'étendre à ce cas.

Remarquons que pour  $x \in [0, \ell]$ , l'intégration de l'équation de la chaleur et l'équation  $K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \phi(T, p)$  conduit à

$$J(x, t, p) = c \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) dz - [\phi(T, p) + K \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)] = 0 \quad (32)$$

En posant

$$\begin{cases} \varphi_{r+1}(T, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) & , \quad p_{r+1} = K \\ \varphi_{r+2}(T, t) = \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) dz & , \quad p_{r+2} = c \end{cases} \quad (33)$$

l'équation (32) s'écrit

$$J(x, t, p) = \varphi_0(T, t) + \sum_{k=1}^{r+1} p_k \varphi_k(T, t) = 0$$

(Notons que  $\varphi_{r+1}$  et  $\varphi_{r+2}$  dépendent des inconnues  $p_{r+1}$  et  $p_{r+2}$ ).

On transforme alors les problèmes de minimisation (9) et (15) respectivement en

$$\min_p \int_0^\tau [J(0, T, p)]^2 \frac{dt}{\tau} + \int_0^\tau [J(x, T, p)]^2 \frac{dt}{\tau} \quad (34)$$

et

$$\min_p \int_0^\tau [T(0, t, p) - T^{\text{mes}}(t)]^2 \frac{dt}{\tau} + \int_0^\tau [J(x, T, p)]^2 \frac{dt}{\tau} \quad (35)$$

La discrétisation de ces problèmes conduit à ajouter  $x$  lignes et 2 colonnes à la matrice  $\mathcal{A}$  et  $n$  composantes au vecteur  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{j+n,k} &= A_{j+n,k} = \tilde{A}_{j+n,k} = \varphi(t_j) \\ \beta_{j+n} &= b_{j+n} = \tilde{b}_{j+n} = -\varphi_0(t_j) \end{aligned} \quad (36)$$

$$j = 1 \text{ à } n, \quad k = 1 \text{ à } r+2$$

La méthode itérative décrite en II.4.4 s'applique alors et conduit numériquement, comme on le verra au paragraphe II.5, à des résultats convergents.

Cette technique qui est une façon de linéariser le problème linéaire offre l'avantage d'une grande rapidité de calcul (moins d'une seconde sur UNIVAC 1110).

## II.5. APPLICATIONS

Les applications présentées sont de deux ordres : sur des données simulées et sur des expériences in situ, au Niger et dans la Crau (France).

### II.5.1. Validation des méthodes par simulation

Les résultats qui suivent reproduisent une partie des résultats que nous avons plus amplement publiés (cf. références bibliographiques). Ils sont significatifs de l'ensemble des résultats obtenus.

#### Cas linéaires

Nous avons repris la situation de la table II.2 avec le système stabilisé (27) où  $\mathcal{A}$  est la matrice  $A$  définie par (14) (minimisation des énergies). Nous n'avons pas fait d'itérations. Les résultats sont donnés table II.4 que l'on pourra comparer à la table II.2.

Table II.4 : Erreurs relatives sur les  $p_k$  calculés par (27) avec les mêmes données que dans la table II.2 pour  $\text{diag } \Omega = (7.1, 1.3, 9.3, 5.5)$   $p^{(o)}$  tel que  $\frac{\|p-p^{(o)}\|}{\|p\|} = 40\%$ .  $\sigma_T$  représente l'amplitude moyenne de l'erreur sur T ; on a de plus ici ajouté une erreur sur  $T_a$  d'amplitude moyenne  $\sigma_{T_a} = 3^\circ\text{C}$  et une erreur sur  $R_s$  de  $15 \text{ W/m}^2$ .

| Pk         |                      |          |                  |              |
|------------|----------------------|----------|------------------|--------------|
| $\sigma_T$ | $\epsilon\epsilon_a$ | $\chi_0$ | $\chi_0 M_a e_a$ | $\chi_0 M_s$ |
| 1°C        | 4.6 %                | 0.9 %    | 0.19 %           | 3.0 %        |
| 2°C        | 2.2 %                | 0.2 %    | 9.8 %            | 4.1 %        |

Un autre cas où le rayonnement net  $R_N$  est une donnée d'entrée et où les inconnues sont les coefficients décrivant les flux H et LE est donné par la table II.5 suivante.

Table II.5 : Les inconnues  $\chi_0$ ,  $\chi_0 M_a e_a$  et  $\chi_0 M_s$  sont calculées sans stabilisation par (13) avec  $\sigma_T = 1^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_{T_a} = 0^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_{R_N} = 0 \text{ W/m}^2$  (ligne 1) puis avec  $\sigma_{T_a} = 3^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_{R_N} = 25 \text{ W/m}^2$ ,  $\frac{\|p-p^{(o)}\|}{\|p\|} = 40\%$  et  $\sigma_T = 1^\circ\text{C}$  (ligne 2), puis  $\sigma_T = 2^\circ\text{C}$  (ligne 3).

|                    | $\sigma_T$ | $\chi_0$ | $\chi_0 M_a e_a$ | $\chi_0 M_s$ |
|--------------------|------------|----------|------------------|--------------|
| sans stabilisation | 1°C        | 41 %     | 67.8 %           | 79.5 %       |
| avec stabilisation | 1°C        | 0.4 %    | 0.23 %           | 0.64 %       |
|                    | 2°C        | 0.3 %    | 5.7 %            | 7.5 %        |

Nous présentons fig. II.2 et 3 le calcul du flux d'évapotranspiration LE obtenu avec itérations (par (30)).

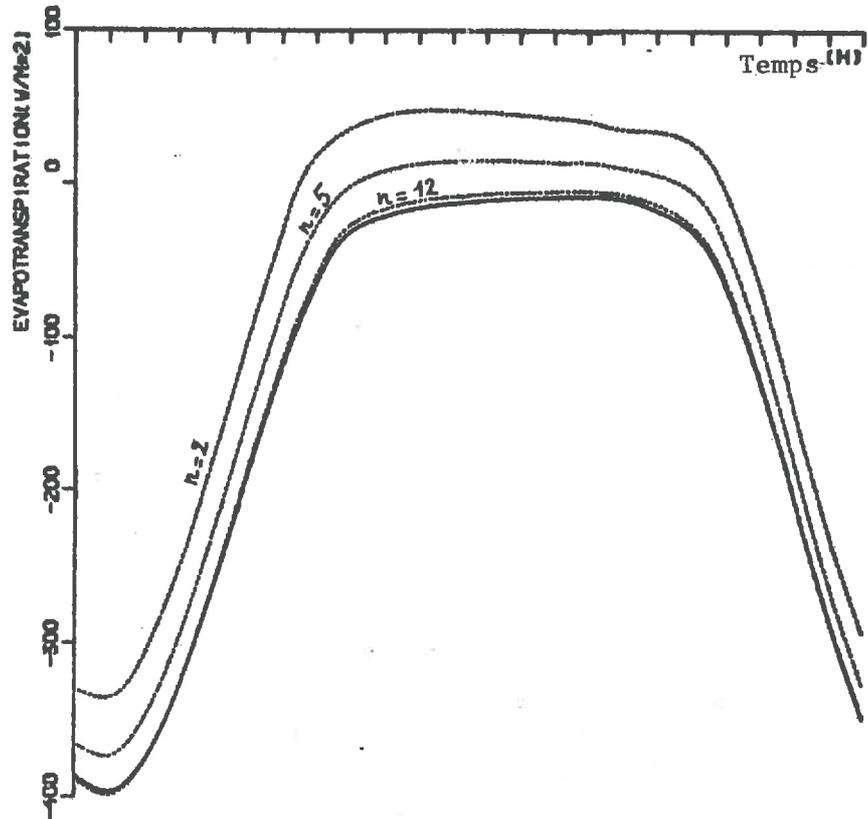


Fig. II.2a : Soient  $\Delta T^{\text{mes}}$  et  $\Delta T_a$  les erreurs de mesure simulées sur  $T^{\text{mes}}$  et  $T_a$ . On trace (---) en la  $LE = \chi_0 M_a e_a \cdot 2(T^{\text{mes}}, T_a) + \chi_0 M_s \cdot 3(T^{\text{mes}}, T_a)$  où les inconnues sont celles de la table II.4 obtenues après  $n = 2, 5$  et  $12$  itérations avec  $\sigma_T = \sigma_{T_a} = 0.5^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_{RN} = 10 \text{ W/m}^2$  et  $\|p - p^{(0)}\| / \|p\| = 50\%$ . LE exact (—).

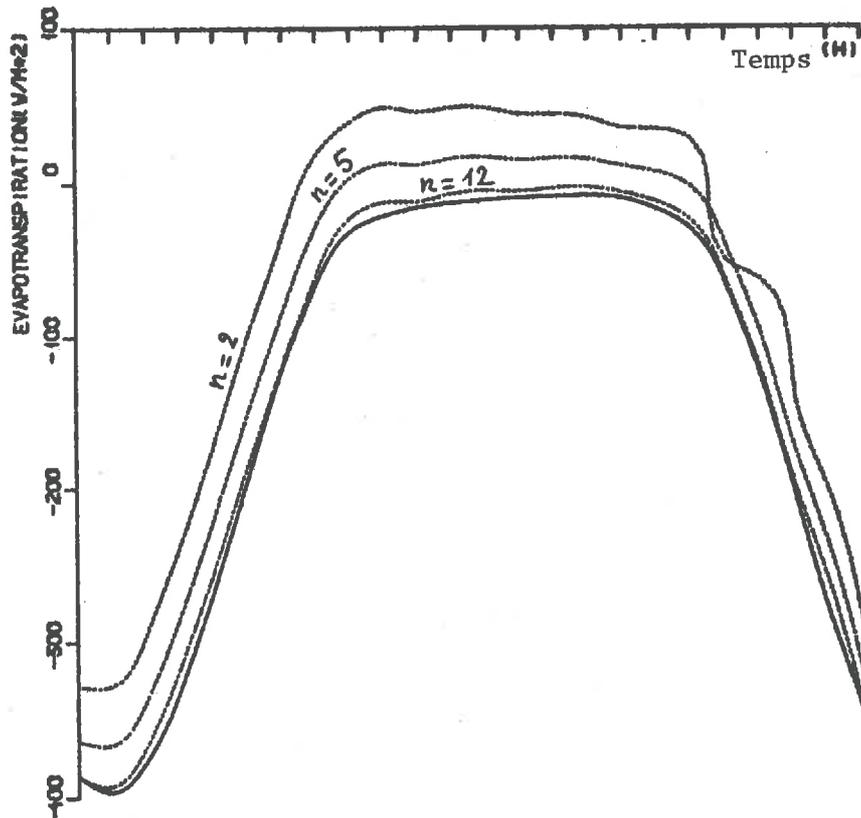


Fig. II.2b : On trace ici dans les mêmes conditions  $LE = \chi_0 M_a e_a \cdot 2(T^{\text{mes}} + \Delta T^{\text{mes}}, T_a + \Delta T_a) + \chi_0 M_s \cdot 3(T^{\text{mes}} + \Delta T^{\text{mes}}, T_a + \Delta T_a)$  qui est la valeur effectivement accessible. On voit que l'influence des erreurs de mesure sur les  $k$  est relativement faible. Cette erreur montre l'influence des erreurs de mesure sur le modèle lui-même.

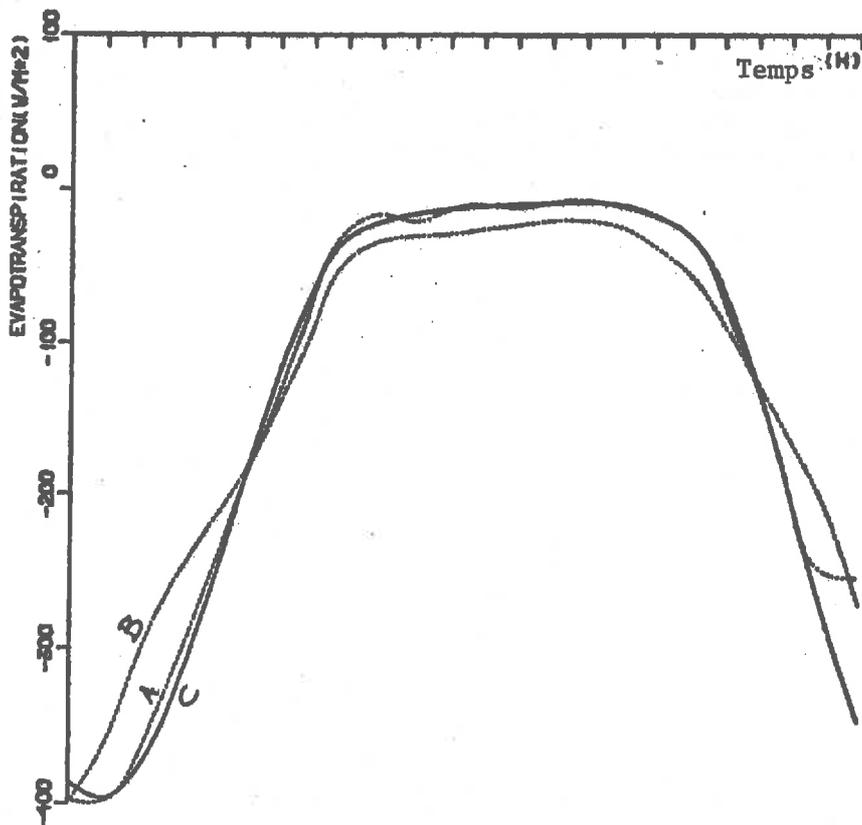


Fig. II.3 :  $LE = \chi_o M_a e_a \left[ 2(T_{mes} + \Delta T_{mes}, T_a + \Delta T_a) + \chi_o M_s \right] 3(T_{mes} + \Delta T_{mes}, T_a + \Delta T_a)$   
 calculé après 8 itérations pour  $\frac{\|p - p(o)\|}{\|p\|} = 50\%$   
 Courbe A :  $\sigma_T = 0.75^\circ C$   $\sigma_{T_a} = 1.5^\circ C$   $\sigma_{RN} = 10 W/m^2$   
 Courbe B :  $\sigma_T = 2^\circ C$   $\sigma_{T_a} = 3^\circ C$   $\sigma_{RN} = 10 W/m^2$   
 Courbe C : valeur exacte.

### Cas non linéaires

On calcule ici en plus des flux, les coefficients de diffusion  $c$  et  $K$  en utilisant (35) pour calculer la matrice  $\mathcal{H}$  et le second membre  $\beta$ . La table II.6 montre les résultats obtenus pour  $c$  et  $K$  dans un cas où  $H$  et  $LE$  sont aussi inconnus.

On donne figure II.4, à titre d'exemple, la courbe  $LE$  calculée pour différentes erreurs sur les données d'entrée.

Table II.6 : Erreurs relatives sur  $c$ ,  $K$  et l'inertie thermique avec des erreurs de mesures gaussiennes sur  $T_{mes}$ ,  $T_a$  et  $R_N$  d'écart types  $\sigma_T = 1.5^\circ C$ ,  $\sigma_{T_a} = 1.5^\circ C$  et  $\sigma_{R_N} = 10 W/m^2$ . On donne les résultats pour  $n = 2, 5$  et  $10$  itérations. La valeur initiale est  $p^{(0)}$  telle que  $\|p - p^{(0)}\| / \|p\| = 50\%$ .

| n               | 2    | 5     | 10    |
|-----------------|------|-------|-------|
| $I = \sqrt{cK}$ | 11 % | 3.3 % | 2.3 % |

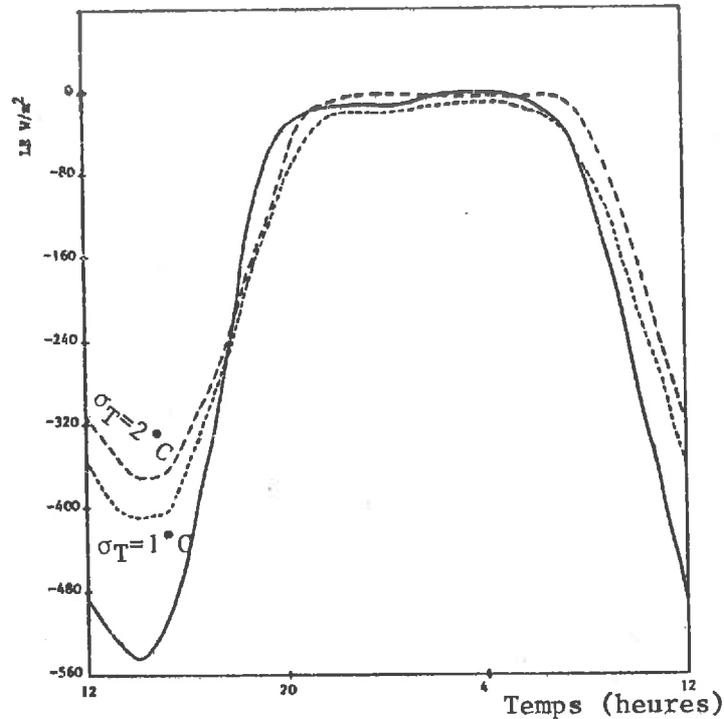


Fig. II.4 : Evapotranspiration calculée pour  $\sigma_{R_N} = 25 W/m^2$ ,  $\sigma_{T_a} = 3^\circ C$ ,  $\sigma_T = 1^\circ C$  puis  $\sigma_T = 2^\circ C$  (lignes hachurées) et LE exact (ligne continue). Les résultats sont ceux de la première itération. On a pris  $\|p - p^{(0)}\| / \|p\| = 40\%$ .

#### II.5.2. Résultats obtenus sur l'expérience du Niger

Les méthodes précédentes ont été appliquées sur les résultats expérimentaux obtenus par Dugdale et al. (1982) dans la zone sahélienne du Niger. Nous reproduisons en appendice les résultats des mesures. Ces mesures concernent les grandeurs suivantes (obtenues en mai 1982) : 21 mesures de  $T_a$ ,  $R_N$ ,  $U_a$  (vitesse

du vent),  $e_a$ ,  $\phi = H + LE + R_N$ . Ces mesures sont à peu près régulièrement espacées dans le temps. D'autre part, la capacité thermique  $c$  a été mesurée ainsi que la diffusivité  $\frac{K}{c}$  en différents points en profondeur dans le sol (voir fig. II.6). Par ailleurs la température de surface  $T^{mes}$  a été obtenue par extrapolations à partir de mesures de températures en profondeur (ce qui dispense de mesures d'émissivité). Le profil d'humidité a été pris constant et égal à 0.1.

Nous avons ainsi pu calculer  $H + LE = \phi - R_N$  et comparer aux mesures. La figure II.5 rend compte du résultat.

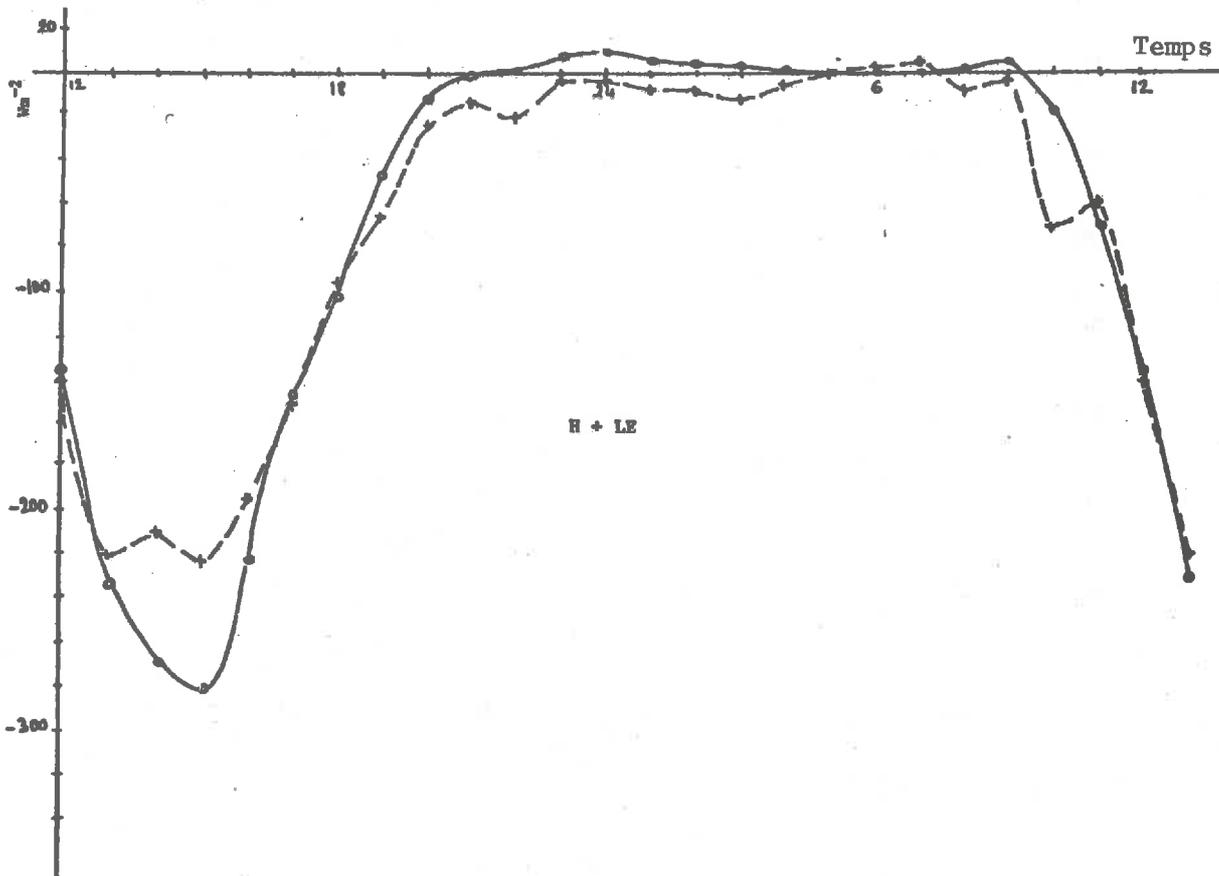


Fig. II.5 :  $H + LE$  calculé (ligne continue) et mesuré (pointillés) dans l'expérience du Niger (6 mai 1982).

En même temps que les flux, nous avons calculé  $K$  et  $c$  et la fig. II.6 compare l'inertie thermique constante  $\sqrt{Kc}$  calculée et le profil mesuré. On constate que la constante obtenue correspond à l'inertie thermique moyenne calculée sur les 10 premiers centimètres de sol. Remarquons toutefois que la diffusivité de la lère couche étant  $d$ , le facteur de pénétration de l'onde diurne est  $d = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \approx 9$  cm. Nous reviendrons sur cette explication dans la IIIème partie.

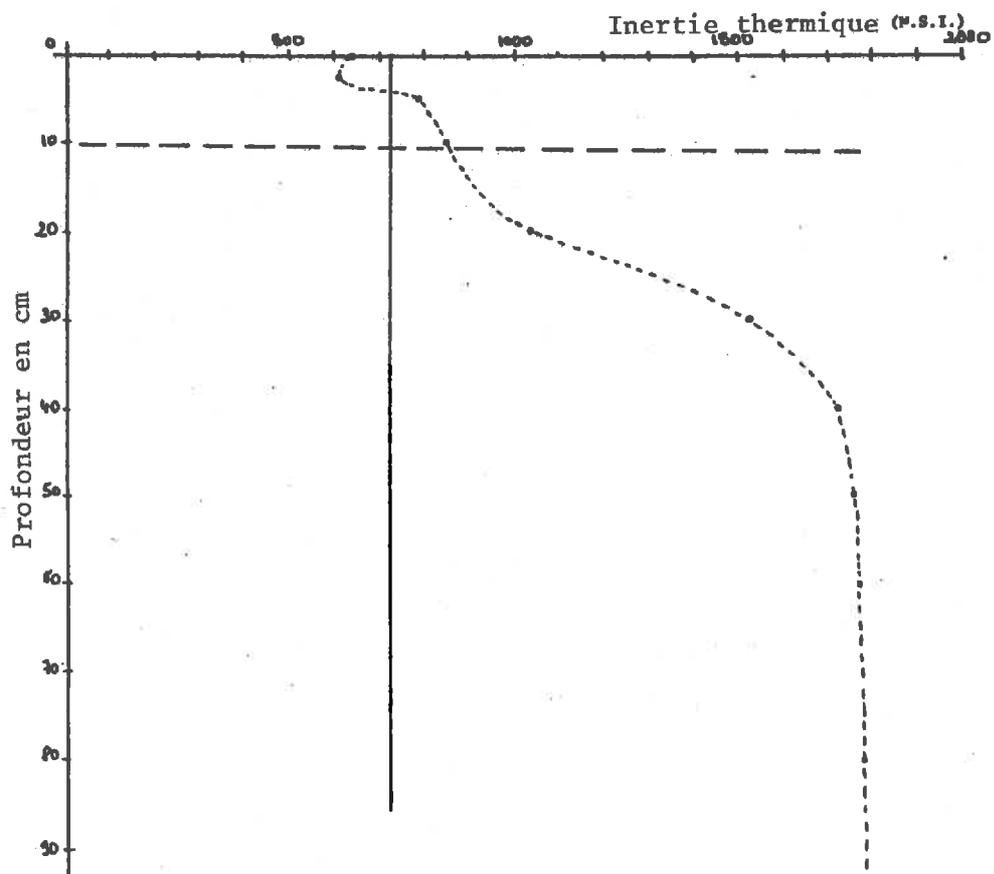


Fig. II.6 : La ligne continue verticale correspond à l'inertie thermique (constante) calculée. La ligne pointillée correspond au profil mesuré. L'inertie thermique initiale est de 1500 (M.S.I.).

### II.5.3. Une remarque sur l'erreur de modélisation

Dans ce qui précède nous n'avons tenu compte que des erreurs sur les données d'entrée. Or les résultats sont également entachés de l'erreur due à la modélisation du problème direct. On peut mettre en évidence cet effet de la façon suivante en ce qui concerne la fonction  $f$  de résistance au transfert thermique décrite dans la première partie (I.10).

En effet, les mesures permettent d'avoir les valeurs de cette fonction à chaque instant de mesure. On introduit donc ces valeurs comme une donnée du problème et l'on calcule H et LE. D'autre part, on recalcule H et LE avec la fonction modélisée f (Becker, 1979).

On obtient ainsi l'impact de l'erreur de modélisation de f sur le calcul de H et LE. La figure II.7 montre ce résultat qui, comme on le voit, n'est pas tout à fait négligeable. On trouve des profils moyens qui diffèrent de moins de  $20 \text{ W/m}^2$ . En fait, l'évapotranspiration réelle est voisine de 0 car le sol est sec.

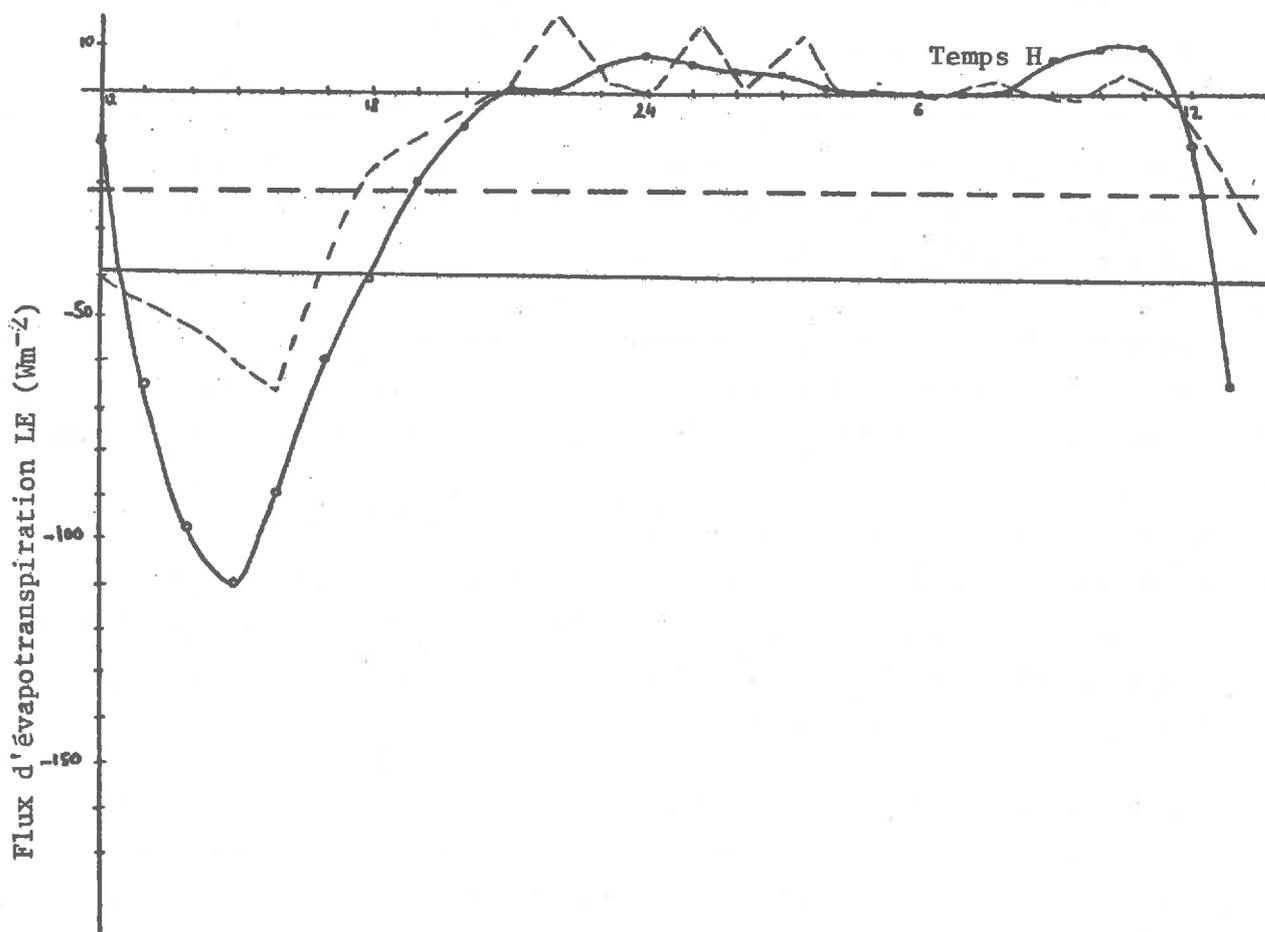


Fig. II.7 : LE calculé par résolution du problème inverse avec f modélisé (ligne continue) et avec f déduit de l'expérience (ligne en pointillés).

#### II.5.4. Résultats obtenus sur l'expérience de la Crau

Nous présentons des résultats obtenus après l'expérience faite dans la Crau (près du lieu dit La Dynamite) du 1er au 15 juillet 1984. Nous avons participé à cette expérience faite par le GSTS sous la responsabilité de J.L. Mercier (1984), en collaboration avec l'INRA d'Avignon. L'ensemble des résultats n'ayant pas été complètement mis en forme au moment de la présente rédaction, nous n'en présenterons qu'une partie. En particulier, les travaux sur l'homogénéisation sont à l'étude. On verra toutefois dans la 3<sup>è</sup> partie que le choix du terrain pour son homogénéité à l'échelle des mesures est peut être discutable (voir III.1.8).

#### Les mesures de la station

En ce qui concerne les flux, nous avons mesuré :

- \* Le rayonnement net en courte longueur d'onde par le rayonnement global  $R_G$  et la rayonnement réfléchi  $\alpha R_G$  ( $\alpha$  = albédo). L'appareil est un pyranomètre à thermopile Kipp mesurant à la fois  $R_G$  et  $\alpha R_G$  (l'albédo est obtenu en faisant le rapport des deux mesures).
- \* Le rayonnement net  $R_N$ . L'appareil de mesure est composé d'une double surface réceptrice, l'une tournée vers le haut, l'autre vers le bas. Les surfaces sont couvertes de revêtements absorbants noirs. De la différence des énergies rayonnantes incidentes sur les surfaces résulte une différence de température. Celle-ci est détectée par une thermopile dont la force électromotrice est proportionnelle au bilan des rayonnements. Toutefois, malgré les précautions dans le choix du noir absorbant, les appareils donnent une sensibilité moyenne différente dans les grandes et dans les courtes longueurs d'onde -jusqu'à 20 %- , ce qui implique un double étalonnage.
- \* Rayonnement atmosphérique en grande longueur d'onde  $R_a$ . Ce rayonnement est mesuré par un appareil semblable au précédent dont la face inférieure a été protégée par un cache (d'émissivité et de température connus). La mesure est donc proportionnelle au bilan de rayonnement entre les deux faces du capteur.
- \* Le flux de chaleur dans le sol :  $-K \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = G$ . Il a été mesuré par un fluxmètre dont le principe de mesure découle directement de la loi de Fourier, la différence de température entre les deux faces d'une plaquette installée à faible profondeur dans le sol, génère un flux de chaleur vertical. Le signal mesuré tient compte de la composition du fluxmètre et est proportionnel au

flux de chaleur.

\* Les températures dans l'air (sèches et humides). Les capteurs utilisés sont des thermocouples chrome-contantan choisis pour la simplicité de fabrication. La température de référence a été obtenue par compensation électronique montée par Hewlett-Packard sur la centrale 3421A ; le signal est ensuite approché par un polynôme dont les coefficients sont fournis par le constructeur. Ces températures ont été mesurées à 0.52, 1.02, 1.78 mètres.

\* La vitesse du vent a été mesurée par des anémomètres à impulsion (CIMEL CE 121) à 0.5, 1, 1.5 et 2 mètres. Ces appareils délivrent une impulsion par tour égale à une impulsion par mètre de vent passé.

\* La température de surface  $T^{mes}$  a été obtenue à partir de mesures de températures en profondeur par la méthode que nous développons en II.5.5. Ces températures ont été mesurées aux profondeurs de  $6.10^{-2}$ ,  $24.10^{-2}$ , 0.1 et 0.39 mètres par des thermocouples cuivre-constantan.

La chaîne d'acquisition est constituée d'appareils Hewlett-Packard. Elle est composée de 4 éléments :

- un calculateur/contrôleur HP 75C
- une acquisition de données HP 3421A
- une imprimante HP 82162A
- un stockage de masse (bande magnétique) HP 8216A.

### Résultats de l'inversion

Le rapport de Bowen  $H/LE$  est obtenu par les mesures des températures sèches et humides. De la mesure de  $R_N$  et  $G$ , on en déduit  $H + LE = G - R_N$ , d'où  $H$  et  $LE$ .

La figure II.8 donne les flux de chaleur sensible  $H$  calculé et mesuré. Le flux calculé a été obtenu après 8 itérations. Les itérés sont confondus.

Le figure II.9 compare les flux d'évapotranspiration calculés à la 1ère, 3ème et 8ème itérations.

Enfin la table II.7 donne les valeurs calculées de  $c$  et  $K$ .

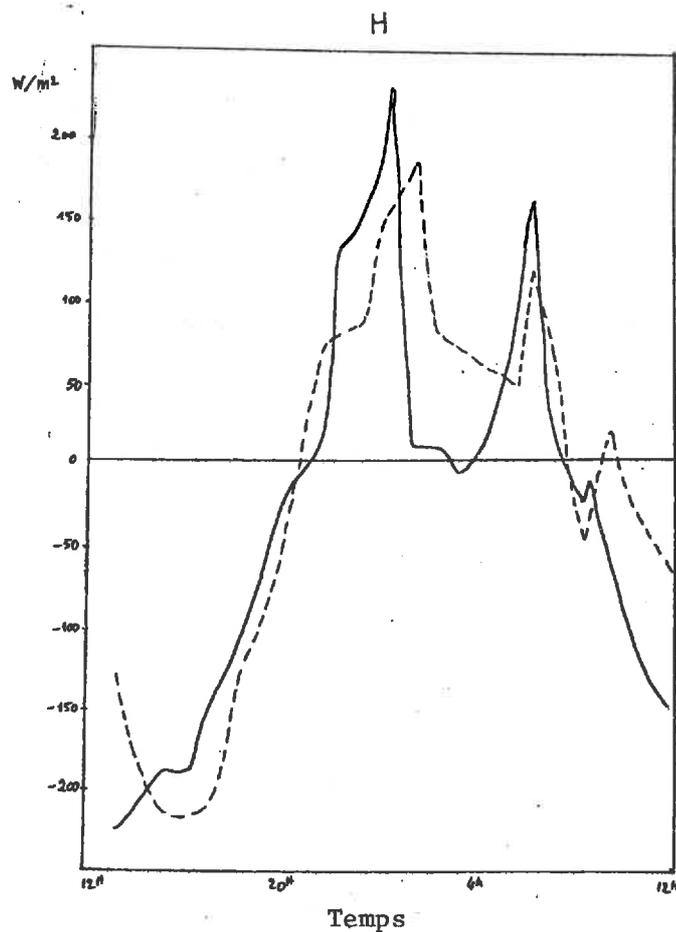
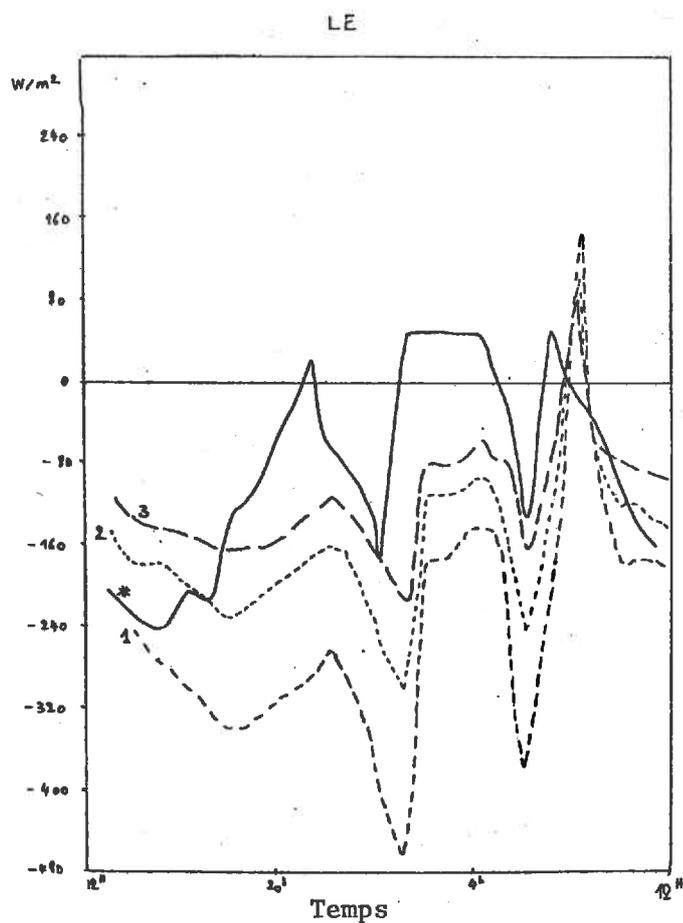


Table II.7 : n = numéro de l'itéré. Valeurs initiales introduites en MKSA :  
 $c(0) = 1.2 \times 10^6$ ,  $K(0) = 1.4$

| n           | 1      | 3      | 5      |
|-------------|--------|--------|--------|
| $\sqrt{Kc}$ | 1336.8 | 1352.2 | 1351.6 |

L'estimation initiale de c et K a été faite par le procédé décrit dans le paragraphe suivant.

### II.5.5. Une méthode de calcul de la température de surface pour des terrains homogènes

Une méthode standard pour calculer la température de surface in situ est de procéder à une extrapolation polynomiale sur les valeurs des températures mesurées aux différentes profondeurs (généralement espacées logarithmiquement).

Si l'on obtient par exemple les profondeurs  $x_1 = 0.5$  cm,  $x_2 = 5$  cm,  $x_3 = 10$  cm et les températures correspondantes  $T_1 = 300^\circ\text{K}$ ,  $T_2 = 298^\circ\text{K}$ ,  $T_3 = 290^\circ\text{K}$ , une extrapolation par un polynôme du 1er degré donne la température de surface  $T_s = 300.2^\circ\text{K}$  et par un polynôme du 2ème degré,  $T_s = 296.9^\circ\text{K}$ , soit une différence de  $3.3^\circ\text{K}$ .

Or rien n'indique que tel degré polynomial soit préférable à tel autre à un instant donné de la journée.

Nous proposons une méthode qui tient compte de la périodicité de 24 h du profil  $T(x,t)$ . Cette méthode offre l'avantage de donner une estimation de la diffusivité  $d = \frac{K}{c}$  du sol homogène.

En effet, si nous écrivons que la température est solution de

$$c \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

$$T(0,t) = T_s(t) = \frac{a_0^{(m)}}{2} + \sum_{q \geq 1} a_q^{(m)} \cos(\omega_q t) + b_q^{(m)} \sin(\omega_q t) \quad (37)$$

$$T(l,t) = T_l$$

$T$  de période  $\tau$ ,

où  $\omega_q = \frac{2q\pi}{\tau}$ , où  $T(x,t)$  est donné par (25) qu'on peut encore écrire

$$T(x,t) = \gamma_1 = \gamma_2 s + \sum_{q \geq 1} a_q^{(m)} \xi_q(d,x,t) + b_q^{(m)} \zeta_q(d,x,t) \quad (38)$$

Les fonctions  $\xi_q$  et  $\zeta_q$  sont explicitées en (25). En écrivant les np équations

$$T(x_i, t_j) = T^{\text{mesuré}}(x_i, t_j), \quad i = 1 \text{ à } p, \quad j = 1 \text{ à } n \text{ et } x_i > 0$$

on est amené à résoudre un problème de moindres carrés (non linéaires)

$$\min_{d, a_q(m), b_q(m)} \sum_{i,j} [T(x_i, t_j) - T_{\text{mesuré}}(x_i, t_j)]^2 \quad (39)$$

pour  $q = 1$  à 10 environ, ce qui correspond au nombre significatif de coefficients de Fourier pour une température de terrain, comme on a pu le vérifier (Raffy-Nerry, 1985, voir aussi Becker et al., 1979). Les coefficients  $a_q(m)$  et  $b_q(m)$  remplacés dans la 2ème équation de (37) nous donnent  $T_s(t)$ . De plus on obtient la diffusivité thermique  $d$ .

On a simulé par différences finies (méthode décrite en I.2.2, équation (20)) un profil de température et l'on a évalué la différence entre  $T(0,t)$  simulée et la température de surface calculée par (39). La table II.8 donne les erreurs moyennes (avec 10 coefficients de Fourier) comparées aux erreurs par extrapolation.

Table II.8 : Différences moyennes entre  $T(0,t)$  "exact" obtenu par simulation,  $T(0,t)$  calculé par la méthode précédente (A) avec  $p$  points  $x_i$  en profondeur et par une extrapolation polynomiale d'ordre  $p-1$  en (B).

|                     | p = 1 |   | p = 2 |       | p = 2 |       | p = 4 |       |
|---------------------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     | A     | B | A     | B     | A     | B     | A     | B     |
| $\Delta T$<br>moyen | 2.6°C | / | 0.6°C | 1.5°C | 0.6°C | 0.8°C | 0.3°C | 1.0°C |

La diffusivité est obtenue avec une erreur relative de 14 % pour  $p = 3$  ou 4 (et de l'ordre de 50 % pour  $p = 1$  ou 2).

Nous reviendrons sur cette technique en III.1.8.

## TROISIEME PARTIE

### CAS NON HOMOGENES

L'élaboration des modèles directs et l'étude du problème inverse ont concerné essentiellement le cas d'un pixel homogène.

Dans la quasi totalité des travaux de télédétection, il est implicitement admis que, grosso modo, les mesures que l'on fait sont des moyennes dont on extrait des résultats relatifs à des sols "moyens", sous-entendu, homogènes. L'espoir sous-jacent est que pour un terrain hétérogène donné, il existe un terrain (fictif) homogène qui ait le même comportement vis à vis des mesures que l'on fait. L'objet de cette 3<sup>e</sup> partie est de contribuer à éclaircir ce point.

Donnons tout de suite une définition : nous dirons que deux milieux sont équivalents par rapport à des grandeurs mesurées si ces milieux sont indiscernables par ces mesures.

Dans ces conditions, à partir des caractéristiques d'un terrain homogène équivalent, on pourrait déduire des caractéristiques du terrain réel. Se posent alors deux questions qui sont sous-jacentes à l'exposé de ce chapitre :

- une telle équivalence a-t-elle un sens et la définition donnée est-elle suffisante ou trop restrictive ?
  - si cette définition est satisfaisante, est-il possible de relier les paramètres "moyens" ainsi mesurés aux caractéristiques réelles des terrains hétérogènes.
- Cette question est capitale pour la validation des données extraites des satellites par comparaison avec des mesures locales.

Pour un sol homogène en surface et en profondeur et si l'on convient de négliger les effets atmosphériques, l'échelle à laquelle on étudie les phénomènes n'intervient ni pour les données (température de surface, température de l'air, rayonnement net) ni pour les résultats de sortie du problème inverse puisque les équations sont indépendantes du point de la surface où les mesures sont faites.

Dans le cas d'un sol hétérogène il n'en est pas de même puisque les mesures faites en surface sont intégrées par le radiomètre. On devra donc donner un sens à la température "moyenne"  $T$  déduite des mesures radiométriques et examiner si le modèle du flux  $-K \frac{\partial T}{\partial x} = \phi(T)$  est encore satisfait par cette température "moyenne".

D'autre part, même si la surface est homogène en émissivité, albédo, etc..., on doit examiner le rôle des hétérogénéités en profondeur de la capacité et la conductivité thermiques. Plus précisément, on se demandera si pour un milieu donné, hétérogène en profondeur, on peut définir un milieu homogène équivalent par rapport à des mesures de température et flux de surface. S'il n'en existe pas, nous définirons un sol homogène "le plus proche" du sol hétérogène donné, par rapport à ces mesures.

Au § III.1 , nous répondrons à cette dernière question dans le cas de milieux à couches et nous verrons que même dans ce cas, il n'est en général pas possible de définir de milieu homogène équivalent.

Aux § III.2 et III.3 , nous examinerons l'influence des hétérogénéités de surface, pour un sous-sol homogène puis pour un sous-sol hétérogène horizontalement.

### III.1. ETUDE D'UN MILIEU A COUCHES

#### III.1.1. Matrice de transfert

Considérons pour le moment une seule couche homogène d'épaisseur  $l$  dont la surface ait une émissivité connue et constante (en espace). Ainsi, la température de surface déduite du radiomètre ne dépend pas de l'altitude de celui-ci (toujours avec l'hypothèse qu'il n'y a pas d'effets atmosphériques).

Pour  $x \in ]0, l[$ , on a

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

et en notant

$$\theta(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} T(x, t) dt \quad (2)$$

la transformée de Fourier en temps de  $T$ , (1) devient

$$ci\omega \theta - K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

D'autre part, si l'on note  $\phi(x,t)$  le flux de chaleur traversant la surface horizontale de profondeur  $x$ , on a pour  $x \in [0, \ell]$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = \phi(x,t) \quad (4)$$

qui par la transformée de Fourier devient

$$-K \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,\omega) = \psi(x,\omega) \quad (5)$$

D'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\omega) = -Ci\omega \theta \quad (6)$$

qui avec (5) donne le système

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix} (x,\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{K} \\ -Ci\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix} (x,\omega) \quad (7)$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Lambda \\ X \end{pmatrix} = -M \begin{pmatrix} \Lambda \\ X \end{pmatrix} \quad (8)$$

avec des notations évidentes.

Le système (8) admet alors comme solution avec comme condition en  $x = 0$ ,  $\begin{pmatrix} \Lambda \\ X \end{pmatrix}(0,\omega)$

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ X \end{pmatrix}(x,\omega) = e^{-Mx} \begin{pmatrix} \Lambda \\ X \end{pmatrix}(0,\omega) \quad (9)$$

En remarquant que

$$M^{2k} = \left(\frac{Ci\omega}{K}\right)^k I \quad \text{et} \quad M^{2k+1} = \left(\frac{Ci\omega}{K}\right)^k M$$

on en déduit aisément

$$\begin{pmatrix} \theta(x,\omega) \\ \psi(x,\omega) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta(0,\omega) \\ \psi(0,\omega) \end{pmatrix} \quad (10)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \sqrt{\frac{Ci\omega}{K}} & -\frac{1}{\sqrt{i\omega}} \frac{1}{\sqrt{Kc}} \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{Ci\omega}{K}} \\ -\sqrt{i\omega}\sqrt{Kc} \operatorname{sh} x \sqrt{\frac{Ci\omega}{K}} & \operatorname{ch} x \sqrt{\frac{Ci\omega}{K}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Remarque 1

La matrice A vérifie  $A_{11} = A_{22}$  et d'une façon générale (A est une résolvante)  
 $\det A = 1$  ,  $\frac{dA}{dx} = -MA$ .

Remarque 2

Des calculs analogues aux calculs précédents conduisant à la matrice de transfert ont été faits par de Giovanni et al. (1984) dans le cadre de l'étude de milieux stratifiés. Nous apprenons au moment de la rédaction que Menenti dans sa thèse (1984) a également calculé une matrice de transfert par une méthode voisine. Le calcul présent offre l'avantage d'être plus direct que celui de Menenti. Précisons enfin que les résultats des paragraphes suivants ne nous semblent pas étudiés à ce jour.

III.1.2. Milieux homogènes équivalents

Conformément à la définition donnée dans l'introduction de cette 3<sup>e</sup> partie, la notion de sol homogène équivalent à un sol donné dépend des grandeurs mesurées. Par exemple, on peut envisager des mesures :

- a) satellite, conduisant à  $T(0,t)$  et au flux total  $\phi(t)$
- b) in situ, conduisant à  $T(0,t)$ , aux paramètres  $p_k$  caractérisant la fonction flux  $\phi(T,t)$ , la profondeur  $l$
- c) in situ, donnant  $T(x_i,t_j)$  en différents points  $x_i$  dans le sol.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas a) pour les sols à couches et numériquement au cas c) (dans III.1.8) pour des sols hétérogènes quelconques.

Soit donc un sol à couches d'épaisseur totale  $l$  pour lequel on mesure  $T(0,t)$  et  $\phi(t)$ . Le sol homogène équivalent aura une épaisseur  $\tilde{l}$ , des capacité et conductivité thermiques  $\tilde{c}$  et  $\tilde{K}$  et sera tel que pour toute valeur de  $t$ , on ait en surface  $T(0,t)$ ,  $\phi(0,t)$  (fig. 1),  $T_{\tilde{l}} = T_{\tilde{l}}^{\tilde{v}}$  et  $\phi_{\tilde{l}} = \phi_{\tilde{l}}^{\tilde{v}}$  respectivement aux profondeurs  $l$  et  $\tilde{l}$ .

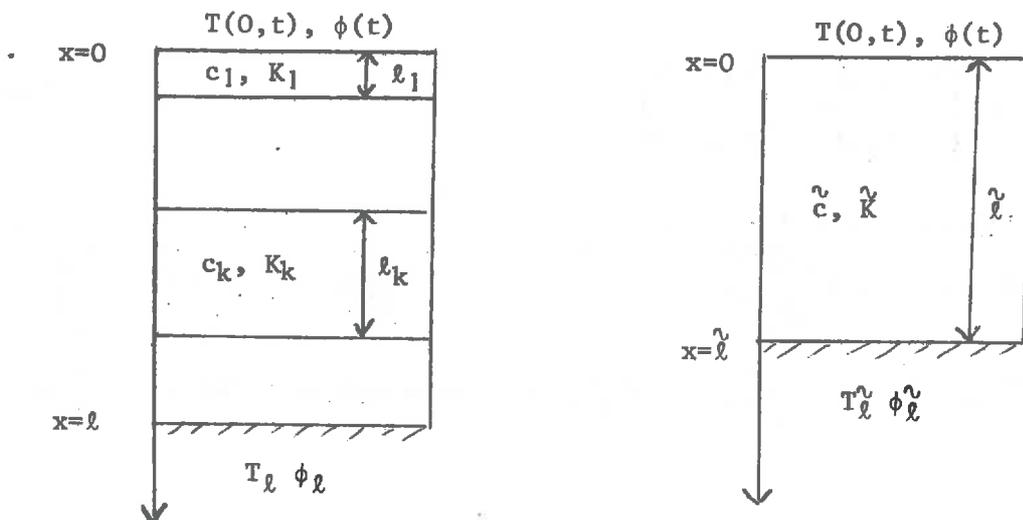


Fig. III.1.

L'équation (10) montre que pour avoir les transformées de Fourier du flux et de la température en  $x = l$ , il suffit de multiplier les valeurs de ces fonctions en  $x = 0$  par la matrice  $A$ .

Ainsi, si l'on considère un milieu à  $n$  couches, chacune d'épaisseur  $l_i$  et de coefficients de diffusion  $c_i$  et  $K_i$ , on aura sur la fig. III.1

$$\begin{pmatrix} \theta_l \\ \psi_l \end{pmatrix} = A_n A_{n-1} \dots A_1 \begin{pmatrix} \theta(0, \omega) \\ \psi(0, \omega) \end{pmatrix} \quad (12)$$

où  $\theta_l$  est la transformée de Fourier de la température  $T_l$  (à la profondeur  $l$ ) et

$$A_k = \begin{pmatrix} \text{ch } l_k \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} & -\frac{1}{\sqrt{i \omega} \sqrt{K_k c_k}} \text{sh } l_k \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} \\ -\sqrt{i \omega} \sqrt{K_k c_k} \text{sh } l_k \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} & \text{ch } l_k \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Dire que pour un milieu à  $n$  couches il existe un milieu homogène équivalent, revient donc à dire qu'il existe une matrice  $A$  de la forme (11) telle que pour tout  $\omega$

$$A_n A_{n-1} \dots A_1 \begin{pmatrix} \theta(O, \omega) \\ \psi(O, \omega) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta(O, \omega) \\ \psi(O, \omega) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Examinons d'abord le cas  $n = 2$ . On a

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \text{cha}_1 l_1 \text{cha}_2 l_2 + \frac{\sqrt{K_1 c_1}}{\sqrt{K_2 c_2}} \text{sha}_1 l_1 \text{sha}_2 l_2 - \frac{1}{\sqrt{i\omega}} \left( \frac{1}{\sqrt{K_1 c_1}} \text{sha}_1 l_1 \text{cha}_2 l_2 + \frac{1}{\sqrt{K_2 c_2}} \text{sha}_2 l_2 \text{cha}_1 l_1 \right) \\ -\sqrt{i\omega} (\sqrt{K_1 c_1} \text{sha}_1 l_1 \text{cha}_2 l_2 + \sqrt{K_2 c_2} \text{cha}_1 l_1 \text{sha}_2 l_2) \text{cha}_1 l_1 \text{cha}_2 l_2 + \frac{\sqrt{K_2 c_2}}{\sqrt{K_1 c_1}} \text{sha}_1 l_1 \text{sha}_2 l_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

où

$$a_k = \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}}$$

Remarque 3

Comme on devait s'y attendre, on n'a pas  $A_2 A_1 = A_1 A_2$ .

On peut d'ailleurs calculer l'expression

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = \frac{K_2 c_2 - K_1 c_1}{\sqrt{K_1 c_1} \sqrt{K_2 c_2}} \text{sha}_1 l_1 \text{sha}_2 l_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors évaluer l'écart  $\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix}$  sur les mesures de surface observées  $\begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix}$

dû à une permutation des couches  $(c_1, K_1, l_1)$  et  $(c_2, K_2, l_2)$  :

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = (A_2 A_1)^{-1} (A_2 A_1 - A_1 A_2) = \frac{K_1 c_1 - K_2 c_2}{\sqrt{K_1 c_1} \sqrt{K_2 c_2}} \text{sha}_1 l_1 \text{sha}_2 l_2 (A_2 A_1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Donc, une permutation de deux couches de même inertie thermique n'a pas d'effet décelable à la surface.

L'égalité (14) conduit avec des notations évidentes à :

$$\begin{aligned} -\text{cha}_1 l_1 \text{cha}_2 l_2 - \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{K_1 c_1}{K_2 c_2}} \right) \text{ch}(a_1 l_1 + a_2 l_2) + \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{K_1 c_1}{K_2 c_2}} \right) \text{ch}(a_1 l_1 - a_2 l_2) &= 0 \\ -\sqrt{\frac{K_1 c_1}{K_2 c_2}} \text{sha}_1 l_1 \text{sha}_2 l_2 + \frac{1}{2} \left( K_1 c_1 + \sqrt{K_2 c_2} \right) \text{sh}(a_1 l_1 + a_2 l_2) + \frac{1}{2} \left( \sqrt{K_1 c_1} - \sqrt{K_2 c_2} \right) \text{sh}(a_1 l_1 - a_2 l_2) &= 0 \end{aligned}$$

pour tout  $\omega$ .

Une discussion élémentaire donne alors

$$\sqrt{\frac{\tilde{K}}{\tilde{c}}} = \sqrt{K_1 c_1} = \sqrt{K_2 c_2}$$

et

$$\tilde{a} \tilde{\ell} = a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2 \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\tilde{\ell} \sqrt{\frac{\tilde{c}}{\tilde{K}}} = \ell_1 \sqrt{\frac{c_1}{K_1}} + \ell_2 \sqrt{\frac{c_2}{K_2}}$$

D'où l'on déduit

$$\tilde{\ell} \tilde{c} = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{K}} = \frac{\ell_1}{K_1} + \frac{\ell_2}{K_2} .$$

Pour un corps hétérogène donné, il y a donc une infinité de corps homogènes  $(\tilde{\ell}, \tilde{c}, \tilde{K})$  mais si l'on ajoute comme condition que si  $c_1 = c_2$  et  $K_1 = K_2$ , le corps homogène équivalent soit tel que  $\tilde{c} = c_1 = c_2$  et  $\tilde{K} = K_1 = K_2$ , alors on doit avoir

$$\tilde{\ell} = \ell_1 + \ell_2 .$$

D'où, en notant maintenant  $c = \tilde{c}$ ,  $K = \tilde{K}$  et  $\ell = \tilde{\ell}$  les caractéristiques du milieu équivalent on a :

#### Conséquence 1

Pour qu'il existe un milieu homogène  $(c, K)$  équivalent au milieu à 2 couches et de même épaisseur totale, il faut et il suffit que les inerties thermiques des couches soient égales.

Dans le cas où les inerties thermiques des couches sont égales, on a

$$\sqrt{K_1 c_1} = \sqrt{K_2 c_2} = \sqrt{Kc}, \quad (15) \text{ devient}$$

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \text{ch}(a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) & -\frac{1}{\sqrt{i\omega}} \frac{1}{\sqrt{Kc}} \text{sh}(a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) \\ -\sqrt{i\omega} \sqrt{Kc} \text{sh}(a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) & \text{ch}(a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) \end{pmatrix} \quad (17)$$

dont l'identification à (11) donne alors pour le milieu homogène équivalent d'épaisseur  $\ell = \ell_1 + \ell_2$

$$\sqrt{\frac{c}{K}} = \frac{1}{\ell_1 + \ell_2} (\ell_1 \sqrt{\frac{c_1}{K_1}} + \ell_2 \sqrt{\frac{c_2}{K_2}}),$$

d'où

$$c = \frac{1}{\ell_1 + \ell_2} (\ell_1 c_1 + \ell_2 c_2) \quad (18)$$

et

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\ell_1 + \ell_2} \left( \frac{\ell_1}{K_1} + \frac{\ell_2}{K_2} \right) \quad (19)$$

La généralisation à  $n$  milieux est alors évidente en procédant de deux en deux. On a ainsi la généralisation :

Pour qu'un terrain constitué de  $n$  couches horizontales homogènes admette un milieu homogène équivalent de même épaisseur totale  $\ell$ , il faut et il suffit que les  $n$  couches aient la même inertie thermique  $\sqrt{Kc}$  et dans ce cas, le milieu homogène équivalent a une capacité et une conductivité thermiques données par

$$c = \frac{1}{\ell} \sum_k \ell_k c_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{\ell} \sum_k \frac{\ell_k}{K_k} \quad (20)$$

Comme on le voit, même dans le cas géométriquement simple de couches homogènes horizontales, il n'existe pas de milieu homogène équivalent, en général.

D'autre part, lorsque les inerties thermiques des deux couches sont égales, (16) et (17) montrent qu'en ce qui concerne les mesures de surface, les deux couches sont permutable. Or, on sait (voir par exemple (II.26)) que la couche prépondérante pour les mesures de surface est la couche de surface, c'est-à-dire  $(c_1, K_1)$ . Cela permet d'énoncer la conséquence 2.

#### Conséquence 2

Si les inerties thermiques de deux couches sont égales, aucune méthode d'inversion basée sur des mesures de surface ne pourra donner accès à  $c_1$  et  $K_1$  séparément (mais seulement à  $\sqrt{Kc}$ ) (sinon les milieux ne seraient pas permutable).

### III.1.3. Cas d'une couche mince

Précisons ces cas qui sont une conséquence immédiate de ce qui précède mais que nous utiliserons plus loin.

Supposons pour simplifier qu'un terrain est constitué de deux couches dont l'une a une épaisseur négligeable par rapport à l'autre (il est aisé de voir que le cas à  $n$  couches avec une couche fine conduira aux mêmes conclusions).

Prenons  $a_2 \ell_2 \ll a_1 \ell_1$ . Alors la matrice (15) est

$$A_2 A_1 \approx \begin{pmatrix} \operatorname{cha}_1 \ell_1 & -\frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1}} \operatorname{sha}_1 \ell_1 \\ -\sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1} \operatorname{sha}_1 \ell_1 & \operatorname{cha}_1 \ell_1 \end{pmatrix} = A_1$$

qui est la matrice du milieu  $(c_1, K_1)$  d'épaisseur  $\ell_1$ .

De même si l'on prend  $\ell_1 \approx 0$ , on obtient

$$A_2 A_1 \approx A_2$$

de sorte que dans les cas de couches minces, ce n'est pas une approximation déraisonnable de les négliger.

#### Remarque 4

Il n'en reste pas moins que même mince, une couche n'aura pas le même rôle suivant sa position par rapport à la surface. On peut précisément évaluer l'effet de la position d'une couche mince par la même technique que dans la remarque 3.

### III.1.4. Influence de l'hétérogénéité sur les mesures de surface. Matrice de l'hétérogénéité

Nous avons vu que si les inerties thermiques des couches sont différentes, il n'existe pas de sol homogène équivalent, mais que pour une couche mince, on peut la négliger. Examinons comment se comporte un sol constitué de deux couches d'épaisseur non négligeables (par exemple quelques décimètres chacune). Plus précisément, nous allons voir qu'on peut caractériser un tel sol par une matrice qu'on peut appeler matrice de l'hétérogénéité.

Considérons un terrain constitué de deux couches d'épaisseur  $l_1$  pour la couche de surface et  $l_2$  pour la couche profonde de même inertie thermique :  $\sqrt{K_1 c_1} = \sqrt{K_2 c_2}$  et observons la modification apportée sur la température et le flux à la surface par une modification de la conductivité et de la capacité de la couche de surface (a), puis de la couche profonde (b) et enfin d'une modification des épaisseurs des couches (c).

a) Influence d'une modification de la conduction de la couche de surface

|                             |
|-----------------------------|
| $c_1 + \rho, K_1 + \lambda$ |
| $c_2, K_2$                  |

Si l'on appelle  $A(c, K)$  la matrice de transfert du milieu  $(c, K)$  donnée en (11), nous aurons d'après (12)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_l \\ 0 \end{pmatrix} = A(c_2, K_2) A(c_1 + \rho, K_1 + \lambda) \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (21)$$

où  $\begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix}$  est la transformée de Fourier de la température et du flux observés à la surface. Or

$$\begin{pmatrix} \theta_l \\ 0 \end{pmatrix} = A(c_2, K_2) A(c_1, K_1) \begin{pmatrix} \theta_{ob} + \theta_\epsilon \\ \psi_{ob} + \psi_\epsilon \end{pmatrix} \quad (22)$$

où  $\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix}$  est un vecteur dû à la modification du milieu 1. En simplifiant les notations, on peut écrire (21) et (22) respectivement

$$\begin{pmatrix} \theta_l \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 \tilde{A}_1 \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \theta_l \\ 0 \end{pmatrix} = A_2 A_1 \begin{pmatrix} \theta_{ob} + \theta_\epsilon \\ \psi_{ob} + \psi_\epsilon \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = A_1^{-1} (\tilde{A}_1 - A_1) \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Le vecteur  $\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix}$  mesure l'influence d'une modification  $(\rho, \lambda)$  de  $(c, K)$  sur la

température et le flux à la surface. Comme on pouvait s'y attendre, la couche profonde n'a aucune influence sur ce vecteur.

L'approximation au 1er ordre en  $\rho, \lambda$  de  $\hat{A}_1 - A_1$  conduit à

$$A_1^{-1}(\hat{A}_1 - A_1) = -\frac{\rho}{2c_1} \begin{pmatrix} \text{sh}^2 a_1 \ell_1 & \frac{\ell_1}{K_1} - \frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1}} \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 \\ \ell_1 c_1 i + \sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1} \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 & -\text{sh}^2 a_1 \ell_1 \end{pmatrix} \\ - \frac{\lambda}{2K_1} \begin{pmatrix} \text{sh}^2 a_1 \ell_1 & -\frac{\ell_1}{K_1} - \frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1}} \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 \\ -\ell_1 c_1 i\omega + \sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1} \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 & -\text{sh}^2 a_1 \ell_1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\text{où } a_1 = \ell_1 \sqrt{\frac{c_1 i\omega}{K_1}} .$$

Pour ce qui nous concerne en télédétection, l'ordre de grandeur des modules des termes hyperboliques est compris entre  $5 \cdot 10^2$  et  $10^4$  et l'on déduit de (24)

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c_1} + \frac{\lambda}{K_1} \right) \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 \begin{pmatrix} \text{tha}_1 \ell_1 & -\frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1}} \\ \sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1} & -\text{tha}_1 \ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Cette formule donne donc les variations à la surface des flux et température dues à une variation  $(\rho, \lambda)$  des coefficients thermiques  $(c, K)$  du milieu.

On peut alors noter que si l'on fait varier  $c_1$  et  $K_1$  de sorte que l'inertie thermique reste constante, on a  $(K_1 + \lambda)(c_1 + \rho) = K_1 c_1$ , donc au 1er ordre en  $(\rho, \lambda)$  :

$$\frac{\rho}{c_1} + \frac{\lambda}{K_1} = 0 . \quad (26)$$

### Conséquence 3

Si  $K$  et  $c$  varient de façon que l'inertie thermique du milieu reste constante, on ne peut déceler ces variations par des mesures de flux ou de température de surface. (Un essai numérique est reporté au paragraphe III.1.5, table III.1).

Remarque 1

Notons que pour des applications autres que la télédétection où les ordres de grandeur ne permettent plus de négliger les termes  $\ell$  et  $\ell c\omega$  devant les termes hyperboliques, (24) donne d'après (7) :

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{c_1} + \frac{\lambda}{K_1}\right) \begin{pmatrix} \text{sh}^2 a_1 \ell_1 & \frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1}} \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 \\ \sqrt{i\omega} \sqrt{K_1 c_1} \text{sha}_1 \ell_1 \text{cha}_1 \ell_1 & -\text{sh}^2 a_1 \ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} + \frac{\ell_1}{2}\left(\frac{\rho}{c_1} - \frac{\lambda}{K_1}\right) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (27)$$

où l'on voit apparaître séparément le rôle de l'inertie thermique et de  $(c,K)$ . Et si l'inertie thermique reste constante, (26) et (27) donnent en particulier

$$T_\epsilon = \ell_1 \frac{\rho}{c_1} \frac{\phi_{ob}}{K_1} = -\ell_1 \frac{\lambda}{K_1^2} \phi_{ob} \quad (28)$$

qui est la variation de la température observée due à une variation  $(\rho,\lambda)$  de  $(c,K)$  telle que l'inertie thermique reste constante, au 1er ordre en  $(\rho,\lambda)$ .

b) Influence d'une modification de la conduction de la couche profonde

|                         |
|-------------------------|
| $c_1, K_1$              |
| $c_2+\rho, K_2+\lambda$ |

On modifie cette fois la couche profonde. On a alors

$$\begin{pmatrix} \theta_\ell \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}_2 A_1 \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (29)$$

où  $\tilde{A}_2 = A(c_2+\rho, K_2+\lambda)$ .

D'après (29) et (22), on a

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = (A_2 A_1)^{-1} (\tilde{A}_2 - A_2) A_1 \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Le vecteur  $\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix}$  dû à la modification de  $(c_2, K_2)$  en  $(c_2 + \rho, K_2 + \lambda)$  dépend ici des deux milieux.

Supposons que les inerties thermiques des deux couches "avant" modification soient égales :  $K_1 c_1 = K_2 c_2$ . Alors  $A_2 A_1$  est donné par (17) et l'approximation au 1er ordre de  $\hat{A}_2 - A_2$  conduit à :

$$(A_2 A_1)^{-1} (\hat{A}_2 - A_2) A_1 = - \frac{\rho}{2c_2} \begin{pmatrix} \text{sha}_2 \text{sh}(2a_1 + a_2) & \frac{\ell_2}{K_2} - \frac{\text{sha}_2 \text{ch}}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2}} (2a_1 + a_2) \\ \ell_2 c_2 i\omega + \sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2} \text{sha}_2 \text{ch}(2a_1 + a_2) & - \text{sha}_2 \text{sh}(2a_1 + a_2) \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2K_2} \begin{pmatrix} \text{sha}_2 \text{sh}(2a_1 + a_2) & - \frac{2}{K_2} - \frac{\text{sha}_2 \text{ch}}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2}} (2a_1 + a_2) \\ -\ell_2 c_2 i\omega + \sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2} \text{sha}_2 \text{ch}(2a_1 + a_2) & - \text{sha}_2 \text{sh}(2a_1 + a_2) \end{pmatrix} \quad (31)$$

Comme précédemment, on remarque que compte tenu des ordres de grandeur rencontrés en télédétection, (31) donne :

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} \approx - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c_2} + \frac{\lambda}{K_2} \right) \text{sha}_2 \ell_2 \text{ch}(2a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) \begin{pmatrix} \text{th}(2a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) & - \frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2}} \\ \sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2} & - \text{th}(2a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Cette expression donne donc la modification en surface de la température et du flux due à une modification  $(\rho, \lambda)$  des coefficients  $(c_2, K_2)$  de la couche profonde.

On remarque ici, le rôle fondamental de la couche de surface par le terme  $2a_1 \ell_1$  (alors que dans (25) la couche profonde n'avait aucun rôle). On reviendra sur cette question numériquement en III.1.5.

Conséquence 4

Si  $K_2$  et  $c_2$  varient de sorte que les inerties thermiques des deux milieux restent les mêmes (en négligeant les variations du second ordre en  $K$  et  $c$ ), on ne pourra déceler de variations de surface.

Conséquence 5

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, dès que les inerties thermiques des couches ne sont plus les mêmes, il n'existe plus de milieu homogène équivalent. Donc, au 1er ordre en  $(\rho, \lambda)$ , la matrice

$$H = \text{sha}_2 \ell_2 \text{ch}(2a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) \begin{pmatrix} \text{th}(2a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) & - \frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2}} \\ \sqrt{i\omega} \sqrt{K_2 c_2} & - \text{th}(2a_1 \ell_1 + a_2 \ell_2) \end{pmatrix} \quad (33)$$

caractérise l'hétérogénéité du milieu à 2 couches.

Remarque 2

Comme précédemment, pour des applications autres que la télédétection où les ordres de grandeur ne permettent pas de négliger les termes  $\frac{\ell_2}{K_2}$  et  $\ell_2 c_2 \omega$  devant les termes hyperboliques, (31) donne

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} \approx - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c_2} + \frac{\lambda}{K_2} \right) H \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} + \frac{\ell_2}{2} \left( \frac{\rho}{c_2} - \frac{\lambda}{K_2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix}_{x=0} \quad (34)$$

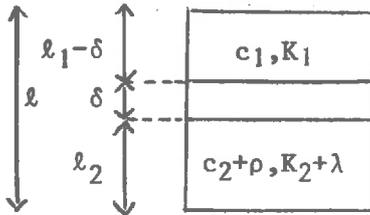
En particulier, si les termes du second ordre en  $(\rho, \lambda)$  sont négligeables devant  $\frac{\ell_2}{K_2}$  et  $\ell_2 c_2 \omega$ , et si les inerties thermique des deux milieux restent les mêmes, on a au 1er ordre

$$T_\epsilon = \ell_2 \frac{\rho}{c_2 K_2} \phi_{ob} = - \ell_2 \frac{\lambda}{K_2^2} \phi_{ob} \quad (35)$$

qui est la variation de température de surface observée, due à une variation  $(\rho, \lambda)$  de  $(c, K)$ . On voit ainsi que le terme en  $H$  ayant disparu, le milieu 1 devient alors "transparent", en ce sens qu'il n'apparaît plus dans l'observation des

modifications de surface.

c) Influence d'une modification de la conduction de la couche profonde et des épaisseurs des couches



Enfin, on peut évaluer l'influence d'une petite modification  $\delta$  des épaisseurs selon la figure ci-contre.

On a toujours la même épaisseur  $l$  pour les deux couches et  $K_1 c_1 = K_2 c_2$ . Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{pmatrix} \theta_l \\ 0 \end{pmatrix} = A(c_2 + \rho, K_2 + \lambda, l_2 + \delta) A(c_1, K_1, l_1 - \delta) \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (36)$$

et

$$\begin{pmatrix} \theta_l \\ 0 \end{pmatrix} = A(c_2, K_2, l_2) A(c_1, K_1, l_1) \begin{pmatrix} \theta_{ob} + \theta_\epsilon \\ \psi_{ob} + \psi_\epsilon \end{pmatrix} \quad (37)$$

où l'on introduit maintenant la variable  $l$  dans les matrices de transfert. En notant pour simplifier  $\tilde{A}_2$  et  $\tilde{A}_1$  les matrices de (36),  $A_2$  et  $A_1$  les matrices de (37), on a

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = (A_2 A_1)^{-1} [(\tilde{A}_2 - A_2) \tilde{A}_1 + A_2 (\tilde{A}_1 - A_1)] \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (38)$$

et en négligeant les termes du second ordre en  $c, \lambda, \delta$ , on trouve (en utilisant la remarque 1 de III.1.1)

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} \approx \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c_2} + \frac{\lambda}{K_2} \right) H + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c_2} - \frac{\lambda}{K_2} + \frac{\delta}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{l_2}{K_2} \\ -l_2 c_2 i \omega & 0 \end{pmatrix} - \frac{\delta}{l_1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{l_1}{K_1} \\ -l_1 c_1 i \omega & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (39)$$

où H est la matrice d'hétérogénéité donnée en (33).

Conséquence 6

Pour une petite variation  $\delta$  des épaisseurs ( $\delta \ll \ell_1$  et  $\delta \ll \ell_2$ ), l'influence de  $\delta$  est négligeable comparée à celle du terme  $-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{c_2} + \frac{\lambda}{K_2}\right)H$ , comme on l'a expliqué en a).

On peut toutefois faire les remarques suivantes.

Remarque 3

Notons encore que pour des applications autres que la télédétection où les termes négligés du second ordre en facteur de H sont petits devant les deux derniers termes de la somme dans (39), alors les 3 termes de (39) sont à prendre en considération. En particulier, si  $\rho$  et  $\lambda$  varient de façon que les inerties thermiques restent les mêmes on peut trouver une valeur de  $\delta$  qui annule au 1er ordre l'effet de la couche profonde. En effet, on a  $\frac{\rho}{c_2} + \frac{\lambda}{K_2} = 0$ , (39) s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} \approx \left[ \left( -\frac{\lambda}{K_2} + \frac{\delta}{2\ell_2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\ell_2}{K_2} \\ -\ell_2 c_2 i\omega & 0 \end{pmatrix} - \frac{\delta}{\ell_1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\ell_1}{K_1} \\ -\ell_1 c_1 i\omega & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (40)$$

et pour  $\delta = \frac{2\ell_2}{K_2} \cdot \lambda$ , l'influence à la surface est réduite à celle du dernier terme de (40). D'après (7), cette influence est

$$\begin{pmatrix} T_\epsilon \\ \phi_\epsilon \end{pmatrix} \approx -\frac{\delta}{\ell_1} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} T_{ob} \\ \phi_{ob} \end{pmatrix}$$

Remarque 4

Supposons que l'on ne modifie pas  $K_2$  et  $c_2$  ( $\rho=\lambda=0$ ) (avec toujours  $K_1 c_1 = K_2 c_2$ ). Alors la variation en surface due à  $\delta$  est

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = \left[ \frac{\delta}{\ell_2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\ell_2}{K_2} \\ -c_2 \ell_2 i\omega & 0 \end{pmatrix} - \frac{\delta}{\ell_1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\ell_1}{K_1} \\ -c_1 \ell_1 i\omega & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (41)$$

qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon \\ \psi_\epsilon \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{K}} \\ \tilde{c}i\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix} \quad (42)$$

avec  $\frac{1}{\tilde{K}} = \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}$  et  $\tilde{c} = c_2 - c_1$ .

Imaginons un milieu de conductivité  $\tilde{K}$  et capacité  $\tilde{c}$ . Si l'on se fixe  $\begin{pmatrix} T_{ob} \\ \phi_{ob} \end{pmatrix}$  à la surface, la température  $\tilde{T}(x,t)$  et le flux  $\tilde{\phi}(x,t)$  auront, d'après (7), des transformées de Fourier telles que

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{K}} \\ -\tilde{c}i\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ \psi_{ob} \end{pmatrix}$$

et (42) donne une expression de la modification  $\begin{pmatrix} T_\epsilon \\ \phi_\epsilon \end{pmatrix}$  due à  $\delta$

$$\begin{pmatrix} T_\epsilon \\ \phi_\epsilon \end{pmatrix} = \delta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix}_{x=0} \quad (43)$$

Une autre interprétation est de noter  $\tilde{T}_i(x,t)$ ,  $\tilde{\phi}_i(x,t)$  les températures et flux du milieu homogène  $(K_i, c_i)$   $i = 1$  et  $2$  soumis à  $\begin{pmatrix} T_{ob} \\ \phi_{ob} \end{pmatrix}$  en surface. Alors

$$\begin{pmatrix} T_\epsilon \\ \phi_\epsilon \end{pmatrix} = \delta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \tilde{T}_2 - \tilde{T}_1 \\ \tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1 \end{pmatrix}_{x=0} \quad (44)$$

et en particulier

$$T_\epsilon = \delta \left( \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial x}(0,t) \right) = \delta \cdot \left( \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1} \right) \phi_{ob} \quad (45)$$

III.1.5. Résultats numériques

Les formules (25) et (32) donnent les transformées de Fourier des variations observables en surface dues à des variations des coefficients de capacité et conductivité thermiques dans le sous-sol. Avant d'aborder l'étude du problème inverse pour un milieu à couches et pour justifier les essais que nous aurons alors à faire, nous devons vérifier numériquement les ordres de grandeur des variations  $T_\epsilon$  et  $\phi_\epsilon$  pour des variations  $(\rho, \lambda)$  de  $(c, K)$ , a) pour la couche de surface et b) pour la couche profonde.

La simulation des températures de surface a été faite par la méthode décrite dans la partie I avec un pas de discrétisation en espace régulier  $h = 10^{-2}$  et un pas de temps de 1 heure.

a) Variations de la couche de surface

La table III.1 donne les températures de surface  $T_{Ob}$  pour un sol à couches avec différentes valeurs de  $K_1$  et  $c_1$  telles que  $K_1 c_1 = K_2 c_2$ . Par différence on a aussi  $T_\epsilon$  qui est l'écart entre la température du sol homogène et  $T_{Ob}$ . Comme on l'a vu en III.1.4a), cette table montre l'absence de modification sur les mesures de surface pour un milieu lorsque l'on modifie  $c_1$  et  $K_1$  avec  $K_1 c_1$  constant.

Table III.1 : Valeurs des températures de surface  $T_{Ob}(t)$  et de l'écart  $T_\epsilon(t)$  entre la température du sol homogène et  $T_{Ob}(t)$  pour différentes valeurs du temps  $t$ . On a  $K_1 = 0.585$ ,  $c_1 = 1.806 \times 10^6$  (en MKSA) et les 3 sols suivants où  $(K_1 + \lambda)(c_1 + \rho) = K_1 c_1 = K_2 c_2$ ,  $\ell_1 = 0,25$  m et  $\ell_2 = 0.75$  m.

|                 | A             | B                 | C                        |
|-----------------|---------------|-------------------|--------------------------|
| $c_1 + \rho$    | $\rho = 0$    | $\rho = 10^6$     | $\rho = 1.5 \times 10^6$ |
| $K_1 + \lambda$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = -0.21$ | $\lambda = -0.26$        |
|                 | $c_2 = c_1$   | $c_2 = c_1$       | $c_2 = c_1$              |
|                 | $K_2 = K_1$   | $K_2 = K_1$       | $K_2 = K_1$              |

(le sol A correspond à un sable)

| t en heure               |              | 12     | 18     | 24     | 6      |
|--------------------------|--------------|--------|--------|--------|--------|
| A (*K)<br>(sol homogène) | $T_{Ob}$     | 324.62 | 310.30 | 293.42 | 297.24 |
|                          | $T_\epsilon$ | 0      | 0      | 0      | 0      |
| B (*K)                   | $T_{Ob}$     | 324.75 | 310.09 | 293.50 | 297.62 |
|                          | $T_\epsilon$ | 0.13   | -0.21  | 0.8    | 0.38   |
| C (*K)                   | $T_{Ob}$     | 324.80 | 309.98 | 293.54 | 297.84 |
|                          | $T_\epsilon$ | 0.18   | -0.32  | 0.12   | 0.6    |

La table III.1 confirme l'approximation (25) et la conséquence 2. On pourra la comparer à la figure III.2.

Ce résultat suggère également que la résolution du problème direct (donc aussi du problème inverse) utilisant la méthode de Fourier (décrite en II.4.1.a) est une méthode performante en télédétection puisqu'elle isole l'inertie thermique comme facteur, lorsqu'on calcule le flux  $K \frac{\partial T}{\partial t} (0,t)$  (d'après II.26).

#### b) Variation de la couche profonde

D'après ce qui précède (équation (32)) la nature de la couche de surface intervient dans les modifications des températures et flux de surface lorsqu'on modifie la nature de la couche profonde. Or lorsque  $K_1$  et  $c_1$  varient de sorte que le produit  $K_1 c_1$  reste constant,  $T_e$  et  $\phi_e$  ne sont pas décelables ; donc a fortiori si  $K_2$  et  $c_2$  varient avec  $K_2 c_2 = K_1 c_1 = \text{constante}$ . Il est donc inutile de vérifier numériquement les ordres de grandeur de  $T_e$  et  $\phi_e$  dans ce cas.

Par contre, si  $K_2$  et  $c_2$  varient de sorte que l'inertie thermique du milieu profond devienne différente de celle de la surface, c'est-à-dire qu'on n'a plus de milieu homogène équivalent, (32) montre qu'on peut alors observer des variations non négligeables de températures à la surface. Il convient donc d'estimer numériquement ces variations.

Dans ce but, nous avons simulé 5 terrains hétérogènes de type b) étudié en III.1.4 avec  $(K_2 + \lambda)(c_2 + \rho) \neq K_2 c_2 = K_1 c_1$  pour différentes épaisseurs des couches. La conséquence de ces essais est que l'on peut observer des valeurs très importantes pour  $T_e$  si l'hétérogénéité est forte et ceci d'autant plus que  $l_1$  est faible. La figure III.2 illustre des profils de  $T_{ob}$  pour  $l_1 = 0.25$  m et  $l_2 = 0.75$  m. Comme on peut le voir, les différences ( $T_e$  peuvent être très grandes (comparer à la table III.1). La figure III.3 donne la même chose pour  $l_1 = 0.5$  m et  $l_2 = 0.75$  m où l'on observe que même pour de grandes différences de sols, si  $l_1$  est voisin de 0.5 m, l'hétérogénéité sera difficilement décelable en surface.

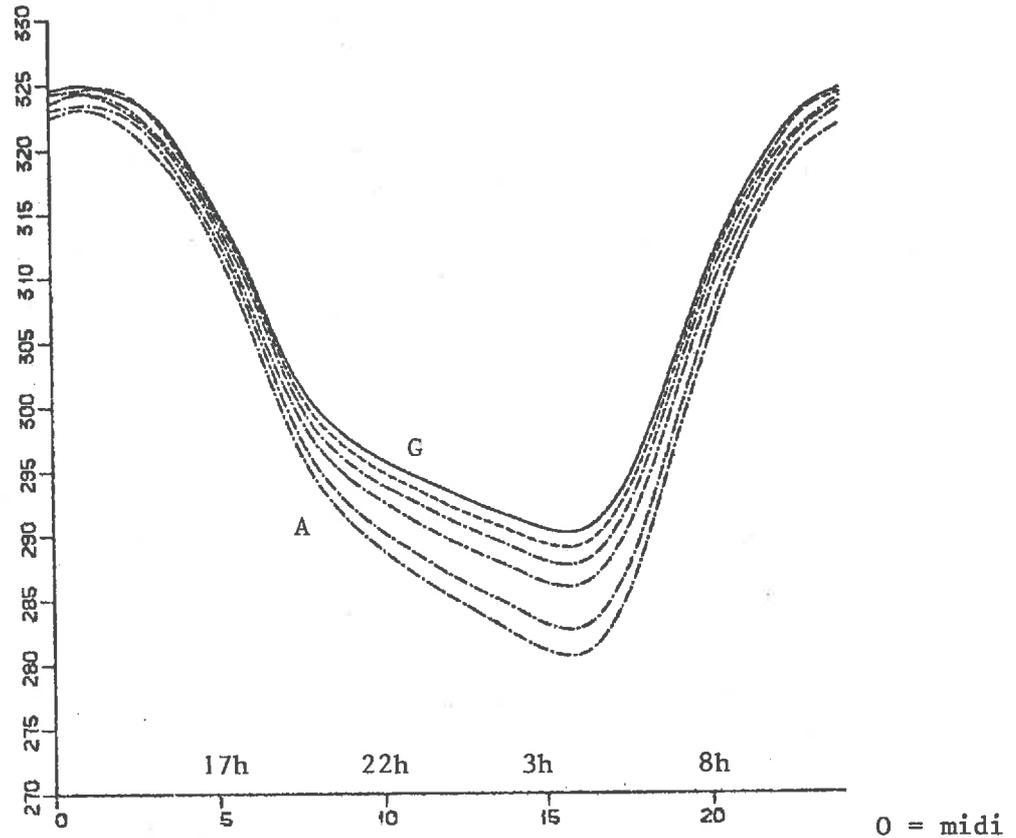


Fig. III.2 : Températures de surface  $T_{ob}$  correspondant aux sols hétérogènes non homogénéisables suivants : surface fixe : sable  $\sqrt{K_1 c_1} = 1026.1$ , d'épaisseur  $\ell_1 = 0.25$  m. Couche profonde variable : de  $\sqrt{K_2 c_2} = \sqrt{K_1 c_1}$  à  $\sqrt{K_2 c_2} = 3127$ . (correspondant à de la dolomite) d'épaisseur  $\ell_2 = 0.75$  m.

|   | A                        | B                        | C                        | D                        |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|   | $c_1, K_1$               | $c_1, K_1$               | $c_1, K_1$               | $c_1, K_1$               |
| $c_1 + \rho$                                  | $\rho = 0$               | $\rho = 1.5 \times 10^5$ | $\rho = 1.5 \times 10^5$ | $\rho = 1.5 \times 10^5$ |
| $K_1 + \lambda$                               | $\lambda = 0$            | $\lambda = 0$            | $\lambda = 1$            | $\lambda = 2$            |
| $P_1 = P_1 = \sqrt{K_1 c_1} = \sqrt{K_2 c_2}$ |                          | $P_2 = 1068$             | $P_2 = 1758$             | $P_2 = 2245$             |
|   | E                        | F                        | G                        |                          |
|   | $c_1, K_1$               | $c_1, K_1$               | $c_1, K_1$               |                          |
|   | $\rho = 1.5 \times 10^5$ | $\rho = 1.5 \times 10^5$ | $\rho = 1.5 \times 10^5$ |                          |
|   | $\lambda = 3$            | $\lambda = 4$            | $\lambda = 4.43$         |                          |
|   | $P_2 = 2644$             | $P_2 = 2990$             | $P_2 = 3127$             |                          |

où  $P_2 = \sqrt{(K_1 + \lambda)(c_1 + \rho)}$  et avec  $c_1 = c_2 = 1.8 \times 10^6$ ,  $K_1 = K_2 = 0.585$  (MKSA)  
 $\ell_1 = 0.25$  m,  $\ell_2 = 0.75$  m,  $T_\ell = 285$  °K.

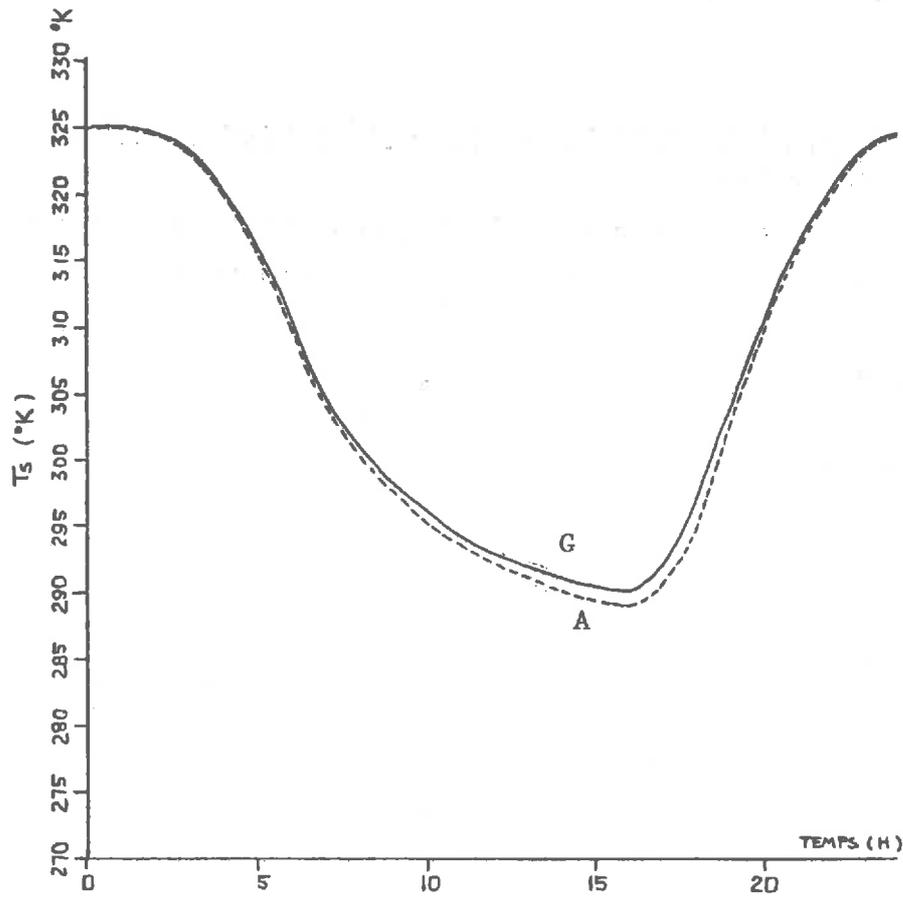


Fig. III.3 : Même légende que la figure III.2 mais avec  $\ell_1 = 0.5$  m et  $\ell_2 = 0.75$  m.

Remarque : Bien évidemment, même dans le cas où il y a un sol homogène équivalent (table III.1), les profils de  $T(x,t)$  en profondeur varient avec  $K$  et  $c$ . Nous ne les présentons pas ici afin de ne pas alourdir le texte.

III.1.6. Interprétation du problème inverse ; sol homogène le plus proche d'un sol hétérogène

Soit un terrain hétérogène quelconque (à couches ou non). Si l'on néglige les erreurs de modèle, la température vérifie les équations

$$c(x,t) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(x,t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad (46)$$

$$-K(0,t) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \phi_s(t) \quad (47)$$

$$T(0,t) = T_s(t) \quad (48)$$

et l'on peut noter

$$\phi_l = -K(l,t) \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) \quad (49)$$

$$T_l = T(l,t) \quad (50)$$

respectivement le flux et la température à la profondeur  $x = l$ . Dans les équations (47) et (48),  $T_s(t)$  est la température de surface mesurée  $T^{\text{mes}}(t)$  et  $\phi_s(t)$  est égal à  $\phi(T^{\text{mes}}, t) = \varphi_0(T^{\text{mes}}) + \sum R_k \varphi_k(T^{\text{mes}})$ .

Dire que ce terrain admet un sol homogène équivalent, au sens envisagé précédemment, c'est dire qu'il existe des constantes  $c$  et  $K$  telles que pour tout  $T_s(t)$  et tout  $\phi_s(t)$  la solution  $T_1$  de

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (51)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \phi_s(t) \quad (52)$$

$$T(0,t) = T_s(t) \quad (53)$$

vérifie de plus

$$-K \frac{\partial T_1}{\partial x}(l, t) = \phi_l$$

$$T_1(l, t) = T_l$$

Donc, ceci sera vrai en particulier pour  $T_s(t) = T^{\text{mes}}(t)$  et

$$\phi_s(t) = \varphi_0(T^{\text{mes}}) + \sum_k p_k \varphi_k(T^{\text{mes}}).$$

Les constantes  $c, K, p$  seront donc solutions des problèmes inverses (II.34) et (II.35) pour lesquels ils donnent un minimum nul, puisque (51), (52) et (53) sont vérifiées pour  $t \in [0, \tau]$ .

#### Conséquence 7 et définition

Si un terrain hétérogène admet un sol homogène équivalent (par exemple terrain à couches de mêmes inerties thermiques), les coefficients du sol homogène équivalent seront solution du problème inverse (qui aura alors un minimum nul).

Si par contre il n'existe pas de sol homogène équivalent, nous adopterons comme définition de l'inertie thermique constante équivalente et comme définition des coefficients  $p_k$  les solutions du problème inverse.

Cette définition est loisible dans la mesure où dans les cas où il existe un sol homogène équivalent, on retrouve ses caractéristiques et dans le cas où on ne peut physiquement définir un tel sol, le problème inverse en définit un qui, au sens des mesures de surface, est par construction le plus proche (pour la norme de  $L^2(0, \tau)$ , d'après (II.34) ou (II.35)).

#### Remarque

Si la résolution de (II.34) conduit à un minimum non nul, cela peut s'interpréter comme le signe de l'hétérogénéité du sol (en admettant qu'on est sûr des mesures et du modèle).

C'est-à-dire que si  $c_0, K_0, p_0$  minimisent (II.34), on a pour  $x > 0$  fixé,

$$\begin{aligned}
\min_{p,c,K} & \left\| J(x,T,p,c,K) \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 + \left\| J(0,T,p) \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 \\
& = \left\| J(x,T,p_0,c_0,K_0) \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 + \left\| J(0,T,p_0) \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 \\
& = \left\| \rho_1(x) \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 + \left\| \rho_0 \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 \quad (54)
\end{aligned}$$

$\rho_1$  représente un terme source (pour la couche  $[0,x]$ ) dans l'équation de la chaleur et  $\rho_0$  un terme de flux additif.

Autrement dit, l'hétérogénéité du sous-sol revient formellement à transformer (51) et (52) en

$$c \frac{\partial T}{\partial x} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho_1}{\partial x}(x,t) \text{ et en } K \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) + \phi(T^{\text{mes}}(t), p_0) = \rho_0(t) \quad (55)$$

c'est-à-dire qu'un sol hétérogène est équivalent (en ce qui concerne la résolution du problème inverse) à un sol homogène ( $c_0, K_0$ ) contenant un terme source de densité  $\frac{\partial \rho_1}{\partial x}$  en  $W/m^3$  dans la couche  $[0,x]$  et un terme  $\rho_0$  de flux additif en surface.

Ainsi, nous donnons une définition de l'inertie thermique homogénéisée pour des sols hétérogènes où cette notion n'avait pas de sens. Il faut noter que cette définition est alors liée aux modèles thermique et de flux.

Sens physique de la quantité  $R(x) = \left\| \rho_1(x) \right\|_{L^2(0,\tau)}^2 + \left\| \rho_0 \right\|_{L^2(0,\tau)}^2$  :

- Sur le plan théorique. Si les modèles sont exacts et si les mesures sont cohérentes,  $R$  est nul sur un milieu homogène. Il a été montré que  $R$  est nécessairement différent de zéro sur sol hétérogène. Ainsi  $R$  donne une "mesure" de l'hétérogénéité du milieu bien qu'elle n'apparaisse pas dans la radiométrie.
- Sur le plan pratique, les choses ne sont pas aussi simples car les sources d'erreurs sont multiples. On se propose ultérieurement d'étudier ce point sur des exemples pratiques.

III.1.7. Résultats numériques de l'inversion sur des sols hétérogènes

Récapitulons les résultats qui précèdent de façon à mettre en évidence les cas dans lesquels un milieu à couches se comporte en surface différemment d'un milieu homogène. Ceci ne se produit que dans le cas où les inerties thermiques des couches sont différentes (III.1.4, conséquence 4) et où la couche de surface n'est pas trop épaisse (en fait ne dépasse pas une épaisseur de l'ordre de 50 cm (III.1.5). Il sera intéressant de voir alors dans ces cas les valeurs obtenues par la méthode d'inversion pour l'inertie thermique.

D'autre part, lorsque les couches ont la même inertie thermique il existe un sol homogène équivalent caractérisé par (18) et (19). Si la couche de surface est peu épaisse, ( $l_1 \ll 50$  cm) il sera intéressant de voir les valeurs obtenues par la méthode d'inversion pour K et c (voir conséquence 2, en III.1.3).

Dans les essais numériques, nous avons simulé de faibles erreurs sur les données d'entrée de façon à pouvoir calculer les coefficients optimaux  $\Omega_{opt}$  de la stabilisation :  $\sigma_T = \sigma_{Ta} = 0.01^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_{RN} = 0 \text{ W/m}^2$ . Toutefois, pour des faibles erreurs, les résultats obtenus en fixant les matrices  $\Omega_{opt}$  égales à l'identité ont fourni des résultats très voisins. La table III.2 montre à titre d'exemple l'écart entre les résultats obtenus dans un cas.

Table III.2 : Ecart relatif pour le calcul des inerties thermiques calculées avec  $\Omega_{opt}$  calculé à chaque itération et  $\Omega_{opt} \equiv \text{Id}$  pour un sol à 2 couches définies (en MKSA) par :

1ère couche :  $l_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $K_1 = 1.383$ ,  $c_1 = 1.727 \times 10^6$   
 2ème couche :  $l_2 = 0.4 \text{ m}$ ,  $K_2 = 2.683$ ,  $c_2 = 2.727 \times 10^6$   
 valeurs initiales :  $K^{(0)} = 2.2$ ,  $c^{(0)} = 1.9 \times 10^6$

|               |    |      |    |    |
|---------------|----|------|----|----|
| Itéré n°      | 1  | 9    | 17 | 20 |
| Ecart relatif | 3% | 1.6% | 2% | 2% |

a) Cas où il existe un milieu homogène équivalent

On prend des milieux à 2 couches d'épaisseurs  $l_1 = 0.2 \text{ m}$  et  $l_2 = 0.6 \text{ m}$  et de même inerties thermiques. On constate alors (table III.3) que les valeurs obtenues pour K et c dépendent des valeurs initiales introduites, mais que  $\sqrt{Kc}$  donne toujours -aux erreurs numériques près qui sont de l'ordre de 2 à 3%- l'inertie thermique commune des 2 couches.

On remarque également que si l'une des valeurs initiales est  $K^{(0)} = \tilde{K}$  (conductivité du milieu homogène équivalent donnée par (19)),  $c^{(0)}$  quelconque ou  $c^{(0)} = \tilde{c}$  (donné par (18)) et  $K^{(0)}$  quelconque, les valeurs obtenues sont alors  $K = \tilde{K}$  et  $c = \tilde{c}$  ; mais si  $K^{(0)}$  et  $c^{(0)}$  sont arbitraires, seule l'inertie thermique calculée est correcte.

Ces résultats confirment la conséquence 2 de III.1.3.

Table III.3 : Capacités et conductivités thermiques calculées pour différents milieux.  $K^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$  sont les valeurs introduites. Le milieu homogène équivalent est défini par  $\tilde{K} = 1.157$ ,  $\tilde{c} = 2.064 \times 10^6$  et  $\sqrt{\tilde{K}\tilde{c}} = \sqrt{K_1 c_1} = \sqrt{K_2 c_2} = 1545$  (en MKSA). Les erreurs relatives sont calculées par rapport à  $\tilde{c}, \tilde{K}$ .

|                   | K     | c                   | $\sqrt{Kc}$ |
|-------------------|-------|---------------------|-------------|
| valeurs initiales | 1.16  | $2.06 \times 10^6$  | 1545        |
| valeurs calculées | 1.101 | $2.121 \times 10^6$ | 1528        |
| erreurs relatives | 12 %  | 2.7 %               | 1.1 %       |

|                           |
|---------------------------|
| $K_1 = 1.383$             |
| $c_1 = 1.727 \times 10^6$ |
| $K_2 = 1.097$             |
| $c_2 = 2.177 \times 10^6$ |

|                   |       |                     |       |
|-------------------|-------|---------------------|-------|
| valeurs initiales | 2.019 | $2.06 \times 10^6$  | 2039  |
| valeurs calculées | 1.121 | $2.097 \times 10^6$ | 1534  |
| erreurs relatives | 3 %   | 1.6 %               | 0.7 % |

|                   |       |                     |        |
|-------------------|-------|---------------------|--------|
| valeurs initiales | 1.545 | $10^6$              | 1545   |
| valeurs calculées | 2.397 | $0.983 \times 10^6$ | 1535.8 |
| erreurs relatives | 73 %  | 43 %                | 0.6 %  |

b) Cas où il n'existe pas de milieu homogène équivalent

Conformément à la conséquence 6, les résultats obtenus ici seront pris comme définition. La table III.4 consigne les résultats obtenus pour 3 sols hétérogènes à couches (n'admettant pas de sol homogène équivalent).

Table III.4 : Inertie thermique homogène équivalente pour des sols à couches n'admettant pas de sol homogène équivalent. Ces résultats sont obtenus avec les mêmes valeurs estimées  $K(o) = 7.5$ ,  $c(o) = 1.9 \cdot 10^6$  donc  $\sqrt{K(o)c(o)} = 3775$  à la 1ère itération avec  $\Omega = Id$ . R est le reste de la minimisation pour  $x = 0.6$  cm.

| Réf.   | A  | B  | C  |       |
|--|--|--|--|-------|
| $K_1 = 0.5852$<br>$c_1 = 1.8057 \times 10^6$         | $K_1 = 0.5852$<br>$c_1 = 1.8057 \times 10^6$       | $K_1 = 0.5852$<br>$c_1 = 1.8057 \times 10^6$       | $K_1 = 0.5852$<br>$c_1 = 1.8057 \times 10^6$       | 0.2 m |
| $K_2$<br>$c_2$                                       | $K_2 = 1.5852$<br>$c_2 = 1.9562 \times 10^6$       | $K_2 = 2.5852$<br>$c_2 = 1.9562 \times 10^6$       | $K_2 = 5.016$<br>$c_2 = 1.9562 \times 10^6$        |       |
| $\sqrt{K_1 c_1} = 1018$<br>$R_o = 2.8 \text{ W/m}^2$ | $\sqrt{K_1 c_1} = 1028$<br>$\sqrt{K_2 c_2} = 1761$ | $\sqrt{K_1 c_1} = 1028$<br>$\sqrt{K_2 c_2} = 2249$ | $\sqrt{K_1 c_1} = 1028$<br>$\sqrt{K_2 c_2} = 3132$ |       |
| Valeur calculée : $\sqrt{Kc} = 1038$                 | $\sqrt{Kc} = 1048$                                 | $\sqrt{Kc} = 1072$ (unités MKSA)                   |  |       |
| $R/R_o = 2.3$  | $R/R_o = 4.6$                                      | $R/R_o = 6$  |  |       |

D'autres essais pour différentes valeurs initiales  $K(o)$  et  $c(o)$  ont été effectués et ont conduit aux résultats ci-dessus à moins de 3,5 % près. Notons pour interpréter ces résultats que le facteur de pénétration du milieu ( $c_1, K_1$ ) est  $\sqrt{\frac{2K}{c\omega}} \approx 9.4 \times 10^{-2} \text{ m} \approx 0.1 \text{ m}$ .

On remarque que l'inertie thermique homogène équivalente est très proche de celle de la couche de surface. Nous avons calculé l'inertie thermique pour un terrain à deux couches où l'inertie thermique la plus faible est celle de la couche profonde. Les résultats conduisent à la même conclusion : à moins de 3 % près, l'inertie thermique calculée est celle de la couche de surface. Le minimum R de (56) apparaît encore comme une mesure de l'hétérogénéité du sol.

III.1.8. Sol homogène le plus proche d'un sol hétérogène donné pour des mesures en profondeur

L'objet de ce paragraphe concerne les sols hétérogènes quelconques et ne s'intéresse plus aux mesures de température de surface mais aux mesures de profils de température en profondeur. Comme on l'a vu en II.5.5, les campagnes de mesures sur le terrain comportent des mesures de ce type, entre autres pour justement déduire une température de surface indépendamment de mesures d'émiss-

sivité par une extrapolation en surface des mesures en profondeur.

Conformément à la définition générale donnée dans l'introduction de la troisième partie, on peut définir un sol homogène équivalent à un sol hétérogène par rapport à des mesures de températures en  $(x,t)$ . Nous n'aborderons pas la question de l'existence (peu probable) d'un tel sol d'un point de vue théorique, mais nous allons encore définir un sol homogène "le plus proche" du sol hétérogène donné par rapport à ces mesures (en fait, comme on le verra, nous ne pourrions définir qu'une classe de sols ayant la même diffusivité thermique).

Considérons le problème (II.8). Ce problème admet une solution unique  $T(x,t)$  dont une expression est donnée par une série de Fourier (uniformément convergente vers  $T(x,t)$  sur  $[0,\ell] \times [0,\tau]$  si  $T^{\text{mes}}(t)$  est de classe  $c^2(0,\tau)$ , ce que nous supposons). Cette solution est donnée par (24), (25) et nous la noterons  $T^{\text{hom}}(x,t)$ .

Si maintenant le sol est quelconque, homogène ou non, soit  $T^{\text{mesuré}}(x,t)$  le profil de température réel que l'on peut mesurer pour  $x \in [0,\ell]$  et  $t \in [0,\tau]$ . Alors si le problème

$$\min_{c,K} \left\| T(x,t) - T^{\text{mesuré}}(x,t) \right\|_{L^2((0,\tau) \times (0,\ell))} \quad (56)$$

admet un minimum non nul pour des valeurs constantes  $c$  et  $K$ , c'est qu'il existe un sol homogène  $(c,K)$  donnant le profil de température  $T(x,t)$  le plus proche (au sens de  $L^2((0,\tau) \times (0,\ell))$ ) de la température réelle. Plus l'écart entre  $T^{\text{hom}}$  et  $T^{\text{mesuré}}$  sera grand, plus le sol pourra être considéré comme inassimilable à un sol homogène en ce qui concerne les profils de température.

En fait le problème (56) ne peut fournir  $c$  et  $K$  séparément comme on le voit sur (II.8) mais seulement la diffusivité  $d = \frac{K}{c}$ . Ce problème a été discrétisé en (38). Nous présentons ici ce type de mise en évidence d'hétérogénéités sur différents sols en montrant fig. 4,5,6, l'écart entre  $T^{\text{hom}}(0,t)$  et  $T^{\text{mesuré}}(0,t)$  où cette dernière valeur est obtenue à partir d'extrapolation polynomiale en  $x$  d'ordre 4 à chaque instant.

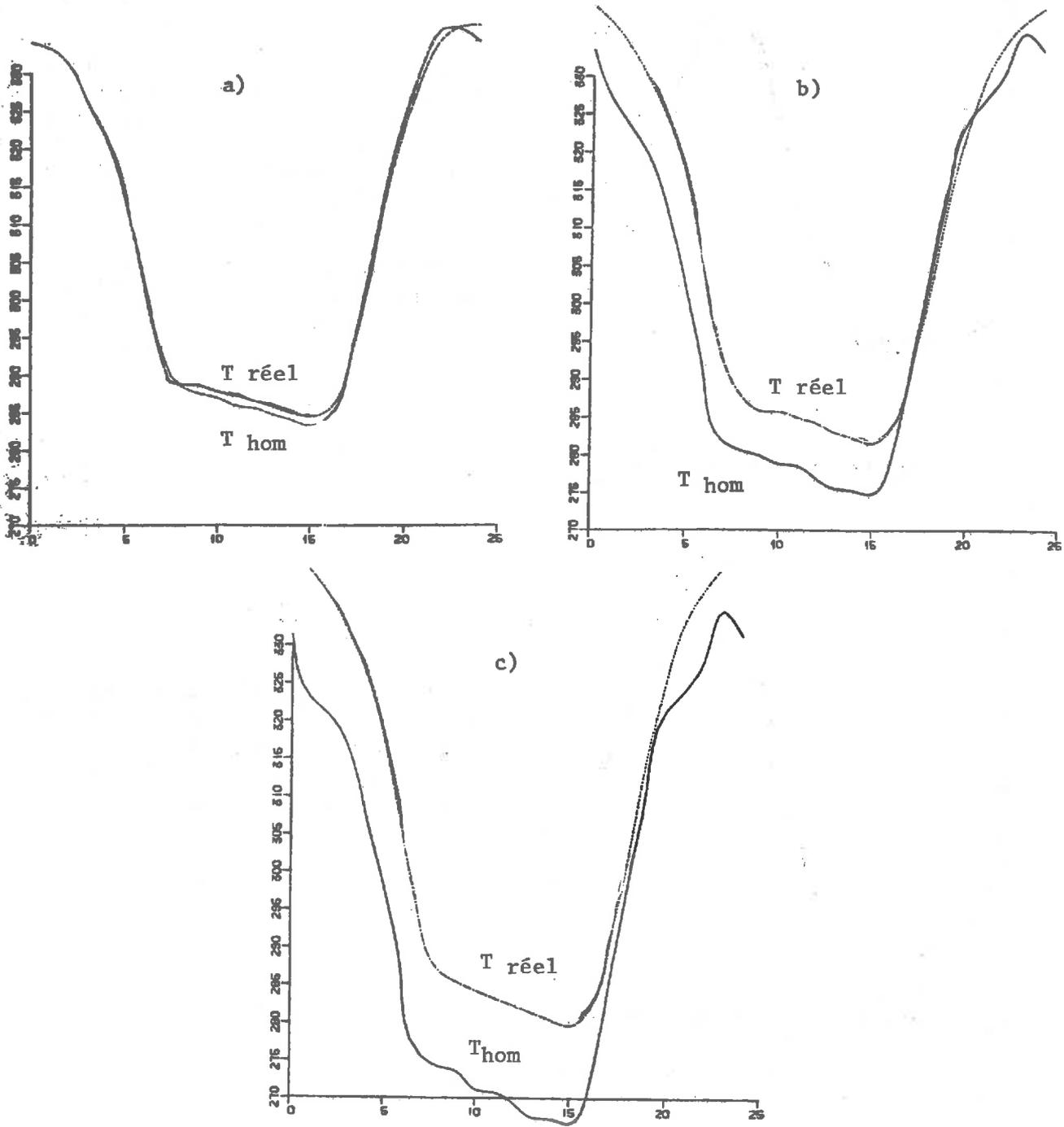


Fig.III.4: On considère un terrain à 2 couches avec  $l_1 = 0.2$  m,  $l_2 = 0.6$  m où  $K_1 = 0.5852$ ,  $c_1 = 1.8057 \times 10^6$  et où la couche profonde est définie par  $(K_2, c_2) = (K_1, c_1)$  en a),  $(K_2, c_2) = (3.585, 1.95 \times 10^6)$  en b),  $(K_2, c_2) = (4.3585, 1.95 \times 10^6)$  en c). Les valeurs mesurées de  $T(x_i, t_j)$  ont été prises pour  $x_1 = 10^{-2}$  m,  $x_2 = 4 \times 10^{-2}$  m,  $x_3 = 8 \times 10^{-2}$  m et  $t_j = 0h, 1h, \dots, 23h$ .

$T_{réel}$  est le profil de température de surface,  $T_{hom}$  le profil de température de surface du sol homogène le plus proche. Le cas a) est le cas homogène.

Les valeurs calculées des diffusivités homogénéisées sont respectivement  $d = 1703$  cas a),  $d = 1665$  cas b),  $d = 1656$  cas c), en MKSA.

(On observe une erreur sur  $d$  de 3 % sur le cas a) qui est le cas homogène).

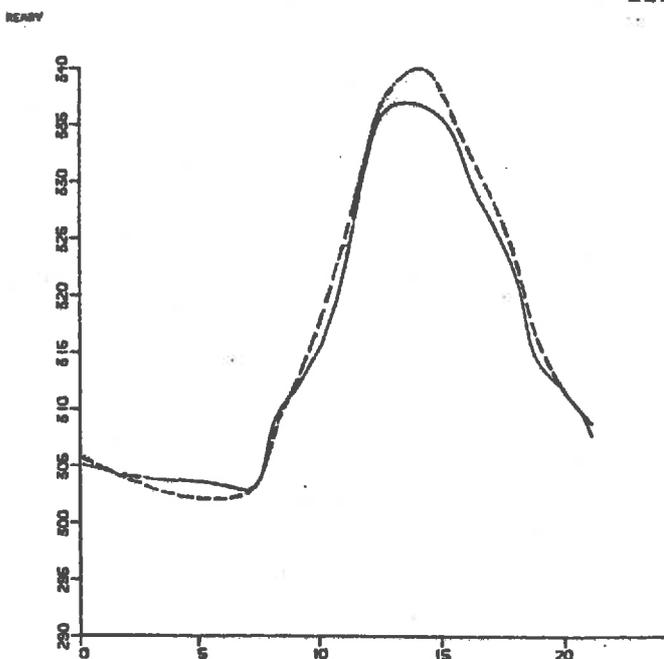


Fig.III.5: En pointillés, température de surface du milieu réel (mesures Niamey, 82) en continu, température de surface du sol homogénéisé. Les températures en profondeur sont mesurées à  $x_1 = 10^{-2}$  m,  $x_2 = 2 \times 10^{-2}$  m,  $x_3 = 4 \times 10^{-2}$  m, chaque heure durant 24 heures.

(La température de surface du milieu réel est calculée par extrapolation polynomiale de  $d^0$  à chaque instant).

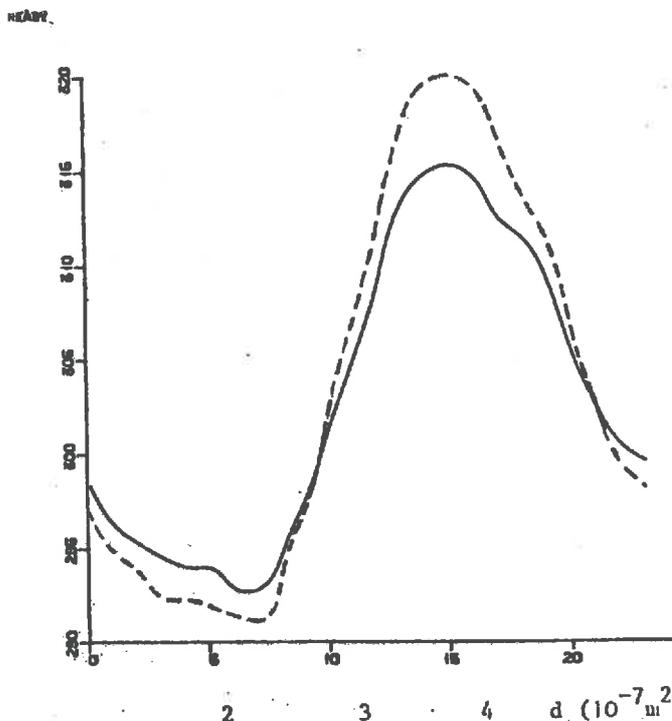


Fig.III.6 : Même légende que la fig. III.5 sur les mesures de la Crau avec  $x_1 = 6 \times 10^{-2}$  m,  $x_2 = 24 \times 10^{-2}$  m,  $x_3 = 0.1$  m,  $x_4 = 0.39$  m. Le décalage entre les courbes est le signe d'un sol assez hétérogène.

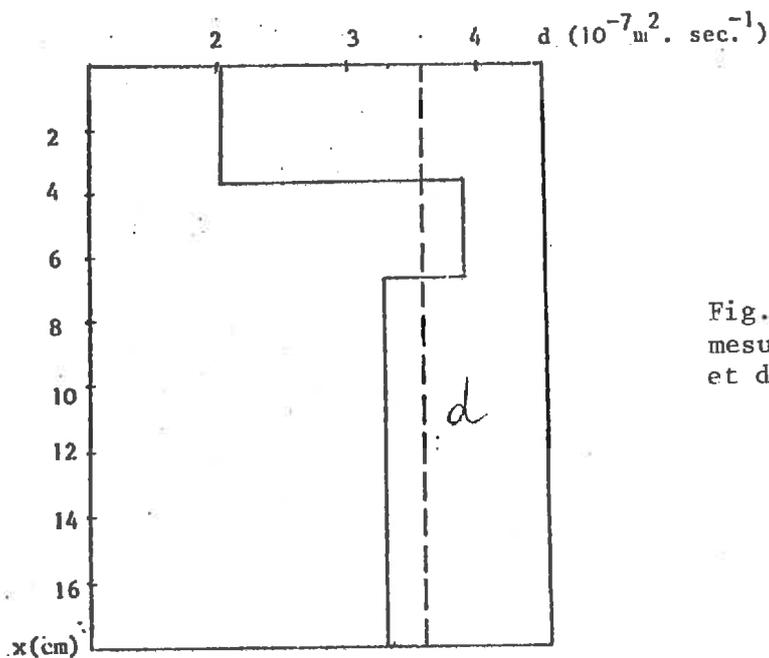


Fig. III.7 : Comparaison du profil mesuré de diffusivité (Niamey, 82) et de la diffusivité constante calculée.

Remarque :

En II.5.5 nous avons comparé ces méthodes pour le calcul de  $T(0,t)$  pour des sols homogènes. Il est clair que pour des sols hétérogènes l'extrapolation polynomiale garde son sens alors que  $T^{\text{hom}}$  ne donne que la meilleure approximation homogène de  $T^{\text{mesuré}}(x,t)$ .

Les températures de surface  $T^{\text{hom}}(0,t)$  et  $T^{\text{mesuré}}(0,t)$  sont comparées pour des cas de terrains à 2 couches, fig. III.4, pour les mesures in situ (Dugdale et al., 1982) dans le Sahel fig. III.5, et pour les mesures in situ de la Crau fig. III.6. La figure III.5 montre par exemple que la zone de la Crau où ont été faites les mesures de température en profondeur est très hétérogène puisque le sol homogène le plus proche donne une température de surface très éloignée de la température réelle. Ceci ne semble pas être le cas des mesures du Sahel pour lesquelles la diffusivité (constante) calculée (par (38)) est comparée au profil de diffusivité fourni par Dugdale et al., fig. III.7. On remarque qu'elle correspond à la moyenne des 15 premiers centimètres. La diffusivité calculée par (38) pour les mesures en profondeur de la Crau ne semble pas significative (on trouve  $529 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{sec.}$ )

### III.2. HETEROGENEITES DE SURFACE

Ce qui précède est essentiellement basé sur le modèle de flux  $\phi(T,p)$  et implicitement sur la façon dont on obtient la température de surface à partir du radiomètre (loi de Planck). Or ces lois sont établies au niveau du sol pour  $\phi$  et pour des corps homogènes en équilibre thermique pour la loi donnant la température de surface à partir de la luminance mesurée par le radiomètre.

L'un des problèmes de base de la télédétection est d'étudier l'extension à toute échelle de ces lois. Cette extension est en général implicitement admise dans les travaux de télédétection (voir toutefois Becker et al. (1978, 1980, 1983), Becker (1981), Seguin (1978), Becker et Seguin (1985)). Mais elle ne va absolument pas de soi et la plupart des grandeurs fondamentales que l'on utilise n'ont même pas de signification à toute échelle, comme nous le verrons.

En III.1 nous avons examiné des sols hétérogènes composés de couches horizontales homogènes. Pour ces sols, la température de surface et les caractéristiques de surface sont les mêmes d'un point à un autre du pixel. La température de surface mesurée sera donc la même quelle que soit l'altitude de la mesure (aux effets atmosphériques près qui ne sont pas pris en compte dans cette discussion et n'interviennent que comme des corrections). Par exemple, que signifie la température de surface mesurée lorsque la surface est hétérogène ? La température étant une grandeur définie pour un corps homogène en équilibre thermique, la notion de température effective pour un milieu hétérogène est à définir et de plus il faut montrer qu'une telle notion est opératoire, c'est-à-dire qu'elle peut entrer dans des modèles représentatifs des observations.

De façon générale nous définirons (au 1er paragraphe) ce que doit être un modèle valable à toute altitude (ou échelle) et nous montrerons que les modèles communément utilisés ne sont pas valables à l'échelle du satellite. Au paragraphe 2 nous verrons que même si toutes les grandeurs étaient mesurables à toute altitude, les modèles usuels ne pourraient s'étendre à toute échelle. Nous donnerons ensuite deux définitions possibles de la température de surface homogénéisée pour un corps hétérogène (paragraphe 3 et 4) et nous évaluerons au paragraphe 5 l'erreur d'homogénéisation pour le modèle de rayonnement net. Enfin au paragraphe 6 nous discuterons comment on peut définir les flux de chaleur sensible et d'évapotranspiration à toute échelle ainsi que les solutions homogénéisées du problème inverse.

### III.2.1. Les problèmes de l'extension spatiale des modèles

Considérons un ensemble donné de grandeurs liées les unes aux autres. Dans ce qui suit, on appellera ensemble des situations reliant ces grandeurs, un ensemble A d'expériences réalisables avec ces grandeurs.

Pour élaborer un modèle reliant ces grandeurs et valide dans A, on doit alors :

a) Disposer d'appareils de mesure de ces grandeurs donnant des résultats pour toute situation de A (cela implique l'existence d'une dimension spatiale et temporelle caractéristique des mesures).

b) D'une relation mathématique définie sur A (cette relation mathématique sera le modèle mathématique représentatif de l'ensemble des situations de A).

Un modèle sera alors adopté si

c) Pour chaque réalisation d'une situation de A, les mesures de toutes les grandeurs intervenant dans la relation sont (à la précision des instruments près) en accord avec celle-ci.

d) Aucun traitement algébrique de la relation ne doit contredire des résultats établis par ailleurs.

On appellera un tel modèle un modèle du 1er ordre et un modèle d'ordre  $n+1$  sera un modèle où une ou plusieurs des mesures des grandeurs (dans a)) sont obtenues non par des appareils mais par des modèles d'ordre  $< n$ .

Enfin, si  $R(g_1, \dots, g_p) = S(g_{p+1}, \dots, g_n)$  est le modèle exprimant les grandeurs  $g_1, \dots, g_p$  à partir des grandeurs mesurées  $g_{p+1}, \dots, g_n$ , on appellera modèle approché à  $\epsilon$  près un modèle dont les valeurs calculées sont à  $\epsilon$  près les valeurs mesurées ; plus précisément tel que

$$\| R(g_1^{\text{calc}}, \dots, g_p^{\text{calc}}) - R(g_{p+1}^{\text{mes}}, \dots, g_n^{\text{mes}}) \| < \epsilon$$

pour une norme donnée.

Bien entendu, cette définition succincte de modèle ne prétend pas à la généralité, mais est nécessaire pour éclairer la suite (pour des définitions générales destinées à établir une structure d'ordre sur les modèles voir Aris, 1978)).

Les modèles pour H et LE que nous avons rappelés dans la première partie ont bien entendu respecté ces règles.

En effet, il existe des instruments de mesure permettant d'obtenir, à l'échelle locale, les grandeurs intervenant. Il s'agit par exemple des fluxmètres, anémomètres, thermocouples, radiomètres et des appareils particuliers permettant d'étudier le couvert végétal tels que les chambres d'assimilation (pour la photosynthèse des feuilles), poromètres (pour les résistances stomatiques), évapotranspiromètres (permettant la mesure directe du flux de vapeur d'eau)... (voir Perrier, 1976, Perrier et al., 1975).

L'ensemble A des situations d'application du modèle est nécessairement contenu dans l'intersection des domaines superficiels d'utilisation de chaque instrument. Ces domaines sont très variables puisque par exemple, le radiomètre donne de 0 à plus de  $10^6$  mètres des valeurs moyennes de luminances de la surface (nous négligeons toujours l'atmosphère !) alors que l'anémomètre donne la vitesse du vent sur une très faible surface (les problèmes d'échelle sont à ce sujet très étudiés ; voir par exemple Schertzer et al. 1983), le thermocouple donne une température sur quelques  $\text{mm}^3$  et que nous étendons à quelques  $\text{m}^3$  (ou  $\text{m}^2$ ) (là aussi l'extension n'est pas sans problèmes, Schertzer et al. 1981) etc... La condition a) est donc remplie dans le domaine d'intersection des domaines d'utilisation des instruments de mesure.

Une discussion détaillée du domaine spatial (et temporel) de validité du modèle de LE est faite dans Perrier (1976), Itier et al. (1977) et Seguin (1978) (voir aussi Huband et al., 1985), qui conduit à admettre la validité du modèle de 0 m à 3 m au-dessus du couvert et sur quelques dizaines de  $\text{m}^2$  (les échelles dépendant du type de végétal). Mêmes conclusions pour le flux de chaleur sensible H. Les conditions b) et c) sont donc remplies à l'échelle considérée. On peut montrer qu'il en est de même pour d).

On peut donc dire que les conditions a), b), c), d) ci-dessus ont été remplies jusqu'à présent et que à l'échelle de quelques  $\text{m}^2$  pour la surface (fig. III.8), les modèles de H et LE précédents sont valides (l'altitude a de validité d'observation de ces grandeurs dépend de l'angle d'ouverture instantané des radiomètres).

L'échelle temporelle des phénomènes est la même pour le satellite qu'au sol, de l'ordre de l'heure, (voir par exemple Perrier, 1976) ; nous n'en parlerons plus.

En écrivant  $H + LE \approx p_1 \varphi_1(T) + p_2 \varphi_2(T) + p_3 \varphi_3(T)$  où les p sont des constantes relatives à la surface  $S_a$  (de quelques  $\text{m}^2$ ) nous affirmons qu'à  $\epsilon =$  quelques  $\text{W}/\text{m}^2$  près, cette modélisation redonne les valeurs instrumentales, donc ce modèle approché à  $\epsilon$  près, satisfait encore a), b), c), d), et l'on peut considérer que les  $p_k$  (résultats du problème inverse) sont des caractéristiques du sol à l'échelle considérée à  $\in [0, 3 \text{ à } 4 \text{ m}]$  et  $S_a$  de quelques  $\text{m}^2$  ou dizaines de  $\text{m}^2$  au plus (figure III.8).

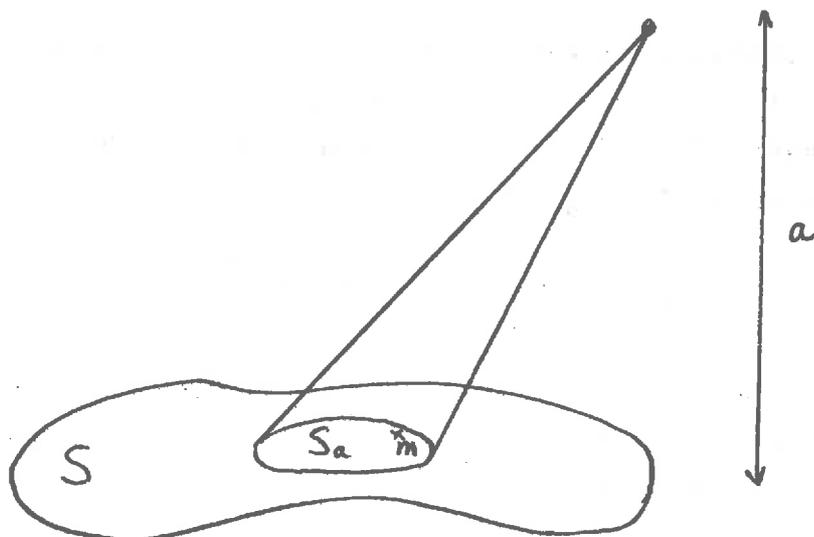


Fig. III.8

Mais à l'échelle vue par le satellite il n'en est plus du tout de même car la condition a) précédente est violée puisqu'il n'est plus possible de mesurer toutes les grandeurs intéressantes si l'on maintient rigoureusement les mêmes modèles de H et LE donnés par les relations (I.7) et (I.9). En effet, les instruments permettant la mesure des résistances (dont les  $p_k$  sont des moyennes) n'ont aucune validité à l'échelle de plusieurs centaines de  $m^2$  ou de  $km^2$ . Puisque la condition a) est violée, la condition c) n'a même plus de sens.

Ce que nous venons de dire des flux H et LE est vrai aussi des modèles donnant le flux de rayonnement net  $R_N$  qui s'écrit au sol ( $a \approx 0$ )

$$R_N(m) = (1 - a(m)) R_G(m) + \sigma \epsilon_a(m) T_a^4(m) - \sigma \epsilon(m) T(m^4)$$

pour  $m \in S_a$ .

Or les appareils de mesure validant cette relation donnent des résultats acceptables à quelques mètres au maximum. (Quant aux thermocouples donnant la température de quelques  $mm^3$ , la signification des mesures qu'ils donnent pour quelques  $m^2$  est déjà très ambiguë) (cf. Vauclin, 1982).

#### Conséquence 8

Les modèles usuels des flux utilisés dans les première et seconde parties ne peuvent être considérés comme des modélisations à toute échelle.

Parmi les instruments précédents un seul donne des mesures valides à toute échelle (si l'on fait abstraction de l'atmosphère), c'est le radiomètre qui possède la faculté d'intégrer l'énergie reçue : à l'échelle  $a$ , la luminance mesurée est (pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée)

$$\mu_a(L_\lambda) = \frac{1}{\Omega(S_a)} \int_{S_a} L_\lambda(m) d\omega_a$$

où  $d\omega_a$  est l'élément d'angle solide d'où le radiomètre voit l'élément homogène  $dS_a$  de la surface  $S_a$  et  $\Omega(S_a) = \int_{S_a} d\omega_a$  (fig. III.8). C'est une propriété sur laquelle nous reviendrons.

La plupart des travaux de télédétection sous-entendent généralement que les modèles sont valides si l'on remplace chaque grandeur par sa moyenne sur la scène  $S_a$ , comme on peut le justifier pour la luminance. Nous allons voir que même si l'on admettait que l'on dispose d'instruments de mesure de ces moyennes de façon à satisfaire le critère  $a$  précédent et si l'on maintient les relations élaborées à l'échelle locale, les conditions  $c$ ) et  $d$ ) ne seraient pas valables. Cela implique que les modèles locaux ne sont plus valables à l'échelle considérée.

### III.2.2. Les problèmes de l'extension spatiale d'un modèle avec mesures à toute échelle

Nous supposons dans ce paragraphe que nous disposons d'instruments de mesure valides à toute échelle pour chaque grandeur intervenant dans un modèle. Nous verrons que dans ces conditions on ne peut en général garder le même modèle valide à toute échelle.

Appelons  $S$  la scène totale d'une région et  $S_a$  la scène visible (par exemple par le radiomètre) à l'altitude  $a \in [0, a_{\max}]$ , (fig. III.8). Il faut noter que  $S_a$  est directement reliée à  $a$  par une relation du type

$$S_a = a^2 d\omega \cos^3\theta$$

où  $d\omega$  est l'angle solide instantané d'analyse du radiomètre et  $\theta$  l'angle d'observation (cette relation est plus complexe si le radiomètre se déplace).

Si  $a = a_2$ , on est à l'échelle de l'expérimentation locale (ou terrain), c'est-à-dire en fait, de l'élaboration du modèle. Considérons des grandeurs (pour fixer les idées, deux)  $\alpha(m)$  et  $\beta(m)$  mesurables en chaque point  $m \in S_a$  et dont on observe une mesure  $\mu_a(\alpha)$  et  $\mu_a(\beta)$  à l'altitude  $a \in [0, a_{\max}]$ .

Soit, d'autre part, une loi  $f$  élaborée à l'altitude  $a = a_0$  reliant les grandeurs  $\alpha, \beta$  à une grandeur  $u(m) = f(\alpha(m), \beta(m))$ , en tout point  $m \in S_a$ .

Alors le problème de l'extension spatiale de la loi  $f$  peut se schématiser de la façon suivante (figure III.9).

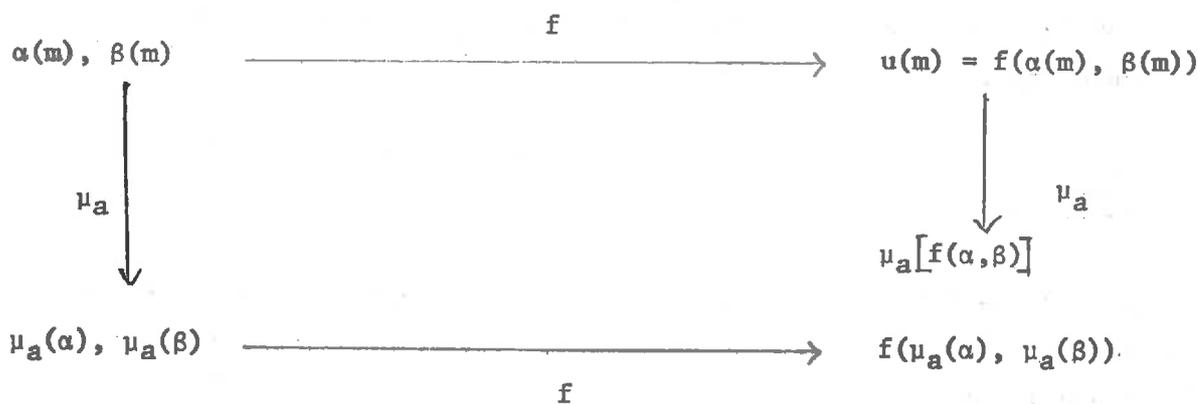


Fig. III.9

Dire que la loi  $f$  est valable à toute échelle (ou altitude), c'est dire que pour tout  $a \in [0, a_{\max}]$ , on a

$$f(\mu_a(\alpha), \mu_a(\beta)) = \mu_a(f(\alpha, \beta)) \tag{57}$$

Or ceci est en général faux.

Exemple 1

$\alpha(m) = \epsilon(m)$ , émissivité et  $\beta(m) = T(m)$ , température mesurées au point  $m$  de la surface du sol ( $a = a_0$ ). Considérons la loi  $f$  reliant la luminance spectrale

à la température et l'émissivité  $u(m) = f(\alpha, \beta) = L_\lambda(m) = \epsilon R_\lambda(T)$  où

$$R_\lambda(T) = \frac{d_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{d_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (58)$$

est donnée par la loi de Planck avec

$$\begin{cases} d_1 = 2hc^2 \quad (= 3,74 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2 \mu^4) \\ d_2 = \frac{h}{k} \quad (= 1,439 \cdot 10^4 \mu(^{\circ}\text{K})) \end{cases} \quad (59)$$

$h$  étant la constante de Planck,  $c$  la vitesse de la lumière et  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Joules/K est la constante de Boltzmann. La mesure  $\mu_a$  est définie par l'intégration radiométrique

$$\mu_a(u) = \frac{1}{\Omega(S_a)} \int_{S_a} u(m) d\omega_m \quad (60)$$

où  $d\omega_m$  est l'élément d'angle solide duquel on voit la surface caractéristique du point  $m$  et  $\Omega(S_a) = \int_{S_a} d\omega_a$ . Or,  $R_\lambda$  n'étant pas linéaire en  $T$ , il est clair que (57) s'écrit ici

$$\left( \int_{S_a} \epsilon(m) d\omega_a \right) \cdot R_\lambda \left( \int_{S_a} T(m) d\omega_a \right) = \int_{S_a} \epsilon(m) R_\lambda(T(m)) d\omega_a \quad (61)$$

et n'est pas vérifiée.

### Conséquence 9

Si l'on définit la mesure  $\mu_a$  par la moyenne (60), alors la température moyenne et l'émissivité moyenne ne vérifient plus la loi de Planck à l'échelle  $a > a_g$ . Cette loi n'est donc pas valable à toute échelle, avec les paramètres moyens précédents.

### Remarque 1

La mesure  $\mu_a$  qui est la façon dont les données sont interprétées à l'échelle  $a$  peut être considérée comme une mesure  $\geq 0$  au sens mathématique du terme : Si  $\mu$

est une mesure  $> 0$  sur l'ensemble  $\mathcal{S}$  des parties de  $S$ ,  $\mu_a$  peut être définie par

$$\mu_a(\omega) = \frac{\mu(S_a \cap \omega)}{\mu(S_a)} \quad (62)$$

pour  $\omega \in \mathcal{S}_a$  ensemble des parties de  $S_a$ . On a alors pour une fonction  $\alpha$ ,  
 $\mu_a(\alpha) = \int_{S_a} \alpha \, d\mu_a$  et pour  $a = 0$ , la mesure au sol est alors la mesure de Dirac  
 $m = \{\delta_0\}$ .

Remarque 2

Pour poser le problème de l'extension spatiale nous nous sommes limités à deux grandeurs  $\alpha$  et  $\beta$ , mais évidemment, on peut avoir une loi reliant des grandeurs  $u = (u_1 \dots u_r)$  à des grandeurs  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_q)$  par  $u = f(\alpha)$ .

Donnons encore deux exemples où le problème de la spatialisation se pose de façon cruciale.

Exemple 2

Reprenons les notations des parties précédentes où le flux s'écrit à chaque instant

$$\phi(T(m)) = \varphi_0(T(m)) + \sum_{k=1}^q p_k(m) \varphi_k(T(m)) \quad (63)$$

en tout point  $m$  de la surface du sol (on omet l'écriture du temps  $t$ ). Si l'on veut définir la mesure  $\mu_a(T)$  de la température à l'altitude  $a$  par la moyenne

$$\mu_a(T) = \frac{1}{\Omega(S_a)} \int_{S_a} T(m) \, d\omega_a \quad (64)$$

comme on l'admet implicitement dans de nombreux travaux, alors le modèle local (en  $a = a_0$ ) du flux  $\phi$  rappelé en (63) n'est pas valable à toute échelle, si l'on prend comme variables à l'échelle  $a$  les variables moyennes définies par (64). En effet, (57) n'est pas vérifiée car

$$\begin{aligned} & \varphi_0\left(\int_{S_a} T(m) \, d\omega'_a\right) + \sum_{k=1}^q \left(\int_{S_a} p_k(m) \, d\omega'_a\right) \varphi_k\left(\int_{S_a} T(m) \, d\omega'_a\right) \\ & \neq \int_{S_a} [\varphi_0(T(m)) + \sum p_k(m) \varphi_k(T(m))] \, d\omega'_a \end{aligned} \quad (65)$$

à cause de la non-linéarité des  $\varphi_k$  en T (avec  $d\omega'_a = \frac{d\omega_a}{\Omega(S_a)}$ ).

Conséquence 10

Le modèle de flux généralement adopté et décrit dans la première partie n'est pas valable à toute échelle si l'on prend comme données d'entrée les données moyennes définies par (64).

Exemple 3

Considérons le problème inverse non-linéaire qui donne l'inertie thermique à partir des températures de surface  $T^{mes}(m)$ , de l'air  $T_{air}(m)$  et du rayonnement net  $R_N(m)$  en un point m de la surface. L'application

$$T^{mes}(m), T_{air}(m), R_N(m) \xrightarrow{f} P = \sqrt{K(m) c(m)} \quad (66)$$

n'est pas linéaire. Si l'on considère les données à l'altitude a comme les moyennes données par (64) on n'a pas

$$f\left(\int_{S_a} T(m) d\omega'_a, \int_{S_a} T_{air}(m) d\omega'_a, \int_{S_a} R_N(m) d\omega'_a\right) = \int_{S_a} \sqrt{K(m) c(m)} d\omega'_a \quad (67)$$

où  $d\omega'_a = \frac{d\omega_a}{\Omega(S_a)}$ .

Conséquence 11

Les résultats du problème inverse ne sont pas valables à toute échelle si l'on prend comme données d'entrée les données moyennes définies par (64) et que l'on définit l'inertie thermique du sol hétérogène comme la moyenne de l'inertie thermique au sol.

Remarque 3

Nous avons pris l'exemple du problème inverse donnant l'inertie thermique, mais la conclusion est la même en ce qui concerne le problème inverse linéaire à cause de la dépendance non linéaire des  $\varphi_k$  en  $T^{mes}$ .

Conclusion: Ce qui résulte de cette discussion est que même si l'on possédait des instruments de mesure valides à toute échelle, les modèles décrits ne seraient pas extensibles à toute échelle.

Donc, ou bien les mesures étant valides à toute échelle, on modifie le modèle (i.e. on doit établir des modèles à l'échelle  $a$ , qui relieront les données d'entrées mesurées à cette échelle et les résultats ne seront valables que paramétrés par l'échelle  $a$  ; ou bien, si l'on entend garder les modèles locaux à l'altitude  $a$ , il faut redonner un sens aux paramètres à cette échelle (c'est-à-dire modifier leur mesure pour chaque  $a$ , la mesure (60) n'étant plus valable pour ces paramètres).

Dans la suite, nous justifierons ce dernier choix : pour le flux de rayonnement net, l'instrument naturel étant le radiomètre, nous calculerons le décalage entre ce que donne le modèle local à l'échelle  $a$  et la mesure à cette échelle (III.2.5). Pour le flux de chaleur sensible et d'évapotranspiration, nous justifierons également le choix du maintien à toute échelle du modèle local et nous définirons une mesure des paramètres dépendant de l'échelle  $a$ .

### III.2.3. La température de surface et l'émissivité homogénéisées à l'altitude $a$

La température étant une grandeur définie par un corps homogène en équilibre thermique, on doit tenter de donner un sens à la température "moyenne" de surface pour un domaine  $S_a$  hétérogène en émissivité et en température. Une telle température moyenne n'est nullement définie. Ce problème a été discuté en détail par F. Becker qui a défini dans (Becker et al., 1978) pour la première fois un facteur d'hétérogénéité pour la température et l'émissivité (voir également Becker, 1980, 1981). Il semble d'ailleurs que cet important problème n'ait pas été abordé ailleurs.

Une façon naturelle est alors de la déduire de la luminance de la scène  $S_a$  (fig. III.8) mesurée par le radiomètre, puisque, comme on l'a vu, le radiomètre est un instrument de mesure à toute échelle. Autrement dit, la luminance mesurée par le radiomètre placé à l'altitude  $a$  est bien (pour la longueur d'onde  $\lambda$  fixée)

$$L_{\lambda a} = \mu_a(L_{\lambda}(m)) \quad (68)$$

où l'on définit maintenant la mesure naturelle  $\mu_a$  par (62) et

$$\mu_a(u) = \frac{1}{\Omega(S_a)} \int_{S_a} u(m) d\omega_a \quad (69)$$

pour une grandeur  $u$  définie sur  $S_a$ .

Par conséquent, si l'on généralise la loi de Planck

$$L_\lambda(m) = \epsilon(m) \frac{d_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{d_2}{\lambda T(m)}\right) - 1} = \epsilon(m) R_\lambda(T(m)), \quad m \in S_a \quad (70)$$

(où  $\epsilon(m)$  et  $T(m)$  sont l'émissivité et la température en un point  $m$  de la surface) à des corps non homogènes en émissivité et température, on devra avoir

$$\bar{L}_\lambda = \mu_a(L_\lambda) = \bar{\epsilon} \frac{d_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{d_2}{\lambda \bar{T}}\right) - 1} = \bar{\epsilon} R_\lambda(\bar{T}) \quad (71)$$

(On maintient donc ici le modèle local à une échelle quelconque).

Ceci donne donc une relation que devront vérifier les grandeurs homogénéisées  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{T}$ . Parmi toutes les solutions, nous chercherons celles qui donnent  $\bar{\epsilon}$  en fonction de  $a$  et des valeurs  $\epsilon(m)$ ,  $m \in S_a$  et telles que si  $\epsilon(m) \approx \epsilon_0$  constante pour  $m \in S_a$ , on ait  $\bar{\epsilon} = \epsilon_0$ ; de même,  $\bar{T}$  ne devra dépendre que de  $a$ ,  $T(m)$ ,  $m \in S_a$  et l'on devra avoir  $\bar{T} = T_0$  si  $T(m) = T_0$  pour  $m \in S_a$ .

Pour cela, appliquons la formule de Taylor aux points  $(\bar{\epsilon}, \bar{T})$  et  $(\epsilon(m), T(m))$  à la fonction  $f(\epsilon, T) = \epsilon R_\lambda(T)$ , on a

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} R_\lambda(\bar{T}) - \epsilon(m) R_\lambda(T(m)) &= R_\lambda(\bar{T}) (\epsilon - \epsilon(m)) + \frac{\partial R_\lambda}{\partial T}(\bar{T}) \bar{\epsilon} (\bar{T} - T(m)) \\ &+ \frac{\partial R}{\partial T}(\bar{T}) [(\bar{T} - T(m))(\bar{\epsilon} - \epsilon(m))] + \bar{\epsilon} \frac{\partial^2 R_\lambda}{\partial T^2}(\bar{T}) (\bar{T} - T(m))^2 + \rho_2 \end{aligned} \quad (72)$$

et puisque l'on veut que  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{T}$  soient tels que (71) ait lieu, en appliquant  $\mu_a$  aux deux membres de (72), on a

$$\begin{aligned}
0 = R_\lambda(\bar{T}) [\bar{\epsilon} - \mu_a(\epsilon(m))] + \frac{\partial R_\lambda}{\partial T}(\bar{T}) \bar{\epsilon} [\bar{T} - \mu_a(T(m))] \\
+ \frac{\partial R_\lambda}{\partial T}(\bar{T}) \mu_a [(\bar{T} - T(m))(\bar{\epsilon} - \epsilon(m))] + \bar{\epsilon} \frac{\partial^2 R_\lambda}{\partial T^2}(\bar{T}) \mu_a (\bar{T} - T(m))^2 + \rho'_2
\end{aligned} \quad (73)$$

Les termes  $R_\lambda(\bar{T})$ ,  $\frac{\partial R_\lambda}{\partial T}(\bar{T})$ , ... ne s'annulant pour aucune valeur de  $T$ , on en conclut qu'il n'existe pas de sol homogène en émissivité et température de surface équivalent à un sol hétérogène donné, par rapport à des mesures radiométriques de luminance.

Toutefois, si l'on veut que l'approximation homogène (71) de (70) soit d'autant meilleure que les fluctuations de  $T(m)$  et  $\epsilon(m)$ ,  $m \in S_a$  sont faibles, alors on devra prendre comme définitions de l'émissivité et de la température de surface à l'altitude  $a$  :

$$\bar{\epsilon} = \mu_a(\epsilon(m)) \quad \text{et} \quad \bar{T} = \mu_a(T(m)) \quad (74)$$

Ces grandeurs ne sont malheureusement pas mesurables à l'altitude  $a \gg a_\ell$  (si l'on ne connaît pas  $T(m)$  et  $\epsilon(m)$  pour  $m \in S_a$ ) bien que ce soient les émissivité et température homogénéisées qui découlent de la généralisation de la loi de Planck.

On voit ainsi apparaître un terme en général non nul dans (73) qui est à nouveau un facteur mesurant le décalage entre la formule homogénéisée (71) et la formule exacte. Ce facteur est lié à l'hétérogénéité de la surface en  $\epsilon$  et  $T$  et l'on a au 1er ordre

$$\bar{\epsilon} R_\lambda(\bar{T}) = \mu_a[\epsilon(m) R_\lambda(T(m))] + Z_L \quad (75)$$

où

$$Z_L = \frac{\partial R_\lambda}{\partial T}(\bar{T}) \mu_a [(\bar{T} - T(m))(\bar{\epsilon} - \epsilon(m))] - \bar{\epsilon} \frac{\partial^2 R_\lambda}{\partial T^2}(\bar{T}) \mu_a [(\bar{T} - T(m))^2] \quad (76)$$

Ordre de grandeur de  $Z_L$  : au maximum d'émission, c'est-à-dire  $\lambda \approx 10 \mu$  et pour  $T \approx 300^\circ\text{K}$ ,

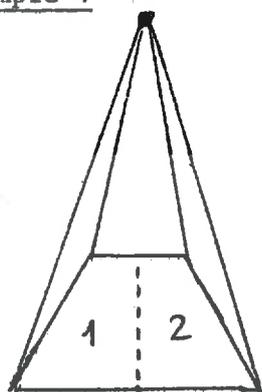
$$\begin{aligned}
 Z_L &= 10^{-4} \{ 3,7 \cdot 10^{-2} \mu_a [(\bar{T} - T(m))^2] + 1,6 \mu_a [(\bar{\epsilon} - \epsilon(m))(\bar{T} - T(m))] \} \\
 &= 10^{-4} \{ 3,7 \cdot 10^{-2} (\mu_a (T(m)^2) - \bar{T}^2) + 1,6 (\mu_a (\epsilon(m) T(m)) - \epsilon \bar{T}) \}
 \end{aligned} \tag{77}$$

en  $W/m^2$ .

#### Remarque 4

On voit dans  $Z_L$  l'expression de la variance de  $T(m)$  et de la covariance de  $\epsilon(m)$  et  $T(m)$  considérées comme des variables aléatoires sur  $S_a$ .

#### Exemple 4



$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= 0,8 & \epsilon_2 &= 0,9 \\
 T_1 &= 320^\circ K & T_2 &= 310^\circ K
 \end{aligned}$$

Soit un pixel composé de deux surfaces vues sous le même angle solide, chacune homogène en émissivité et température selon la figure ci-contre. Alors les valeurs homogénéisées  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{T}$  données par (74) sont

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) = 0,85, \quad \bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = 315^\circ K$$

et l'adoption de la loi de Planck à toute échelle donne une erreur de

$$Z_L = 1,3 \times 10^{-4} W/m^2$$

ce qui correspond en température, d'après (71) à une erreur de  $0,72^\circ K$ , comme on le voit, non négligeable.

#### III.2.4. Température mesurée, température de brillance

L'extension (70) de la loi de Planck à toute échelle conduit à des expressions à grande échelle  $\epsilon$  et  $T$  (74). Mais, comme il a été dit plus haut, on peut conserver exactement la loi de Planck. Dans ce cas, une autre définition de la température homogénéisée de surface peut être la température de brillance

$$T_B = R_\lambda^{-1}(\mu_a(L_\lambda)) \tag{78}$$

où  $R_\lambda^{-1}$  est l'inverse de la fonction de Planck  $R_\lambda$ . Cette définition a l'avantage d'être une grandeur mesurable à l'altitude  $a$  mais a l'inconvénient de définir

une température dépendant de l'émissivité moyenne.

Posons plus généralement pour une estimation  $\hat{\epsilon}$  de l'émissivité  $\epsilon$  :

$$\hat{T} = R_{\lambda}^{-1} \left( \frac{\mu_a(L\lambda)}{\hat{\epsilon}} \right) \quad (79)$$

et évaluons l'écart  $\hat{T} - T$  où  $T$  est la température homogénéisée définie en (74).

Puisque (75) donne  $\bar{T} = R^{-1} \left( \frac{\mu_a(L\lambda) - Z_L}{\bar{\epsilon}} \right)$ , par différence avec (79), on en déduit au voisinage du maximum d'émission,

$$\hat{T} \approx \bar{T} + 6.3 Z_L + 62(\bar{\epsilon} - \hat{\epsilon}), \quad \text{en } ^\circ\text{K} \quad (80)$$

donc l'écart entre la température mesurée par (79) et  $\bar{T}$  est très sensible à l'estimation  $\hat{\epsilon}$  que l'on fait de  $\epsilon$ . Bien que dans la pratique actuelle en télédétection, on utilise la température de brillance, (80) montre l'insuffisance de cette approche et justifie les études sur l'émissivité.

Pour résumer ces deux derniers paragraphes, disons que (conformément aux deux possibilités d'extension à l'échelle  $a$ , décrites dans la conclusion de III.2.2), (74) et (79) nous donnent deux définitions de la température à l'échelle  $a$  mais qu'aucune n'est vraiment satisfaisante.

En effet, (74) n'est pas une définition directement mesurable à l'altitude  $a \gg a_\ell$ , mais a l'avantage d'avoir une expression reliée à ses valeurs ponctuelles au sol, ce qui permet de calculer  $T$  à partir des mesures locales.

La définition (79), par contre, est calculable à toute échelle, vérifie exactement la loi de Planck, mais n'est pas une définition intrinsèque car elle dépend de l'estimation  $\hat{\epsilon}$  et donc peut ne pas être égale à sa valeur au sol si  $a \rightarrow a_\ell$ .

Ce problème (instrumental) qui est aussi un problème inverse capital, limite beaucoup l'extension spatiale des modèles. Dans ce qui suit, nous considérerons comme mesurables à l'altitude  $a$  les grandeurs  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{T}$ . Toutefois, si l'on veut considérer la situation réelle actuelle qui est l'estimation  $\hat{\epsilon}$  de  $\bar{\epsilon}$  et  $\hat{T}$  par (79), on déduira des résultats sur  $\bar{T}$  ceux sur  $\hat{T}$  par (80).

### III.2.5. Extention à toute échelle du modèle de flux de rayonnement net

Nous admettons donc que la mesure de l'émissivité et de la température de surface peut se faire à l'altitude  $a$  par  $\bar{T}$  et  $\bar{\epsilon}$  données par (74) qui est la relation définissant ces grandeurs à l'échelle  $a$ .

Rappelons que pour chaque point  $m \in S_a$ ,

$$\bar{R}_N(m) = (1 - \alpha(m)) R_G(m) + \sigma \epsilon_a(m) T_a^4(m) - \sigma \epsilon(m) T(m)^4 \quad (81)$$

Le rayonnement net est un flux d'énergie. Donc s'il se mesure à une altitude  $a$ , on en mesure la moyenne

$$\bar{R}_N = \mu_a(R_N(m)) \quad (82)$$

D'autre part, certains satellites mesurent le rayonnement  $(1-\alpha)R_G$  à l'altitude  $a$ , qui n'est autre que

$$\mu_a[(1 - \alpha(m)) R_G(m)] = [1 - \mu_a(\alpha(m))] R_G \quad (83)$$

car  $R_G(m)$  peut être considéré comme constant sur le pixel (on note  $\alpha$  l'albédo pour distinguer de l'altitude). Puisque toutes les grandeurs de (83) sont mesurables à toute échelle  $a$ , sauf  $\mu(\alpha(m))$ , en posant la définition de l'albédo à l'altitude  $a$  :

$$\bar{\alpha} = \mu(\alpha(m)) \quad (84)$$

la relation (83) conduit donc au modèle

$$\overline{(1 - \alpha)R_G} = (1 - \bar{\alpha})R_G \quad (85)$$

valable à toute échelle  $a$ .

Le même raisonnement conduit à poser la définition de l'émissivité relative de l'air égale à

$$\bar{\epsilon}_a = \mu_a(\epsilon_a(m)) \quad (86)$$

et au modèle à l'échelle a :

$$\overline{\sigma \epsilon_a T_a^4} = \sigma \overline{\epsilon_a} T_a^4 \quad (87)$$

car on peut considérer  $T_a$  constant sur le pixel.

Par contre, le terme de rayonnement de la terre, s'il était effectivement mesuré à l'altitude a aurait la valeur  $\mu_a[\sigma \epsilon(m) T(m)^4]$ . Donc en maintenant le modèle local à l'échelle a, on aurait, compte tenu de l'émissivité  $\epsilon$  et de la température T à l'échelle a :

$$\sigma \overline{\epsilon} \overline{T^4} = \mu_a[\sigma \epsilon(m) T(m)^4] + Z_{RN} \quad (88)$$

où la différence entre la valeur mesurable et la formule homogénéisée est

$$Z_{RN} \approx 4\sigma \overline{T^3} \mu_a[(\overline{\epsilon} - \epsilon(m))(\overline{T} - T(m))] + 6\sigma \overline{\epsilon} \overline{T^2} \mu_a[(\overline{T} - T(m))^2] \quad (89)$$

Donc en définissant  $R_N$  homogénéisé par la formule

$$\overline{R_N} = (1 - \overline{a})R_G + \sigma \overline{\epsilon_a} T_a^4 - \sigma \overline{\epsilon} \overline{T^4} \quad (90)$$

on commet l'erreur  $Z_{RN}$  sur la valeur mesurée

$$\overline{R_N} = \mu_a(R_N(m)) + Z_{RN} \quad (91)$$

Si l'on reprend la situation de l'exemple 4, on a

$$\overline{R_N} \approx \mu_a(R_N(m)) + 2,2 \text{ W/m}^2. \quad (92)$$

Les résultats numériques montrent que les extensions à toute échelle de la loi de Planck et du modèle pour  $R_N$  sont acceptables en télédétection, mais ne sont pas exactes.

Remarque 5

Si l'on adopte comme valeur de la température homogénéisée la température de brillance  $\hat{T}$  donnée par (79), le flux de rayonnement net devient

$$\tilde{R}_N = (1 - a)R_G + \tilde{\epsilon}\sigma \tilde{\epsilon}_a T_a^4 - \sigma \tilde{\epsilon} \hat{T}^4 \quad (93)$$

où  $\tilde{\epsilon}$  (resp.  $\tilde{\epsilon}_a$ ) est une estimation de  $\bar{\epsilon}$  (resp.  $\bar{\epsilon}_a$ ).

On calcule aisément que

$$\tilde{R}_N - \mu_a [R_N(m)] = \tilde{Z}_{RN} \quad (94)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{RN} = & \tilde{\epsilon}\sigma(\tilde{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_a)T_a^4 + \sigma \hat{T}^4(\tilde{\epsilon} - \bar{\epsilon}) + 4\sigma \hat{T}^3 \tilde{\epsilon}(\hat{T} - \bar{T}) \\ & 3\sigma \hat{T}^3 \mu [(\tilde{\epsilon} - \epsilon(m))(\hat{T} - T(m))] + 6\sigma \hat{T}^2 \mu [(\hat{T} - T(m))^2] \end{aligned} \quad (95)$$

et d'après (80), au voisinage du maximum d'émission, à 300°K, on a en  $W/m^2$  :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{RN} \approx & 460(\tilde{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_a) + 82(\tilde{\epsilon} - \bar{\epsilon}) + 38 Z_L \\ & + 4,6 \mu [(\tilde{\epsilon} - \epsilon(m))(\hat{T} - T(m))] + 0,3 \mu [(\hat{T} - T(m))^2] \end{aligned} \quad (96)$$

avec  $Z_L$  donné par (77).

Si l'on reprend les données de l'exemple 4 avec une estimation  $\tilde{\epsilon} = 0,8$  et sans erreur sur  $\bar{\epsilon}_a$  on trouve un décalage  $Z_{RN}$  entre le modèle (93) et sa valeur mesurée de  $Z_{RN} \approx 13 W/m^2$  (comparer à (92)). Le rôle de l'estimation  $\tilde{\epsilon}_a$  de  $\bar{\epsilon}_a$  est capital.

Le problème se pose différemment en ce qui concerne les flux de chaleur latente et d'évapotranspiration, puisque ces grandeurs sont les inconnues du modèle.

III.2.6. Définition des flux de chaleur sensible et d'évapotranspiration à l'altitude a. Solutions homogénéisées du problème inverse linéaire.

Dans ce paragraphe, nous supposons que l'hétérogénéité du sol n'est qu'en surface mais que le sous-sol est homogène (fig. III.9) (l'émissivité, par contre, varie sur  $S_a$ ).

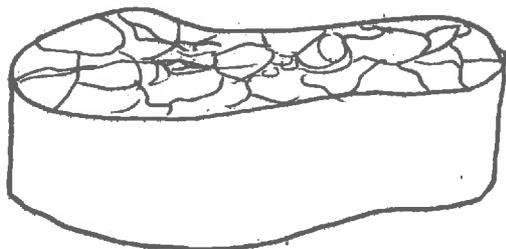


Fig. III.9

Pour H et LE les modèles adoptés au sol sont

$$H(m) + LE(m) = p_1(m) \varphi_1(m) + [p_2(m) \varphi_2(T(m)) + p_3(m) \varphi_3(T(m))] \quad (97)$$

pour  $m \in S_a$ ,  $a = a_g$  (i.e.  $a \in [0, 3 \text{ à } 4 \text{ m}]$ ).

Le membre de gauche égal au flux  $\phi(m) - R_N(m)$  est mesurable à l'échelle a par

$$\mu_a(H(m) + LE(m)) = \mu_a(\phi(m) - R_N(m)) \quad (98)$$

Par contre, comme on l'a vu en III.2.1, aucun des appareils de mesure des  $p_k(m)$  au sol ne peut donner de résultats à l'échelle a. Le modèle (97) ne peut être valable à toute échelle d'après les exigences que nous avons imposées pour un modèle. Nous devons donc (III.2.2) soit définir un modèle pour chaque a, soit conserver le même modèle en définissant pour chaque a une mesure des  $p_k$ . Or nous avons une mesure des  $p_k$  à l'échelle a (par inversion avec données mesurées à l'échelle a). Nous conserverons donc le modèle (97) en donnant une définition des  $p_k$  à chaque échelle. Nous posons donc

Définition : Les coefficients de résistance à l'échelle  $a \gg a_g$  seront les constantes  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ , solutions du problème inverse.

$$\min_{\vec{p}} \left\| K \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(0, t) - \sum p_k \varphi_k(\bar{T}(t)) - \varphi_0(\bar{T}(t)) \right\|_{L^2(0, \tau)} \quad (99)$$

où  $\hat{T}$  est la solution du problème

$$c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad x \in ]0, l[$$

$$T(0, t) = \bar{T}(t) \quad (= \nu_a[\bar{T}(t)]) \quad (100)$$

$$T(l, t) = T_g$$

+ condition initiale

On notera  $\bar{p}_a$  cette solution qui dépend de  $a$ .

La fonction  $K \frac{\partial \hat{T}}{\partial x}(0, t) - \varphi_0(\bar{T}(t))$  étant liée aux mesures, (99) montre que cette définition minimise l'écart (en  $W/m^2$  par jour) entre le modèle

$$\bar{H} + \bar{LE} = \sum_k p_k \varphi_k(\bar{T}(t)) \quad (101)$$

et les mesures.

Le modèle (101) est donc maintenant un modèle d'ordre 2 pour les  $p_k$  d'après la définition de (III.2.1).

Remarque 5

Si, comme on le suppose, les fonctions  $\varphi_k(T(t))$  sont indépendantes, les  $p_k$  sont définis de façon unique.

Remarque 6

Cette définition redonne la définition usuelle lorsque le sol est homogène en surface puisqu'alors  $\bar{T} = T^{mes}$  est indépendant de  $m \in S_a$ . Il en est de même lorsque  $a \rightarrow a_g$ .

Remarque 7

Au lieu de prendre la définition (99), (100) des  $p_k$ , on aurait pu prendre  $p_a$  comme solution du problème

$$\min_p \left\| \sum_p \bar{T}_p(0,t) - \bar{T}(t) \right\|_{L^2(0,\tau)} \quad (102)$$

où  $\bar{T}_p$  est la solution du problème (100) où la 2ème équation de (100) est remplacée par

$$-K \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \varphi_0(\bar{T}) + \sum_k p_k \varphi_k(\bar{T}) \quad (103)$$

Remarque 8

On aurait pu définir  $\tilde{p}_a = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$  solutions de (99), (100), où  $\bar{T}(t)$  eut été remplacé par l'autre température de surface homogénéisée  $\tilde{T}$  donnée par (79).

Pour résumer ce paragraphe, disons que nous proposons un modèle de flux à l'altitude  $a$ , qui est

$$\phi_a(\bar{T}) = \bar{R}_N + \sum p_k \varphi_k(\bar{T}) \quad (104)$$

où  $\bar{R}_N$  est donné par (88), et les  $\bar{p}_k$  définis par (99), (100).

Les grandeurs  $\bar{p}_a = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$  sont donc des "propriétés du sol à l'altitude  $a$ ".

Cela définit donc de nouveaux problèmes : comment associer les ordres de grandeur de  $\bar{p}_a$  aux propriétés globales (i.e. vues à l'altitude  $a$ ) du sol ("humidité", "résistances",...) et comment relier  $p_a$ , si c'est possible, aux valeurs au sol  $p_{a=a_0}(m)$ ,  $m \in S_a$ . La réponse n'est triviale que pour les sols homogènes (si l'on fait abstraction de l'atmosphère) puisque dans ce cas, on a pour tout  $a \geq 0$ ,  $\bar{p}_a = p_{a=a_0}(m)$ .

### III.3. HETEROGENEITES HORIZONTALES

Après avoir examiné l'homogénéité du modèle de flux pour des terrains hétérogènes en surface mais de mêmes capacité et conductivité thermiques, nous allons montrer qu'il n'existe pas de terrain homogène équivalent à un terrain à hétérogénéités horizontales (fig. III.10) par rapport à des mesures de température et de flux faites à l'altitude  $a \gg 0$ .

#### III.3.1. Invalidité du modèle thermique local pour un milieu à hétérogénéités horizontales vu à l'altitude $a$

Un tel milieu peut être représenté par la figure III.10.

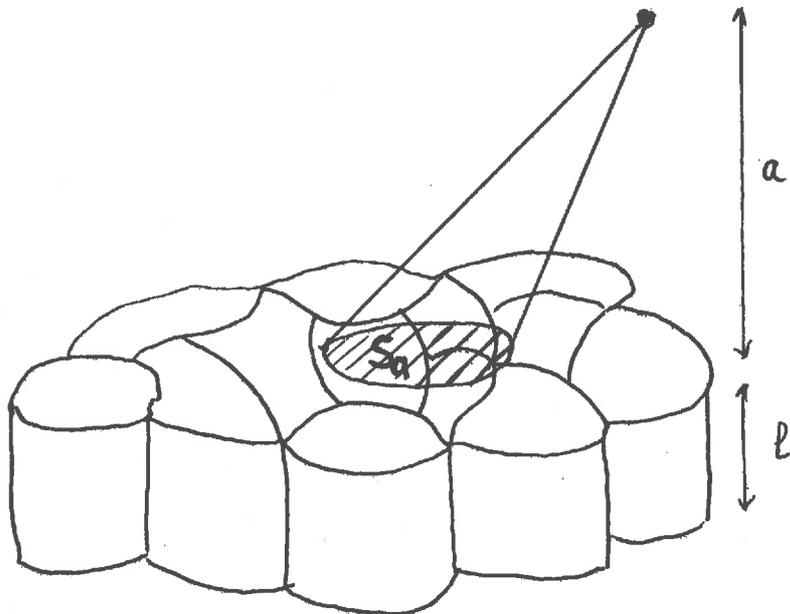


Fig. III.10.

Tabbagh (1977) a montré en utilisant une méthode de Fourier bidimensionnelle que l'influence sur la température de surface d'une séparation verticale de deux sols distincts ne se fait sentir que sur quelques décimètres (fig. III.11). Ces résultats ont été confirmés d'une façon différente dans (Raffy et al., 1980).

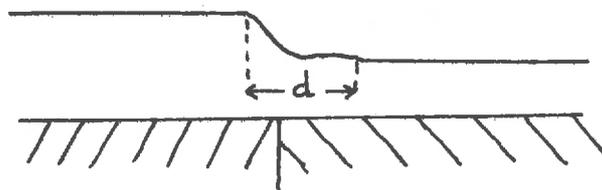


Fig. III.11 : La distance  $d$  d'influence de la faille est de l'ordre de quelques dm au plus.

Dans ce qui suit, nous considérerons des terrains décrits par la figure III.10, juxtaposition de terrains différents homogènes en profondeur..

En utilisant l'analyse de Fourier et les notations du chapitre III.1, soit  $A_k$  la matrice de transfert (cf. (13)) de chaque milieu  $k$  de conductivité et capacité thermiques  $K_k$  et  $c_k$ . La température homogénéisée observée à l'altitude  $a$  est alors

$$\mu_a(T(m)) = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k T_k d\omega_k \quad (105)$$

où  $T_k$  est la température de surface du milieu homogène  $k$ . De même le flux à l'altitude  $a$  est

$$\mu_a(\phi(m)) = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k \phi_k d\omega_k \quad (106)$$

En posant  $X_k = \begin{pmatrix} \theta_k(0, \omega) \\ \psi_k(0, \omega) \end{pmatrix}$ ,  $X_\ell = \begin{pmatrix} \theta_k(\ell, \omega) \\ \psi_k(\ell, \omega) \end{pmatrix}$

les transformées de Fourier de la température et du flux à la surface ( $x = 0$ ) et en  $x = \ell$ , on a d'après (10) et (11)

$$X_k = A_k^{-1} X_\ell \quad (107)$$

Donc s'il existait un milieu homogène  $c, K$  de matrice  $A$  donnant en surface

$$X = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k X_k d\omega_k \quad (108)$$

on aurait

$$\frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k X_k d\omega_k = \overline{A}^{-1} X_\ell \quad (109)$$

d'où, d'après (107),

$$\overline{A}^{-1} = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k A_k^{-1} d\omega_k \quad (110)$$

Or, d'après (13),

$$A^{-1}_k = \begin{pmatrix} \text{ch } \ell \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} & \frac{1}{\sqrt{i \omega} \sqrt{c_k K_k}} \text{sh } \ell \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} \\ \sqrt{i \omega} \sqrt{c_k K_k} \text{sh } \ell \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} & \text{ch } \ell \sqrt{\frac{c_k i \omega}{K_k}} \end{pmatrix} \quad (111)$$

Donc la matrice  $A^{-1}$  ne peut avoir la forme de l'inverse d'une matrice de transfert que si tous les milieux ont les mêmes coefficients thermiques.

Conséquence 12

Il n'existe pas de milieu homogène équivalent (par rapport à des mesures de température et flux de surface) à un milieu à hétérogénéités horizontales.

III.3.2. Milieux voisins, matrice de l'hétérogénéité

Comme en III.1.4, considérons deux milieux (fig. III.12) vus de l'altitude a

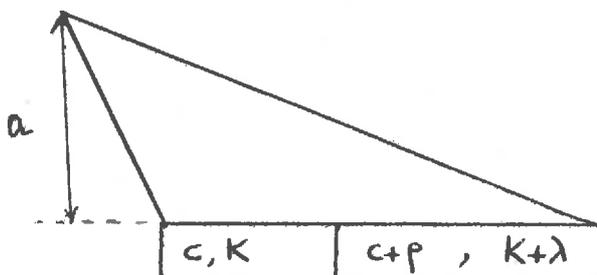


Fig. III.12

sous un même angle solide, pour simplifier l'écriture et raisonnons sur les matrices de transfert inverses. Supposons d'abord (fig. III.12) que le milieu total soit homogène, c'est-à-dire  $\rho = 0, \lambda = 0$ .

La matrice  $A^{-1}$  du milieu homogénéisée s'écrit d'après (111) :  $\overline{A^{-1}}_{(0,0)} = A^{-1}(c;K)$ .  
Si l'on fait maintenant  $\rho \neq 0, \lambda \neq 0$ ,

$$\overline{A^{-1}}_{(\rho, \lambda)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{ch} \ell a_1 + \text{ch} \ell a_2 & \frac{1}{\sqrt{i \omega}} \left( \frac{1}{\sqrt{K_1 c_1}} \text{sh} \ell a_1 + \frac{1}{\sqrt{K_2 c_2}} \text{sh} \ell a_2 \right) \\ \sqrt{i \omega} (\sqrt{K_1 c_1} \text{sh} \ell a_1 + \sqrt{K_2 c_2} \text{sh} \ell a_2) & \text{ch} \ell a_1 + \text{ch} \ell a_2 \end{pmatrix} \quad (112)$$

avec  $a_1 = \sqrt{\frac{ci\omega}{K}}$  ,  $a_2 = \sqrt{\frac{(c+\rho)i\omega}{K+\lambda}}$  ,  $K_2 = K + \lambda$  ,  $c_2 = c + \rho$

D'où

$$\overline{A}^{-1}_{(\rho,\lambda)} = \overline{A}^{-1}_{(0,0)} + H(\rho,\lambda) \tag{113}$$

où  $H(\rho,\lambda)$  est, au 1er ordre en  $(\rho,\lambda)$  :

$$H(\rho,\lambda) = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c} - \frac{\lambda}{K} \right) \begin{pmatrix} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} \operatorname{sh} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} & \frac{\ell}{K} \operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} \\ \ell i\omega c \operatorname{ch} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} & \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} \operatorname{sh} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{c} + \frac{\lambda}{K} \right) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{Kc}} \operatorname{sh} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} \\ \sqrt{i\omega} \sqrt{Kc} \operatorname{sh} \ell \sqrt{\frac{ci\omega}{K}} & 0 \end{pmatrix} \tag{114}$$

qui est encore une matrice caractérisant l'hétérogénéité (comparer à (33)), pour un milieu vu à l'altitude  $a$ . Les deux matrices du membre de droite de (114) ne sont nullement négligeables ce qui confirme que  $A^{-1}$  ne sera une matrice de transfert que si  $\rho = 0, \lambda = 0$ .

Le terme additif sur le vecteur  $X = \begin{pmatrix} \theta(0,\omega) \\ \psi(0,\omega) \end{pmatrix} = A^{-1}(c,K) \begin{pmatrix} \theta_\ell \\ \psi_\ell \end{pmatrix}$  dû à l'hétéro-

généité est donc

$$X_\epsilon = H(\rho,\lambda) \begin{pmatrix} \theta_\ell \\ \psi_\ell \end{pmatrix} \tag{115}$$

Remarque 9

Si l'on modifie les caractéristiques du sol de façon que les inerties thermiques des deux terrains restent les mêmes, on a au 1er ordre  $\frac{\rho}{c} + \frac{\lambda}{K} = 0$ , donc le terme additif en surface  $X_\epsilon$  dû à l'hétérogénéité n'est pas annulé. Or s'il existait

un milieu équivalent à inertie thermique constante  $P$  reliée par une formule quelconque à  $P_1 = \sqrt{Kc}$  et  $P_2 = \sqrt{(K+\lambda)(c+\rho)}$ , on aurait  $P = f(P_1, P_2)$  avec nécessairement, si  $P_1 = P_2$ ,  $P = f(P_1, P_2) = P_1 = P_2$  (on néglige l'atmosphère). Or  $X_c$  ne s'annule pas dans ce cas si  $\rho$  et  $\lambda \neq 0$  et n'est négligeable que si  $\rho$  et  $\lambda$  le sont. Donc, si l'on admet que les variations de la température de surface sont essentiellement dues aux variations de  $P = \sqrt{Kc}$  (et très faiblement à celles de  $K$  et  $c$ , voir table III.1), on peut affirmer que

Conséquence 13

Il n'existe pas de formule reliant les inerties thermiques  $P_1 = \sqrt{K_1 c_1}$  et  $P_2 = \sqrt{(K_1 + \rho)(c_1 + \rho)}$  à une inertie thermique  $P$  d'un sol qui donnerait les mêmes température et flux mesurés à l'altitude  $a$ , au 1er ordre en  $\lambda$  et  $\rho$ .

Remarque 10

Cette conséquence n'est pas équivalente à la conséquence 12. On pourrait en effet avoir un terrain non homogène à inertie thermique constante.

Cela dit, on doit se poser la question d'évaluer la matrice  $A^{-1}$  correspondant à un problème thermique (i.e. du type (111)) la plus proche de  $\frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k A_k^{-1} d\omega_k$ . Ce problème est celui de

$$\min_{c, K} \left\| A^{-1}(c, K) - \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k A_k^{-1} d\omega_k \right\| \tag{116}$$

où la norme matricielle est la norme associée à la norme euclidienne.

Ce problème qui n'admet pas de solution conduisant à une expression simple de  $c$  et  $K$  en fonction des  $c_k$  et  $K_k$  sera revu au paragraphe suivant (remarque 14).

Notons toutefois que compte tenu des ordres de grandeur de  $K$  et  $c$  on peut écrire

$$A_k^{-1} \approx e^{ak} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{i\omega} \sqrt{c_k K_k}} \\ \sqrt{i\omega} \sqrt{c_k K_k} & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à l'unique équation  $\psi_{sk} = \sqrt{c_k K_k} \theta_{sk}$ , d'où

$$\frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k \theta_{sk} d\omega_k = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k \frac{\psi_{sk}}{\sqrt{c_k K_k}} d\omega_k \quad (117)$$

Le membre de gauche n'est autre que la transformée de Fourier de  $\overline{T_s}$ . Si l'on fait l'hypothèse extrêmement grossière que le flux ne varie pas sensiblement d'un point à un autre de  $S_a$  (par exemple qu'il est dû essentiellement au flux solaire) on a  $\psi_{sk} = \psi_s$  et (117) donne

$$\overline{T_s} = \left( \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k \frac{d\omega_k}{\sqrt{c_k K_k}} \right) \psi_s \quad (118)$$

et l'on retrouve une proposition faite par Becker (1978) pour l'inertie thermique équivalente :

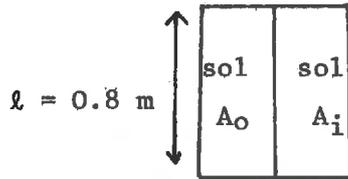
$$\frac{1}{\sqrt{\overline{cK}}} = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k \frac{d\omega_k}{\sqrt{c_k K_k}} \quad (119)$$

La table 5 donne les résultats numériques fournis par la méthode inverse pour le calcul de l'inertie thermique pour un sol à deux milieux, lorsqu'on néglige les effets d'influence (fig. III.11) latérale des deux milieux. La donnée d'entrée est la température de surface moyenne  $\overline{T_s} = \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k T_k d\omega_k$ . La comparaison du résultat numérique obtenu pour l'inertie thermique avec (119) et la moyenne des inerties thermiques (nullement justifiée d'ailleurs !)

$$\frac{1}{\Omega(S_a)} \sum_k c_k K_k \quad (120)$$

justifie l'approximation conduisant à (119).

Table III.5 : Calcul de l'inertie thermique à partir de la donnée de températures de surface moyennes  $T = \frac{1}{\Omega(S_a)} \int T_k d\omega_k$  pour des sols composés de deux milieux homogènes côte à côte.  
(Résultats en MKSA °K).



$T_0 = 285 \text{ °K}$   
(les valeurs initiales de  $c$  et  $K$  ont été les moyennes  $\frac{c_0+c_i}{2}$ ,  $\frac{K_0+K_i}{2}$ )

|             |                         |             |                    |
|-------------|-------------------------|-------------|--------------------|
| Sol $A_0$ : | $c = 1.727 \times 10^6$ | $K = 1.383$ | $\sqrt{Kc} = 1545$ |
| Sol $A_1$ : | $c = 1.077 \times 10^6$ | $K = 0.683$ | $\sqrt{Kc} = 858$  |
| Sol $A_2$ : | $c = 2.577 \times 10^6$ | $K = 2.483$ | $\sqrt{Kc} = 2530$ |
| Sol $A_3$ : | $c = 2.727 \times 10^6$ | $K = 2.683$ | $\sqrt{Kc} = 2705$ |
| Sol $A_4$ : | $c = 3.227 \times 10^6$ | $K = 3.183$ | $\sqrt{Kc} = 3205$ |
| Sol $A_5$ : | $c = 3.717 \times 10^6$ | $K = 3.983$ | $\sqrt{Kc} = 3848$ |

| Sols :                | $A_0 A_1$ | $A_0 A_2$ | $A_0 A_3$ | $A_0 A_4$ | $A_0 A_5$ |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\sqrt{Kc}$ calculé   | 1166      | 1906      | 1974      | 2161      | 2370      |
| $\sqrt{Kc}$ par (119) | 1103      | 1919      | 1967      | 2085      | 2205      |
| Ecart relatif         | 5.7%      | 0.66%     | 0.36%     | 3.6%      | 7.4%      |
| $\sqrt{Kc}$ par (120) | 1202      | 2038      | 2125      | 2375      | 2697      |
| Ecart relatif         | 3 %       | 6.4%      | 7.1%      | 9 %       | 12 %      |

Remarque 11

Cette table montre également l'imprécision croissante des formules (119) et (120) avec l'augmentation de l'hétérogénéité comparée à la valeur calculée.

Ces formules qui cherchent à définir une valeur "moyenne" de l'inertie thermique liée directement à l'échelle locale ( $a \approx a_l$ ) deviennent inadaptées au fur et à mesure qu'augmente l'hétérogénéité du sol.

### III.3.3. Inertie thermique à l'altitude a

Comme on l'a vu en III.3.1, il n'existe pas de milieu homogène équivalent à un milieu à hétérogénéités horizontales, c'est-à-dire que si en chaque point  $m$  de la surface  $S_a$ ,  $T(m)$  et  $\phi(m)$  sont les température et flux correspondant à un modèle thermique monodimensionnel (en  $x$ ), les moyennes observées  $\bar{T} = \mu_a(T(m))$  et  $\bar{\phi} = \mu_a(\phi(m))$  ne sont des profils de surface pour aucun milieu homogène  $(c, K)$ .

Ainsi, comme pour les flux  $H$  et  $LE$ , non seulement aucun appareil de mesure d'"inertie thermique" d'un milieu hétérogène à l'échelle  $a \gg 0$  n'est concevable, mais la notion même d'inertie thermique d'un milieu hétérogène doit être définie. Comme en III.2.6, nous ferons le choix (le seul abordable) de maintenir le modèle thermique et de définir une mesure de l'inertie thermique à l'échelle  $a$ . D'où

#### Définition

L'inertie thermique d'un milieu hétérogène vu à l'altitude  $a$  sera la solution du problème inverse non linéaire (II.34).

Cette définition permet ainsi de donner un sens à l'inertie thermique d'une ville, d'une région semi-submergée, etc... Le problème qui en résulte étant bien entendu de raccorder ces valeurs à des grandeurs significatives.

#### Remarque 12

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème n'est vérifiée que numériquement.

#### Remarque 13

Cette définition redonne la définition ordinaire pour un sol homogène. Il en est de même si  $a \rightarrow a_0$ .

#### Remarque 14

On constate aisément que cette définition de l'inertie thermique s'exprime comme

$$\min_{c, K} \left\| A^{-1}(c, K) X_\ell - \frac{1}{\Omega(S_a)} \sum A^{-1}(c_k, K_k) X_\ell \right\| = \min_{c, K} \left\| \begin{pmatrix} \theta_S(c, K) \\ \psi_S(c, K) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\theta}_S \\ \bar{\psi}_S \end{pmatrix} \right\| .$$

Les valeurs de  $c$  et  $K$  définissant l'inertie thermique à l'échelle  $a$  donnent donc une approximation de la matrice  $A^{-1}(c,K)$  du modèle thermique le plus proche transformant  $\begin{pmatrix} T_\ell \\ \phi_\ell \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} \bar{T}_s \\ \phi_s \end{pmatrix}$  (celle-ci étant définie par (116)).

Enfin, une conséquence essentielle de la définition précédente est la suivante. Plaçons-nous à l'altitude  $a$  au-dessus d'un sol nu hétérogène. La température  $\bar{T}(t)$  déduite du radiomètre ne satisfait alors pas à un modèle thermique homogène, donc le minimum de (II.34) définissant l'inertie thermique à l'altitude  $a$  ne sera pas nul. Soit  $\|\rho_a\|$  ce minimum. Ce nombre met en évidence l'hétérogénéité du sol, alors qu'aucun appareil ne peut la déceler (en particulier le radiomètre donne la température  $\bar{T}(t)$  pour tout le pixel).

Ainsi, cette caractérisation de l'hétérogénéité semble plus réaliste pour la télédétection que les mesures statistiques faites au sol (du type Vauclin, 1982, Brunet, 1984). Toutefois, ces études pourraient permettre de relier les grandeurs statistiques mises en évidence au sol aux valeurs de  $\|\rho_a\|$ . Nous avons déjà souligné ce point en III.1.6 pour les sols hétérogènes à couches.

Ce point fera l'objet d'études ultérieures.

## CONCLUSION

Les méthodes de simulation présentées pour les transferts de chaleur dans le sol ont permis de montrer qu'un modèle conductif à une couche (tenant compte des deux premiers mètres d'atmosphère et d'une végétation rase dans l'expression du flux de surface) peut rendre compte des flux de chaleur dans le sol et de la température de celui-ci. Donc, à partir de valeurs agrométéorologiques données on a pu faire des simulations réalistes.

Nous avons ainsi pu définir et résoudre le problème inverse donnant des flux de surface et l'inertie thermique pour un sol homogène avec des mesures de température de surface du sol, de l'air à 2 m, de vitesse du vent et du rayonnement net. Nous avons montré que ce problème est instable et donné des méthodes de stabilisation. Les essais numériques par simulation aussi bien que sur des données expérimentales obtenues à l'échelle terrain sur plusieurs sites différents ont montré la validité des méthodes inverses stabilisées.

Mais pour donner un sens aux résultats précédents, il a été nécessaire d'étudier le rôle de l'hétérogénéité du sol sur les mesures de température et flux de surface. Nous avons précisé la notion couramment sous-entendue en télédétection de sol homogène équivalent. Nous avons montré que sauf dans des cas exceptionnels, il n'existe pas de sol homogène équivalent à un sol hétérogène donné par rapport à des mesures de température et flux de surface.

Nous avons donné des procédés de mise en évidence numérique et théorique de l'hétérogénéité basés sur des mesures radiométriques (sans faire appel à des mesures statistiques de terrain), alors même que l'image du pixel est homogénéisée par le radiomètre. Ce point n'a été que suggéré d'un point de vue théorique et numérique et mérite sûrement une étude spécifique que nous ferons prochainement.

L'extension spatiale en surface nous a conduit à décrire ce qu'il faut attendre d'un modèle en télédétection et en avons déduit deux catégories de résultats :

- a) La loi de Planck reliant la mesure de la luminance radiométrique d'un corps homogène en équilibre thermique à sa température de surface nécessite la définition d'une température et d'une émissivité homogénéisées relatives à un pixel. Les exigences de la modélisation nous ont conduit à proposer deux définitions pour la température et l'émissivité homogénéisées : Soit l'adoption de la température de brillance du pixel qui conduit à des décalages importants

sur la modélisation des flux, soit une définition de la température et de l'émissivité moyennes qui a l'avantage d'être indépendante de l'altitude de la mesure de luminance, mais fait que la loi de Planck n'est alors plus exacte.

b) Quel que soit le choix pour la définition de la température homogénéisée, aucun des modèles usuels de flux à la surface du sol n'est valable à toute échelle pour un sol hétérogène.

L'évaluation quantitative du décalage dû à l'hétérogénéité pour la loi de Planck et pour le flux de rayonnement net montre le caractère fondamental des études faites et à faire sur l'émissivité.

Enfin, nous avons déduit de cette étude la nécessité de définir des grandeurs à l'altitude  $a$ , à partir d'un modèle (partiellement) substitut à l'instrument de mesure. Cela nous permet par exemple de donner un sens à l'inertie thermique, à l'évapotranspiration ou la chaleur latente d'un paysage urbain, d'un terrain partiellement sous eau, etc...

D'une façon générale et au-delà des questions que nous venons de mentionner, se dégage une problématique propre à la télédétection : l'étude de l'interprétation de mesures en fonction d'une variation continue de la distance à l'objet. A cette étude est nécessairement reliée, comme on l'a vu, sous une forme originale propre à la télédétection, l'étude des problèmes inverses et de l'homogénéisation.

Bien sûr, de nombreux travaux restent à faire pour affiner ce travail. Mentionnons-en quelques uns. Par exemple, les études sur l'hétérogénéité, bien qu'elles débouchent sur des conclusions générales, ne sont faites (sauf dans un cas examiné en III.1.8) que sur des sols à couches ou des sols à hétérogénéités horizontales.

D'autre part, la définition de grandeurs à l'altitude  $a$  et la possibilité suggérée de quantifier l'hétérogénéité d'un sol à partir du satellite ne réoriente-t-elle pas certains espoirs des mesures statistiques de variabilité in situ pour lier si possible leurs résultats aux grandeurs à l'échelle  $a$ .

Enfin, la définition des grandeurs à l'altitude  $a \gg 0$  par la solution d'un modèle inverse soulève de nouveaux problèmes dans l'interprétation de ces grandeurs et l'usage qu'on peut en faire : les résultats quantitatifs de ce travail sont liés au choix d'un modèle (thermique et de flux). Nous avons testé la stabilité des résultats par rapport aux mesures ; mais qu'en est-il par rapport au modèle, en particulier les grandeurs définies à l'échelle  $a$  prendraient-elles les mêmes valeurs avec un autre modèle ? Un essai très partiel a été fait dans ce sens en II.5.3, mais ce problème reste aussi à étudier dans son ensemble.

Notre démarche et les problèmes associés, bien que rencontrés dans un tout autre domaine et à d'autres échelles, sont néanmoins exactement résumés dans la formule suivante (de Planck, cité par Max, 1972) :

"Une grandeur physique se définit bien plus exactement par une équation que par une mesure ; mais en procédant de la sorte on renonce au fond à connaître la signification propre de la grandeur en cause, tout en lui conservant son nom, ce qui entraîne facilement des imprécisions et des malentendus".



## APPENDICE

Mesures faites à Niamey les 6-7 mai 1982. Ces résultats sont les résultats obtenus après interpolation temporelle à partir de 21 heures de façon à avoir un pas de temps régulier.

| temps<br>en h | T <sub>a</sub> °C | T <sub>s</sub> °C | U <sub>a</sub> m/s | e <sub>a</sub> % | R <sub>N</sub> Wm <sup>-2</sup> | G Wm <sup>-2</sup> | R <sub>S</sub> Wm <sup>-2</sup> | R <sub>N</sub> - G |
|---------------|-------------------|-------------------|--------------------|------------------|---------------------------------|--------------------|---------------------------------|--------------------|
| 0900          | 32.6              | 41.6              | 3.6                | 56               | 195                             | 123                | 456                             | 72                 |
| 1000          | 34.3              | 50.1              | 3.9                | 48               | 305                             | 162                | 656                             | 143                |
| 1100          | 35.3              | 57.7              | 3.7                | 38               | 382                             | 182                | 800                             | 200                |
| 1200          | 38.7              | 63.9              | 2.6                | 26               | 420                             | 200                | 886                             | 220                |
| 1300          | 39.8              | 67.6              | 2.1                | 19               | 404                             | 194                | 903                             | 210                |
| 1400          | 40.7              | 68.5              | 2.1                | 14               | 360                             | 137                | 853                             | 223                |
| 1500          | 41.0              | 64.3              | 2.0                | 8                | 277                             | 83                 | 752                             | 194                |
| 1600          | 41.3              | 58.4              | 2.2                | 6                | 172                             | 20                 | 597                             | 154                |
| 1700          | 41.0              | 54.7              | 1.8                | 6                | 68                              | -28                | 347                             | 96                 |
| 1800          | 39.3              | 47.2              | 1.4                | 7                | -30                             | -97                | 139                             | 67                 |
| 1900          | 37.9              | 40.4              | 1.0                | 8                | -83                             | -109               | 0                               | 26                 |
| 2000          | 35.0              | 36.5              | 0.1                | 23               | -85                             | -101               | 0                               | 16                 |
| 2100          | 34.0              | 33.7              | 0.2                | 28               | -75                             | -97                | 0                               | 22                 |
| 2200          | 33.3              | 32.2              | 2.3                | 33               | -70                             | -73                | 0                               | 3                  |
| 2300          | 32.7              | 31.4              | 2.2                | 40               | -65                             | -73                | 0                               | 8                  |
| 0000          | 31.6              | 30.6              | 1.6                | 42               | -62                             | -71                | 0                               | 9                  |
| 0100          | 31.2              | 30.0              | 1.5                | 42               | -60                             | -70                | 0                               | 10                 |
| 0200          | 29.8              | 29.4              | 1.2                | 44               | -57                             | -70                | 0                               | 13                 |
| 0300          | 29.5              | 28.9              | 0.8                | 50               | -55                             | -63                | 0                               | 6                  |
| 0400          | 28.9              | 28.6              | 0.5                | 47               | -55                             | -58                | 0                               | 3                  |
| 0500          | 28.7              | 28.2              | 0.4                | 49               | -55                             | -55                | 0                               | 0                  |
| 0600          | 28.9              | 28.0              | 0.5                | 50               | -53                             | -50                | 0                               | -3                 |
| 0700          | 29.7              | 29.0              | 0.5                | 50               | -10                             | -20                | 58                              | 10                 |
| 0800          | 32.2              | 34.3              | 0.7                | 51               | 56                              | 37                 | 175                             | 19                 |



## REFERENCES

- Asfar, L., A. Asem, F. Becker, P.Y. Deschamps, P. de Fraipont, D. Ho, J.L. Mercier, E. Olory-Hechinger, P. Olory, M. Raffy, Y. Ramrani, J.P. Rogala, V. Serafini-Letreut, J. Trautmann, Extraction of land surface parameters and fluxes from Meteosat radiances, 5<sup>th</sup> Meteosat Scientific Users Meeting, Rome, May 1985.
- Abdellaoui, A., F. Becker, E. Olory-Hechinger and M. Raffy, Thermal inertia and soil moisture mapping, Group Agromet Monitoring Project (GAMP, Final Report, edited by A. Rosema, ESA/EARSEL, Darmstadt, 1982.
- Abdellaoui, A., F. Becker, E. Olory-Hechinger, Use of Meteosat for Mapping Thermal Inertia and Evapotranspiration over a Limited Region of Mali, submitted to Journal of Climate and Applied Meteorology, October 1984.
- Aris, R., Mathematical modelling techniques, San Francisco, Pitman, 1978.
- Bavel, C.H.M. van, and D.I. Hillel, Calculating potential and actual evaporation from a bare soil surface by simulation of concurrent flow of water and heat, Agric. Meteorol., 17, 453-476, 1976.
- Becker, F., and E. Hechinger, Potentialités de la télédétection pour l'étude des mécanismes de transfert et la mesure des flux échangés entre sol et atmosphère, E.E.R.M. Météorologie Nationale, Boulogne-Billancourt, pp. III 20-52, F. Becker and C. Pastre éditeurs, 1978.
- Becker, F., Principes physiques et mathématiques de la télédétection, Cours Ecole d'Eté du CNES, Strasbourg, 1978.
- Becker, F., Thermal infrared remote sensing principles and applications in Remote Sensing Applications in Agriculture and Hydrology, Ispra courses, edited by G. Frayse, pp. 153-213, A.A. Balkema, Rotterdam, 1980.
- Becker, F., D. Blumenroeder, E. Hechinger, A. Hourani, B. Ramey and J. Trautmann, Measurement and mapping of the absolute surface temperature of water surfaces by remote sensing, XII<sup>th</sup> International Symposium on Remote Sensing of Environment, Ann Arbor, Michigan, April 1979.
- Becker, F., W. Ngai and M.P. Stoll, An active method for measuring thermal infrared effective emissivities : implications and perspectives for remote sensing, Adv. Space Res., 1, 193-210, 1980.
- Becker, F., Angular reflectivity and emissivity of natural media in the thermal infrared bands, Proceedings of the International Colloquium on Spectral Signatures of Objects in Remote Sensing, Avignon (G. Guyot, INRA ed.), 1981.
- Becker, F., Communication privée, 1982.

- Becker, F., Absolute sea surface temperature measurement by remote sensing and atmospheric corrections using differential radiometry, in *Process in Marine Remote Sensing*, edited by J. Vernberg and P. Diemer, the Belle W. Baruch Library in Marine Science, n° 12, p. 151-174, 1982.
- Becker, F., Les principaux apports du colloque international "Signatures Spectrales d'Objets en Télédétection" dans le domaine spectral de l'infrarouge thermique, invited paper, International Symposium of the Internal Society of Photogrammetry and Remote Sensing, Toulouse, 1982.
- Becker, F., P. Ramanantsizehena, M.P. Stoll and J. Fischer, Comparaisons entre émissivités spectrales et coefficients de rétrodiffusion pour différents types de sols dans l'infrarouge thermique, Colloque international "Signatures Spectrales d'Objets en Télédétection", Bordeaux, 1983.
- Becker, F., P. Ramanantsizehena and M.P. Stoll, Angular behaviour of the thermal infrared bidirectional reflectivity of bare soils. Interest for remote sensing of surface emissivity and temperature, 18<sup>th</sup> International Symposium on Remote Sensing, ERIM, Paris, 1984.
- Becker, F., Le groupement scientifique de télédétection spatiale de Strasbourg (GSTS) et ses formations, Communication au Colloque International sur les formations en Télédétection, GDTA, Toulouse, 1984.
- Becker, F., Utilisations possibles des données Météosat et AVHRR en Tunisie - Une application en climatologie dans le cadre du programme ISLSCP, papier invité au Séminaire National de Télédétection en Tunisie, 1984.
- Becker, F., P. Ramanantsizehena, M.P. Stoll, Angular variation of the bidirectional reflectance of bare soils in the thermal infrared band, *Applied Optics*; 24, 365, n° 3, (1985).
- Becker, F. and B. Seguin, Determination of surface parameters and fluxes for climate studies from space observation. Methods, results and problems, *Adv. Space Res.*, vol. 5, n° 6, pp. 299-317, 1985.
- Bensoussan, A., J.L. Lions, G. Papanicolaou, Sur quelques problèmes asymptotiques d'évolution, G.R.A.S., 1975.
- Bensoussan, A., J.L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- Bergman, D., J. Imry, Critical behaviour of the complex dielectric constant near the percolation threshold of a heterogeneous material, *Phys. Rev. Letters*, 39, 1977.
- Bergman, D., Rigorous bounds for the complex dielectric constant of a two-component composite, *Ann. of Phys.*, 138, 1, 1982.

- Bergman, D., Ecole d'Eté de l'EDF, Bréau-sans-Nappe, 1984.
- Bourgat, J.F., H. Lanchon, Application of the homogeneization method to the elastic torsion of a composite material, Rapport Laboria, n° 208, INRIA 1978.
- Brunet, Y., Modélisation des échanges sol nu-atmosphère : essai de validation locale et influence de la variabilité spatiale du sol, Thèse de docteur ingénieur, INP, Grenoble, 1984.
- Brunt, D., Physical and dynamical meteorology, Cambridge University Press, 1939.
- Brutsaert, W., Comments on surface roughness parameters and the heights of dense vegetations, J. Meteorol. Soc. Jpn., 53, 1975a.
- Brutsaert, W., A theory for local evaporation (or heat transfer) from rough and smooth surfaces at ground levels, Water Resour. Res., 11, 543-550, 1975b.
- Businger, J.A., J.C. Wyngaard, Y. Izumi and E.F. Bradley, Flux profile relationships in the atmospheric surface layer, J. Atmos. Sci., 28, 181-189, 1971.
- Casinis, R., The solution of the inverse problem in geophysical interpretation, Plenum Press, 1981.
- Carlson, T.N., and F.E. Boland, Analysis of urban-rural canopy using a surface heat flux/temperature model, J. of Appl. Meteor., 17, 998, 1013, 1978.
- Carlson, T.N., J.K. Dodd, S.G. Benjamin, and J.N. Cooper, Satellite estimation of the surface energy balance, moisture availability and thermal inertia, J. Appl. Meteorol., 20, 67-87, 1981.
- Chavent, G., Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles, Thèse de Doctorat, Paris 1971.
- Chavent, G., P. Lemonnier, Identification de la non-linéarité d'une équation parabolique quasilinéaire, INRIA Rapport de recherche n° 45, décembre 1973.
- Chavent, G., Identification of distributed parameter systems : about the output least square method, its implementation and identifiability, 3<sup>rd</sup> IFAC Symp., Delft, 1973.
- Chedin, A., N.A. Scott, C. Wahiche and P. Moulinier, The improved initialization inversion method : A high resolution physical method for temperature retrievals from satellite of the TIROS-N series, J. of Climate and Appl. Meteor., vol.24, pp. 128-143, 1985.
- Cooper, D.I., J.M. Russo, E.M. Perry, T.N. Carlson, G.W. Petersen, Measurement uncertainties with satellite derived surface temperatures, Pen. State Univ., 1984.
- Deardorff, J.W., Efficient prediction of ground surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation, J. Geophys. Res., 83, 1889-1903, 1978.
- Dedieu, G., P.Y. Deschamps, Y. Kerr, Global solar radiation at the surface from Meteosat, submitted to Journal of Climate and Applied Meteorology, Feb. 1985.
- De Giovanni, A., C. Moyne, Extension de la notion de quadripole thermique. Application à la modélisation de contacts thermiques en régime variable, Ecole des Mines de Nancy, 1984.

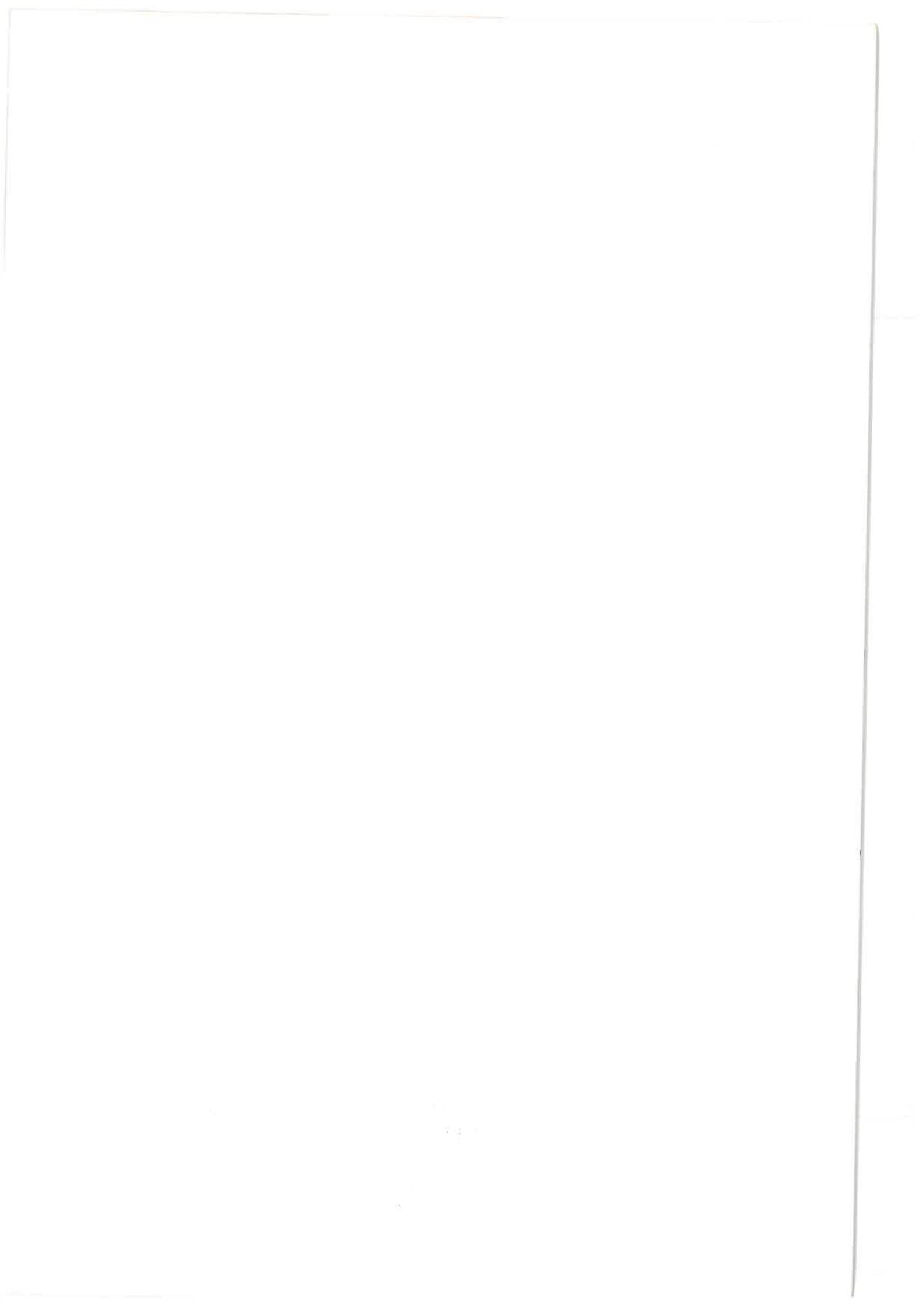
- Deuflhard, P., E. Hairer, Numerical treatment of inverse problems in differential and integral equations, Proceedings Workshop, Birkhäuser, 1983.
- Dugdale, G., J. Milford, N.R. Ward, Measurements in the Sahel, Department of Meteo. Univ. of Reading, U.K., 1982.
- Duvant, G., J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, 1972.
- Dyer, A.J., The turbulent transport of heat and water vapour in an unstable atmosphere, Quant. J.R. Meteorol. Sci., 28, 181-189, 1967.
- Gautier, C., Mesoscale insolation variability derived from satellite data, J. of Appl. Meteor., 21, 51, 1982.
- Gautier, C., G. Diak, S. Masse, A simple physical model to estimate incident solar radiation at the surface from GOES satellite data, J. of Appl. Met. vol. 19, n° 8, 1980.
- Glowinski, R. J.L. Lions, R. Trémolières, Analyse numérique des inéquations variationnelles, Tome 2, Dunod, 1976.
- Groetsh, C.W., The theory of Tichonov regularization for the Fredholm equations of the first kind, Res. Notes in Math., Pitman, 1984.
- Hadamard, J., Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, 1932.
- Hechinger, E., M. Raffy and F. Becker, Comparison between the accuracies of a new discretization method and an improved Fourier method to evaluate heat transfers between soil and atmosphere, J. Geoph. Res., 87, 7325-7339, 1982.
- Householder, A.S., The theory of matrices in numerical analysis, Dover, 1964.
- Hubband, N.D.S., J.L. Montheith, Radiative surface temperature and energy balance of a wheat canopy, preprint, 1985.
- Itier, B., A. Perrier, Présentation d'une étude analytique de l'advection, Ann. Agron., 1977.
- Jackson, R.D., R.J. Reginato, and S.B. Idso, Wheat canopy temperature : A practical tool for evaluating water requirements, Water Resour. Res., 13, 651-656, 1977.
- Kahle, A.B., A simple thermal model of the earth's surface for geologic mapping by remote sensing, J. Geophys. Res., 82, 1673-1680, 1977.
- Keith, F. and W.D. Sellers, General principles of natural evaporation, Editors : D.A. de Vries and N.H. Afgan Book, "Heat and mass transfer in the Biosphere", 1975.
- Klaassen, W., and A. Rosema, Generalization of the TELL-US model to vegetated surfaces, p. 18, E.A.R.S.bv., Delft, The Netherlands, 1979.
- Lavrentiev, M.M., Some improperly posed problems in Math. Physics, Springer Verlag, 1967.

- Le Pourhiét, A., Analyse du rôle d'un appoint d'énergie micro-ondes pour le séchage d'un corps poreux, Rapport final EDF-ONERA, 1979.
- Linacre, E.T., Net radiation to various surfaces, *J. Appl. Ecol.*, 6, 61-75, 1969.
- Lions, J.L., Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Presses de l'Université de Montréal, 1962.
- Lions, J.L., E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, 3 tomes, Dunod, 1968.
- Lions, J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.
- Lions, J.L., Remarques sur les aspects numériques de la méthode d'homogénéisation dans les matériaux composites, étude numérique des grands systèmes, Dunod, 1977.
- Max, J., Méthode et technique de traitement du signal, Tome I, Masson, 1972.
- Menenti, J., Doctoral thesis, Agricultural University, Wageningen, The Netherlands, 1984.
- Mercier, J.L., Les mesures collectées en Crau du 6 au 20 juillet 1984, ATP Télé-détection spatiale, GSTS/CNRS/CNES/IBM.
- Meylan, P., C. Morzier, F. Becker, Analyse des caractéristiques hydrodynamiques des sols par télédétection spatiale en vue de l'aménagement agricole des eaux, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1979.
- Nashed, Z., Generalized inverses and applications, Acad. Press., 1973.
- Obukov, A.M., Turbulence in the atmosphere with inhomogeneous temperature, *Trudy Geofiz. Inst. Akad. Nauk. SSSR*, 1, 95-115, (art. paru en anglais dans *Bound. Lay. Meteor.*, 2, 7-29, 1971).
- Papanicolaou, G., S.R.S. Varadhan, Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients, *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, Estergom, Hongrie*, 1979.
- Papanicolaou, G., S.R.S. Varadhan, Diffusion with random coefficients, *Essays in State and Probability*, Edit. G. Kallianpur et al., North Holland, 1982.
- Parton, W.J., J.A. Logan, A model for diurnal variation in soil and air temperature, *Agric. Meteorol.*, 23, 205-216, 1981.
- Penrose, R., A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51, 406-413.
- Perrier, A., Approche linéaire de la microturbulence et des transferts dans les couverts végétaux en vue de l'analyse de la production végétale, *La Météo.*, série 5 (4), 1967.
- Perrier, A., B. Itier, J.M. Bertolini, A. Blanco de Pablos, Mesure automatique du bilan d'énergie d'une culture. Exemples d'applications, INRA, 1975.

- Perrier, A., Etude et essai de modélisation des échanges de masse et d'énergie au niveau des couverts végétaux, Thèse de Doctorat d'Etat, INRA, 1976.
- Price, J.C., Thermal inertia mapping : A new view of the earth, J. Geophys. Res., 82, 2582-2590, 1977.
- Price, J.C., The potential of remotely sensed thermal infrared data to infer surface soil moisture and evaporation, Water Resour. Res., 16, 787-795, 1980.
- Price, J.C., Estimation of regional scale evapotranspiration through analysis of thermal infrared data, IEEE Geosci. Remote Sensing, GE 20, 285, 1982.
- Raffy, M., J. Thomann, Simulation of bidimensional non homogeneous soils, Note interne, GSTS, 1981.
- Raffy, M., On some iterative methods for nonlinear coupled problems, Contributed paper to the International Colloquium on Numerical Methods for Coupled Problems, Swansea, 1981.
- Raffy, M., F. Becker, Problème inverse en télédétection dans les bandes infrarouge thermique et résultats, RCP 264 Problèmes inverses, Montpellier, 1984.
- Raffy, M. and F. Becker, A stable iterative procedure to obtain soil surface parameters and fluxes from satellite data, International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS', Strasbourg, 1984. To be published in IEEE Geoscience and Remote Sensing (1986).
- Raffy, M., C. Busquet, F. Becker, Contribution to the evaluation of soil characteristics using satellite data, Contributed paper to the 18<sup>th</sup> International Symposium on Remote Sensing, ERIM, Paris, 1984.
- Raffy, M. and F. Becker, An inverse problem occurring in remote sensing in the thermal infrared bands and its solutions, Journ. Geophys. Res., 90, 5809, 1985.
- Raffy, M., F. Nerry, An extrapolation method for the evaluation of soil surface temperatures, Paper submitted to International Journal of Remote Sensing, 1985.
- Raffy, M., A stable inverse problem on the boundary for the heat equation and application to remote sensing in the thermal infrared bands, Paper presented at the 4<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods in Thermal Problem, Swansea, 1985.
- Raffy, M., G. Ramstein, F. Becker, Fractal analysis of a relief and its remote sensed image, à paraître.
- Ramrani, Y., thèse à paraître.
- Reiniger, P., and B. Seguin, Surface temperature as an indication of evapotranspiration and soil moisture, Remote Sensing Reviews, 2, 1985.
- Rosema, A., A mathematical model for simulation of the thermal behaviour of bare soils, based on heat and moisture transfer, Publ. 11, NIWARS, Delft, The Netherlands, 1975.

- Rosema, A., and J.H. Bijleveld, TELL-US report, EARS, Delft, The Netherlands, 1977.
- Rosema, A., J.H. Bijleveld, P. Reiniger, G. Tassone, K. Blyth, and R.J. Gunney, TELL-US, a combined surface temperature, soil moisture and evaporation mapping approach, in Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Symposium on Remote Sensing of the Environment, ERIM, Ann Arbor, Michigan, 1978.
- Ross, J. Radiative transfer in plant communities, Vegetation and the Atmosphere, vol. 1, Principles, edited by J.L. Monteith, pp. 13-55, Academic, New York, 1975.
- Riou, Ch., Une expression analytique de flux de chaleur sensible en conditions suradiabatiques à partir de mesures du vent et de la température à deux niveaux, J. Rech. Atmos., 16 (1), 15-22, 1982.
- Riou, Ch., B. Itier, Modification de la formule de Dalton à partir d'une nouvelle formulation du flux de chaleur sensible en conditions suradiabatiques, J. of Hydrology, 63, 1983.
- Sabatier, P.C., Applied inverse problems, Springer-Verlag, 1978.
- Sabatier, P.C., Some topics on inversion theory applied in Geophysics, RCP 264, 1979.
- Sabatier, P.C., Problèmes inverses non linéaires, Ed. du CNRS, 1979.
- Sabatier, P.C., Problèmes inverses, RCP 264, Cahiers mathématiques de Montpellier, 1980 à 1984.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, The dimension of atmospheric notions, J. of Atm. Sc., 1983.
- Schaeffer, H., Uber die Methode der a priori Schranken, Math. Ann., t. 279, 415-416, 1955.
- Schwartz, J.T., Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach, 1969.
- Seguin, B., Modélisation des échanges d'énergie et de masse à l'interface sol-atmosphère. Problèmes posés par l'extension des modèles locaux à l'échelle régionale ( $\sim 100$  km), Coll. National sur les mécanismes de transfert de masse et d'énergie entre sol et atmosphère, F. Becker et C. Pastre éditeurs, Météorologie Nationale, Boulogne-Billancourt, 1978.
- Seguin, B., and B. Itier, Using midday surface temperature to estimate daily evaporation from satellite thermal IR data, Int. J. Remote Sensing, 4 (2), 371-383, 1983.
- Sellers, W.D., Physical climatology, Univ. of Chicago Press, Chicago, Calif., 1965.
- Soer, G.J.R., The TERGRA model : A mathematical model for the simulation of the daily behaviour of crop surface temperature and actual evapotranspiration, Publ. 46, NIWARS, Delft, The Netherlands, 1977.

- Soer, G.J.R., Estimation of regional evapotranspiration and soil moisture conditions using remotely sensed crop surface temperatures, *Remote Sensing Environ.*, 9, 27-45, 1980.
- Tabbagh, A., Sur la prospection archéologique par observation des différences de température, *C.R.A.S. Paris*, t. 279, série B, p. 513-516, 1974.
- Taconet, O., R. Bernard, D. Vidal-Madjar, Evapotranspiration over an agricultural region using a surface flux/temperature model based on NOAA-AVHRR data, *DT/CRPE 1118*, 1984.
- Tichonov, A., Sur la régularisation de problèmes mal posés, *Rapports de l'Académie des Sciences d'URSS*, 1963.
- Tichonov, A., Sur la résolution d'équations intégrales non linéaires, *Rapports de l'Académie des Sciences d'URSS*, 1964.
- Tichonov, A., et V. Arsénine, Méthodes de résolution de problèmes mal posés, *M.I.R.*, 1976.
- Vauclin, M., Modèle local des transferts de masse et de chaleur entre le sol et l'atmosphère. Problèmes posés par son extension spatiale, *Comptes rendus du Colloque National sur les Mécanismes de transfert d'énergie et de masse entre sol et atmosphère*, edited by F. Becker and C. Pastre, pp. II 76-105, *E.E.R.M. Météorologie Nationale*, Boulogne-Billancourt, 1978.
- Vauclin, M., Données non publiées, 1981.
- Vauclin, M., Méthodes d'étude de la variabilité spatiale des propriétés d'un sol, (Coll. INRA) 1983.
- Watson, K., Geologic applications of thermal infrared images, *Proc. IEEE*, 63, 128-137, 1975.
- Watson, K., Thermal phenomena and energy exchange in the environment, in *Mathematical and Physical Principles of Remote Sensing*, pp. 109-174, CNES, Strasbourg, 1978.
- Witowski, P., Modélisation et étude numérique d'une expérience de croissance cristalline, Thèse de l'INP de Grenoble, 1977.



**Imprimé  
au Centre de  
Recherches Nucléaires  
Strasbourg  
1986**

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses and income. The document further explains that proper record-keeping is essential for identifying trends, managing cash flow, and complying with tax regulations.

In addition, the document highlights the need for regular reconciliation of accounts. By comparing the company's internal records with bank statements and other external sources, discrepancies can be identified and corrected promptly. This process helps to prevent errors from accumulating and ensures that the financial data is reliable and up-to-date.

The second part of the document focuses on the classification of assets and liabilities. It provides a detailed breakdown of various types of assets, such as fixed assets, current assets, and intangible assets. Similarly, it outlines the different categories of liabilities, including long-term debt, short-term debt, and equity. This classification is crucial for understanding the company's financial position and for calculating key financial ratios.

Finally, the document discusses the importance of transparency and communication in financial reporting. It stresses that stakeholders, including investors, creditors, and management, need clear and concise information to make informed decisions. Therefore, it is essential to provide a thorough explanation of the accounting methods used and to disclose any potential risks or uncertainties.

Résumé :

Après avoir défini des méthodes de simulation de la température de surface d'un sol nu ou à végétation rase à partir de données agrométéorologiques, on étudie le problème inverse de la détermination de l'inertie thermique, des flux de chaleur latente et d'évapotranspiration à partir de la connaissance de la température de surface et de certaines mesures satellite et météorologiques. On montre que ce problème inverse est instable et l'on définit des méthodes stables de résolution pour un sol homogène.

L'étude des sols hétérogènes montre que les modèles usuels en télédétection ne sont pas valables à toute échelle, ce qui nous conduit à définir une inertie thermique et des flux à chaque échelle. Plus généralement, on montre que dans la plupart des cas rencontrés, soit les modèles, soit les grandeurs qui interviennent dans les modèles, ne peuvent avoir des définitions indépendantes de l'altitude des mesures.

Abstract :

One defines general methods for the simulation of the surface temperature of a bare soil or with a crop canopy from agrometeorological data. The simulation techniques lead to the study of the inverse problem of determining the thermal inertia, the sensible and the latent heat fluxes from the knowledge of the surface temperature and some complementary satellite and meteorological measurements. One shows that this inverse problem is instable and defines stable resolution methods for homogeneous soils.

The study of heterogeneous soils shows that the models usually considered in remote sensing are not valid at any scale, which leads us to define the thermal inertia and the fluxes at each scale. More generally one shows that in most of the encountered cases, neither the models nor the parameters entering in the models can be defined independently of the scale of the measured data.