

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE  
I.N.R.A. - Site AGROPARC  
Unité de Bioclimatologie  
Domaine Saint-Paul  
84914 AVIGNON CEDEX 9  
FRANCE

UNIVERSITÉ DE NANTES

**BIBLIOTHÈQUE**

AH TH 40

Modélisation surfacique d'un couvert végétal  
pour l'étude du rayonnement

25 AOUT 1997

THÈSE de DOCTORAT

SPÉCIALITÉ: INFORMATIQUE

ÉCOLE DOCTORALE  
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR  
NANTES

présentée et soutenue publiquement par :

Franck ARIES

le 30 Juin 1997

à Nantes

devant le jury ci-dessous :

|     |                  |            |                          |
|-----|------------------|------------|--------------------------|
| Mme | Camille DUBY     |            | INA-PG                   |
| MM. | Michel LUCAS     | Président  | École Centrale de Nantes |
|     | Yvon GARDAN      | Rapporteur | Université de Metz       |
|     | Pascal LIENHARDT | Rapporteur | Université de Poitiers   |
|     | Rachid SENOUSI   |            | INRA Avignon             |
|     | Frédéric BARET   |            | INRA Avignon             |

Directeur de thèse: Michel LUCAS  
IRIN École Centrale de Nantes

N°

## CONTENTS

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 1   | Introduction                    |
| 2   | 1.1. The Role of the State      |
| 3   | 1.2. The Role of the Market     |
| 4   | 1.3. The Role of the Community  |
| 5   | 1.4. The Role of the Individual |
| 6   | 2. The Role of the State        |
| 7   | 2.1. The Role of the State      |
| 8   | 2.2. The Role of the State      |
| 9   | 2.3. The Role of the State      |
| 10  | 2.4. The Role of the State      |
| 11  | 2.5. The Role of the State      |
| 12  | 2.6. The Role of the State      |
| 13  | 2.7. The Role of the State      |
| 14  | 2.8. The Role of the State      |
| 15  | 2.9. The Role of the State      |
| 16  | 2.10. The Role of the State     |
| 17  | 2.11. The Role of the State     |
| 18  | 2.12. The Role of the State     |
| 19  | 2.13. The Role of the State     |
| 20  | 2.14. The Role of the State     |
| 21  | 2.15. The Role of the State     |
| 22  | 2.16. The Role of the State     |
| 23  | 2.17. The Role of the State     |
| 24  | 2.18. The Role of the State     |
| 25  | 2.19. The Role of the State     |
| 26  | 2.20. The Role of the State     |
| 27  | 2.21. The Role of the State     |
| 28  | 2.22. The Role of the State     |
| 29  | 2.23. The Role of the State     |
| 30  | 2.24. The Role of the State     |
| 31  | 2.25. The Role of the State     |
| 32  | 2.26. The Role of the State     |
| 33  | 2.27. The Role of the State     |
| 34  | 2.28. The Role of the State     |
| 35  | 2.29. The Role of the State     |
| 36  | 2.30. The Role of the State     |
| 37  | 2.31. The Role of the State     |
| 38  | 2.32. The Role of the State     |
| 39  | 2.33. The Role of the State     |
| 40  | 2.34. The Role of the State     |
| 41  | 2.35. The Role of the State     |
| 42  | 2.36. The Role of the State     |
| 43  | 2.37. The Role of the State     |
| 44  | 2.38. The Role of the State     |
| 45  | 2.39. The Role of the State     |
| 46  | 2.40. The Role of the State     |
| 47  | 2.41. The Role of the State     |
| 48  | 2.42. The Role of the State     |
| 49  | 2.43. The Role of the State     |
| 50  | 2.44. The Role of the State     |
| 51  | 2.45. The Role of the State     |
| 52  | 2.46. The Role of the State     |
| 53  | 2.47. The Role of the State     |
| 54  | 2.48. The Role of the State     |
| 55  | 2.49. The Role of the State     |
| 56  | 2.50. The Role of the State     |
| 57  | 2.51. The Role of the State     |
| 58  | 2.52. The Role of the State     |
| 59  | 2.53. The Role of the State     |
| 60  | 2.54. The Role of the State     |
| 61  | 2.55. The Role of the State     |
| 62  | 2.56. The Role of the State     |
| 63  | 2.57. The Role of the State     |
| 64  | 2.58. The Role of the State     |
| 65  | 2.59. The Role of the State     |
| 66  | 2.60. The Role of the State     |
| 67  | 2.61. The Role of the State     |
| 68  | 2.62. The Role of the State     |
| 69  | 2.63. The Role of the State     |
| 70  | 2.64. The Role of the State     |
| 71  | 2.65. The Role of the State     |
| 72  | 2.66. The Role of the State     |
| 73  | 2.67. The Role of the State     |
| 74  | 2.68. The Role of the State     |
| 75  | 2.69. The Role of the State     |
| 76  | 2.70. The Role of the State     |
| 77  | 2.71. The Role of the State     |
| 78  | 2.72. The Role of the State     |
| 79  | 2.73. The Role of the State     |
| 80  | 2.74. The Role of the State     |
| 81  | 2.75. The Role of the State     |
| 82  | 2.76. The Role of the State     |
| 83  | 2.77. The Role of the State     |
| 84  | 2.78. The Role of the State     |
| 85  | 2.79. The Role of the State     |
| 86  | 2.80. The Role of the State     |
| 87  | 2.81. The Role of the State     |
| 88  | 2.82. The Role of the State     |
| 89  | 2.83. The Role of the State     |
| 90  | 2.84. The Role of the State     |
| 91  | 2.85. The Role of the State     |
| 92  | 2.86. The Role of the State     |
| 93  | 2.87. The Role of the State     |
| 94  | 2.88. The Role of the State     |
| 95  | 2.89. The Role of the State     |
| 96  | 2.90. The Role of the State     |
| 97  | 2.91. The Role of the State     |
| 98  | 2.92. The Role of the State     |
| 99  | 2.93. The Role of the State     |
| 100 | 2.94. The Role of the State     |
| 101 | 2.95. The Role of the State     |
| 102 | 2.96. The Role of the State     |
| 103 | 2.97. The Role of the State     |
| 104 | 2.98. The Role of the State     |
| 105 | 2.99. The Role of the State     |
| 106 | 2.100. The Role of the State    |

UNIVERSITÉ DE NANTES

Modélisation surfacique d'un couvert végétal  
pour l'étude du rayonnement

THÈSE de DOCTORAT

SPÉCIALITÉ: INFORMATIQUE

ÉCOLE DOCTORALE  
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR  
NANTES

présentée et soutenue publiquement par :

Franck ARIES

le 30 Juin 1997

à Nantes

devant le jury ci-dessous :

|     |                  |            |                          |
|-----|------------------|------------|--------------------------|
| Mme | Camille DUBY     |            | INA-PG                   |
| MM. | Michel LUCAS     | Président  | École Centrale de Nantes |
|     | Yvon GARDAN      | Rapporteur | Université de Metz       |
|     | Pascal LIENHARDT | Rapporteur | Université de Poitiers   |
|     | Rachid SENOUSI   |            | INRA Avignon             |
|     | Frédéric BARET   |            | INRA Avignon             |

Directeur de thèse: Michel LUCAS  
IRIN École Centrale de Nantes

**BIBLIOTHÈQUE**

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE  
I.N.R.A. - Site AGROPARC  
Unité de Bioclimatologie  
Domaine Saint-Paul  
84914 AVIGNON CEDEX 9  
FRANCE

25 AOUT 1997

AHTH40

N°

Œuvre nécessaire à tous les esprits perspicaces et curieux, où chacun de ceux qui aiment à étudier la Philosophie, la Perspective, l'Informatique, l'Architecture, la Biométrie, la Bioclimatologie et les autres disciplines Mathématiques, trouvera une très délicate, subtile et admirable doctrine et se délectera de diverses questions touchant une très secrète science



## RÉSUMÉ

La quantification du rayonnement lumineux dans un couvert végétal est nécessaire en recherche sur les couverts végétaux, tant au niveau de l'étude de la photosynthèse, de la micrométéorologie que de la télédétection. Le recours aux méthodes proches de l'infographie nous amène à rappeler les principes liés au dessin et à l'image et justifie le cadre de la géométrie projective.

Nous proposons un modèle géométrique fin pour représenter un pied de maïs : un modèle paramétrique unique permet notamment de représenter les feuilles tout au long de leur croissance. Les lois de distribution sont calculées : elles permettent de générer une parcelle aléatoire.

Nous traitons ensuite le problème du découpage des surfaces en éléments plus simples. Le découpage d'une surface en triangles plans peut poser problème : la convergence en distance n'implique pas la convergence de l'aire et des normales (problème de Schwartz). Il conduit généralement à un nombre prohibitif de triangles. Pour cela on propose le découpage en carreaux paramétriques du second degré. Cette étape permet de transformer les surfaces paramétriques quelconques en éléments géométriques standards.

La dernière partie traite essentiellement des courbes et surfaces paramétriques rationnelles. Son but est d'établir les formules de calcul des intersections entre un carreau paramétrique rationnel et une droite en utilisant les méthodes d'implicitisation-inversion. Pour les courbes, nous proposons une nouvelle formulation de l'équation implicite qui conduit à des formules d'inversion plus simples que les formules classiques. Une part importante est consacrée à la surface de Steiner, associée, dans les bons cas, à la paramétrisation rationnelle du second degré. La démonstration de la rationalité de la solution unique d'un système polynomial est donnée.

Les possibilités et les limites de ces méthodes pour la quantification du rayonnement dans un couvert végétal sont étudiées.

## MOTS-CLÉS

infographie, rayonnement, lancer de rayons, géométrie projective, géométrie algorithmique, surface de Steiner, surface rationnelle du second degré, triangulation, équation implicite, formules d'inversion, couvert végétal, maïs.

## ABSTRACT

Light distribution within the canopy is essential to understand crop functioning and to study the radiative response measured by remote sensing. Methods adapted from computer graphic science are used in the projective geometry framework.

A realistic model is proposed to describe the geometry of maize plants. A parametric model, for example, is used to describe the leaf shapes. Study of the distribution of the parameters allows to generate random maize fields.

Discretizing a surface in planar triangles may induce problems, when used for ray tracing. The convergence in distance does not imply convergence of the area and the direction of the normals. Moreover a prohibitive number of triangles is generally needed to reach a reasonable accuracy level. Therefore an approximation using quadratic rational patches is proposed. This step allows the discretization of any parametric surface.

The last part concerns the computation of the intersections between a line and a parametric patch using implicitization-inversion method. For a rational curve a new method is proposed to compute its implicit equation leading to inversion formulas simpler than the classical ones. Results obtained for the curves are used for rational surfaces such as the Steiner surface associated to the quadric rational patch. As an original contribution to computational geometry, it is proven that, for any polynomial system, if the solution is unique, it is rational.

These methods are illustrated by a few examples and their limitations are discussed.

## KEY WORDS

computer graphic science, ray-tracing, projectiv geometry, computational geometry, Steiner surface, quadratic rational surface, triangulation, implicitization, inversion formulas, canopy, maize.

## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé dans l'Unité de Biométrie de l'Institut National de Recherche Agronomique (Centre d'Avignon).

INRA  
Unité de Biométrie  
Domaine Saint Paul  
Site Agroparc  
84914 Avignon Cedex 9  
e-mail: Franck.Aries@avignon.inra.fr

En finissant cette thèse je ne peux qu'exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé.

Tout d'abord Michel Lucas, professeur à l'École Centrale de Nantes, pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail et pour avoir accepté de présider le jury.

Ensuite à MM. Yvon Gardan, Professeur à l'Université de Metz, qui a accepté le travail de rapporteur: j'ai été particulièrement sensible à ses encouragements et à ses critiques.

Et à Pascal Lienhard, Professeur à l'Université de Poitiers, qui a également accepté le travail de rapporteur: ses remarques m'ont permis, je l'espère, de rendre ce manuscrit plus lisible.

Je remercie également Camille Duby, Professeur à l'INA-PG qui m'a encouragé à entreprendre, à poursuivre et surtout à terminer cette thèse et qui a accepté de faire partie du jury.

Je remercie tout spécialement Rachid Senoussi, chercheur au Laboratoire de Biométrie d'Avignon, qui a réussi, du moins je l'espère, à m'obliger à mettre dans ce manuscrit un peu de la rigueur mathématique nécessaire à ce type de problème. Son investissement personnel a permis d'établir plusieurs résultats présentés dans ce mémoire.

Je remercie également les bioclimatologistes de l'INRA et plus particulièrement Laurent Prévot (INRA Avignon) avec qui a été établi le modèle mais présenté ici, Bruno Andrieu (INRA Grignon) pour ses conseils et Frédéric Baret (INRA Avignon) qui a bien voulu participer à ce jury: sans leur travail et leur aide, cette thèse aurait perdu toute signification.

Je remercie aussi Marc Daniel, de l'École Centrale de Nantes: ses conseils et les documents qu'il m'a fournis m'ont été particulièrement précieux.

Je remercie pour leur aide les membres de l'Unité de Biométrie d'Avignon et plus particulièrement son directeur Pascal Monestiez.

Je tiens aussi à remercier les services collectifs du Centre d'Avignon et plus particulièrement l'Unité Informatique et l'Unité de Documentation.

Et je n'oublierai pas Marie-Odile, dont les encouragements et l'aide pour la rédaction ont été déterminants tout au long de ce travail.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 0.1      | Étude du rayonnement en bioclimatologie . . . . .            | 11        |
| 0.1.1    | Le niveau d'échelle . . . . .                                | 11        |
| 0.1.2    | Les différents modèles . . . . .                             | 12        |
| 0.2      | Les méthodes informatiques . . . . .                         | 13        |
| 0.2.1    | Les méthodes par projection . . . . .                        | 13        |
| 0.2.2    | Les méthodes de lancer de rayons . . . . .                   | 15        |
| 0.2.3    | La méthode de radiosité . . . . .                            | 15        |
| 0.3      | Les problèmes mathématiques . . . . .                        | 16        |
| 0.4      | Rappels historiques . . . . .                                | 18        |
| 0.4.1    | Dessins et images . . . . .                                  | 19        |
| 0.4.2    | Projection sur une surface . . . . .                         | 20        |
| 0.4.3    | La géométrie projective . . . . .                            | 31        |
| 0.5      | Plan de ce travail . . . . .                                 | 34        |
| <b>1</b> | <b>Le modèle maïs</b>  | <b>37</b> |
| 1.1      | Dispositif expérimental et mesures . . . . .                 | 38        |
| 1.1.1    | Le pied . . . . .  | 40        |
| 1.1.2    | La feuille développée . . . . .                              | 40        |
| 1.1.3    | La nervure centrale . . . . .                                | 43        |
| 1.1.4    | Coupe transversale de la feuille: le gaufrage . . . . .      | 47        |
| 1.2      | Résultats et discussion . . . . .                            | 48        |
| 1.2.1    | Analyses des paramètres obtenus . . . . .                    | 48        |
| 1.2.2    | Fonction de distribution des angles foliaires . . . . .      | 57        |
| <b>2</b> | <b>Mise en œuvre informatique</b>                            | <b>63</b> |
| 2.1      | Approximation des courbes paramétriques . . . . .            | 63        |
| 2.1.1    | Découpage d'une courbe plane en segments de droite . . . . . | 64        |
| 2.1.2    | Découpage d'une courbe plane en segments coniques . . . . .  | 65        |
| 2.1.3    | Découpage d'une courbe gauche en segments coniques . . . . . | 66        |
| 2.1.4    | La paramétrisation de Bézier . . . . .                       | 66        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.1.5    | La paramétrisation de Bézier dans le cas des coniques         | 67         |
| 2.2      | Approximation des surfaces paramétriques                      | 69         |
| 2.2.1    | Le problème de Schwartz                                       | 69         |
| 2.2.2    | Découpage d'une surface paramétrique en triangle              | 70         |
| 2.2.3    | Découpage d'une surface en carreaux du second degré           | 72         |
| 2.3      | Problèmes annexes   | 79         |
| 2.3.1    | Projection non biaisée  | 79         |
| 2.3.2    | Résolution des équations du quatrième degré                   | 81         |
| 2.3.3    | Maille de partitionnement                                     | 83         |
| <b>3</b> | <b>Courbes rationnelles</b>                                   | <b>87</b>  |
| 3.1      | Forme implicite   | 88         |
| 3.1.1    | Le cas des coniques   | 88         |
| 3.1.2    | Le cas des cubiques   | 92         |
| 3.1.3    | Les degrés supérieurs   | 95         |
| 3.2      | Intersection de 3 courbes                                     | 96         |
| 3.2.1    | Condition pour que 3 coniques aient un point commun           | 97         |
| 3.2.2    | Nouvelle formulation  | 98         |
| 3.2.3    | Équation du point commun                                      | 102        |
| 3.2.4    | Cas particuliers  | 103        |
| 3.2.5    | intersection de trois cubiques                                | 104        |
|          | <b>Rationalité d'un système algébrique (projet d'article)</b> | <b>106</b> |
| 3.3      | Rationalité   | 107        |
| 3.4      | Démonstration formelle  | 108        |
| 3.5      | Démonstration constructiviste                                 | 111        |
| 3.5.1    | La dimension 1  | 111        |
| 3.5.2    | La dimension 2  | 112        |
| 3.5.3    | Procédure de Calcul   | 114        |
| 3.5.4    | Exemple   | 115        |
| <b>4</b> | <b>Surfaces rationnelles</b>                                  | <b>119</b> |
| 4.1      | Le carreau de Steiner   | 120        |
| 4.2      | Calcul de la forme implicite                                  | 121        |
| 4.3      | Calcul de l'intersection avec une droite                      | 124        |
| 4.4      | Inversion   | 124        |
| 4.5      | Le calcul du point triple                                     | 127        |
| 4.6      | Les cas dégénérés   | 128        |
| 4.7      | Calcul pratique des expressions précédentes                   | 128        |
| 4.8      | L'équation tangentielle                                       | 130        |

|   |   |            |
|---|---|------------|
| 4.9   | Classification complexe et réelle . . . . .   | 138        |
| 4.10  | Comparaison avec les autres méthodes . . . . .  | 149        |
| 4.10.1  | Les méthodes classiques . . . . .   | 149        |
| 4.10.2  | Les méthodes récentes . . . . .   | 153        |
| 4.11  | Généralisation . . . . .  | 155        |
| <b>Surfaces rationnelles du second degré (projet d'article)</b> |   | <b>157</b> |
| 4.12  | Introduction . . . . .  | 157        |
| 4.12.1  | Notations, rappels . . . . .  | 158        |
| 4.12.2  | Exemple de la surface de Steiner canonique . . . . .  | 159        |
| 4.13  | Les surfaces rationnelles de degré 2 . . . . .  | 160        |
| 4.13.1  | Définitions . . . . .   | 161        |
| 4.13.2  | Espace tangent, surface normale . . . . .   | 161        |
| 4.13.3  | Les formes quadratiques fondamentales de la surface . . . . .   | 163        |
| 4.14  | Singularités et classification . . . . .  | 165        |
| 4.14.1  | Les cas dégénérés . . . . .   | 166        |
| 4.14.2  | Les variétés de Véronèse et cordale . . . . .   | 167        |
| 4.14.3  | Les singularités de $\mathcal{S}$ . . . . .   | 168        |
| 4.14.4  | Classification des cas non dégénérés . . . . .  | 169        |
| 4.14.5  | Les singularités de $\mathcal{N}$ . . . . .   | 171        |
| 4.15  | Forme implicite, formules d'inversion . . . . .   | 171        |
| 4.15.1  | Forme implicite . . . . .   | 171        |
| 4.15.2  | Formules d'inversion . . . . .  | 173        |
| 4.15.3  | Intersection de $\mathcal{S}$ avec les variétés linéaires projectives . . . . .                       | 173        |
| 4.15.4  | Représentation canoniques de la surface de Steiner . . . . .  | 174        |
| <b>5</b>  | <b>Discussion et conclusions</b>  | <b>183</b> |
| 5.1   | Utilisation des maquettes . . . . .   | 183        |
| 5.1.1   | La méthode des spectres pour le calcul du rayonnement intercepté par un couvert . . . . .             | 184        |
| 5.1.2   | La méthode du double tampon de profondeur pour le calcul de la simple diffusion . . . . .             | 188        |
| 5.1.3   | Estimation de la réflectance moyenne d'une scène par lancer lancer de rayons . . . . .                | 189        |
| 5.1.4   | Les méthodes des radiosités pour le calcul de la réflectance et du champ radiatif distribué . . . . . | 189        |
| 5.2   | Conclusions générales . . . . .   | 191        |





# Introduction

*La modélisation du rayonnement à l'intérieur du couvert végétal est essentielle pour de nombreux objectifs. Au niveau de la plante, la croissance est conditionnée par la photosynthèse donc par la quantité et la qualité de lumière qui va parvenir à chacun de ses organes chlorophylliens : c'est le domaine de la photomorphogénèse. Ces échanges radiatifs prennent une part importante dans le microclimat du couvert végétal : c'est le domaine de la micrométéorologie. Leur modélisation est également nécessaire si on se place au niveau de l'observateur qui cherche à tirer une information de la réponse radiative du couvert : c'est le domaine de la télédétection. Dans ce cadre, nous avons été amenés à proposer un modèle géométrique représentatif d'un couvert de maïs et à reprendre les différentes méthodes développées en infographie pour les adapter, au mieux, aux objectifs de quantification du bioclimatologiste.*

## 0.1 L'étude du rayonnement dans un couvert végétal en bioclimatologie

### 0.1.1 Le niveau d'échelle

Suivant le niveau d'échelle choisi, la résolution spatiale des mesures doit permettre de prendre en compte :

- l'arrangement des cellules, voire de leurs composants élémentaires. Les mesures se font en laboratoire et leur échelle peut être de l'ordre de la dizaine de micromètres,
- la forme et la position de chaque organe végétal, feuille, tige, fruit... Les mesures se font en laboratoire ou au champ. Leur précision peut varier du millimètre au centimètre,

- les caractéristiques globales du végétal (un arbre par exemple) ou du couvert végétal supposé homogène. La précision des mesures peut être de l'ordre du mètre à quelques dizaines de mètres et peuvent donc se faire par télédétection rapprochée ou par imagerie satellitaire haute résolution spatiale,
- un mélange de cultures, forêts, routes... La résolution est de l'ordre du km (imageries satellitaire à basse ou moyenne résolution spatiale).

S'il n'est pas possible d'étudier globalement ces différents niveaux d'échelle, il est clair que chaque niveau est conditionné par le niveau inférieur.

Le travail présenté ici permet une représentation fine des organes végétaux. Des statistiques déduites pourront servir de données d'entrée au niveau du couvert végétal pris globalement.

### 0.1.2 Les différents modèles

Les modèles permettant de quantifier les transferts radiatifs à l'intérieur des couverts végétaux se sont beaucoup développés ces dernières années. Pour une bibliographie récente on peut se reporter à [Govaerts, 1996].

#### Les modèles statistiques

On peut citer le modèle milieu turbide (turbid medium) : il assimile la végétation à un ensemble de triangles indépendants les uns des autres et de tailles infinitésimales. Leur densité et la loi d'orientation de leur normale permettent de déterminer pour chaque direction la probabilité d'interception du rayonnement [Prévo, 1985].

#### Les modèles géométriques simplifiés

Ils ne retiennent de la géométrie des plantes que les caractéristiques géométriques les plus globales. Cylindres, sphères, parallélépipèdes et (ou) troncs de cône suffisent souvent à caractériser une plante, un arbre ou une culture [Brown et Pandolfo, 1969], [Chiapale, 1975], [Riou et al., 1989].

#### Les modèles mixtes

Ils combinent les deux approches précédentes : densité et loi d'orientation sont définis à l'intérieur de chaque élément géométrique décrivant la scène. Dans ce cadre, on peut citer [Kimes, 1984], [Sinoquet, 1989], [Sinoquet et Bonhomme, 1991].

### Les modèles géométriques fins

Proposés notamment dans [de Reffye et al., 1988], ils utilisent, pour décrire de manière plus fine la géométrie d'un végétal :

- un modèle architectural décrivant les relations entre les différents organes : type, positions et angles d'insertion des ramifications, positions des organes...
- des modèles de description des organes : la tige, les feuilles, les fruits...

Pour certains arbres, c'est la partie architecturale qui sera la plus difficile. D'autres végétaux par contre peuvent avoir une structure architecturale très simple mais des organes de géométrie complexe.

## 0.2 Les méthodes informatiques

L'idée est de découper le modèle surfacique précédent pour constituer un ensemble de primitives géométriques simples capables d'approcher suffisamment le modèle. Ces primitives peuvent être des triangles, mais également des morceaux de surface paramétrique rationnelle : nous les désignerons sous le terme générique de carreaux.

Les propriétés optiques de ces primitives géométriques et les caractéristiques des sources lumineuses permettent par diverses méthodes de déterminer la réponse radiative du couvert. Ces méthodes sont le plus souvent issues de l'infographie et permettent de réaliser des "images". Ces dernières ne constituent cependant pas le but de notre étude : nous voulons quantifier le rayonnement qui arrive à un point d'observation donné si on se place dans le cadre de la télédétection, l'énergie lumineuse qui arrive à chaque organe dans le cadre de la photomorphogénèse. Ces méthodes peuvent être divisées en trois classes : les méthodes par projection, les méthodes basées sur le lancer de rayons et les méthodes de radiosité.

### 0.2.1 Les méthodes par projection

Ce sont les plus anciennes utilisées en infographie. On peut citer l'algorithme du peintre, aujourd'hui pratiquement abandonné, et l'algorithme du tampon de profondeur [Foley et van Dam, 1984], [Peroche et al., 1988].

Dans notre cas, l'ensemble des primitives géométriques est parcouru séquentiellement : chacune d'elle est projetée, le plus souvent linéairement sur une surface discrétisée en carrés élémentaires, les *pixels*, de manière à constituer une image.

**Images binaires.** Tous les pixels de l'image sont initialisés à *faux*. On met à *vrai* tous les pixels de la surface dont le centre est touché par la projection d'une primitive géométrique. On obtient donc une image binaire correspondant à la *silhouette* du couvert végétal pris sous un angle donné. Suivant l'angle et le type de projection, cette image va permettre de calculer :

- le pourcentage de rayonnement direct intercepté par la végétation : il suffit de faire la *photographie* vue du soleil. Comme on peut raisonnablement considérer le soleil à l'infini, nous ferons une projection normale. Le pourcentage cherché est égal au pourcentage de pixels à *vrai*,
- l'ombre portée au sol par projection parallèle oblique,
- le pourcentage de ciel vu d'un point et pour un angle zénithal donné par intégration sur une couronne d'une projection hémisphérique.

**Images cumulées.** On peut également mettre l'image à 0 et rajouter 1 chaque fois que le centre d'un pixel est touché par la projection d'un élément de surface. On obtient alors une image qui d'un point de vue donné, donne l'épaisseur du couvert végétal.

### En utilisant un tampon de profondeur

Si on rajoute un tampon de profondeur on peut sélectionner sur l'image les éléments qui seront vus du point d'observation.

**Image de distance.** Si on n'utilise que le tampon de profondeur, on obtient directement une image dont la valeur de chaque pixel correspond à la distance entre le point d'observation et l'élément de surface vu. On aboutit donc directement à l'information tirée d'une paire de photographies stéréographiques [Ivanov, 1994].

**Caractérisation des éléments végétaux.** On caractérise chaque élément végétal par un indice (tige, feuille de rang  $i$ ... par exemple). En faisant la photographie à partir de la position du soleil, on obtient une image dont le pourcentage de chaque valeur des pixels donne le pourcentage de rayonnement intercepté par type d'organe.

**Caractérisation des angles d'incidence.** Si on affecte à chaque pixel de l'image une fonction monotone de l'angle défini par la droite de projection et la normale à la surface vue, on obtient une image dite "ombrée" du couvert végétal. Cette image permet de se faire une bonne idée de la structure 3D de ce couvert. C'est également une approximation de la réponse radiative du

couvert quand le point d'observation et la source lumineuse supposée unique sont confondus (effet dit de *hot spot*).

### 0.2.2 Les méthodes de lancer de rayons

Elles sont basées sur les lois de l'optique [Glassner, 1989]. Un échantillon, généralement important, de rayons lumineux est envoyé sur une maquette composée de carreaux élémentaires. Les propriétés optiques de chaque carreau étant données, on peut suivre individuellement chaque rayon lumineux et déterminer sa trajectoire. Cette méthode est théoriquement capable de prendre en compte tous les types d'interactions rayon-matière. En pratique elle est beaucoup mieux adaptée au rayonnement spéculaire qu'au rayonnement diffus, ce dernier conduisant à un nombre de rayons souvent prohibitif.

En fait, même pour le calcul du rayonnement direct, la méthode est très consommatrice en temps. Si la méthode est couramment utilisée pour la représentation d'objets manufacturés, il n'en est pas de même pour la représentation de scènes infiniment plus complexes comme un couvert de maïs. Trois méthodes principales peuvent être utilisées conjointement pour limiter ce temps :

- déterminer une bonne stratégie d'échantillonnage des rayons. Il faut remarquer que la stratégie est très dépendante des objectifs et que notre but final n'est pas d'obtenir une image. Dans le cadre de la quantification du rayonnement dans un couvert végétal on peut se référer à [Chelle, 1997],
- éviter le calcul de l'intersection quand un rayon passe de manière évidente trop loin d'un carreau. C'est ce que permet le partitionnement de la scène,
- prendre un type de carreau élémentaire qui fasse le compromis entre le nombre nécessaire pour une représentation convenable de la scène et la difficulté du calcul de l'intersection avec un rayon. C'est dans ce cadre que nous proposerons une paramétrisation du second degré.

### 0.2.3 La méthode de radiosité

C'est une méthode ancienne, développée par les thermiciens pour les surfaces lambertienne, *i.e.* pour les surfaces qui émettent ou réfléchissent la lumière de manière uniforme. Chaque carreau élémentaire est en équilibre radiatif avec l'ensemble des carreaux qui le "voient". Comme chaque carreau

est censé être uniforme au niveau radiatif, le découpage doit être très fin, même pour les surfaces planes.

Pour chaque paire de carreaux, on associe un facteur de forme,  $F_{i,j}$  qui représente le pourcentage de flux hémisphérique émis par le carreau  $i$  qui parvient au carreau  $j$ . Connaissant l'énergie émise par les différentes sources lumineuses, et les propriétés optiques de chaque carreau, l'énergie radiative de chaque carreau peut être calculée en résolvant un système linéaire. La principale difficulté consiste à calculer la matrice  $n \times n$ , où  $n$  est le nombre de carreaux de la scène. Pour chaque paire de carreaux on doit *a priori* tester si un des  $n-2$  autres carreaux est susceptible d'intercepter les échanges entre les deux carreaux. La complexité théorique est alors en  $n^3$ .

Dès 1985, Cohen et Greenberg ont proposé la méthode des hémicubes qui a permis de réduire la complexité théorique en  $n^2$  mais la méthode reste inemployable dans le cadre des couverts végétaux.

Très récemment [Chelle, 1997] a proposé une méthode mixte : la méthode de radiosité n'est utilisée que pour les éléments proches. Cette méthode est en cours d'évaluation.

### 0.3 Les problèmes mathématiques

En lancer de rayons, le problème central est de calculer l'intersection entre une droite, représentant un rayon lumineux et une primitive géométrique. Si cette dernière est un triangle le problème est relativement facile; il n'en est pas de même si c'est un morceau de surface paramétrique rationnelle, même dans le cas d'une paramétrisation du second degré. La méthode retenue consiste à :

- déterminer la forme implicite de la surface contenant le morceau paramétrique,
- calculer les intersections entre la droite et la surface,
- déterminer les équations d'inversion pour savoir si chaque point intersection est effectivement sur le carreau paramétrique,
- prendre, si elle existe, l'intersection la plus proche du point d'émission du rayon lumineux.

Ces techniques "théoriquement simples" ont été peu abordées en mathématiques classiques. Elles se rattachent, du moins pour le calcul de la forme implicite, à ce que les mathématiciens du XIXème siècle appelaient la théorie



de l'élimination qui conduit à des "méthodes savantes de résolution". Cette théorie a malheureusement été pratiquement bannie des mathématiques, à partir des années 30. Les mathématiciens ont, semble-t'il, préféré privilégier les démonstrations algébriques aux démonstrations constructivistes. Il faut cependant reconnaître que, d'une part le cadre théorique de ces méthodes savantes n'était pas toujours suffisamment clair et que d'autre part la construction effective des solutions était dans la pratique inapplicable en dehors de cas d'école.

Toujours est-il qu'il a fallu attendre le milieu des années 60 avec le développement de l'informatique pour que les méthodes constructivistes soient remises à la mode, d'ailleurs moins par les mathématiciens que par les informaticiens. Il est probable que ces derniers ont été moins gênés par le cadre souvent flou des méthodes et ont privilégié leur aspect opérationnel.

Plus récemment, mathématiciens et informaticiens se sont rapprochés [Degen, 1996],[Becker et Weispfenning, 1993]. Il est bien sûr plus satisfaisant que les algorithmes soient établis dans un cadre mathématique clair mais il faut cependant éviter de faire perdre toute lisibilité aux méthodes : elles doivent pouvoir être utilisées par des non-mathématiciens.

Au point de vue opérationnel, la principale difficulté vient des singularités : la plupart des méthodes présentent des cas d'exceptions le plus souvent liés aux singularités. Certaines sont inhérentes au problème : on ne peut calculer le point d'intersection de deux droites confondues. D'autres sont purement algorithmique : c'est l'algorithme de calcul qui crée les singularités. L'exemple de l'intersection de deux coniques Fig : 1 illustre ces deux cas. Le but est d'arriver à une formule ou un algorithme "propre", *i.e.* qui donne toujours le résultat escompté dans son domaine "naturel" de validité.

### Résolution analytique et utilisation d'un calculateur formel

Le choix des surfaces rationnelles conduit à des équations polynomiales dont la résolution manuelle n'est pratiquement jamais réalisable. On peut alors :

- soit utiliser les techniques itératives habituelles qui demandent généralement de bons points de départ et ne permettent pas de trouver l'ensemble des solutions d'un problème. Cependant des méthodes spécifiques aux systèmes d'équations polynomiales se sont développées récemment [van Hentenryck et al., 1995],
- soit transformer analytiquement le système jusqu'à avoir un système minimal, *i.e.* une équation polynomiale unique à une seule inconnue et

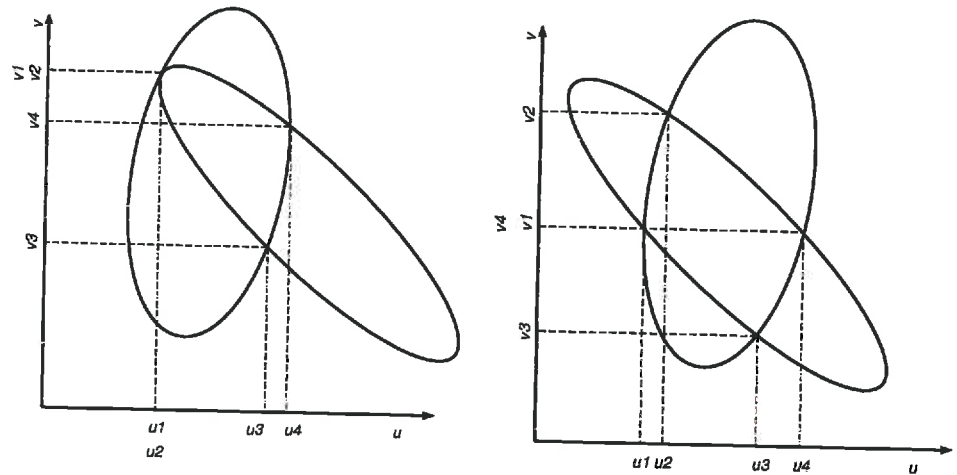


FIG. 1 – *Singularité vraie et singularité algorithmique. Dans la figure gauche, les deux ellipses sont pratiquement tangentes : on ne peut pas dire si elles ont 4 intersections réelles distinctes, 2 intersections réelles distinctes et une intersection réelle double ou 2 intersections réelles distinctes et 2 intersections imaginaires. Il y a singularité vraie. Dans la figure droite il y a 4 intersections réelles distinctes, mais l'élimination de  $u$  donne une racine double en  $v$  : les approximations numériques peuvent conduire à des solutions imaginaires en  $v$ , ce qui est manifestement faux : la singularité est algorithmique.*

de degré minimal. On résout l'équation, analytiquement si son degré est inférieur ou égal à quatre, numériquement sinon.

C'est cette dernière méthode que nous avons privilégiée.

L'essentiel des calculs a été réalisé avec le logiciel de calcul formel MAPLE. Il permet, en prenant des coefficients entiers, de se dégager, pour tous les calculs rationnels, des problèmes numériques inhérents au calcul flottant. Pour les calculs non rationnels, le contrôle de la précision nous a permis de trouver des solutions de référence.

Nous avons également poussé les développements de manière à arriver à des formules ou des algorithmes qui puissent être transcrits dans un langage procédural classique (FORTRAN ou C par exemple).

## 0.4 Rappels historiques

*L'utilisation des méthodes de l'infographie pour l'étude du rayonnement vont nous permettre de construire puis d'utiliser des images associées à une*

*scène tridimensionnelle. La construction de telles images et leur interprétation posent des problèmes tant mathématiques que conceptuels. La plupart de ces problèmes ont été posés depuis longtemps, parfois depuis l'antiquité. Beaucoup ont été résolus bien avant l'apparition de l'informatique : il nous semble utile de rappeler ici quelques résultats, souvent assez anciens, qui servent de base à la modélisation utilisant l'image.*

*On sait, par exemple, que la bonne apparence de ces images n'est pas suffisante pour justifier le modèle tridimensionnel et encore moins le modèle de rayonnement : si l'image permet certaines vérifications, elle ne peut constituer une preuve. L'image doit également être considérée comme un processus subjectif de projections d'une scène 3D sur une surface. Cette transformation a fait l'objet de beaucoup d'études et nombre de solutions ont été proposées. Si on choisit la projection linéaire, la géométrie projective fournit le cadre naturel aux calculs : c'est ce cadre que nous adopterons dans les chapitres suivants.*

#### 0.4.1 Dessins et images

Le dessin au trait, quand il cherche à représenter un objet en trois dimensions montre rapidement ses limites. Dans la Fig. 2.A, on a reporté schématiquement le dessin d'une cage d'après une fresque du début du XIV<sup>ème</sup> siècle (chambre du cerf: Palais des Papes, Avignon). On peut éliminer les faces cachées et l'interpréter comme :

- une vue légèrement du dessus (B),
- une vue légèrement du dessous (C),
- une vue très rapprochée (D) mais dans ce cas il faut supposer, soit une erreur de perspective dans la figure (A), soit la non régularité des hexagones.

La représentation par surfaces ombrées avec élimination des surfaces cachées permet dans les cas simples de lever ce type d'ambiguïté. L'interprétation pour des formes simples, connexes et régulières est facile mais elle se complique par contre très vite au fur et à mesure que la scène se complexifie ou si les objets n'ont pas la régularité d'objets manufacturés : l'interprétation peut devenir spatialement incohérente. On retrouve dans les gravures de Escher de nombreux exemples conduisant volontairement à une interprétation incohérente (escalier ou chute montant indéfiniment). Plusieurs techniques

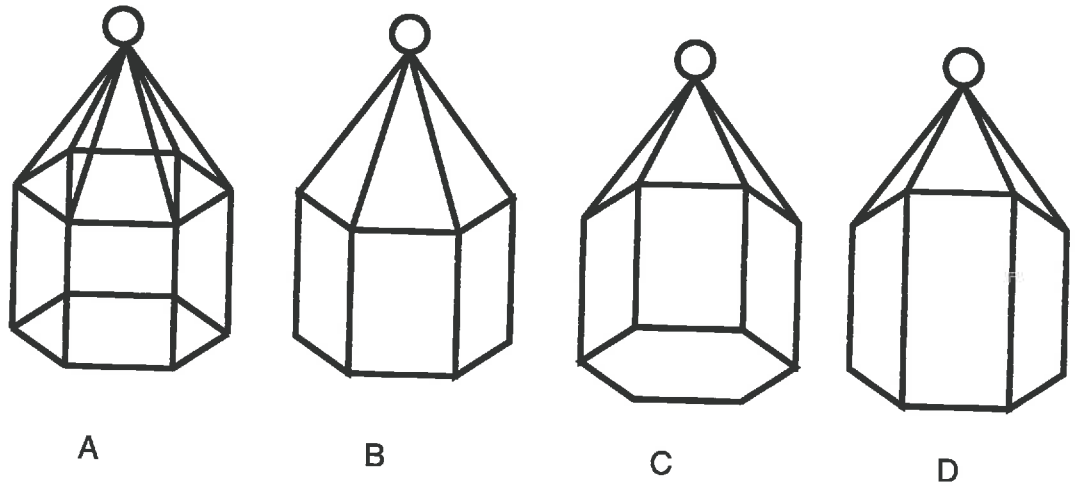


FIG. 2 – Représentation schématique d'une cage à oiseaux et diverses interprétations possibles.

en infographie conduisent à des images spatialement incohérentes :

- les méthodes où l'élimination des éléments cachés se fait par tri des objets, supposant une relation d'ordre dans  $R^3$  (l'algorithme du peintre) mais elles sont en voie d'abandon,
- le lissage des surfaces qui crée un trompe-l'œil faisant passer une surface composée de facettes planes pour une surface lisse,
- l'utilisation de textures pour simuler des surfaces rugueuses.

Dans ces deux derniers cas l'enveloppe des objets représentés n'est pas en accord avec l'impression visuelle générée par le rendu du relief.

Dans le cas de la représentation de couverts végétaux, la complexité et la variabilité des éléments représentés ne permet le plus souvent qu'une vérification partielle de la cohérence de la scène. L'image d'une maquette ne permet de voir que les erreurs les plus grossières ; elle ne peut constituer une validation du modèle.

#### 0.4.2 Projection sur une surface

Transformation de  $R^3$  dans  $R^2$ , la projection, ou perspective, est la base du dessin et de l'image. Cette transformation, non bijective, entraîne une

perte d'information mais aussi la perte de certaines propriétés. Il existe une infinité de projections possibles : le choix est fonction des objectifs.

“La perspective est l'art ou la science qui a pour but de représenter les objets sur une surface plane de telle sorte que la représentation de ces objets coïncide avec la perception visuelle qu'on peut en avoir, compte tenu de leur position respective dans l'espace par rapport à l'œil de l'observateur” (Le Grand Robert). La perspective va devoir procéder à :

- l'élimination des parties cachées : en supposant un œil unique à l'observateur, c'est un processus objectif,
- la projection sur le plan de manière à respecter la perception visuelle : le processus est complètement subjectif.

Les problèmes liés à la perspective ont été décrits dans de nombreux livres. On peut citer : [Panowski, 1978], [Flocon et Taton, 1990], [Parramon, 1991] et [Comar, 1992].

La question a été traitée dès l'Antiquité par les mathématiciens. L'étude des règles permettant de restituer l'image d'un objet de l'espace constitue, pour les Grecs, une branche spécifique de la géométrie, l'*optique*, et a intéressé la plupart des mathématiciens de cette époque. Les architectes, les décorateurs de théâtres, puis les peintres latins ont utilisé certaines de ces règles. Le traité de Vitruve, *De Architectura*, au premier siècle avant notre ère, a été étudié et commenté jusqu'à la Renaissance, malgré la perte des figures qui rend le texte difficilement abordable.

Les règles proposées sont basées sur la proportionnalité entre la taille de l'objet représenté et l'angle sous lequel l'objet réel est vu par l'observateur. Elles ne peuvent conduire à une représentation plane exacte. Les rares représentations conservées, (tous les décors de théâtre ont été perdus) montrent une représentation perspective, peut-être empirique, où les parallèles convergent, non vers un point de fuite mais vers une ligne de fuite (la construction en arête de poisson décrite dans [Panowski, 1978]).

Au Moyen Âge, l'utilisation de la perspective par les peintres a pratiquement disparu. Dans la tradition gothique par exemple, les différents éléments d'une scène sont représentés indépendamment les uns des autres. Leur angle de vue est celui qui permet leur identification la plus facile (une assiette est le plus souvent souvent circulaire, comme si elle était vue de dessus) et les tailles respectives des sujets sont fonction de l'importance symbolique que veut leur donner le peintre (un paysan est généralement plus petit qu'un seigneur). La plupart des tableaux ne représentent pas une scène tridimensionnelle mais la juxtaposition d'objets sans effet de relief. Les

rare représentations réellement tridimensionnelles sont généralement truffées d'erreurs (les portes des châteaux sont trop petites pour permettre le passage des personnages, le raccourci perspectif est souvent inversé).

Les mathématiciens ont par contre continué à s'intéresser à la perspective. On peut citer le mathématicien arabe Ibn al-Haytham (965-1039), qui de plus réfuta la tradition antique d'un œil émetteur de rayons visuels. Ses travaux ont été repris en Occident, notamment par Roger Bacon.

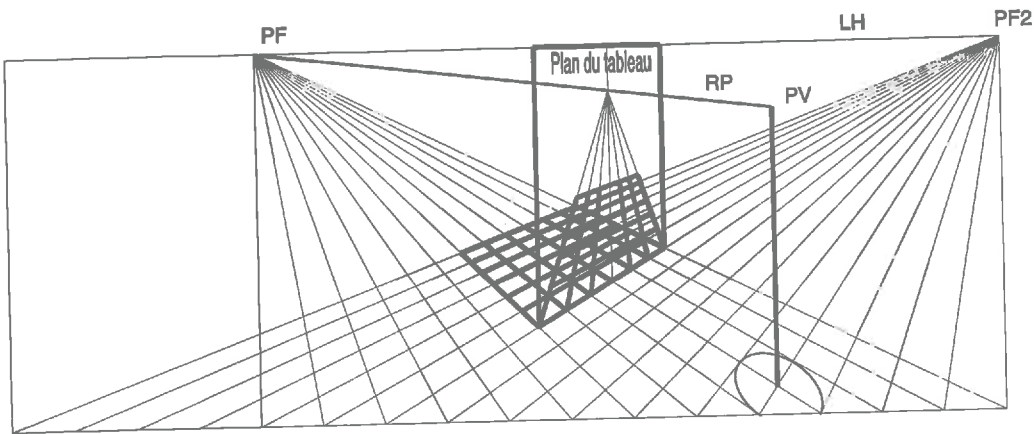
En peinture c'est probablement Giotto (1266?-1337) qui fut à l'origine des principes de la perspective moderne. Également sculpteur et architecte, il sait dans ses peintures placer convenablement chaque objet dans un contexte tridimensionnel. Les techniques vont progressivement s'améliorer au cours du XIV<sup>ème</sup> siècle. Pour l'école de Sienne on peut citer Ambrogio Lorenzetti (vers 1290-1348) qui adopte dans certains de ses tableaux le point de fuite unique. Dans l'école d'Avignon, on remarque Simone Martini (1284-1344), d'ailleurs d'origine Siennoise, encore un peu maladroit dans ses représentations perspectives, puis Mateo Giovanetti (?-1369) dont les trompe-l'œil décorant le Palais des Papes d'Avignon sont étonnants.

La première utilisation raisonnée de l'ensemble des règles de la perspective linéaire moderne a probablement été faite par l'architecte florentin Brunelleschi (1377-1446). Ses résultats ont été décrits par son disciple, Leon Batista Alberti (1404-1472) dans le livre *De Pictura* [Alberti, 1435]. Ce livre bien que dépourvu d'illustration, permet de bien comprendre la "construction légitime" conduisant à la "*perspectiva artificialis*" qui se distingue nettement de la "*perspectiva naturalis*" de l'Antiquité.

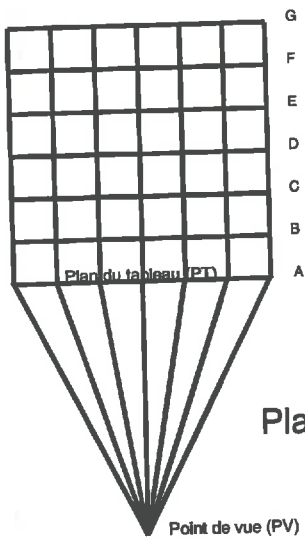
L'œil (supposé unique) de l'observateur est fixe et regarde la scène à travers un voile transparent placé sur le "plan du tableau" (Fig. 3). Chaque point de l'espace est représenté à l'intersection entre la droite issue de ce point et passant par le point de visée (l'œil de l'observateur) et le plan du tableau (voir également la gravure de Dürer Fig. 9)<sup>1</sup>.

La "construction légitime" est réalisée à partir d'un point de fuite unique ( $PF$ ) situé à la même hauteur que le point de vue ( $PV$ ); le rayon principal ( $RP$ ), joignant les points  $PF$  et  $PV$  est perpendiculaire au plan du tableau. Le dallage régulier du sol (vue en plan) peut facilement être dessiné en vue de profil si on connaît la hauteur du point de vue et sa distance au plan du tableau. Pour la vue en élévation, on commence par dessiner la ligne de terre qui correspond à l'intersection entre le plan du tableau et le sol. On

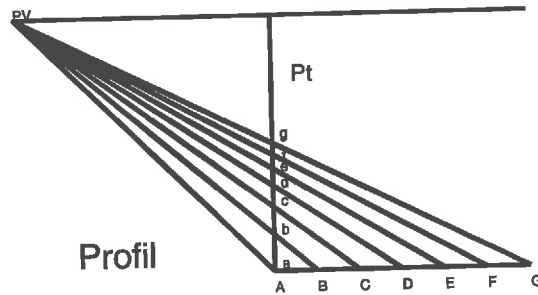
1. La perspective artificielle est ainsi définie à partir du point d'observation et du plan du tableau. Si on utilise les points à l'infini, seul le point de vue n'a pas de représentation dans le plan du tableau



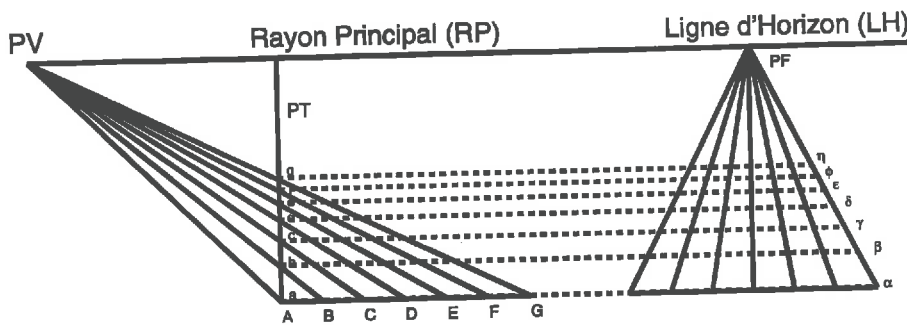
Vue générale



Plan



Profil



Profil

Elévation

FIG. 3 – Le modèle du peintre pour la projection conique.



trace ensuite une seconde droite parallèle à la première, la ligne d'horizon; la distance entre les deux droites doit être égale à la hauteur d'observation en prenant le carreau élémentaire du dallage comme unité. Pour représenter le dallage on découpe la ligne de terre en segments égaux de longueur 1, puis on trace le faisceau de segments issus de ces points et convergent vers un point de la ligne d'horizon. On peut ensuite placer les segments horizontaux, correspondant au découpage en profondeur du dallage, en reportant la vue de profil pour déterminer leur écartement<sup>2</sup> (Fig. 3). En ce qui concerne la hauteur relative des objets, on utilise toujours la convergence des parallèles, et la non transformation des échelles dans le plan du tableau (Fig. 4).

Au cours du XV<sup>ème</sup> siècle et dans la première moitié du XVI<sup>ème</sup> siècle différents procédés de constructions vont être proposés, tous basés sur la perspective linéaire. On peut citer Paolo Uccello (1397-1475) et plus particulièrement ses études sur la représentation du tore, Piero de la Francesca (1416-1492) (*Prospectiva Pigendi*), Jean Pellerin dit Viator et Dürer (*Instructions pour Mesurer*) [Dürer, 1525] (Fig. 9). En peinture la perspective linéaire va se généraliser dans toute l'Europe aux dépens de la tradition médiévale et des tentatives probablement empiriques des perspectives curvilignes (Jean Fouquet). Léonard de Vinci et Michel-Ange comprendront bien cependant les limites de cette perspective linéaire quand le point d'observation est trop près du plan du tableau, ou quand le spectateur ne peut occuper la place imposée, à savoir celle de l'œil du peintre. Ils ont, dans certaines fresques, sciemment triché avec ces règles.

Au XVI<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens se sont beaucoup intéressés à la question. Descartes (1596-1650), en créant la géométrie analytique, a permis

2. La technique du point de fuite unique était utilisée avant Brunelleschi. Seul le calcul des distances entre les parallèles successives constituant le découpage en profondeur du dallage posait problème. Alberti cite deux méthodes employées alors :

- la distance entre deux parallèles successives suit une progression géométrique généralement de raison deux tiers. Alberti déclare la construction fautive sans démonstration. Elle ne peut en effet correspondre à la perspective de Brunelleschi car les diagonales du pavage ne sont pas alignées,
- on trace un segment entre le point de la ligne de terre situé à l'aplomb du point de fuite et un point arbitraire de la ligne d'horizon  $PD$ . Les intersections entre ce segment et le faisceau convergent vers le point de fuite vont permettre de positionner les segments horizontaux du dallage. La construction est cette fois conforme à la projection de Brunelleschi mais il semble qu'on doive à ce dernier l'interprétation convenable du procédé, la distance entre le point de fuite et le point  $PD$  qu'il nomme point de distance, correspondant à la distance entre le point d'observation et le plan du tableau.

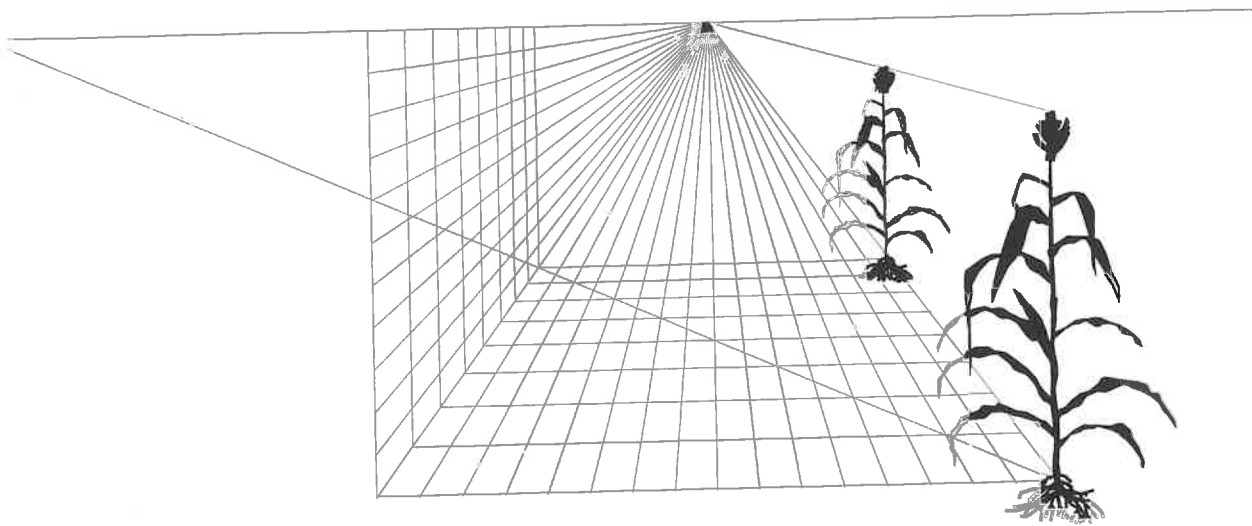


FIG. 4 – Détermination de la taille respective des objets en projection linéaire.

de donner une forme algébrique aux calculs de projection. Desargues (1591-1661), en créant la géométrie projective, a résolu le problème des points à l'infini et a notamment permis de mieux comprendre la ligne d'horizon.

Les cartographes eux aussi se sont intéressés aux problèmes de projection [Joly, 1985], [Rouleau, 1991]. Leur problème est de faire une image plane du globe terrestre en la déformant "le moins possible". La sphère n'étant pas une surface développable, certains ont voulu privilégier le respect des rapports de surfaces : la projection est alors dite équivalente. D'autres ont préféré conserver les angles : la projection est alors dite conforme. Certaines projections ne sont ni conformes ni équivalentes : elles sont dites aphyllactiques. Plusieurs centaines de projections ont été proposées depuis l'Antiquité et une trentaine sont encore utilisées par les cartographes mais on peut citer Mercator qui en 1569 inventa la projection portant son nom. Le problème se pose en imagerie si on veut s'approcher de la "perspective naturelle" qui respecte les angles solides et prend une importance particulière si on simule une photographie grand angle (Fig. 8) ou une photographie hémisphérique.

Au XIX<sup>ème</sup> siècle, la géométrie projective s'est développée. Elle prend en compte les points imaginaires et les points à l'infini, permettant une formulation plus concise de théorèmes généraux.

En infographie, ces résultats ont pu être utilisés, et le problème a été essentiellement de réaliser des programmes dont les données d'entrée ne soient

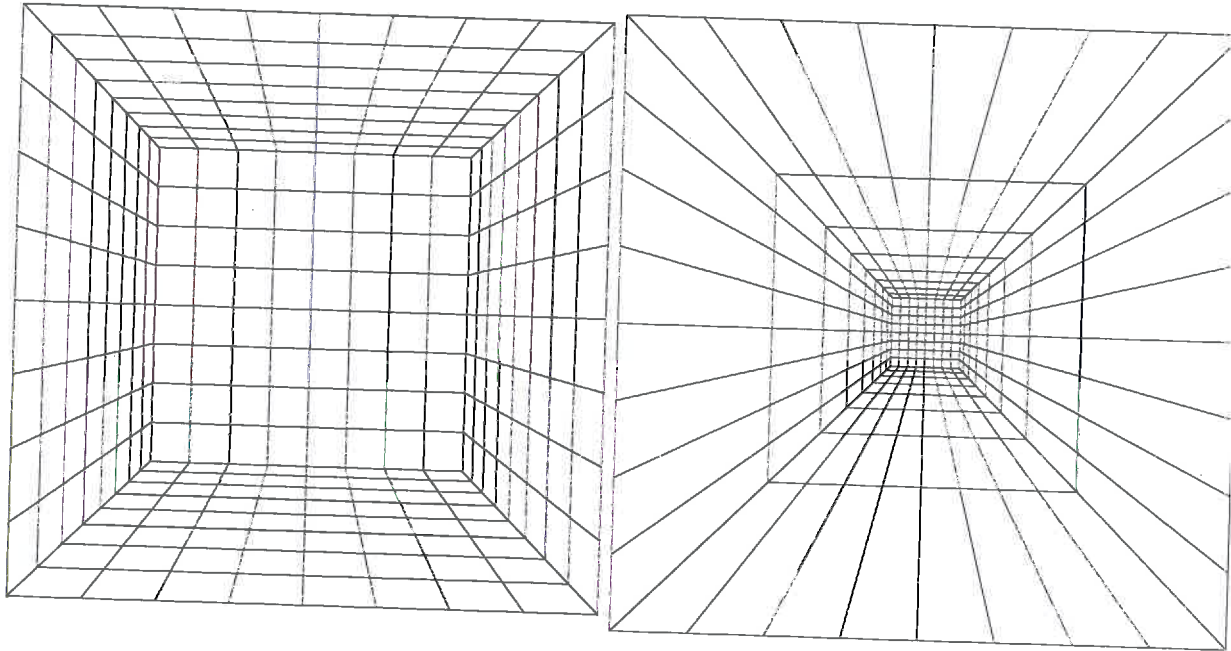


FIG. 5 - Projection plane de la "boîte d'espace"  $8 \times 8 \times 8$ . A gauche l'observateur est à une distance de la boîte de 9 carreaux élémentaires : la représentation est "correcte". A droite la distance à été réduite à 1 carreau : les carrés de base les plus en avant sont "démessurément" étirés et peuvent faire préférer d'autres types de projection. On peut également noter que le "mur du fond" occupe sensiblement 50% de la surface de gauche, alors qu'il n'en occupe que 1% dans l'image de droite.

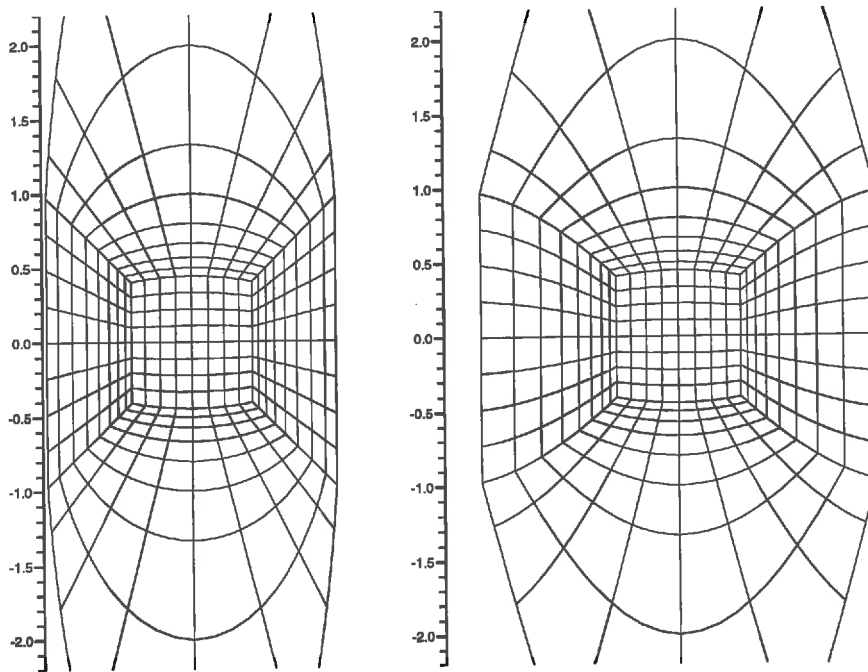


FIG. 6 – *Projection cylindrique de la boîte  $8 \times 8 \times 8$ . A gauche le cylindre de projection est présenté en perspective orthographique (suppression de la coordonnée de profondeur correspondant à un point de vue à l'infini). A droite le même demi-cylindre est représenté après déroulement.*

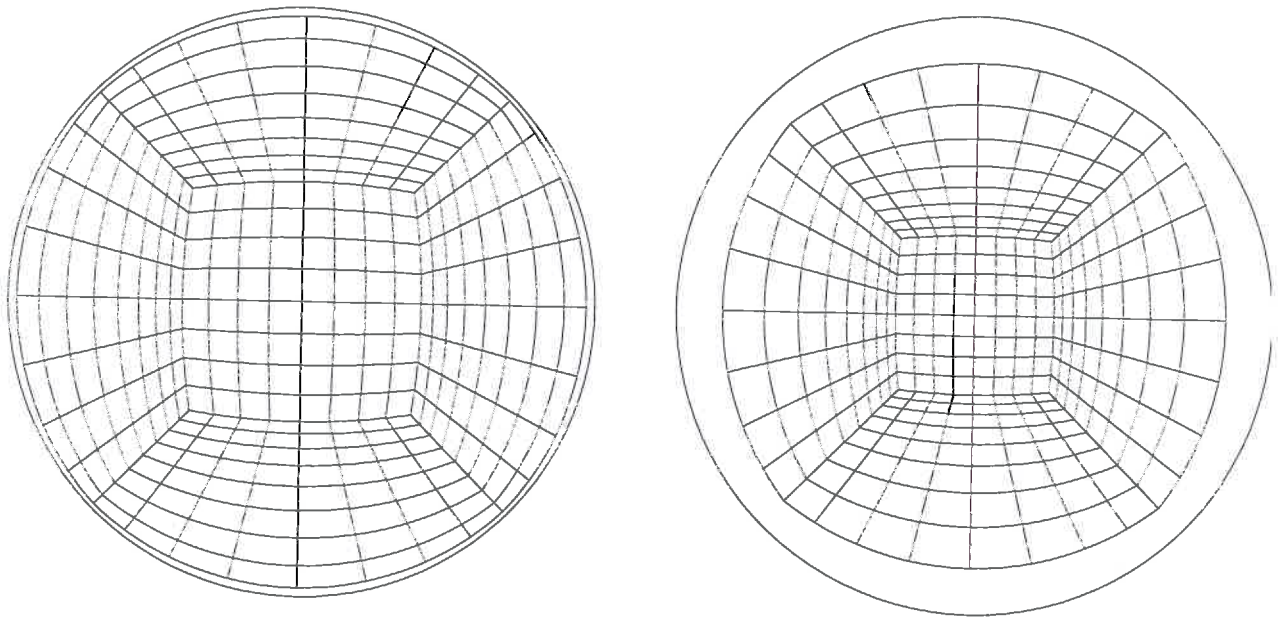


FIG. 7 – Projection hémisphérique de la boîte  $8 \times 8 \times 8$ . A gauche l'hémisphère de projection est représenté en perspective orthographique. A droite la distance au centre est proportionnelle à l'angle zénithal.

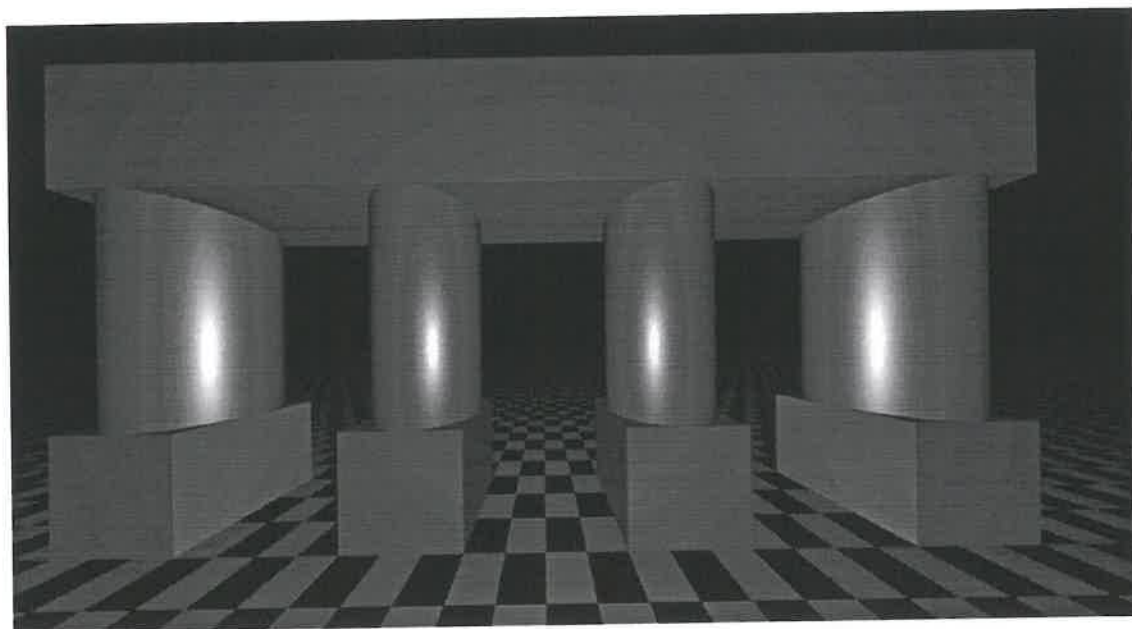


FIG. 8 – *Les colonnes latérales, vues en grand angle, paraissent disproportionnées en raison de leur anamorphose.*

pas trop difficiles à établir pour un utilisateur non spécialiste. En effet si une projection conique est définie par un point d'observation et un plan de projection, la représentation analytique des points projetés nécessite la définition préalable d'un repère. Comme on désire généralement la représentation d'une zone finie sur la surface de projection on doit ajouter la notion de fenêtre. Sur la gravure de Dürer (Fig. 9), le point d'observation correspond à l'attache de la poulie sur le mur, la fenêtre d'observation au cadre de bois, le plan de projection au plan de ce cadre, et on peut supposer que son repère est donné par deux des montants du cadre préalablement gradués. Si une telle description est nécessaire dans le cas général, on préférera le plus souvent utiliser une forme simplifiée.

Dans la plupart des cas, en effet, il est raisonnable de prendre un plan de projection perpendiculaire au centre de la fenêtre de visualisation : c'est le modèle de l'appareil photographique. On peut également supposer que le photographe prend son cliché de manière à ce que la ligne d'horizon reste horizontale (même si elle est en dehors par la fenêtre de visualisation) et que le ciel se place vers le haut de la photographie. Alors, la définition de la projection se résume dans le cas général à une position de l'observateur,



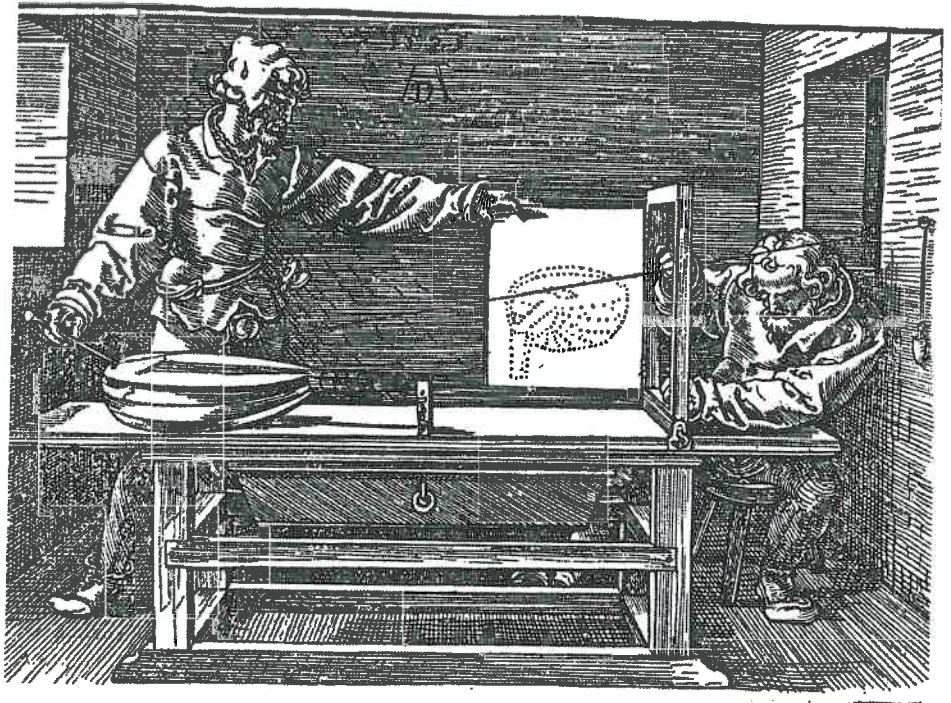


FIG. 9 – Les calculs de projection nécessaires à la représentation perspective se généralisent dans toute l'Europe au début du XVI<sup>ème</sup> siècle. Ici une gravure de Dürer faite en 1525 et destinée à illustrer son traité de perspective.



une direction ou un point de visée, deux angles d'ouverture qui déterminent l'ensemble des paramètres. Ce modèle pose cependant problème. Quand la direction d'observation est verticale, le bord de la pellicule est toujours horizontal. L'orientation de l'appareil n'est plus définie. On peut contourner le problème en s'interdisant de faire des photographies selon une stricte verticale. Plus ennuyeuse est la perte de continuité: si on passe la verticale, on va avoir un retournement de la photographie, particulièrement gênant en dessin animé.

On peut retrouver ces idées dans [Schweizer, 1987b].

Remarques: les perspectives de convention utilisées en dessin industriel (perspective cavalière, perspective cabinet) correspondent à une prise de vue à l'infini. Les photographies grand angle et toutes les photographies hémisphériques ne correspondent pas à une projection conique (la projection d'une droite n'est pas une droite).

### 0.4.3 La géométrie projective

La géométrie projective, introduite par Desargues (1591-1661), s'est développée au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle. On trouve dans [Samuel, 1986] une présentation générale du domaine, mais les livres plus anciens [Salmon, 1884, Salmon, 1892, Picquet, 1882, Duporcq, 1949], antérieurs aux développements algébriques récents sont plus faciles d'accès.

L'idée essentielle est de compléter la droite, le plan ou l'espace par un point, une droite ou un plan situé à l'infini. Considérons par exemple, la transformation point à point d'une droite ( $D$ ) sur une autre droite ( $D'$ ) au moyen d'un point  $P$  extérieur aux deux droites (Fig. 10). A tout point  $M$  de  $D$  on associe le point  $M'$  de  $D'$  intersection de la droite  $PM$  et de la droite  $D'$ . Le point  $M_i$  projection de  $P$  sur  $D$  parallèlement à  $D'$  n'a pas de transformé sur  $D'$ . De même, le point  $M'_j$  n'a pas d'antécédent. On est donc conduit, en géométrie classique, à prendre en compte ces cas particuliers qui vont alourdir d'autant tout calcul. Par contre, en complétant la droite par un point unique situé à l'infini, la transformation point à point est partout définie.

Deux droites non confondues du plan auront toujours un point et un seul en commun, le point d'intersection se trouvant sur la droite de l'infini si elles sont parallèles. La représentation d'un point dans l'espace projectif se fait généralement par utilisation de *coordonnées homogènes* (Fig. 11). Dans le plan par exemple un point  $P$  sera représenté par trois coordonnées  $(x, y, z)$  non simultanément nulles. Si  $z$  est non nul,  $P$  pourra être représenté dans le plan euclidien avec pour coordonnées  $(x/z, y/z)$ . Si  $z$  est nul  $P$

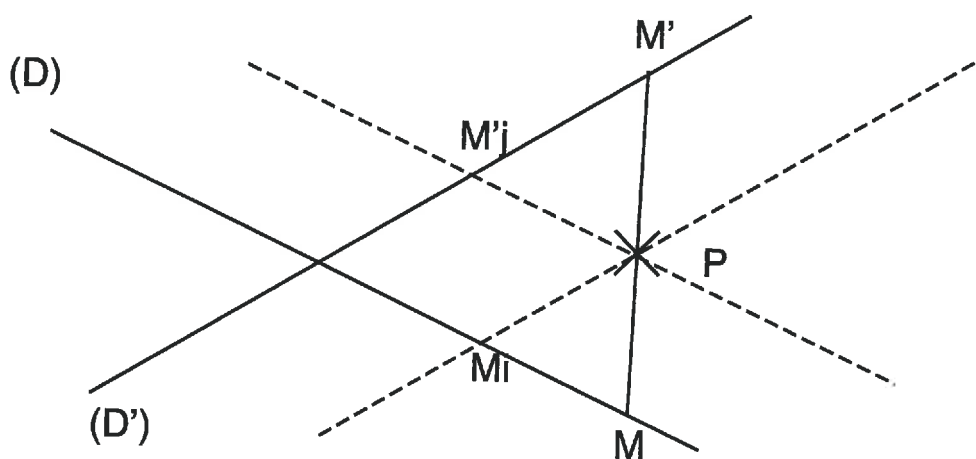


FIG. 10 – Transformation point à point d'une droite sur une autre. Sans la convention des points à l'infini le point  $M_i$  n'a pas de transformé; de même le point  $M'_j$  n'a pas d'antécédent.

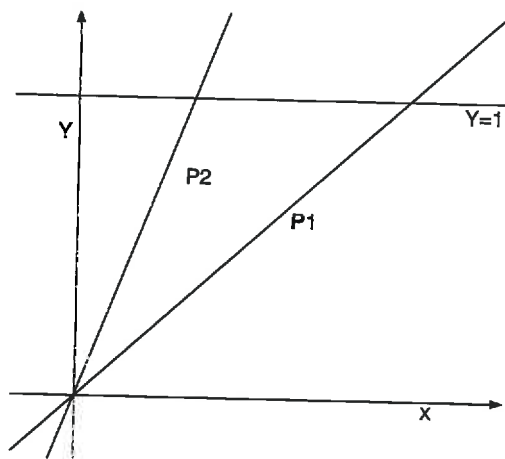


FIG. 11 – La droite projective. Chaque point de la droite projective est donné par une paire de coordonnées homogènes  $(x, y)$ . Il peut être assimilé à une droite du plan affine passant par l'origine. On peut se ramener à la droite euclidienne en fixant arbitrairement  $y$  à 1 mais le point à l'infini ( $x \neq 0, y = 0$ ) ne peut plus être représenté

se trouve sur la droite de l'infini, et dans la direction  $(x, y)$ . L'utilisation de la géométrie projective va permettre d'utiliser les nombreux résultats établis notamment par Monge, Poncelet, Steiner, Cayley... et rassemblés dans [Salmon, 1884, Salmon, 1892]. Il faut par contre bien comprendre le cadre dans lequel on se place : quand on applique le théorème "deux coniques non décomposées et distinctes ont toujours quatre points en commun", à l'intersection de deux cercles, on ne doit pas oublier que deux des solutions sont imaginaires à l'infini (les points cycliques) et que les deux autres sont soit imaginaires soit réelles et que dans ce dernier cas elles peuvent encore être confondues.

### Transformation homographique des figures planes

Toute transformation homographique plane fait correspondre à chaque point d'un plan  $P$  son homologue dans un plan  $P'$ . Elle se définit par une transformation linéaire sur les coordonnées homogènes :

$$\begin{aligned} X' &= a_1X + a_2Y + a_3Z \\ Y' &= b_1X + b_2Y + b_3Z \\ Z' &= c_1X + c_2Y + c_3Z \end{aligned} \quad (1)$$

Les propriétés de cette transformation sont très classiques [Milhaud et Pouget, 1931] :

- une transformation homographique conserve le degré d'une courbe. Les droites restent donc des droites après transformation,
- le rapport anharmonique (ou birapport) de quatre points alignés n'est pas modifié par transformation homographique. Par contre il n'y a pas, en général, conservation des relations de distances ; des distances finies peuvent même devenir infinies et inversement,
- deux courbes tangentes restent tangentes après transformation homographique,
- une transformation homographique est donnée par quatre couples homologues (à condition de ne pas avoir trois points alignés). La détermination des neuf coefficients de la transformation homographique se fait en trouvant une solution particulière à un système de huit équations.

La transformation homographique est souvent appelée transformation perspective. Elle permet en effet de rendre compte des transformations liées à un changement de point de vue pour une figure donnée.

### Le cas des coniques

Le degré d'une courbe n'est pas modifié par transformation homographique: une conique se transforme en conique.

On peut, d'une infinité de manières, faire correspondre deux coniques. Contrairement aux transformations affines, une ellipse peut se transformer en parabole ou en hyperbole. En effet, la distinction entre les trois types de coniques correspond à :

- l'hyperbole a deux intersections réelles et distinctes avec la droite de l'infini,
- la parabole est tangente à la droite de l'infini,
- l'ellipse a deux intersections imaginaires avec la droite de l'infini.

Comme les transformations homographiques peuvent déplacer la droite de l'infini, il y a possibilité, contrairement à la géométrie affine, de passer d'un type de conique à un autre. Dans la Fig. 12, on voit comment par transformation homographique, on peut transformer une parabole en ellipse. La droite de l'infini ne peut bien sûr être représentée avec la parabole, mais on la voit apparaître après transformation: c'est "la ligne d'horizon" qui est bien tangente à l'ellipse.

## 0.5 Plan de ce travail

Le travail présenté ici est divisé en cinq chapitres: il vont permettre successivement de présenter le modèle géométrique, pour un couvert de maïs, de le découper en éléments carreaux élémentaires, puis de calculer l'intersection d'un carreau avec une droite.

Le premier chapitre propose un modèle géométrique fin pour représenter un pied de maïs. La tige et les feuilles sont décrites en fonction d'un nombre limité de paramètres permettant de respecter la variabilité des tailles et des formes mesurées. Une reparamétrisation, puis la détermination des lois associées aux différents paramètres permettent ensuite de calculer une parcelle aléatoire dont les propriétés statistiques respectent les mesures faites *in situ*.

Le deuxième chapitre traite du découpage des courbes et des surfaces en éléments plus simples. Le découpage d'une surface en triangles pose le problème de Schwartz: la convergence en distance n'implique pas la convergence de l'aire et des normales. Il conduit souvent, si on veut une approximation fine des normales, à un nombre prohibitif de triangles. On propose alors le

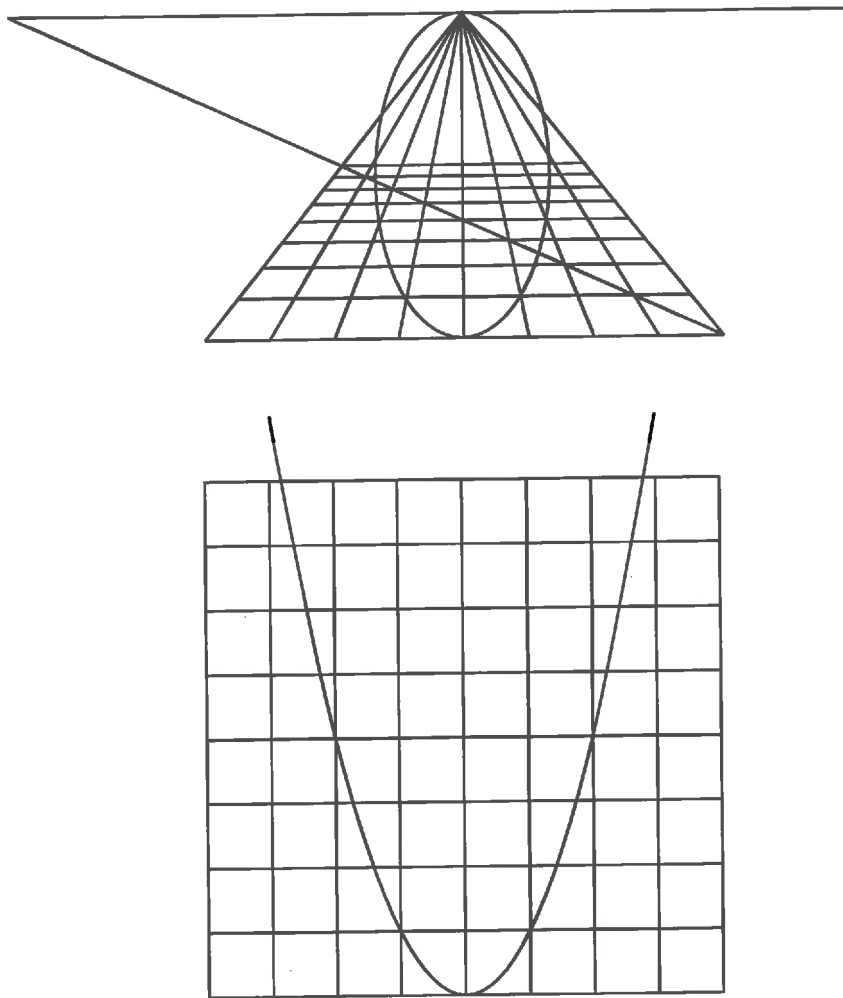


FIG. 12 - Transformation projective d'une parabole en ellipse.

découpage en carreaux paramétriques du second degré. Cette étape permet de transformer les surfaces paramétriques du modèle d'architecture de plante en éléments géométriques standards. Un algorithme de projection non biaisé des triangles sur une surface discrète est également proposé. Les problèmes de résolution des équations du quatrième degré sont évoqués. On propose également, dans un cas simplifié, l'estimation du gain théorique obtenu en lancer de rayons par découpage de l'espace.

Les chapitres trois et quatre traitent essentiellement des courbes et surfaces paramétriques rationnelles. Leur but est d'établir proprement les formules de calcul de l'intersection entre un carreau paramétrique rationnel et une droite. Une part importante est consacrée à la surface de Steiner et sa forme paramétrique associée qui correspond dans les bons cas, à la paramétrisation rationnelle du second degré. Ces chapitres contiennent deux projets d'article rédigés en collaboration avec Rachid Senoussi :

- la deuxième partie du troisième chapitre qui démontre la rationalité de la solution unique d'un système polynomial et propose un algorithme de calcul,
- la deuxième partie du quatrième chapitre établit les principales propriétés des formes paramétriques du second degré.

Le cinquième chapitre illustre les possibilités du modèle , précise les limites des méthodes proposées pour l'étude du rayonnement dans un couvert végétal et conclut l'ensemble de la thèse.

# Chapitre 1

## Le modèle maïs

*Dans ce chapitre nous essayons tout d'abord d'établir des représentations paramétriques simples pour chacun des éléments d'une plante, le maïs au stade adulte : distances inter-nodales, dimensions et forme de la feuille, forme dans l'espace de la nervure centrale de la feuille.*

*Dans un deuxième temps, ces lois sont ajustées sur un ensemble de données expérimentales. Nous étudions ensuite les distributions statistiques des paramètres obtenus. Ces deux premières parties ont été réalisées en collaboration avec Laurent Prévot (INRA bioclimatologie, Avignon) [Prévot et al., 1991], [Aries et al., 1993].*

*Enfin, ces distributions sont utilisées pour générer des maquettes informatiques de plantes isolées, puis de peuplements. La démarche employée assure la fidélité de la représentation. Ce travail a été fait en commun avec Marisa España [Aries et al., 1987], [España et al., 1995], [España et al., 1996a].*

### Le choix du maïs

La connaissance de la réponse radiative d'un couvert végétal est souhaitable pour toutes les plantes d'intérêt agronomique. Pour chaque plante, l'évolution de cette réponse tout au long de sa croissance est également souhaitable : il serait sûrement intéressant d'avoir un catalogue de ces comportements mais notre ambition se limite ici à l'étude d'une seule plante à un seul stade : le maïs adulte.

Ce choix présente pour nous deux intérêts principaux :

- le maïs a été étudiée de manière intensive au point de vue radiatif, tant en France qu'à l'étranger,



- son architecture permet de mesurer facilement sa structure tridimensionnelle. En effet, sa tige ne se ramifie en général pas et sa phylotaxie (l'angle azimutal séparant deux feuilles successives) est en moyenne de 180 degrés : le maïs se développe pratiquement dans un plan vertical.

Nous avons en fait un modèle architectural particulièrement simple : il n'est pas nécessaire dans notre cas de mettre en œuvre une méthode générale de description architecturale type L-système [Prusinkiewicz et Lindermayer, 1990]. La feuille de maïs a de plus une structure topologique très simple et qui s'organise le long d'une nervure centrale. La difficulté principale consiste à représenter fidèlement la géométrie de ces feuilles. Le modèle choisi est un modèle paramétrique surfacique de chaque organe.

## 1.1 Dispositif expérimental et mesures

Les données utilisées dans ce chapitre ont été acquises au cours d'une expérimentation conduite en 1983 sur le site de l'INRA d'Avignon-Montfavet. L'expérimentation s'est déroulée autour de la floraison femelle, survenue entre le 20 et le 25 juillet, de façon à obtenir une structure géométrique de la végétation suffisamment stable dans le temps, tout en conservant une variabilité de la forme des feuilles suffisante pour tester la souplesse des paramétrisations choisies.

La structure de la végétation est déterminée par la méthode des silhouettes [Bonhomme et Varlet-Grancher, 1978] : on prélève au hasard un certain nombre de plants dans la parcelle, chaque plant est photographié devant une mire quadrillée permettant la mise à l'échelle. Ces photographies sont ensuite numérisées, chaque feuille étant représentée par 8 à 30 points  $(x_i, y_i)$  situés sur sa nervure centrale (voir Fig. 1.1). Rappelons que cette méthode est rendue possible car, dans le cas du maïs, les feuilles d'un pied sont approximativement situées dans un même plan vertical.

Deux séries de mesures ont été réalisées, le 20 juillet (30 plantes) et le 9 août (26 plantes), pour lesquelles on ne prenait en compte que les feuilles non sénescentes. Parallèlement, on a mesuré la longueur et la plus grande largeur de chaque feuille. La surface de l'ensemble de feuilles prélevées le 20 juillet a été déterminée par planimétrie optique.

Par ailleurs, on a mesuré tous les 10 centimètres la largeur de 35 feuilles provenant de 6 plants prélevés le 13 juillet. Pour ce faire, chaque feuille était posée à plat sur une mire quadrillée.

Pour ajuster les paramètres des modèles longueur de feuille, largeur de feuilles et longueur des entrenœuds nous utilisons le modèle de régression

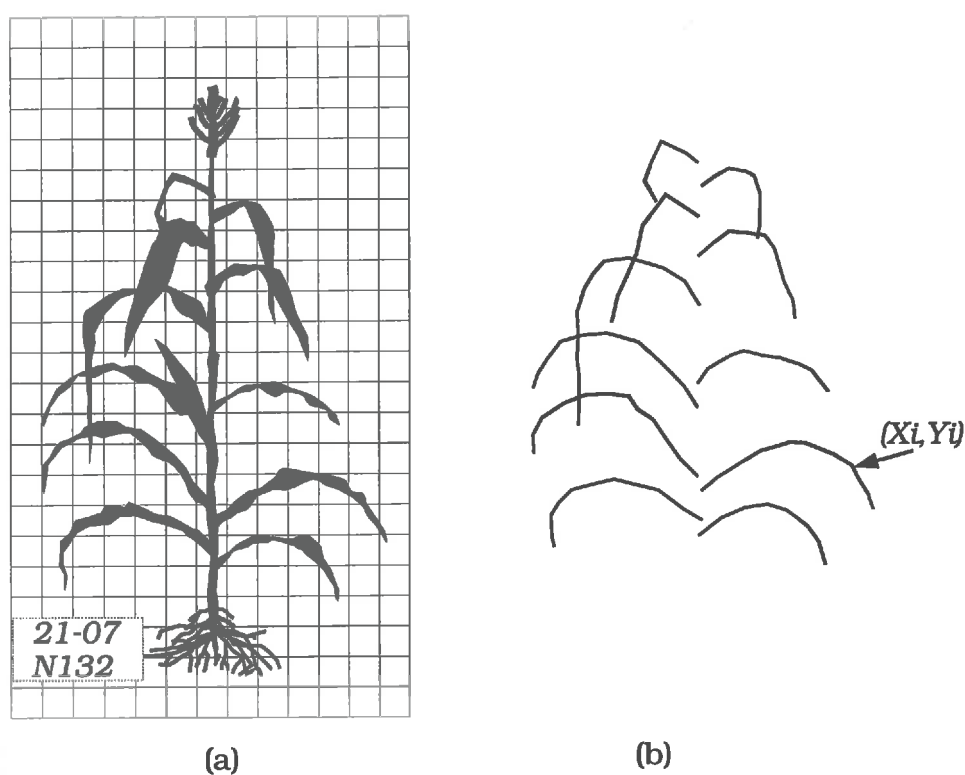


FIG. 1.1 – Méthode des silhouettes. Chaque plant est photographié devant une mire quadrillée (a). On numérise chaque feuille par une série de 8 à 30 points  $(x_i, y_i)$ , situés le long de sa nervure centrale (b).

classique :

$$Y_i = f_\theta(x_i) + \varepsilon_i$$

Pour le modèle nervure centrale, on considère que les mesures en  $x$  et en  $y$  sont entachées d'erreur.

$$Y_i = f_\theta(X_i) \text{ où } \begin{cases} X_i = x_i + \varepsilon_{i,1} \\ Y_i = y_i + \varepsilon_{i,2} \end{cases}$$

Les erreurs  $\varepsilon_i$  du premier cas et  $\varepsilon_{i,j}$  du second cas sont supposées être normales, indépendantes, de moyenne nulle et de même variance.

### 1.1.1 Le pied

Le pied est représenté par le nombre de feuilles et par les différences de hauteurs d'insertion entre deux feuilles successives. La méthode des silhouettes permet de déterminer ces deux caractéristiques. Signalons toutefois qu'il subsiste une certaine imprécision pour les

feuilles encore partiellement engagées : on assimile dans ce cas le point d'insertion de la feuille à l'endroit où celle-ci se sépare de la tige.

Pour tenir compte des différences de taille pouvant exister entre les différents pieds, les hauteurs sont ici rapportées à la hauteur du point d'insertion de la dernière feuille du pied. Dans la suite du texte, les hauteurs sont toujours adimensionnées de cette manière.

#### **Hauteur d'insertion des feuilles**

La distance entre les points d'insertion de deux feuilles successives croît jusqu'à une hauteur proche de celle de l'épi, puis décroît ensuite. On représente son évolution avec la hauteur par un polynôme du second degré :

$$\Delta y_{0i} = \alpha_1 y_{0i}^2 + \beta_1 y_{0i} + \gamma_1 \quad (1.1)$$

où  $y_{0i}$  est la hauteur du point d'insertion de la feuille de rang  $i$  et  $\Delta y_{0i}$  est la distance  $y_{0i} - y_{0i-1}$ .  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  et  $\gamma_1$  sont des coefficients ajustés par régression.

### 1.1.2 La feuille développée

La feuille développée, c'est-à-dire assimilée à une surface plane, est supposée être symétrique par rapport à sa nervure centrale, assimilée à une droite. Pour les graminées, il est classique de relier la largeur  $v$  de la feuille à la distance  $u$  à son point d'insertion par une relation polynomiale : [Sinoquet, 1988] par exemple, représente la largeur de feuilles de maïs totalement

dégainées par un polynôme du troisième degré. Nous avons choisi d'utiliser un polynôme du second degré car on s'intéresse ici à un ensemble de feuilles plus ou moins engainées et le gain en précision apporté par un polynôme de degré supérieur serait négligeable dans ce cas.

Ces relations sont en fait le plus souvent exprimées sous forme adimensionnelle: on effectue, pour chaque feuille, le changement de variables  $u^* = u/u_f$  et  $v^* = v/v_f$ , où  $u_f$  et  $v_f$  sont respectivement la longueur et la plus grande largeur de la feuille (voir Fig. 1.2). On modélise alors la largeur  $v^*$  à la distance  $u^*$  de son point d'insertion sous la forme :

$$v^*(u^*) = \alpha u^{*2} + \beta u^* + \gamma \quad (1.2)$$

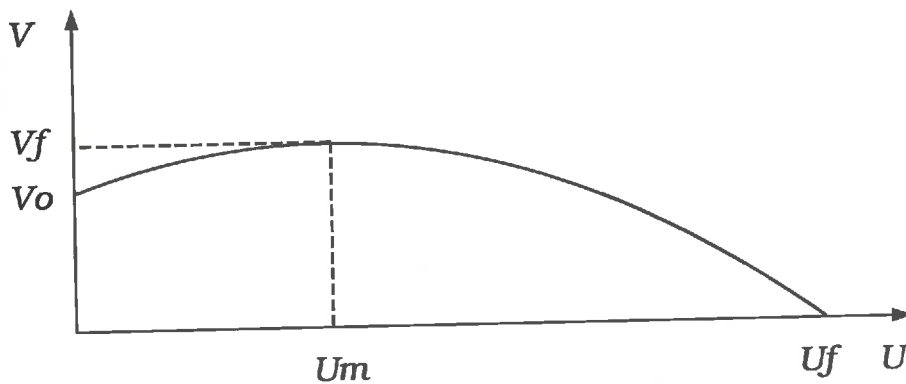


FIG. 1.2 - Forme de la feuille développée.  $u_f$  et  $v_f$  sont respectivement la longueur et la plus grande largeur de la feuille,  $v_0$  est la largeur de la feuille à sa base,  $u_m$  est l'abscisse correspondant à la plus grande largeur  $v_f$ .

A l'extrémité de la feuille, sa largeur étant nulle, on a :  $\alpha + \beta + \gamma = 0$

L'abscisse  $u_m^*$  correspondant à la plus grande largeur  $v_f$  est soit le point correspondant à l'annulation de la dérivée de (1.2), soit l'origine  $u_m^* = 0$ .

- Dans le premier cas, on a :  $v_m^* = \gamma - \beta^2/(4\alpha) = 1$ , et les coefficients du polynôme (1.2) deviennent :  $\beta = -2(\alpha + \sqrt{-\alpha})$  et  $\gamma = 2\sqrt{-\alpha} + \alpha$ . La largeur à l'origine  $v_0^* = \gamma$  étant comprise entre 0 et 1,  $\alpha$  est compris entre -4 et -1.
- Dans le deuxième cas, la largeur à l'origine  $v_0^*$  étant égale à 1, les coefficients du polynôme (1.2) sont :  $\beta = -(1 + \alpha)$  et  $\gamma = 1$ . Ce dernier

cas n'existe que si la dérivée de (1.2) ne s'annule pas pour  $u^*$  compris entre 0 et 1, soit pour  $\alpha$  compris entre -1 et 1.

La prise en compte de ces différentes contraintes permet de réduire le nombre de paramètres de trois à un. La forme de la feuille peut ainsi être représentée par le seul paramètre  $\alpha$  et la Fig. 1.3 présente les différentes formes qu'on peut alors obtenir. Les faibles valeurs de  $\alpha$  (inférieures à -1,5) correspondent à des feuilles dégainées, alors que des valeurs plus élevées correspondent à des feuilles encore partiellement engainées.

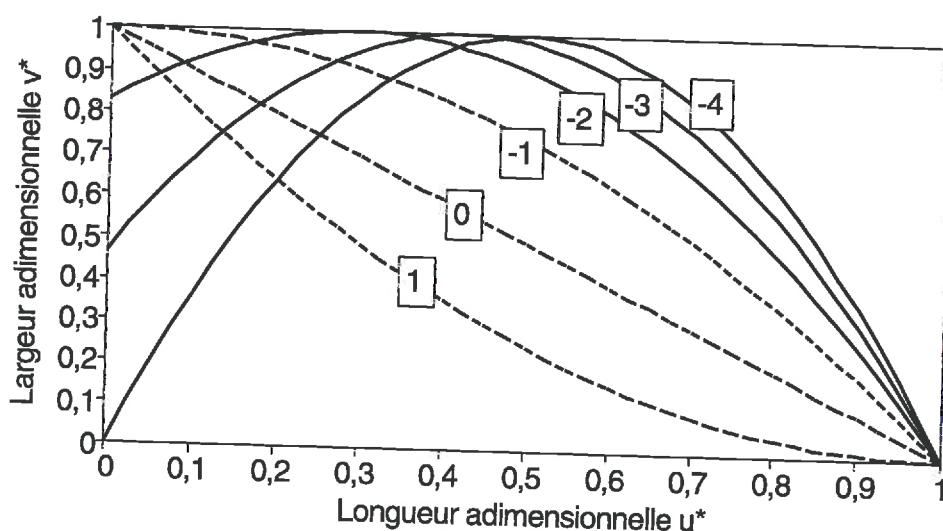


FIG. 1.3 - **Modèle de forme de la feuille développée.** Le modèle permet de définir différentes formes de la feuille développée, selon la valeur du paramètre  $\alpha$  (la représentation est faite en coordonnées adimensionnelles  $u^* = u/u_f$  et  $v^* = v/v_f$ ).

Le paramètre  $\alpha$  est ajusté pour chaque feuille par minimisation de la somme des carrés des écarts entre modèle et mesures :

$$\min \sum_{i=1 \dots n} [\bar{v}^*(u_i^*) - v_i^*]^2$$

où  $v_i^*$  est la largeur adimensionnelle mesurée au point d'abscisse  $u_i^*$ , et  $\bar{v}^*(u_i^*)$  est donné par le modèle (1.2).

### 1.1.3 La nervure centrale

#### Modèle choisi

Peu d'auteurs se sont consacrés à la modélisation de la forme de la nervure centrale de graminées. [Baret, 1986] représente la forme de feuilles de blé par deux paraboles, l'une pour leur partie ascendante, l'autre pour leur partie descendante. Cette formulation ne permet toutefois pas de prendre en compte les rebroussements observés sur certaines feuilles de maïs fortement recourbées ou cassées.

Nous avons choisi de représenter la nervure centrale par des formes relativement simples, des arcs de coniques, de façon à minimiser le nombre de paramètres.

- La nervure est supposée être comprise dans un plan vertical, ce qui est assez bien respecté dans le cas du maïs.
- Sa partie ascendante est assimilée à un arc de parabole à axe de symétrie vertical.
- Sa partie descendante, lorsqu'elle existe, est assimilée à un arc d'ellipse dont l'un des axes est horizontal et l'autre vertical.
- On suppose également que l'arc elliptique est inférieur à une demi-ellipse et qu'il est situé sous sa tangente au point de raccordement.
- Le modèle est défini en plaçant l'origine du repère au point d'insertion de la feuille  $(x_0, y_0)$  (voir Fig. 1.4).
- L'équation de l'arc de parabole est :

$$y = ax^2 + bx \quad (1.3)$$

avec  $0 \leq x \leq x_m$

où  $x_m$  est l'abscisse du point le plus haut de la feuille.

- L'équation de l'arc d'ellipse est, sous sa forme paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= x_c + d \cos \phi \\ y &= y_c + e \sin \phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec  $\phi_m \leq \phi \leq \phi_f$

où  $(x_c, y_c)$  est le centre de l'ellipse,  $d$  et  $e$  sont les longueurs de ses demi-axes horizontal et vertical,  $\phi_m$  et  $\phi_f$  sont les angles paramétriques correspondant aux deux extrémités de l'arc.

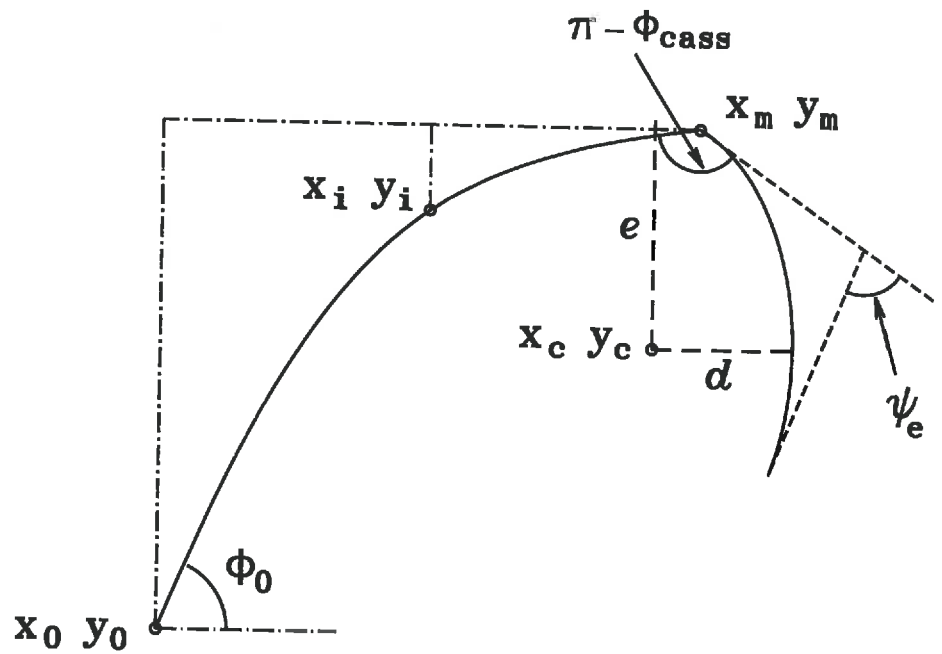


FIG. 1.4 – Modèle de forme de la nervure centrale. La partie ascendante de la feuille, comprise entre le point d'insertion sur la tige  $(x_0, y_0)$  et le point d'ordonnée maximale  $(x_m, y_m)$  est représentée par un arc de parabole. Sa partie descendante, comprise entre le point  $(x_m, y_m)$  et son extrémité distale est représentée par un arc d'ellipse de centre  $(x_c, y_c)$



- Le raccordement des deux modèles est situé au point le plus haut de la feuille  $(x_m, y_m)$ , où l'on impose la contrainte de continuité :

$$\begin{aligned} x_m &= x_c + d \cos \phi_m \\ a x_m^2 + b x_m &= y_c + e \sin \phi_m \end{aligned}$$

Par contre, on n'impose pas de contrainte sur la dérivée au point de raccordement  $(x_m, y_m)$ , un certain nombre de feuilles étant cassées à cet endroit.

- Le modèle comporte ainsi 9 paramètres qui, outre la position du point d'insertion  $(x_0, y_0)$ , se décomposent en :
  - 3 paramètres pour la partie ascendante de la feuille :  $a$ ,  $b$  et  $x_m$  par exemple ;
  - 6 paramètres pour la partie descendante de la feuille :  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $\phi_m$  et  $\phi_f$  par exemple ;
  - La condition de continuité réduit le nombre total de paramètres de 9 à 7.

### Ajustement du modèle

Pour chacun des deux sous-modèles, arc de parabole et arc d'ellipse, le critère de minimisation utilisé pour l'ajustement est la distance entre les arcs de chaque conique et le nuage des  $n$  points expérimentaux  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1 \dots n$ , obtenus par la méthode des silhouettes. La distance verticale (selon l'axe des  $y$ ), classiquement utilisée comme critère de minimisation, ne peut être employée ici car elle n'est pas adaptée au cas des paraboles proches de la verticale et est inutilisable dans le cas de l'ellipse, qui n'est pas définie comme une fonction  $y = f(x)$ .

Soit  $\mathcal{P}_\Theta$  l'arc de parabole et  $\mathcal{E}_\Theta$  l'arc d'ellipse,  $\Theta$  étant le vecteur des paramètres  $[\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_7]$ , le critère de minimisation utilisé est :

$$\min \left[ \sum_{i=1}^{i_{max}} D^2(\mathcal{P}_\Theta, (x_i, y_i)) + \sum_{i=i_{max}+1}^n D^2(\mathcal{E}_\Theta, (x_i, y_i)) \right] \quad (1.5)$$

où  $D^2(\mathcal{A}_\Theta, (x_i, y_i))$  est la distance entre l'arc de conique  $\mathcal{A}_\Theta$  et le point observé  $(x_i, y_i)$ ,  $i_{max}$  est le rang du point mesuré d'ordonnée maximale  $(x_m, y_m)$ ,  $n$  est le nombre de points observés.

Si l'arc  $\mathcal{A}_\Theta$  est continu et peut s'écrire sous la forme paramétrique  $x = f_{\mathcal{A}}(t)$ ,  $y = g_{\mathcal{A}}(t)$ , avec  $t_{min} \leq t \leq t_{max}$ , le point  $\bar{P}(t)$  de l'arc le plus proche

du point observé  $(x_i, y_i)$  est soit le point correspondant à  $t_{min}$ , soit le point correspondant à  $t_{max}$ , soit le point correspondant à  $t$  solution de :

$$\frac{\partial((f_A(t) - x_i)^2 + (g_A(t) - y_i)^2)}{\partial t} = 0 \quad (1.6)$$

Dans la pratique, la résolution de (1.6) se ramène à trouver les racines d'un polynôme du troisième degré pour l'arc de parabole, du quatrième degré pour l'arc d'ellipse. On résout l'équation (1.6) dans l'intervalle  $[t_{min}, t_{max}]$  et l'on vérifie que les solutions correspondant aux bornes  $t_{min}$  et  $t_{max}$  de l'arc ne sont pas plus proches.

La minimisation du critère (1.5) est un problème non-linéaire que l'on résout par la méthode de [Marquard, 1963].

### Reparamétrisation du modèle

La première paramétrisation du modèle de nervure centrale est peu adaptée à l'étude des distributions de ses paramètres. En effet, certains d'entre eux ( $a, b, x_c, y_c, d$  et  $e$ ) peuvent tendre vers l'infini en valeur absolue pour des arcs de parabole quasi-verticaux ou des arcs d'ellipse quasi-rectilignes. Des valeurs très grandes, positives ou négatives, pourront ainsi indifféremment être choisies pour approcher des courbes semblables et il est impossible d'estimer ne serait-ce qu'une espérance pour chaque paramètre. Nous avons donc reparamétrisé le modèle en utilisant des grandeurs dérivées de sa première définition, mais choisies de telle sorte qu'elles soient finies et correspondent à des paramètres plus facilement interprétables (voir Fig. 1.4). Ces paramètres sont :

**La longueur de la feuille  $v_f$**

**L'angle d'insertion de la feuille  $\Phi_0$**  : il est défini comme l'angle d'inclinaison de la feuille à son point d'insertion.

**La courbure de la parabole  $C_p$**  : elle est définie par le paramètre  $C_p = y_m/y_i$ , où  $y_m$  est la hauteur du point le plus haut de la feuille (raccordement des deux modèles) et  $y_i = a x_i^2 + b x_i$ , avec  $x_i = x_m/2$ . La valeur  $C_p = 2$  correspond par définition à une droite. L'arc de parabole étant strictement ascendant, la courbure  $C_p$  a pour limite inférieure la valeur  $4/3$ , correspondant à une feuille horizontale au niveau du point de raccordement, et pour limite supérieure la valeur 4, correspondant à une feuille horizontale au niveau du point d'insertion.

**La position du point de raccordement des deux modèles  $P_{cass}$**  : on caractérise la position sur la nervure du point de raccordement  $(x_m, y_m)$  par le paramètre  $P_{cass}$ , égal au rapport de la longueur de l'arc de parabole

à la longueur totale  $v_f$  de la feuille. Il s'agit donc d'une abscisse curviligne adimensionnelle : une feuille entièrement ascendante correspond à  $P_{cass} = 1$ , une feuille entièrement descendante correspond à  $P_{cass} = 0$ .

**L'angle de cassure de la feuille  $\Phi_{cass}$**  : le point de raccordement  $(x_m, y_m)$  peut correspondre à une cassure de la feuille, puisque l'on n'impose pas de condition de continuité de la dérivée du modèle en ce point. L'angle de cassure  $\Phi_{cass}$  est défini comme le complément à  $\pi$  de la différence entre les pentes de la parabole et de l'ellipse, au point de raccordement : les feuilles non cassées sont caractérisées par  $\Phi_{cass} = 0$ .

**L'allongement de l'ellipse  $\mathcal{E}$**  : on le caractérise par le paramètre  $\mathcal{E}$  défini par :

$$\mathcal{E} = \begin{cases} +(d^2 - e^2)/d^2 & \text{pour } d \geq e \\ -(e^2 - d^2)/e^2 & \text{pour } d < e \end{cases}$$

où  $d$  et  $e$  sont respectivement les longueurs des demi-axes horizontal et vertical de l'ellipse. Il s'agit donc du carré de l'excentricité de l'ellipse, affecté d'un signe différenciant les ellipses à allongement vertical ( $\mathcal{E} < 0$ ) des ellipses à allongement horizontal ( $\mathcal{E} > 0$ ).

**La courbure angulaire de l'ellipse  $\Psi_e$**  : elle est définie comme la différence angulaire entre les pentes des deux extrémités de l'ellipse. Les ellipses quasiment rectilignes sont caractérisées par de faibles valeurs de  $\Psi_e$  et les ellipses très recourbées par de fortes valeurs de  $\Psi_e$ . Cette définition est indépendante de la longueur de l'arc d'ellipse.

Cette paramétrisation est équivalente à celle définie par les 7 paramètres des équations (1.3) et (1.4) mais ne pose pas les mêmes problèmes puisque les nouveaux paramètres sont par définition des grandeurs finies.

#### 1.1.4 Coupe transversale de la feuille : le gaufrage

La feuille de maïs est caractérisée par des ondulations quasi-périodiques et dissymétriques de son bord. Elles induisent ce que nous appellerons le gaufrage.

Ce gaufrage n'a pas donné lieu à des mesures spécifiques mais on peut cependant, à partir de photographies, avoir une estimation de son amplitude et de sa période. Il nous a paru important de l'introduire dans le modèle, de manière à quantifier son effet sur les différents types de simulations.

On considère le plan  $(f, g)_u$  perpendiculaire à la nervure centrale en  $u$ . On prend dans ce plan un repère orthonormé dont l'origine  $O$  correspond au point  $u$  de la nervure centrale. L'intersection entre ce plan et le plan osculateur de la nervure définit l'axe  $g$ . L'axe  $f$  est horizontal.

Le modèle retenu est constitué de deux arcs de cercles, un pour représenter la partie gauche de la feuille, l'autre pour la partie droite. Ces cercles sont tangents à l'axe  $f$  au point  $O$  (les centres des cercles sont situés sur l'axe  $g$ ). La longueur de chaque arc est donnée par  $l(u)$  fonction largeur de la demi-feuille définie précédemment. La dernière condition pour fixer les arcs de cercles est donnée par les angles  $\alpha_g(u)$  et  $\alpha_d(u)$  que font les extrémités gauche et droite de la feuille avec l'axe  $g$ . Ces conditions nous permettent d'obtenir les équations:

$$f(u, v) = \frac{l(u) \sin(\alpha(u)v)}{\alpha(u)}; g(u, v) = \frac{l(u)(-\cos(\alpha(u)v) + 1)}{\alpha(u)}$$

où  $\alpha(u) = \alpha_g(u)$  si  $v < 0$  ou  $\alpha_d(u)$  sinon.

**Les fonctions  $\alpha(u)$**  Pour les représenter nous avons choisi une fonction périodique par rapport à l'intégrale curviligne de la feuille. L'observation nous a amené à prendre une cycloïde raccourcie dont :

- un des maxima se trouve au point d'insertion,
- les minima valent 0,
- un des minima se trouve au point maximum de la feuille.

En d'autres termes, la feuille présente une courbure maximum dirigée vers le haut à son point d'insertion, elle est plate dans sa partie supérieur, ce qui nous évite un problème de raccordement en cas de feuille cassée et ne présente pas de courbure dirigée vers le bas.

## 1.2 Résultats et discussion

### 1.2.1 Analyses des paramètres obtenus

#### Le pied

**Nombre de feuilles par pied.** Rappelons que seules les feuilles visibles et non sénescentes sont prises en compte. Le nombre de feuilles par plant varie entre 8 et 12 pour le 20 juillet (moyenne : 9,9) et entre 7 et 10 pour le 9 août (moyenne : 8,7). Entre ces deux dates, un certain nombre de feuilles ont en effet été cassées à leur base par le vent. Celles-ci ne sont donc plus prises en compte.

**Hauteur d'insertion des feuilles.** La Fig. 1.5 présente l'évolution de la distance entre les points d'insertion de deux feuilles successives, ainsi que le modèle d'équation (1.1) ajusté sur ces données. Les coefficients obtenus par régression sont donnés dans le tableau 1.1.

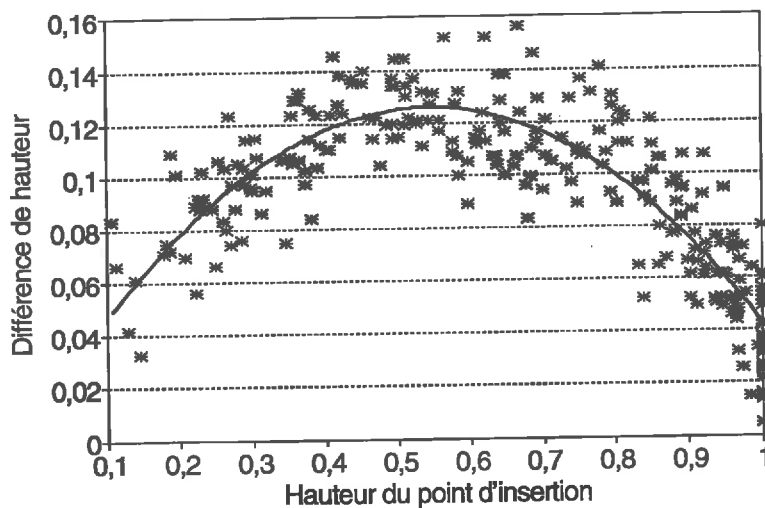


FIG. 1.5 - Évolution de la distance entre les points d'insertion de deux feuilles successives. On représente la différence de hauteurs entre les points d'insertion de deux feuilles successives d'un même plant, en fonction de la hauteur du point d'insertion, adimensionnée par la hauteur du point d'insertion de la dernière feuille du plant.

### La feuille développée

**Dimensions de la feuille.** La Fig. 1.6 présente la relation existant entre la largeur maximale  $v_f$  d'une feuille et sa longueur  $u_f$ , pour l'ensemble des feuilles étudiées. On représente cette relation sous la forme linéaire :

$$v_f = \alpha_2 u_f + \beta_2 \quad (1.7)$$

La méthode des silhouettes conduit à estimer la largeur des feuilles connaissant leur longueur, aussi on utilise une régression par les moindres carrés pour estimer les coefficients de cette relation. Elle est ajustée sur

| coeff.     | moyenne | écart-type |
|------------|---------|------------|
| $\alpha_1$ | -0,40   | 0,02       |
| $\beta_1$  | 0,44    | 0,02       |
| $\gamma_1$ | 0,07    | 0,02       |
| $R^2$      | 0,755   | ddl = 260  |

TAB. 1.1 – Coefficients de l'équation (1.1) obtenus par régression.

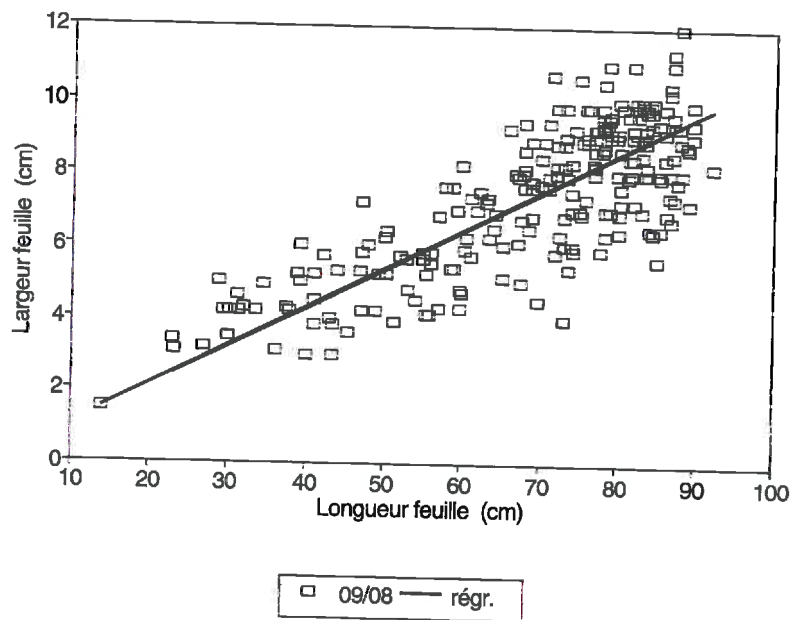


FIG. 1.6 – Relation entre la longueur et la largeur des feuilles. On représente la relation linéaire existant entre la longueur  $u_f$  et la plus grande largeur  $v_f$  des feuilles.

l'ensemble des feuilles du 9 août et les coefficients sont donnés dans le tableau 1.2. L'ordonnée à l'origine  $\beta_2$  n'étant pas significativement différente de 0, on calcule le coefficient  $\alpha_2$  en imposant une origine nulle (voir le tableau 1.2).

| coeff.     | Origine $\beta_2$ calculé |            | Origine $\beta_2 = 0$ |            |
|------------|---------------------------|------------|-----------------------|------------|
|            | moyenne                   | écart-type | moyenne               | écart-type |
| $\alpha_2$ | 0,098                     | 0,005      | 0,106                 | 0,001      |
| $\beta_2$  | 0,62                      | 1,26       | —                     | —          |
| $R^2$      | 0,630                     | ddl = 234  | 0,625                 | ddl = 233  |

TAB. 1.2 – Coefficients de l'équation (1.7) obtenus par régression.

La Fig. 1.7 donne l'évolution de la longueur  $u_f$  de la feuille en fonction de la hauteur de son point d'insertion  $y_0$ . La longueur croît jusqu'à une hauteur proche de celle de l'épi, puis décroît ensuite. On représente cette évolution sous la forme parabolique :

$$u_f = \alpha_3 y_0^2 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 \quad (1.8)$$

Les coefficients obtenus par régression sont donnés dans le tableau 1.3.

| coeff.     | 20 / 07 |            | 09 / 08 |            |
|------------|---------|------------|---------|------------|
|            | moyenne | écart-type | moyenne | écart-type |
| $\alpha_3$ | -180,5  | 7,0        | -214,9  | 6,5        |
| $\beta_3$  | 218,0   | 8,3        | 230,8   | 7,8        |
| $\gamma_3$ | 19,5    | 8,5        | 24,1    | 6,5        |
| $R^2$      | 0,698   | ddl = 297  | 0,850   | ddl = 232  |

TAB. 1.3 – Coefficients de l'équation (1.8) obtenus par régression.

**Forme de la feuille.** Le modèle de forme développée de la feuille donné par l'équation (1.2) a été ajusté sur chacune des 35 feuilles prélevées le 13 juillet et on trouvera en Fig. 1.8 trois exemples de comparaison des largeurs de feuilles estimées par le modèle et mesurées. L'écart-type résiduel des largeurs est de 0,4 cm, pour 278 observations.

La Fig. 1.9 donne la répartition des paramètres  $\alpha$  ainsi obtenus. Le paramètre  $\alpha$  varie entre -2,8 pour les feuilles les plus dégainées et -0,9 pour les plus engainées.



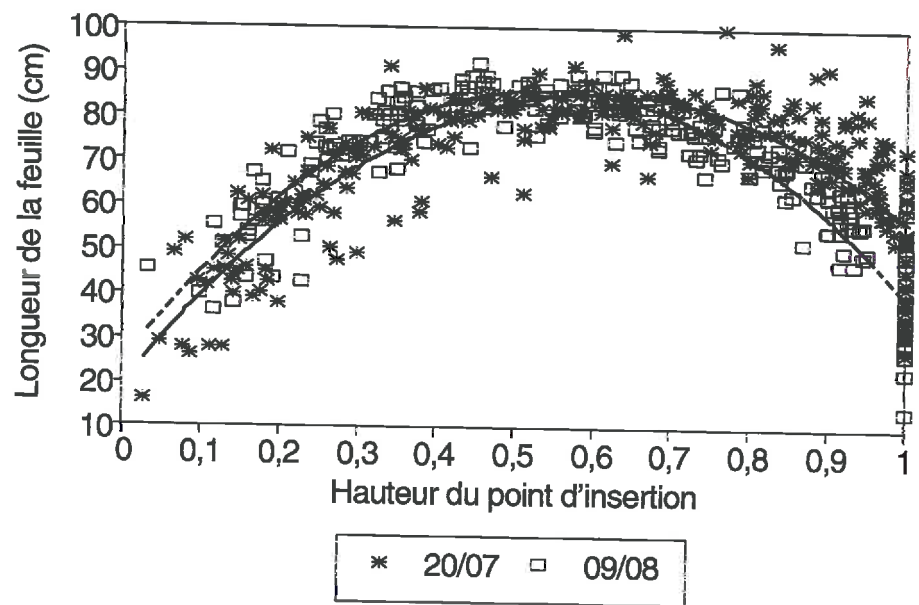


FIG. 1.7 – La hauteur du point d'insertion est adimensionnée par la hauteur du point d'insertion de la dernière feuille du plant. \* : feuilles du 20/07; □ : feuilles du 09/08; - - - : modèle pour le 20/07; — : modèle pour le 09/08.

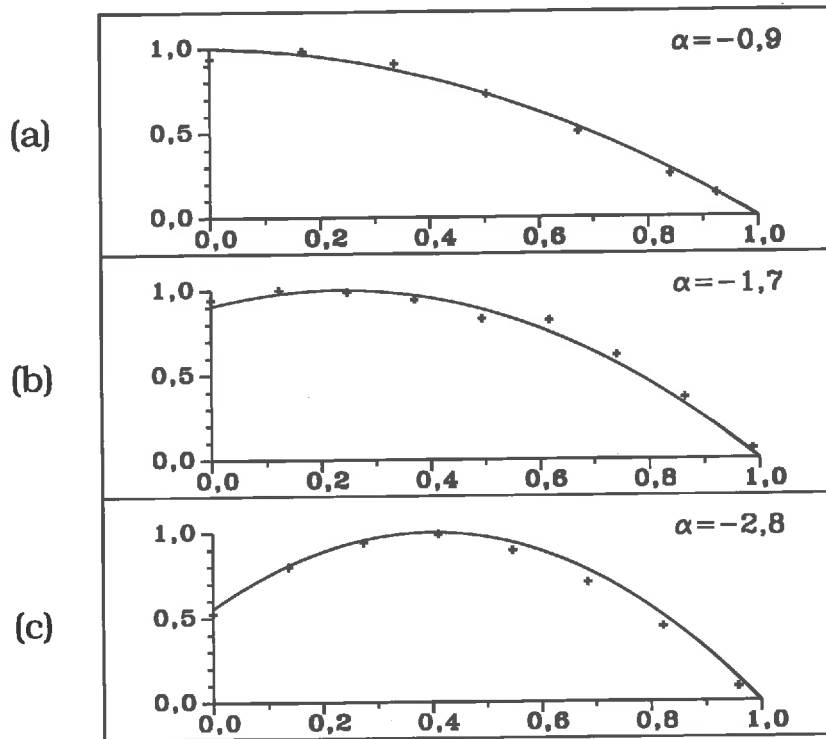


FIG. 1.8 - Ajustement du paramètre de forme  $\alpha$ . Exemples d'ajustement du modèle de largeur de feuille. En abscisses : distance adimensionnelle au point d'insertion  $u^*$ , en ordonnées : largeur adimensionnelle  $v^*$ . (a)  $\alpha = -0.9$  : feuille engainée; (b)  $\alpha = -1.7$  : feuille partiellement dégainée; (c)  $\alpha = -2.8$  : feuille totalement dégainée; + : largeurs observées; — : modèle.

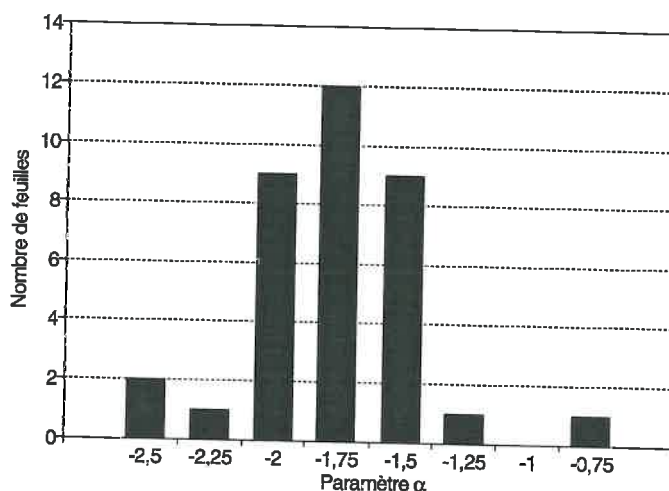


FIG. 1.9 – **Distribution du paramètre de forme  $\alpha$ .** *Nombre de feuilles ayant une forme développée définie par une valeur donnée du paramètre  $\alpha$  sur 35 feuilles prélevées le 13/07).*

### La nervure centrale

**Ajustement du modèle.** Le modèle de forme de la nervure centrale défini par les équations (1.3) et (1.4) a été ajusté sur chacune des 533 feuilles disponibles (20 juillet et 9 août). La comparaison entre les courbes ajustées et les données de départ permet de s'assurer de la très bonne adéquation du modèle dans la plupart des cas. Seule une vingtaine de feuilles s'écartent sensiblement du modèle : il s'agit soit de feuilles rabattues ou cassées par le vent, soit de feuilles ayant une partie verticale de type hyperbolique, pour lesquelles l'approximation par un segment de parabole n'est pas tout à fait adéquate, sans toutefois beaucoup s'éloigner des points expérimentaux.

La Fig. 1.10 donne quelques exemples de plants de maïs sur lesquels le modèle a été ajusté. On notera sa capacité à décrire des formes de nervures très variées, malgré le nombre relativement limité de ses paramètres. L'écart-type résiduel calculé pour chaque feuille varie entre 0 et 3,5 cm, sa valeur moyenne est de 0,5 cm.

La comparaison des longueurs de feuilles calculées par le modèle et déduites des silhouettes numérisées s'avère elle aussi excellente : la moyenne des résidus longueur observée – longueur estimée est de 8 mm

(écart-type de 8 mm) pour une longueur moyenne de 66 cm.

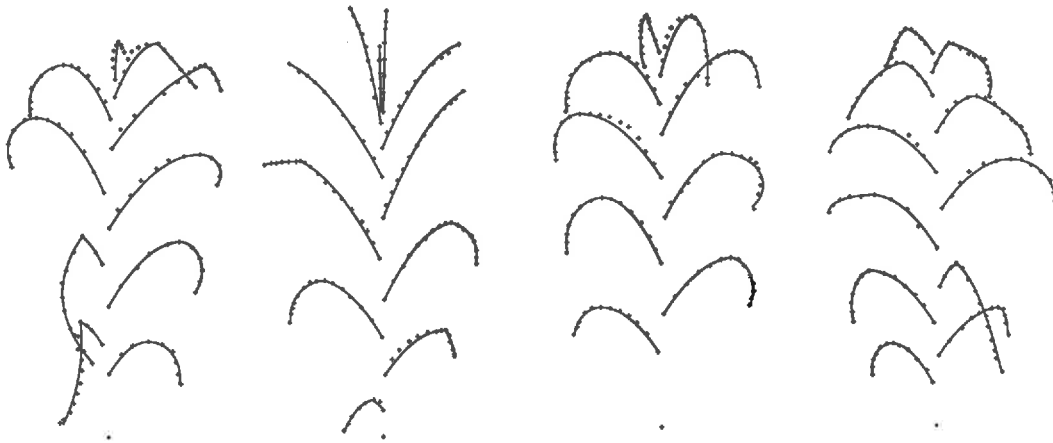


FIG. 1.10 – **Ajustement du modèle de nervure centrale.** *Quatre exemples de plants sur les feuilles desquels le modèle de nervure centrale a été ajusté. + : points  $(x_i, y_i)$  observés ; — : modèle de nervure centrale.*

**Analyse des paramètres obtenus par ajustement.** Deux de ces paramètres, la longueur de la feuille  $v_f$  et la hauteur de son point d'insertion  $y_0$  ont déjà été discutés précédemment.

**Abscisse du point d'insertion  $x_0$  :** dans la partie inférieure de la végétation, les variations de  $x_0$  sont de l'ordre de l'épaisseur des tiges (quelques centimètres). Au sommet du couvert, la variabilité de  $x_0$  augmente légèrement, avec la courbure de certaines tiges.

**Angle d'insertion des feuilles  $\Phi_0$  :** la Fig. 1.11 (a) donne la répartition de l'angle d'inclinaison des feuilles à leur point d'insertion (angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale). Une grande majorité de feuilles (80%) ont un angle d'insertion compris entre 45 et 75 degrés. A la date du 20 juillet, on note une légère corrélation positive entre l'angle d'insertion  $\Phi_0$  et la hauteur du point d'insertion  $y_0$ . Cette relation disparaît le 9 août.

**Courbure de la parabole :** sur la Fig. 1.11 (b), on constate que près des deux tiers des feuilles sont horizontales au niveau de leur point le plus élevé (courbure  $C_p$  proche de  $4/3$ ). Environ un tiers des feuilles, surtout situées

dans le haut du couvert, s'en éloignent tout en gardant une concavité dirigée vers le bas ( $4/3 < C_p < 2$ ). Seule une minorité de feuilles (7,5%) présentent une concavité dirigée vers le haut ( $2 < C_p < 4$ ).

**Raccordement des modèles :** on constate sur la Fig. 1.11 (c) donnant la répartition du paramètre  $P_{cass}$  qu'il est compris entre 0,45 et 0,70 pour

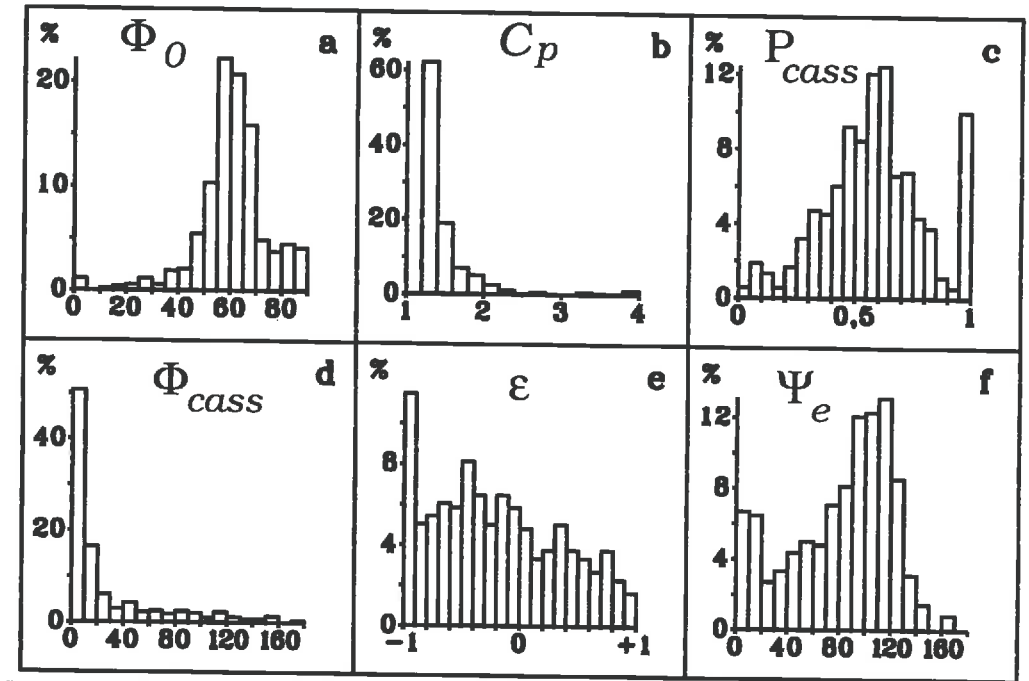


FIG. 1.11 – Distributions des paramètres de forme de la nervure centrale, exprimées en pourcentage du nombre total de feuilles (a, b et c) ou du nombre de feuilles représentées par un arc de parabole et un arc d'ellipse (d, e, et f). (a) : distribution de l'angle d'insertion  $\Phi_0$ ; (b) : distribution du paramètre de courbure des arcs de parabole  $C_p$ ; (c) : distribution du point de changement de modèle  $P_{cass}$ ; (d) : distribution de l'angle de cassure  $\Phi_{cass}$ ; (e) : distribution de l'allongement des arcs d'ellipse  $\varepsilon$ ; (f) : distribution de la courbure angulaire des arcs d'ellipse  $\Psi_e$ .

plus de la moitié des feuilles. Le point de raccordement se rapproche du point d'insertion entre le 20 juillet ( $0,49 < P_{cass} < 0,75$  pour 50% des feuilles) et le 9 août ( $0,40 < P_{cass} < 0,65$  pour 50% des feuilles).

**La proportion de feuilles exclusivement ascendantes**, représentées par  $P_{cass} = 1$ , décroît entre le 20 juillet où elle vaut 0,13 et le 9 août où elle vaut 0,06 (la différence est significative au seuil de 1%). A la date du 20 juillet, ces feuilles sont surtout situées dans la partie haute de la végétation: les moyennes des hauteurs adimensionnelles des points d'insertion  $y_0$  de ces feuilles est de 0,80 contre 0,58 pour les autres feuilles (la différence est significative au seuil de 1‰). A la date du 9 août, cette différence n'est pas significative: 0,68 contre 0,61, mais le nombre de feuilles exclusivement ascendantes est très réduit (14).

**Angle de cassure  $\Phi_{cass}$** : la Fig. 1.11 (d) présente la répartition de l'angle de cassure  $\Phi_{cass}$ . Plus de la moitié des feuilles ne sont pas cassées ( $\Phi_{cass} < 10$ ) et un quart des feuilles ne sont que faiblement cassées ( $10 < \Phi_{cass} < 35$ ).

**Allongement de l'ellipse**: la Fig. 1.11 (e) présente la répartition du paramètre d'allongement  $\mathcal{E}$ . Les deux tiers des ellipses ont un allongement marqué ( $|\mathcal{E}| > 0,4$ ) et les ellipses à allongement vertical ( $\mathcal{E} < 0$ ) sont les plus nombreuses (60%). Ces deux caractéristiques s'accroissent du 20 juillet au 9 août.

**Courbure angulaire de l'ellipse  $\Psi_e$** : sur la Fig. 1.11 (f) qui donne la répartition des courbures  $\Psi_e$ , se distinguent deux familles de feuilles: des feuilles à faible courbure ( $\Psi_e < 30$ ) et des feuilles à courbure relativement forte ( $\Psi_e > 30$ ). Une analyse plus détaillée montre que si les deux types de feuilles se rencontrent dans l'ensemble du couvert végétal, on trouve plus d'ellipses quasi-rectilignes ( $\Psi_e < 25$ ) au sommet de la végétation, correspondant à des feuilles jeunes. Les feuilles pleinement développées ont des courbures comprises entre 80 et 130.

### 1.2.2 Application à l'estimation de la fonction de distribution des angles foliaires

La fonction de distribution des angles foliaires – répartition de la surface foliaire par classes d'inclinaison des feuilles – est un paramètre important pour décrire les échanges radiatifs au sein des couverts végétaux. Elle peut être calculée à partir de la méthode des silhouettes, qui a été conçue dans ce but [Bonhomme et Varlet-Grancher, 1978]: pour ce faire, il faut d'une part disposer d'une estimation de la surface foliaire et d'autre part connaître la répartition des angles des feuilles.

### Estimation de la surface foliaire

Il est classique d'utiliser des relations statistiques entre la surface d'une feuille et ses dimensions linéaires pour estimer l'indice foliaire d'un couvert végétal (voir par ex. [Daughtry and Hollinger, 1984]). Ces relations supposent, implicitement ou explicitement, l'existence d'un modèle de forme de la feuille tel que celui décrit par l'équation (1.2).

Connaissant les dimensions  $u_f$  et  $v_f$  de chaque feuille, ainsi que leur forme, donnée par le paramètre  $\alpha$ , on peut calculer leur surface  $S$  par :

$$S = S^*(\alpha) u_f v_f \quad (1.9)$$

où  $S^*(\alpha)$  est la surface adimensionnelle définie par l'intégration du modèle de largeur (1.2) :

$$S^*(\alpha) = \int_{u^*=0}^1 v^* du^* = \alpha/3 + \beta/2 + \gamma$$

$$\begin{aligned} S^*(\alpha) &= \alpha/3 + \sqrt{-\alpha} && \text{pour } -4 \leq \alpha \leq -1 \\ S^*(\alpha) &= (1 - \alpha/3)/2 && \text{pour } -1 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

On notera que la surface adimensionnelle  $S^*(\alpha)$  est relativement peu sensible à la valeur du paramètre de forme  $\alpha$ . Pour les valeurs courantes de celui-ci, elle varie entre 0,75 (pour  $\alpha = -2,25$ ) et 0,72 (pour  $\alpha = -1,50$ ). De plus, elle est indépendante des dimensions  $u_f$  et  $v_f$  des feuilles.

On définit la surface adimensionnelle moyenne  $\overline{S^*}$  comme la moyenne des surfaces adimensionnelles  $S^*$ , pondérée par la surface des feuilles, c'est-à-dire par le produit  $u_f v_f$ . Elle est dans notre cas égale à 0,749. A partir des relations (1.7) et (1.9), on peut donc estimer la surface  $S$  des feuilles, connaissant leur seule longueur  $u_f$ , par :

$$S = \overline{S^*} u_f v_f = \overline{S^*} \alpha_2 u_f^2 \quad (1.10)$$

La Fig. 1.12 présente la validation de cette estimation. La pente de la droite de régression entre surfaces estimées et surfaces mesurées n'est pas significativement différente de 1 et son ordonnée à l'origine n'est pas significativement différente de 0 (au seuil de 5%). Les coefficients  $\overline{S^*}$  et  $\alpha_2$  ayant été ajustés sur des données indépendantes de celles utilisées pour cette validation, le modèle de surface (1.10) est donc validé.

La surface d'une feuille est donc calculée à partir de sa longueur, qui peut être déterminée par la méthode des silhouettes ou estimée à partir de la hauteur de son point d'insertion.



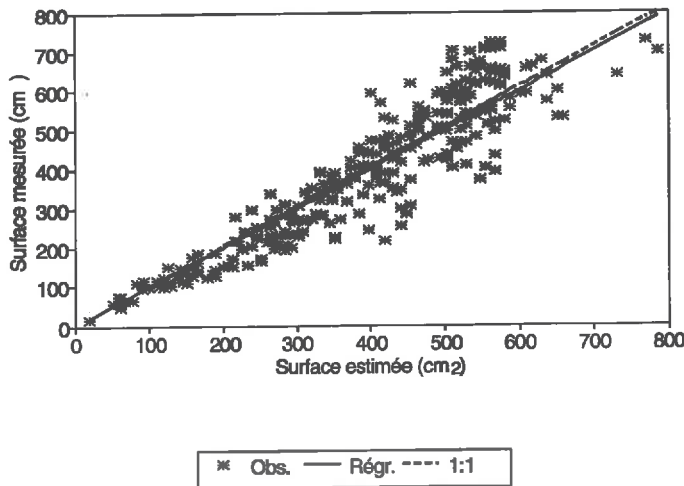


FIG. 1.12 – **Estimation de la surface des feuilles : validation.** L'équation (1.10), dérivée des équations (1.7) et (1.9), respectivement ajustées sur les feuilles du 09/08 et du 13/07, est appliquée aux feuilles du 20/07. \* : feuilles du 20/07; — : droite de régression; - - - : droite de pente 1:1.

### Distribution des angles foliaires

Nous avons testé le modèle de nervure centrale en comparant les fonctions de distribution des angles foliaires déduites des mesures brutes des silhouettes (méthode classique) et déduites du modèle. Pour réaliser ce calcul, il faut disposer d'une relation entre la largeur de la feuille et la distance à son point d'insertion telle que celle donnée par l'équation (1.2). Pour chaque feuille, la nervure centrale modélisée a été discrétisée (50 points pour la partie parabolique et 50 points pour la partie ellipsoïdale). Le calcul a de plus été effectué pour 3 couches horizontales de végétation ayant chacune une épaisseur de 0,8 m.

On trouvera en Fig. 1.13 les résultats de cette estimation de la fonction de distribution des angles foliaires. La végétation a un port érigé (dominance de surfaces foliaires à angle d'inclinaison élevé). Au 20 juillet, la strate supérieure de la végétation (1,6 – 2,4 m) se différencie du reste du couvert par un comportement nettement érectophile; cette caractéristique disparaît le 9 août.

Le modèle a tendance à surestimer légèrement le mode de la distribution des angles foliaires en régularisant la forme de cette distribution. Tou-

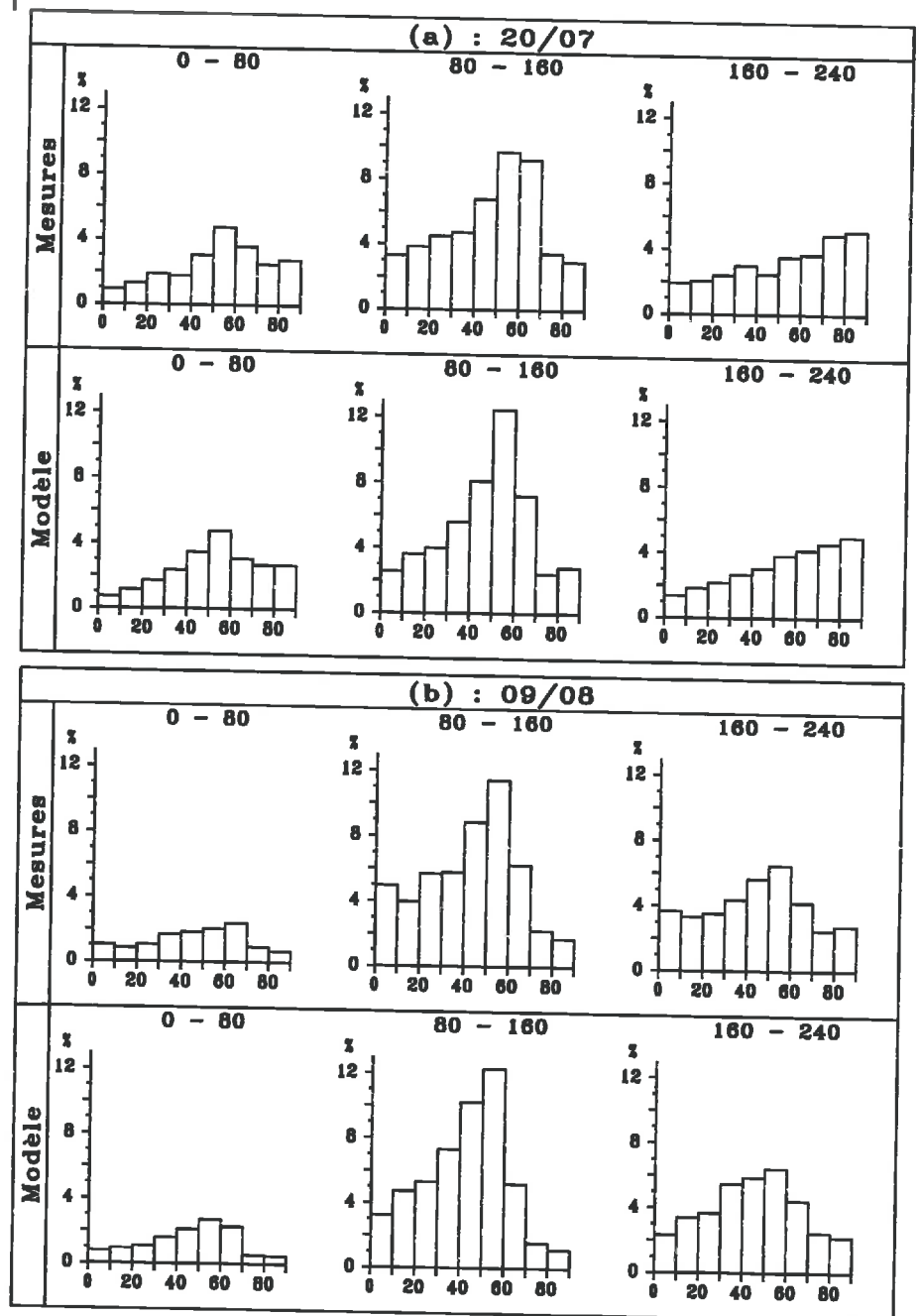


FIG. 1.13 – Fonctions de distributions des angles foliaires. Comparaison des fonctions de distribution des angles foliaires (LIDF) obtenues en appliquant la méthode des silhouettes aux mesures brutes et au modèle de nervure centrale : proportion de la surface foliaire ayant un angle d'inclinaison donné (par classes de 10 degrés). La méthode des silhouettes est appliquée à des couches horizontales de 80 cm d'épaisseur ; les résultats sont exprimés en pourcentage de la surface foliaire totale. (a) : données du 20/07; (b) : données du 09/08.

tefois, les différences observées entre mesures et modèle sont de l'ordre de grandeur des incertitudes expérimentales et le modèle restitue la fonction de distribution des angles foliaires de façon tout-à-fait satisfaisante.

## Bilan de la modélisation

*La modélisation présentée dans cette étude et testée sur un double jeu de données expérimentales permet de décrire avec une grande précision la structure géométrique de pieds de maïs. Les différents sous-modèles utilisés sont des formes paramétriques simples, des coniques, et ne font intervenir qu'un nombre limité de paramètres.*

*La feuille développée est décrite par trois paramètres : sa longueur, un paramètre reliant sa plus grande largeur à sa longueur et un paramètre de forme, relié à son degré d'engainement. La longueur de la feuille est elle-même reliée à la hauteur de son point d'insertion.*

*La nervure centrale est décomposée en une partie ascendante parabolique et une partie descendante ellipsoïdale, éventuellement absente. Elle est représentée par la longueur de la feuille, la position de son point d'insertion et par 6 paramètres de forme : angle d'insertion et courbure de la partie parabolique, position du point de raccordement et angle de cassure en ce point, allongement et courbure angulaire de la partie ellipsoïdale.*

*Malgré ce faible nombre de paramètres, l'aptitude du modèle à représenter des formes très variées de feuilles est excellente. Il permet en particulier de décrire avec une bonne précision la fonction de distribution des angles foliaires, à partir d'un nombre limité de points de mesure de la forme de la nervure centrale : 7 points par feuille sont théoriquement suffisants. Cette modélisation doit ainsi pouvoir être utilisée avec profit en entrée de modèles de transferts radiatifs au sein des couverts végétaux, qui nécessitent une connaissance détaillée de l'architecture de la végétation, notamment pour les versions bi ou tri-dimensionnelles de ceux-ci.*

*Bien que cela n'ait été fait que pour deux dates proches dans cette étude, il est possible de caractériser l'évolution temporelle de la structure géométrique du feuillage de pieds de maïs, en étudiant l'évolution des différents paramètres intervenant dans cette modélisation.*

*Enfin, la régularité des fonctions de distribution de ces paramètres doit permettre de générer, par tirage aléatoire dans ces lois, des maquettes informatiques tri-dimensionnelles de couverts de maïs.*



## Chapitre 2

# Mise en œuvre informatique

*Dans ce chapitre nous explicitons plusieurs méthodes nécessaires à l'implémentation informatique des calculs de rayonnement à l'intérieur d'un couvert végétal. Il s'agit essentiellement :*

- *du découpage d'une surface paramétrique en carreaux élémentaires : il doit permettre de déterminer un ensemble, le plus petit possible, de carreaux élémentaires approchant au mieux la surface paramétrique. Le problème de Schwartz, inhérent au découpage en triangles, est évoqué. Cette partie commence par un rappel sur la discrétisation et la paramétrisation des courbes,*
- *de trois problèmes annexes, à savoir :*
  - *la projection non biaisée d'un triangle sur une surface discrétisée : elle doit permettre d'assurer que, même pour les très petits triangles, l'espérance de la surface projetée, comptée en pixels, soit égale à la vraie surface de la projection,*
  - *la résolution des équations du quatrième degré : elle est nécessaire, en lancer de rayons, au calcul des intersections entre un carreau paramétrique du second degré et une droite,*
  - *le calcul de la maille de partitionnement de l'espace en lancer de rayons.*

### 2.1 Approximation des courbes paramétriques

Soit  $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$  où  $a \leq t \leq b$  un arc paramétrique quelconque de  $R^3$ . Son utilisation directe n'est généralement pas possible : il

est très difficile par exemple de calculer l'intersection entre une droite et un arc paramétrique défini à l'aide de fonctions trigonométriques. On est amené à l'approcher par un ensemble d'arcs ayant de "bonnes propriétés". Le découpage le plus simple est le découpage en segments de droite.

### 2.1.1 Découpage d'une courbe paramétrique plane en segments de droite

On cherche une suite ordonnée de longueur minimale  $t_1, t_2 \dots t_{n-1}$  telle que la ligne brisée  $F(t_0), F(t_1), F(t_2) \dots F(t_{n-1}), F(t_n)$  (avec  $t_0 = a, t_n = b$ ) représente "convenablement" l'arc de départ. Le problème, classique en mathématique, est également posé en infographie, notamment par [Lindgren et al., 1992].

Par "convenablement" on entend généralement qu'un critère de distance entre les segments et les éléments de l'arc paramétrique, doit être respecté, mais même dans ce cadre, le critère demande à être précisé. De plus, les algorithmes à mettre en œuvre sont très lourds. Dans la pratique deux méthodes sont employées :

- le découpage régulier du segment paramétrique. Il suppose notamment que la vitesse de parcours de l'arc en fonction du paramètre soit sensiblement uniforme
- le découpage récursif du segment paramétrique. On coupe le segment paramétrique par son milieu tant que l'arc correspondant ne peut pas être convenablement approché par un segment de droite. Pour des raisons d'efficacité, le critère se résume souvent à une longueur maximum du segment : cela suppose un *a priori* sur la courbure maximum de l'arc et sur le fait qu'il ne se recoupe pas.

Le découpage en segments de droite conduit généralement à un grand nombre de segments tout en gardant son aspect anguleux à la courbe interpolée. C'est pourquoi, de nombreux logiciels utilisent une interpolation de degré supérieur, généralement une interpolation par splines cubiques. Nous montrons, dans les deux paragraphes suivants les possibilités d'interpolation par segments coniques ; ils nous serviront d'introduction au découpage d'une surface en carreaux de Steiner.

### 2.1.2 Découpage d'une courbe paramétrique plane en segments coniques

Soit  $F(t) = (x(t), y(t))$  où  $a \leq t \leq b$  un arc paramétrique du plan. Nous pouvons l'approcher par le segment conique

$$\tilde{F}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \left( \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3}, \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{a_3 t^2 + b_3 t + c_3} \right) \text{ qui :}$$

– débute en  $F(a)$  et se termine en  $F(b)$  :

$$\tilde{x}(a) = x(a); \quad \tilde{y}(a) = y(a); \quad \tilde{x}(b) = x(b); \quad \tilde{y}(b) = y(b)$$

– respecte la tangente de  $F$  en  $a$  et  $b$

$$\frac{x'(a)}{y'(a)} = \frac{\tilde{x}'(a)}{\tilde{y}'(a)}; \quad \frac{x'(b)}{y'(b)} = \frac{\tilde{x}'(b)}{\tilde{y}'(b)}$$

– a le même point intermédiaire que  $F$

$$\tilde{x}\left(\frac{a+b}{2}\right) = x\left(\frac{a+b}{2}\right); \quad \tilde{y}\left(\frac{a+b}{2}\right) = y\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ces 8 équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues  $(a_i, b_i, c_i) i = 1, \dots, 3$ . Elles permettent de calculer ces dernières de manière unique à un coefficient près.

Comme pour le découpage en segments de droite, nous procédons à la division récursive de l'arc tant que l'approximation n'est pas satisfaisante. Dans l'étude nous prenons deux critères :

- une distance maximum entre les extrémités de l'arc,
- le respect du sens de parcours de l'arc à ses extrémités. Cela permet d'éviter une interpolation aberrante quand un point d'inflexion se situe dans la partie centrale du segment.

Dans la pratique les dérivées sont calculées par approximation numérique. Le critère de respect du sens de parcours en vérifiant que les produits scalaires :

$$\langle F(a+\varepsilon) - F(a), \tilde{F}(a+\varepsilon) - \tilde{F}(a) \rangle \text{ et } \langle F(b-\varepsilon) - F(b), \tilde{F}(b-\varepsilon) - \tilde{F}(b) \rangle$$

sont positifs.

Ces critères sont loin de pouvoir s'appliquer à l'ensemble des courbes paramétriques, mais ils se révèlent en pratique suffisants.



### 2.1.3 Découpage d'une courbe paramétrique gauche en segments coniques

Pour approcher un arc gauche par un segment conique nous proposons de calculer le plan déterminé par les points extrémités de l'arc et par un point intermédiaire. On peut alors projeter la courbe sur le plan ainsi défini et nous ramener au cas précédent. Comme point intermédiaire nous prenons généralement l'image du milieu du segment paramétrique. Si les trois points sont alignés, l'approximation conique n'est pas convenable : on est alors amené à considérer deux cas :

- tous les points de l'arc sont quasiment alignés : on remplace l'interpolation conique par une interpolation linéaire,
- ce n'est pas le cas : l'interpolation conique n'est pas possible. On découpe l'arc en deux.

### 2.1.4 La paramétrisation de Bézier

L'infographie fait le plus souvent appel à des modèles particuliers pour représenter courbes et surfaces : on peut citer les différentes splines (splines de base, B-splines,  $\beta$ splines, les surfaces de Coons, de Bézier de de Casteljau ou plus récemment les NURBS [Bézier, 1986] [de Casteljau, 1985] [Bartels et al., 1987] [Gardan, 1985]). Dans tous les cas, ces courbes ou surfaces peuvent être considérées comme des paramétrisations particulières des courbes et surfaces rationnelles. L'intérêt de ces diverses paramétrisations est essentiellement lié aux propriétés des paramètres qui peuvent être plus directement associés aux caractéristiques géométriques de la courbe. Nous nous limitons ici à la paramétrisation de Bézier.

Une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n$  est déterminée par  $n + 1$  points pondérés  $(P_i, \beta_i)$  selon la formule :

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i B_i^n(t) P_i}{\sum_{i=0}^n \beta_i B_i^n(t)} \text{ où } t \text{ varie généralement entre } 0 \text{ et } 1,$$

$$\text{où } P(t) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ dans le cas d'une représentation dans le plan,}$$

où  $P(t) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$  dans le cas d'une représentation dans l'espace,

$$\text{où } B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

représente le polynôme de Bernstein de paramètres  $n$  et  $i$ . Les principales propriétés de ces polynômes sont données dans [Bézier, 1986],

$$\text{et où } \binom{n}{i} \text{ est le coefficient du binôme } \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Les courbes de Bézier sont donc des courbes polynomiales rationnelles. On obtient la forme classique par simple développement de la formule.

Par contre l'ensemble des courbes polynomiales rationnelles ne peut pas être obtenu par les points de contrôle de Bézier : dans le cas par exemple du demi-cercle, le point de contrôle intermédiaire est rejeté à l'infini et on ne peut plus prendre un système de pondération convenable.

### 2.1.5 La paramétrisation de Bézier dans le cas des coniques

La représentation paramétrique des coniques a été étudiée de façon très détaillée dans [Fiorot et Jeannin, 1989] pour les fonctions de Bézier. L'étude est intéressante car elle illustre bien les possibilités et les difficultés de la paramétrisation sur des fonctions pourtant bien connues. La représentation des coniques à l'aide des points pondérés de Bézier permet, de manière relativement facile, d'associer à un segment conique donné les coefficients de la paramétrisation.

Trois points de contrôle sont nécessaires : l'origine du segment conique, son extrémité et le point d'intersection des tangentes à la conique issues des deux premiers points.

Si les trois poids associés aux points de contrôle sont égaux, le dénominateur est constant ; le segment est de type parabolique.

A un arc conique donné correspond une infinité de triplets de poids. On peut *a priori* fixer à 1 les poids correspondant aux extrémités du segment conique. Dans ce cas, si on fait tendre le poids du point intermédiaire vers

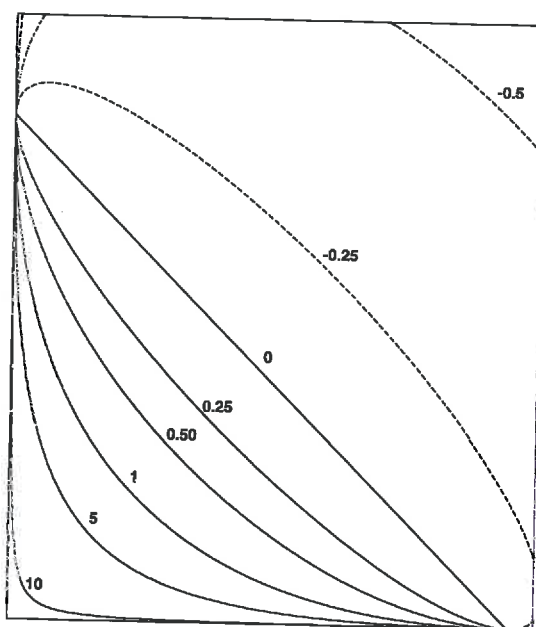


FIG. 2.1 – poids associés à plusieurs arcs coniques.

l'infini, l'arc conique va tendre vers l'angle des trois points. Si on fait tendre ce poids vers 0, l'arc va tendre vers le segment reliant les points extrémités. Si on prend un poids négatif, c'est l'arc conique extérieur au triangle des trois points qui sera parcouru (donc un arc de longueur infinie dans le cas des paraboles et des hyperboles). On peut à nouveau remarquer qu'en fixant nos pondérations à 1 aux points extrémités, on fixe la vitesse de parcours de l'arc sans limiter les possibilités au niveau de la forme.

Dans la figure 2.1 nous présentons le faisceau d'arcs coniques défini par 3 points de contrôle. La pondération est de 1 pour les points extrémités. Les arcs coniques ont été tracés pour les pondérations 10 (premier arc d'hyperbole), 5 (deuxième arc d'hyperbole), 1 (arc de parabole), 0.5 (arc grande ellipse), 0.25 (arc petite ellipse), -0.25 (grand arc petite ellipse), -0.5 (grand arc grande ellipse) et très partiellement pour -1 (morceaux de parabole).

Fiorot donne également les conditions pour déterminer le type de la conique en fonction des poids :

$$\beta^2_1 - \beta_0 \beta_2 < 0 : \text{ellipse,}$$

$$\beta^2_1 - \beta_0 \beta_2 = 0 : \text{parabole,}$$

$$\beta^2_1 - \beta_0 \beta_2 > 0 : \text{hyperbole.}$$

Mais on établit également pour les pondérations positives que si pour un

même triplet de points de contrôle, on a la relation entre les poids :

$$\beta_0\beta_2\beta_1^2 = \beta'_0\beta'_2\beta_1^2, \text{ les arcs coniques décrits sont superposables.}$$

## 2.2 Approximation des surfaces paramétriques

Si on passe du 1D au 2D le problème est de découper une surface en carreaux élémentaires : deux types de carreaux sont principalement utilisés en infographie : le triangle et le carreau bicubique. Le triangle est facile à utiliser, mais il en faut un très grand nombre pour approcher correctement une surface gauche. Les bicubiques sont beaucoup plus difficiles à manipuler : ce sont des surfaces du 18ème degré.

### 2.2.1 Le problème de Schwartz

On pensait, au siècle dernier que l'aire d'une surface pouvait se calculer comme la limite des aires de polyèdres inscrits. Karl Herman Schwartz a montré en 1870 qu'il n'en était rien. Son exemple est décrit dans [Chilov, 1975] et est repris par [Berger, 1990] sous le nom d'exemple du lampion.

L'exemple de Schwartz est celui du cylindre approché par des triangles dont il fait tendre la taille vers 0. Il remarque qu'en fonction de la triangulation choisie, la surface approchée tend vers n'importe quelle valeur comprise entre la vraie surface du cylindre et l'infini. La convergence en distance (les triangles se rapprochent indéfiniment du cylindre) n'implique pas la convergence de l'aire.

On remarque de plus que nous n'avons pas convergence des normales à la surface. Cela est particulièrement gênant en lancer de rayons, la direction du rayon réfléchi pouvant être complètement aberrante.

En dehors de cet exemple, un peu caricatural, on peut remarquer que la triangulation d'une surface gauche ne conduit pas toujours en terme de normale, à des approximations satisfaisantes. Pour une surface réglée, la triangulation se révèle vite satisfaisante si les grands cotés de chaque triangle suivent d'assez près la génératrice.

Pour la sphère, l'idéal serait de n'utiliser que des triangles équilatéraux de même taille, mais l'on sait [Pacioli, 1509] qu'il n'existe que trois triangulations régulières de la sphère : le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. C'est ce dernier qui permet la meilleure approximation de la sphère par des triangles équilatéraux égaux. Rappelons que l'icosaèdre a 20 faces, 12 sommets et 30 arêtes Fig. 2.3-A. L'approximation n'est cependant pas fameuse : nous avons

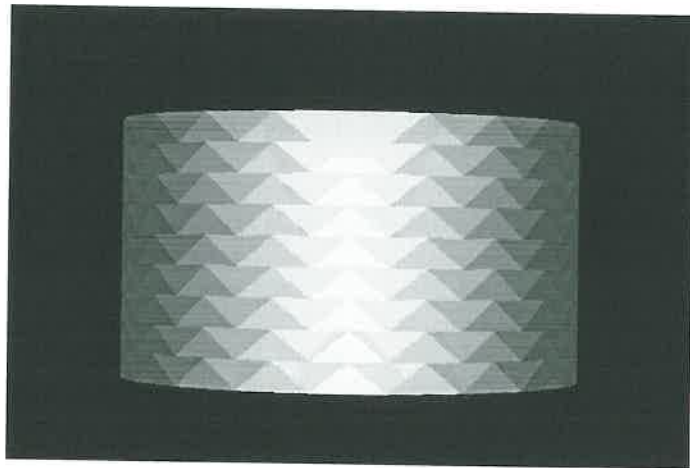


FIG. 2.2 – *Le lampion de Schwartz.*

donc affiné le découpage en “tirant” le centre de gravité de chaque face de manière à le placer sur la sphère. Nous obtenons un nouveau corps composé de 60 faces (des triangles isocèles égaux), 32 sommets situés sur la sphère englobante et 90 arêtes Fig. 2.3-B. En terme de distance l’approximation est meilleure: le nouveau polyèdre est plus près de la sphère que l’icosaèdre. Les erreurs angulaires sont par contre beaucoup plus fortes et le corps n’est pas convexe.

Si on calcule :

- l’ombre au sol de la sphère: l’approximation par le nouveau polyèdre est nettement meilleure que l’approximation par l’icosaèdre. Les aberrations angulaires sont sans conséquence,
- le rayonnement réfléchi par la sphère: les erreurs angulaires de l’icosaèdre seront difficilement acceptables, celles du nouveau polyèdre de toute évidence complètement inacceptables.

### 2.2.2 Découpage d’une surface paramétrique en triangles

Le découpage en triangles d’une surface paramétrique se révèle extrêmement difficile si on veut conserver une bonne approximation en terme de distance et en terme angulaire. Pour certains types de surface, le découpage régulier du rectangle paramétrique peut se révéler convenable. C’est le cas

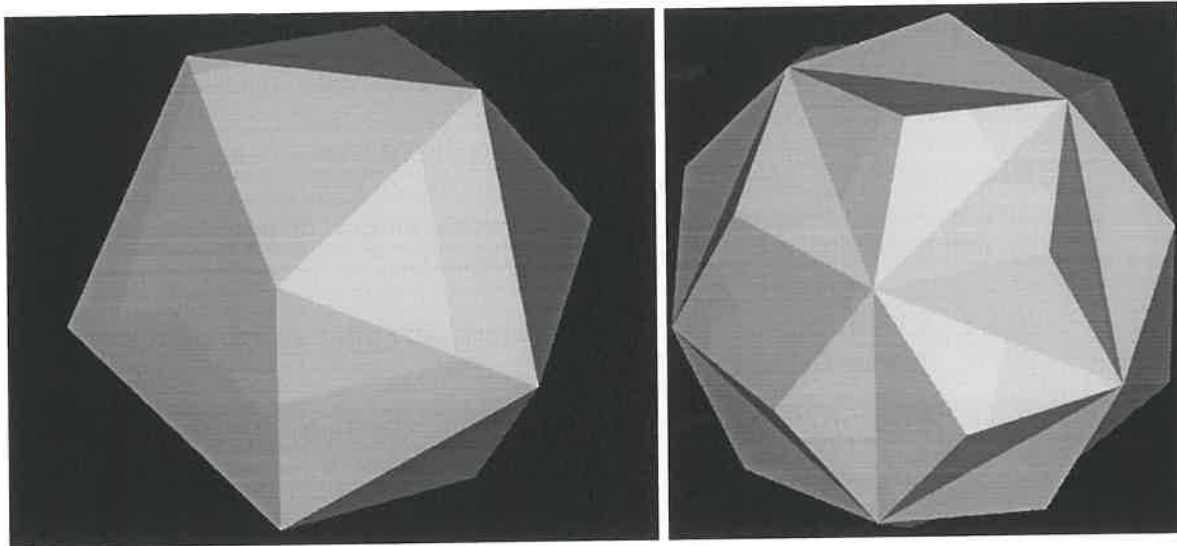


FIG. 2.3 – *Triangulation de la sphère. A gauche (A), l'icosaèdre constitué de 20 triangles équilatéraux égaux. A droite (B) un polyèdre constitué de 60 triangles isocèles égaux, obtenu par subdivision de l'icosaèdre.*

du tronc de cône, du cylindre ou du tore si leur paramétrisation est adaptée. Dans le cas général on est amené à :

- procéder à une triangulation préalable du rectangle paramétrique,
- couper récursivement chaque triangle paramétrique jusqu'à obtenir un ensemble de triangles acceptables.

Le découpage se fait toujours par le milieu du plus grand côté (dans l'espace réel) de manière à obtenir des triangles qui soient les plus "équilatéraux" possibles. Les critères d'acceptation possibles sont multiples : nous nous contentons, dans l'état actuel, d'une taille maximum (toujours dans l'espace réel) du plus grand côté du triangle. Cela suppose un *a priori* sur la courbure maximum de la surface paramétrique.

Il faut également noter que le nombre de triangles nécessaires pour représenter fidèlement une surface gauche est extrêmement important. Si on considère par exemple qu'il faut 50 segments pour délimiter correctement un disque, il nous faudra plus de  $50^2 = 2500$  triangles pour approcher une sphère et que leur ombre portée au sol soit correcte.

Si on reprend le modèle du chapitre précédent on peut, en supposant l'indépendance entre pieds, tirer aléatoirement les caractéristiques d'un en-

semble de pieds. Ces pieds sont disposés, pour respecter les habitudes agricoles, en rangs avec un espacement d'environ 0,2m entre deux pieds d'un même rang et 0,7m entre deux rangs.

Toute la géométrie du couvert étant décrite par des fonctions paramétriques nous pouvons les découper récursivement en triangles. Ces triangles peuvent être projetés en utilisant la méthode du tampon de profondeur. Elle permet d'obtenir l'image d'une parcelle (Fig. 2.4)

### 2.2.3 Découpage d'une surface paramétrique en carreaux du second degré

Le carreau paramétrique rationnel est défini en géométrie projective par l'application :

$$y = P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ P_3(x) \\ P_4(x) \end{pmatrix}$$

$y$  correspond aux quatre coordonnées homogènes d'un point de l'espace projectif  $P^3$ .

$x$  correspond aux trois coordonnées homogènes d'un point du plan projectif  $P^2$  dit plan paramétrique.

Si le carreau rationnel est du second degré nous avons :

$$P_i(x) = A_i x_1^2 + B_i x_2^2 + C_i x_3^2 + 2F_i x_2 x_3 + 2G_i x_1 x_3 + 2H_i x_1 x_2, \quad i = 1, \dots, 4$$

et la surface associée est dans les bons cas une surface du quatrième degré dite surface de Steiner. Cette paramétrisation fait l'objet d'un chapitre séparé.

Le découpage est basé sur la paramétrisation affine de Bézier des surfaces rationnelles que nous commençons par rappeler.

#### Paramétrisation de Bézier

Nous prenons les six points de contrôle  $P_{i,j}$  de Bézier (Fig. 2.5) et les 6 poids associés  $\beta_{i,j}$  [Sederberg, 1984] pour définir la forme paramétrique :

$$Y(x) = \frac{\sum_{i+j=0}^2 \binom{2}{i,j} x_1^i x_2^j (x_3 - x_1 - x_2)^{2-i-j} \beta_{ij} P_{ij}}{\sum_{i+j=0}^2 \binom{2}{i,j} x_1^i x_2^j (x_3 - x_1 - x_2)^{2-i-j} \beta_{ij}} \quad (2.1)$$





FIG. 2.4 – *Représentation d'une petite maquette de maïs.*

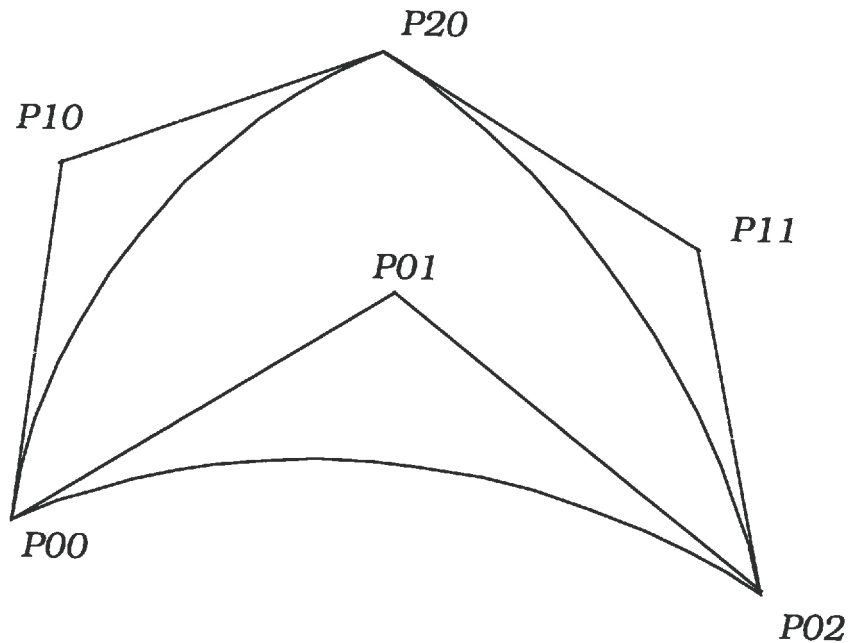


FIG. 2.5 – Représentation d'un carreau du second degré à l'aide des six points de contrôle de Bézier.

$$\text{où } \binom{2}{i, j} = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!}$$

$$\text{et où } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ et } P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{ij}^1 \\ P_{ij}^2 \\ P_{ij}^3 \end{pmatrix} \text{ sont des points de l'espace affine.}$$

Si tous les poids sont égaux le dénominateur se simplifie : la paramétrisation est dite polynomiale. Dans le cas contraire, la surface est rationnelle.

En développant les polynômes et en isolant le dénominateur commun, on aboutit à la forme rationnelle définie au chapitre précédent.

Le carreau proprement dit est triangulaire : il est limité dans le plan paramétrique par les trois inégalités (en supposant  $x_3$  positif) :  $0 \leq x_1 \leq x_3$ ;  $0 \leq x_2 \leq x_3$ ;  $0 \leq x_1 + x_2 \leq x_3$ .

A chacun des côtés du triangle correspond dans  $P^3$  un segment conique. Inversement, à trois points de  $P^3$  reliés deux à deux par des segments co-

riques, on associe généralement de manière unique un carreau du second degré. Pour cela on est amené à :

- prendre les trois sommets  $P_{00}$ ,  $P_{02}$  et  $P_{20}$  comme points de contrôle,
- calculer les trois points intermédiaires  $P_{01}$ ,  $P_{10}$  et  $P_{11}$  associés à chaque segment conique (ce sont les points de concours des tangentes issues des sommets),
- prendre 1 comme pondération des points associés au sommet du triangle ( $\beta_{00} = \beta_{20} = \beta_{02} = 1$ ),
- calculer séparément pour chaque arc conique la pondération intermédiaire.

La procédure nous permet ainsi d'associer un carreau du second degré aux trois arcs coniques joignant trois points de  $P^3$ .

On peut vérifier en développant les calculs que, si le choix d'un autre système de pondération est toujours possible, le carreau paramétrique associé aux trois arcs reste globalement inchangé.

Plus généralement, on démontre qu'une transformation homographique du plan paramétrique ne modifie pas le carreau de Steiner si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

- le triangle de référence  $x_1x_2(x_1+x_2-x_3) = 0$  est globalement invariant
- un point strictement intérieur au triangle se transforme en un point strictement intérieur au triangle.

### Le découpage proprement dit

Comme pour le découpage en triangles, on procède d'abord à une triangulation préalable du rectangle paramétrique puis à un découpage récursif de chaque triangle paramétrique.

A chaque triangle paramétrique sont associés dans  $P^3$  trois points reliés par trois courbes gauches. A chacune de ces courbes, on associe un segment conique. Si l'une des trois distances courbe-conique est trop grande, on coupe dans le plan paramétrique le triangle en deux (par son plus mauvais coté). Si les trois distances sont bonnes, on détermine le carreau paramétrique associé à ces trois coniques.

Comme pour le découpage en triangles, les critères de distances ou d'adéquation sont loin de garantir un bon résultat pour tous les cas. Une triangulation initiale suffisante permet cependant dans notre problème de ne pas arriver à des formes aberrantes.

Précisons que le découpage que nous proposons conduit à des raccords de classe  $C^0$  i.e. le raccordement se fait sans "trou" mais n'assure pas la continuité des dérivées. [Sederberg, 1983] propose pourtant un raccordement de classe  $C^1$ , mais il ne permet plus de construire les carreaux indépendamment les uns des autres et le problème devient inextricable dans le cas général.

La méthode a d'abord été testée sur des formes simples : le triangle sphérique, le tore et la feuille d'érable, puis sur des formes plus complexes, la feuille de maïs et l'hypertore.

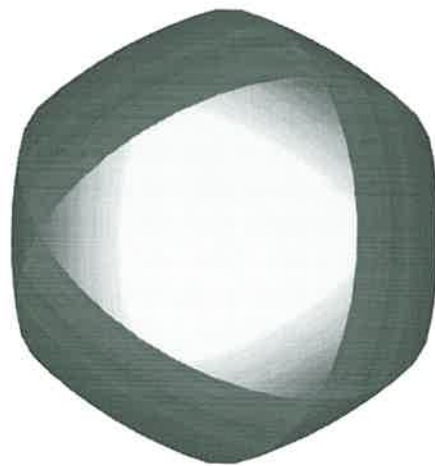


FIG. 2.6 – Approximation de la sphère par 8 carreaux de Steiner.

- l'approximation d'un triangle sphérique par un carreau paramétrique du second degré conduit de manière surprenante à une vraie surface de Steiner alors qu'on aurait pu penser obtenir directement un morceau de sphère. Le problème est dû au fait que l'espace paramétrique est limité par un triangle. Si on reprend l'exemple de la sphère unité du chapitre précédent, on vérifie qu'un triangle sphérique est bordé, dans le plan paramétrique, par trois arcs coniques. L'approximation du triangle par un carreau de Steiner est bien limitée par les trois arcs de grand cercle limitant le triangle sphérique, mais est trop aplatie au centre du triangle. Le défaut décroît rapidement en fonction de la taille du triangle sphérique. Nous présentons Fig. 2.6 une approximation de la sphère par 8 carreaux de Steiner.

Pour les quadriques, l'approximation par carreau de Steiner, même si elle donne des résultats convenables, n'est pas vraiment satisfaisante

puisqu'elle va nous amener à résoudre des équations du quatrième degré alors que le problème est intrinsèquement du second degré.

- le tore. C'est une surface du 4ème degré mais de 4ème classe, *i.e.* par une droite on peut faire passer quatre plans tangents au tore. Elle ne peut donc être qu'approchée par une paramétrisation du second degré. Un découpage en 128 carreaux de Steiner permet une très bonne

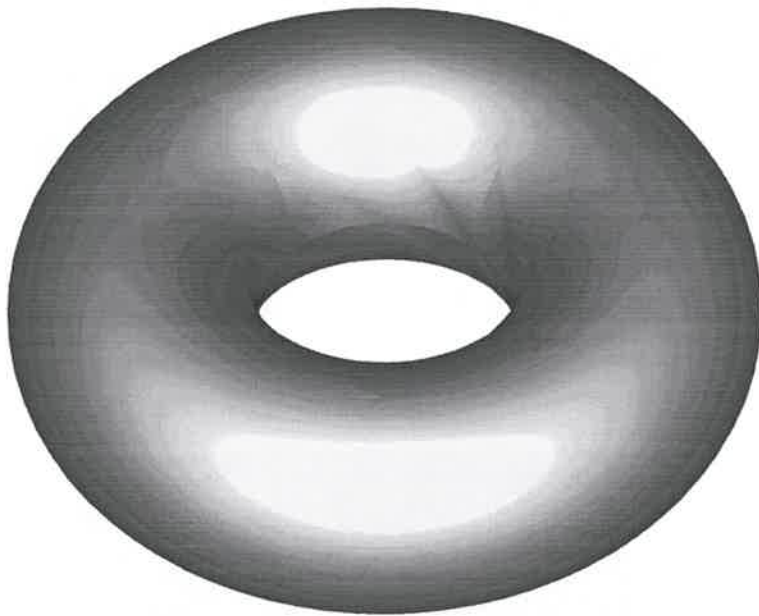


FIG. 2.7 – Approximation du tore par 128 carreaux de Steiner

approximation en terme de distance comme en terme de normale même si quelques défauts sont visibles Fig. 2.7

- la feuille d'érable a été obtenue directement à l'aide de 7 carreaux de Steiner. Elle est dédiée aux auteurs de MAPLE.
- la feuille de maïs dont le modèle sera donné dans le chapitre suivant. C'est principalement elle qui a motivé cette étude. Nous proposons Fig. 2.9 une approximation par 80 carreaux de Steiner. Bien que des défauts apparaissent au niveau des normales, on a une approximation qui ne pourrait être atteinte que par plusieurs milliers de triangles.
- l'hypertore: les exemples précédents correspondent à des surfaces obtenues par le déplacement de coniques. Leur bonne approximation par

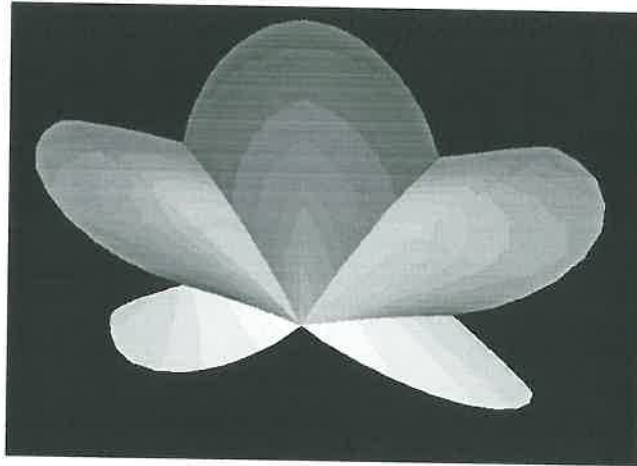


FIG. 2.8 – *Approximation de la feuille d'érable par 7 carreaux de Steiner.*



FIG. 2.9 – *Approximation de la feuille de maïs par 80 carreaux de Steiner.*

une paramétrisation du second degré peut donc sembler artificielle, c'est pourquoi nous proposons une dernière surface définie paramétriquement par :

$$Y = \begin{pmatrix} (2 + \cos(u))\cos(v) (\sin(2v) + 2) \\ (2 + \cos(u))\sin(v) (\sin(2v) + 2) \\ \sin(u)(2 + \cos(u)) \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix} \text{ et}$$

On représente Fig. 2.10.A une approximation de l'hypertore par 512 carreaux de Steiner. La comparaison avec l'approximation de cette surface par 41 992 triangles de la Fig 2.10.B permet de vérifier que l'approximation par carreau est très satisfaisante en terme de distance comme en terme de normale, même si, pour ce dernier, de légers défauts sont visibles au niveau de la partie pincée de la surface.

## 2.3 Problèmes annexes

*Des problèmes supplémentaires apparaissent dans l'implémentation informatique : la projection non biaisée d'un triangle sur une surface à pointillage, la résolution effective des équations du quatrième degré et le choix d'une maille de partitionnement de l'espace en lancer de rayons.*

### 2.3.1 Projection non biaisée

Les algorithmes de remplissage d'un polygone sont classiques en infographie : on trouve dans [Hégon, 1985, Schweizer, 1987a] aussi bien le cas des polygones convexes que le cas général (polygones non-convexes, polygones troués...). L'idée générale est de suivre les cotés du polygone et d'afficher tous les pixels compris entre ces cotés. Par contre le problème des cotés n'est généralement pas traité. On souhaite en effet que l'espérance de la surface discrétisée soit la surface mesurée sur  $R^2$ . Pour les polygones de grande taille, prendre ou ne pas prendre les pixels constituant les cotés ne conduira pas à des résultats très différents; il n'en est pas de même pour les petits polygones (Fig. 2.11) dont l'espérance de la projection sera soit sous-estimée soit surestimée.

Dans le cas où la grille des pixels est indépendante des sommets des polygones, (c'est une condition assez naturelle quand on ne travaille pas en nombre entier) on peut considérer le centre de chaque pixel comme un point d'échantillonnage sur une grille régulière : le pixel sera affiché si son centre est intérieur au polygone. Le résultat est cette fois sans biais et les



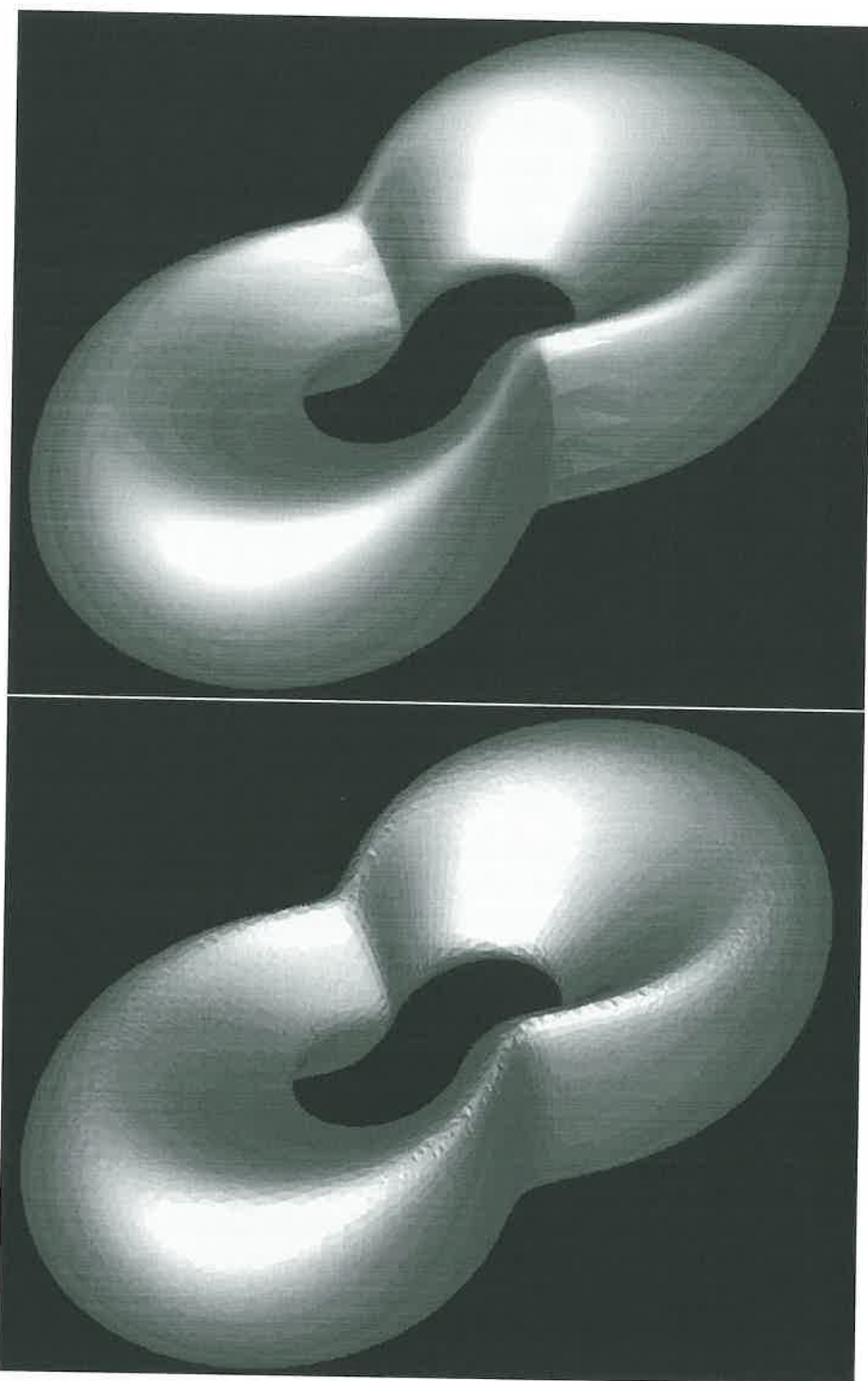


FIG. 2.10 – Approximation de l'hyperbole par : A (vue haute) 512 carreaux de Steiner ; B (vue basse) par 41 992 triangles.

cas d'ambiguïté (le centre d'un pixel est sur un coté du polygone) sont en théorie de probabilité nulle.

Si le polygone est un triangle donné par ses trois coordonnées  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  et  $(X_3, Y_3)$  on utilisera les coordonnées barycentriques (tableau : 2.1).

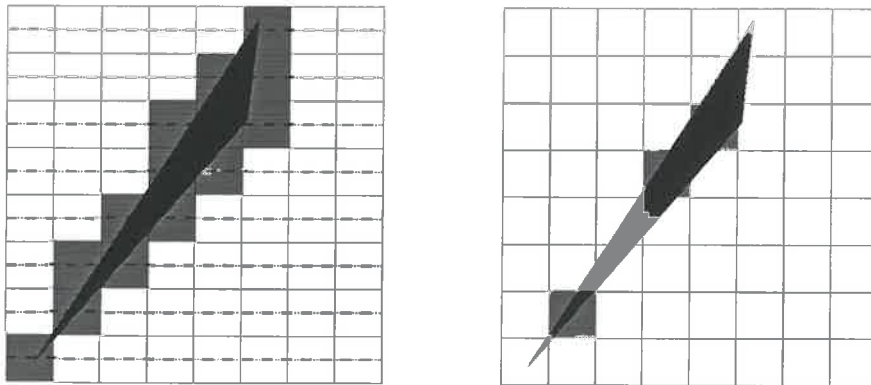


FIG. 2.11 – Dans la figure gauche les pixels sont calculés par balayage horizontal: tous les pixels, compris entre les cotés du triangle sont affichés, cotés compris. La surface des pixels est en général supérieure à la surface du triangle dans  $R^2$ . Dans la figure droite, le centre des pixels affichés est compris entre les trois droites réelles formant le triangle; l'espérance de la surface des pixels est non-biaisée mais la connexité est perdue.

### 2.3.2 Résolution des équations du quatrième degré

Le calcul de l'intersection entre une droite et la surface de Steiner est un problème du quatrième degré. Nous avons vu comment le ramener à la recherche des racines d'une équation polynomiale à une seule variable. Reste à trouver ses racines.

Pour cette résolution, on utilise la procédure classique [Samuel, 1986] :

- détermination de la résolvante,
- calcul d'une racine réelle de cette cubique,
- résolution des équations du second degré permettant de déterminer les racines de l'équation initiale.

Pour le calcul des racines d'une cubique, on dispose classiquement de deux méthodes, celle de Tartaglia-Viète-Cardan et la méthode trigonométrique.

Les coordonnées affines du triangle  $P_1P_2P_3$  dans le plan sont  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$

Le point  $P$  à tester a  $(x, y)$  comme coordonnées.

En coordonnées barycentriques,

$$P = \frac{\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3}{\alpha + \beta + \gamma}$$

avec

$$\alpha = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}; \beta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}; \gamma = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

Le point  $P$  est à l'intérieur du triangle si et seulement si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont de même signe.

TAB. 2.1 – Utilisation des coordonnées barycentriques pour déterminer si un point est à l'intérieur d'un triangle.

C'est cette dernière que nous utilisons de manière à éviter de passer par des expressions complexes quand les trois racines sont réelles. Nous avons pu vérifier que le programme donnait généralement des résultats sensiblement plus précis et beaucoup plus rapidement que l'algorithme général de la bibliothèque de programmes numériques "NAG" calculant numériquement l'ensemble des racines d'un polynôme de degré quelconque.

La précision est très dépendante des coefficients de l'équation de départ et nous avons pu constater que des racines réelles peuvent être perdues. Nous avons pu pallier aux problèmes les plus criants en déplaçant l'origine, mais la méthode demande à être améliorée. L'idée générale est de :

- déterminer les intersections de la droite avec les bords du volume englobant du carreau ; en déduire le segment des intersections potentiels,
- placer l'origine au milieu de ce segment,
- calculer les racines par l'algorithme précédent,
- sélectionner celles qui, dans le plan complexe, ne sont pas trop loin du segment,
- améliorer par une méthode itérative la précision des solutions retenues.

Le critère et la procédure itérative d'amélioration doivent bien sûr être précisés, et faire le compromis entre la précision et le temps calcul.

### 2.3.3 Calcul de la maille de partitionnement de l'espace

*En lancer de rayons, le temps passé à tester l'intersection entre des objets et des droites souvent très éloignées conduit à une perte de temps considérable. Il a souvent été proposé de découper au préalable la scène. La détermination de la taille optimale de chaque sous-scène ne semble cependant pas avoir été traitée, c'est pourquoi nous proposons ici de déterminer cette taille dans le cas d'un découpage en cubes réguliers.*

Pour un découpage donné, on associe, à chaque cube, la liste des carreaux qui sont totalement ou en partie situés dans ce cube.

Pour chaque rayon lumineux, on parcourt dans l'ordre la suite des cubes interceptant le rayon. On teste alors l'intersection avec les carreaux contenus dans le cube.

Le calcul du nombre moyen de cubes associés à un carreau n'est pas envisageable dans le cas général et nous nous contenterons d'examiner un cas simplifié en remarquant qu'il peut servir de majorant dans une classe beaucoup plus vaste de problèmes.

Nous allons en effet considérer que la scène est constituée de  $N$  objets de même taille; pour chaque objet on a  $x_{max} - x_{min} = y_{max} - y_{min} = z_{max} - z_{min} = d$ . Ils sont tous situés dans le cube unité qui a été découpé en  $k^3$  cubes. Les objets sont placés dans le cube de manière aléatoire, et suivant une loi quelconque mais indépendante du pavage.

La "dimension"  $d$  de chaque objet est supposée inférieure à  $1/k = m$  longueur de l'arête de chaque cube; chaque objet va "intercepter" 1, 2, 4 ou 8 cubes.

Les probabilités pour un objet d'être contenu dans un cube unique, ou d'occuper deux, quatre ou huit cubes sont respectivement de :

$$P(1) = \left(\frac{m-d}{m}\right)^3, \quad P(2) = 3 \left(\frac{m-d}{m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{m-d}{m}\right)\right]$$

$$P(4) = 3 \left(\frac{m-d}{m}\right) \left[1 - \left(\frac{m-d}{m}\right)\right]^2, \quad P(8) = \left[1 - \left(\frac{m-d}{m}\right)\right]^3.$$

Soit  $\mu$  espérance du nombre de cubes concernés par un objet, et  $\nu$  l'espérance du nombre d'objets associés à un cube déterminé.

$$\mu = P(1) + 2P(2) + 4P(4) + 8P(8) = \left(\frac{m+d}{m}\right)^3$$

$$\nu = \frac{N}{k^3} \left(\frac{m+d}{m}\right)^3$$

Si on prend un rayon qui traverse la scène, il va couper jusqu'à  $3k$  cubes. L'espérance du nombre d'intersections à tester est alors majorée par

$$\lambda = 3k\nu = 3\frac{N}{k^2} \left(\frac{m+d}{m}\right)^3 = 3\frac{N}{k^2}(1+dk)^3$$

En dérivant  $\lambda$  par rapport à  $k$  on obtient

$$\frac{d\lambda}{dk} = 3N \frac{(1+dk)^2(dk-2)}{k^3}$$

qui a deux racines négatives et une racine positive  $k_0 = \frac{2}{d}$ .

Cette valeur  $k_0$  peut être considérée comme la valeur de découpage optimale et nous permet, dans un cadre plus large, d'obtenir un majorant sur l'espérance du nombre moyen d'intersections pour un rayon.

Si on prend, par exemple, pour  $d$  la valeur 0.05 nous obtenons une valeur optimale  $k_0 = 40$ . Pour ce découpage nous obtenons  $\lambda = 0.05 N$ . Le nombre d'intersections à calculer est divisé par un facteur 20. Si on prend  $d = 0.02$  nous obtenons une valeur  $k_0$  de 100 d'où un  $\lambda = 0.0081N$ . Le gain est d'un facteur 120.

Dans ce calcul, nous n'avons pas pris en compte le gain qui correspond à l'arrêt des calculs quand un rayon est intercepté. Il est impossible de le quantifier *a priori* car il dépend de la structure spatiale du couvert, mais on peut s'attendre à un gain tout à fait significatif.

## Bilan

*Nous avons vu que, si le découpage en triangles ne pose pas de difficulté de mise en œuvre, il conduit, en pratique, à un nombre de triangles très élevé si on veut respecter les normales à la surface. Ce nombre de triangles ne pose pas de problème majeur si on veut construire une image par la méthode du tampon de profondeur. Nous proposons dans ce cas un algorithme de projection non biaisé.*

*Pour les méthodes basées sur le lancer de rayons le nombre de triangles devient prohibitif. Nous proposons alors de découper la scène en carreaux*

*paramétriques du second degré, généralement associés à une surface du quatrième degré, la surface de Steiner. Les propriétés de ce carreau paramétrique et le calcul de son intersection avec une droite seront traités au quatrième chapitre. Pour une mise en œuvre efficace, il est nécessaire (i) de résoudre des équations du quatrième degré: nous proposons d'utiliser les formules analytiques (ii) de partitionner l'espace: nous proposons un découpage en cubes réguliers dont la taille s'exprime en fonction de la taille du carreau paramétrique moyen.*





## Chapitre 3

# Courbes rationnelles

*Dans l'étude du rayonnement à l'intérieur d'un couvert végétal, on est amené à calculer de manière intensive l'intersection entre des droites, représentant les rayons lumineux, et des morceaux de surfaces paramétriques rationnelles, représentant la structure végétale. Ce problème est traité dans le prochain chapitre, mais beaucoup de propriétés se déduisent directement de l'étude des courbes algébriques planes : c'est pourquoi nous leur consacrons ce chapitre.*

*Dans ce contexte, nous avons été confrontés à la résolution d'un système algébrique lorsqu'on sait que la solution existe et est unique. Nous n'avons pas pu retrouver clairement énoncé ce résultat d'apparence anodine : l'unicité de la solution d'un système d'équations polynomiales à plusieurs variables implique que celle-ci soit expressible sous forme rationnelle à partir des coefficients des polynômes. Ce résultat et quelques unes de ses conséquences sont regroupés dans la deuxième partie de ce chapitre.*

*La première partie de ce chapitre est consacrée au calcul de la forme implicite d'une courbe paramétrique rationnelle et aux formules d'inversion associées. Nous proposons ici une nouvelle méthode qui se révèle, dans plusieurs cas, mieux adaptée que celle dérivée de Bézout.*

*Nous donnons ensuite la condition pour que trois coniques, puis trois cubiques, aient un point commun et les coordonnées de ce point quand il est unique.*

*Pour ces calculs nous nous situons dans le cadre de la géométrie projective.*

### 3.1 Calcul de la forme implicite d'une courbe paramétrique et formules d'inversion associées

Le calcul de la forme implicite d'une courbe paramétrique rationnelle est connu dans la littérature anglo-saxonne sous le terme d'*implicitization* que nous traduirons par *implicitisation*. La forme implicite, beaucoup plus utilisée pour les courbes algébriques que la forme paramétrique, permet de simplifier le calcul de nombreuses propriétés. Elle permet, par exemple de calculer l'intersection de deux segments paramétriques en remplaçant l'un des segments par son équation implicite, et d'obtenir une équation polynomiale à une seule inconnue. Dans ce cas il faut pouvoir associer à chaque point d'une courbe la valeur du paramètre associé. C'est le problème de l'inversion [Sederberg, 1984].

Soit  $P(x) = (P_1(x), P_2(x), P_3(x))$  un polynôme vectoriel homogène de degré  $n$  en  $x = (x_1, x_2)$ . L'équation paramétrique  $y = P(x)$  (ou en développant  $y_i = P_i, i = 1, \dots, 3$ ) permet de décrire une courbe dans le plan projectif  $P^2$ , fonction du point  $x$  de la droite projective du paramètre.

La condition nécessaire pour qu'un point du plan fasse partie de la courbe s'exprime sous forme d'une équation polynomiale homogène en  $y$ . La plus petite équation respectant cette condition correspond à la forme implicite. Elle est généralement de degré  $n$ .

Les formules d'inversion doivent permettre de calculer le point  $(\tilde{x}(y))$  de la droite paramétrique associée à tout point simple de la courbe. Un théorème démontré dans la deuxième partie de ce chapitre montre que ces formules sont rationnelles.

Nous supposerons par la suite, que les formes paramétriques sont irréductibles, *i.e.* que les trois polynômes  $P_1, P_2$  et  $P_3$  n'ont pas de solution commune. Nous dirons qu'il n'y a pas de points de base.

#### 3.1.1 Le cas des coniques

$$P_i = a_i x_1^2 + b_i x_1 x_2 + c_i x_2^2 \quad i = 1, \dots, 3$$

**La méthode du déterminant**

Soit 5 points  $y^1, y^2, y^3, y^4, y^5$  appartenant à une conique. On sait [Picquet, 1882] que l'équation implicite de la conique s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y_1)^2 & (y_2)^2 & (y_3)^2 & y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_1 y_2 \\ (y_1^1)^2 & (y_2^1)^2 & (y_3^1)^2 & y_2^1 y_3^1 & y_1^1 y_3^1 & y_1^1 y_2^1 \\ (y_1^2)^2 & (y_2^2)^2 & (y_3^2)^2 & y_2^2 y_3^2 & y_1^2 y_3^2 & y_1^2 y_2^2 \\ (y_1^3)^2 & (y_2^3)^2 & (y_3^3)^2 & y_2^3 y_3^3 & y_1^3 y_3^3 & y_1^3 y_2^3 \\ (y_1^4)^2 & (y_2^4)^2 & (y_3^4)^2 & y_2^4 y_3^4 & y_1^4 y_3^4 & y_1^4 y_2^4 \\ (y_1^5)^2 & (y_2^5)^2 & (y_3^5)^2 & y_2^5 y_3^5 & y_1^5 y_3^5 & y_1^5 y_2^5 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

Si on remplace dans cette expression,  $y_i^j$  par  $P_i(x^j)$  : les  $y^j$  sont les 5 images de 5 points  $x^j$  (que nous supposons distincts) de la droite paramétrique. On obtient alors par factorisation rationnelle de ce déterminant :

$$\Delta = \prod_{i \neq j} (x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathcal{I}$$

où  $\mathcal{I}$  est la forme implicite recherchée.

Le produit  $\Pi$  est nul si et seulement si deux des cinq points de la droite paramétrique sont confondus mais c'est contraire aux hypothèses.  $\Delta$  est identiquement nul si le déterminant  $3 \times 3$  est nul, *i.e.* si la conique est une droite double. En dehors de ce cas l'expression est inutilement compliquée, ce qui va poser non seulement des problèmes de temps de calcul mais aussi de précision, si on utilise une représentation approchée des nombres, ou de taille des nombres si on utilise une arithmétique exacte.

On est donc amené à chercher une méthode plus directe.

**la méthode de Bézout (ou des résultants)**

Pour qu'un point  $(y_1, y_2, y_3)$  appartienne à la courbe, il doit respecter les conditions :

$$\begin{vmatrix} y_1 & P_1(x) \\ y_3 & P_3(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} y_2 & P_2(x) \\ y_3 & P_3(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces deux polynômes en  $x_1$  aient une racine commune est que leur résultant soit nul. Ce résultant peut s'exprimer comme le déterminant de la matrice de Bézout associée aux deux polynômes 3.2.

$$B = \begin{vmatrix} (x_2)^2 y_3 & \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & c_1 \\ y_2 & a_2 & c_2 \\ y_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} & (x_2)^3 y_3 & \begin{vmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ x_2 y_3 & \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & b_1 \\ y_2 & a_2 & b_2 \\ y_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} & (x_2)^2 y_3 & \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & c_1 \\ y_2 & a_2 & c_2 \\ y_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

La factorisation de  $B$  nous donne :

$$B = (y_3)^2 (x_2)^4 \mathcal{I}$$

Ce qui nous permet d'établir une expression de l'équation implicite :

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & c_1 \\ y_2 & a_2 & c_2 \\ y_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & b_1 \\ y_2 & a_2 & b_2 \\ y_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_1 & a_1 & c_1 \\ y_2 & a_2 & c_2 \\ y_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Pour alléger la notation posons :

$$\begin{vmatrix} y_1 & a_1 & b_1 \\ y_2 & a_2 & b_2 \\ y_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = y \wedge a \wedge b = (yab) \text{ quand il n'y a pas ambiguïté}$$

Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} (yac) & (ybc) \\ (yab) & (yac) \end{vmatrix}$$

### La méthode de la tangente

Nous proposons ici une méthode originale :

$$\text{Notons pour alléger l'écriture : } \partial^i P_j = \frac{\partial P_j(x)}{\partial x_i}$$

Soit  $T_P = 0$ , l'équation de la tangente à la conique au point  $P(x)$ .

$$T_P = |M_{T_P}| = \begin{vmatrix} \partial^1 P_1 & \partial^2 P_1 & y_1 \\ \partial^1 P_2 & \partial^2 P_2 & y_2 \\ \partial^1 P_3 & \partial^2 P_3 & y_3 \end{vmatrix} = \langle y, N(x) \rangle = 0 \quad (3.4)$$

où  $N(x)$  est le vecteur normal à la conique dont les éléments sont constitués par les cofacteurs de la matrice  $M_T$ .

Dans le cas des coniques nous avons la droite projective :

$$T_P = \begin{vmatrix} 2a_1x_1 + b_1x_2 & b_1x_1 + 2c_1x_2 & y_1 \\ 2a_2x_1 + b_2x_2 & b_2x_1 + 2c_2x_2 & y_2 \\ 2a_3x_1 + b_3x_2 & b_3x_1 + 2c_3x_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

On peut également reprendre cette équation en considérant que  $y$  est un point quelconque du plan projectif et que  $x$  est l'inconnu. (3.5) est alors une équation du second degré en  $x$ . On vérifie que les solutions de cette équation correspondent aux antécédents des deux points de la conique situés sur la polaire<sup>1</sup> du point  $y$  par rapport à la conique. On sait également que si  $y$  appartient à la conique sa polaire est tangente à la conique. Les deux solutions en  $x$  de l'équation doivent être confondues. On en déduit :

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \text{ pour } y = P(x). \quad (3.6)$$

On démontre ce résultat algébriquement.

$y^* \in T_P \iff \det(y^*, \partial^1 P, \partial^2 P) = \langle y^*, N(x) \rangle$ . C'est vrai pour  $y^* = P(x)$  et comme on  $\langle P(x), \partial^i N \rangle \equiv 0$  au point  $y = P(x)$ , on a  $\langle y, \partial N \rangle = \partial^i T_P = 0$

En développant (3.6) on obtient :

$$\begin{aligned} x_1(yab) + x_2(yac) &= 0 \\ x_1(yac) + x_2(ybc) &= 0 \end{aligned}$$

La condition de compatibilité entre ces deux équations permet de reconstruire le déterminant associé à  $\mathcal{I}$ .

1. Rappelons que par un point on peut faire passer deux droites tangentes à une conique donnée. Les deux intersections droites-conique permettent de définir une nouvelle droite. C'est par définition la polaire du point initiale par rapport à la conique. Si la conique s'exprime sous forme matricielle par l'équation  $x^t M x = 0$  alors l'équation de la polaire du point  $X$  par rapport à cette conique est  $X^t M x = 0$ .

**Les formules d'inversion**

On les déduit de manière évidente d'une des équations (3.6). On les obtient aussi facilement comme sous-déterminants de la matrice associée à  $\mathcal{I}$ .

**Cas d'exception**

Les formules d'inversion échouent si :

$$(abc) = 0$$

Dans ce cas l'équation paramétrique correspond à l'un des cas suivant :

- une droite comptée deux fois ; le déterminant de la formule (3.3) est le carré de la forme implicite.
- une droite simple ou un point : mais dans ce cas les  $P_i$  ne sont pas premiers entre eux. Le déterminant de la formule (3.3) est identiquement nul.

**3.1.2 Le cas des cubiques**

$$P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3, \quad i = 1, \dots, 3$$

Nous abandonnerons la méthode du déterminant : elle se généralise sans difficulté pour les courbes et surfaces de degré quelconque, mais la partie parasite la rend en pratique inutilisable.

**La méthode de Bézout**

La matrice de Bézout associée aux deux polynômes (3.2) est une matrice  $3 \times 3$ . On la simplifie comme dans le cas des coniques en divisant chaque élément par  $y_3$  et en prenant  $x_2 = 1$ . Nous obtenons alors la forme implicite :

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} (yad) & (ybd) & (ycd) \\ (yac) & (ybc) + (ycb) & (ybd) \\ (yab) & (yac) & (yad) \end{vmatrix} = 0$$

### La méthode de la tangente

Les équations (3.6) deviennent :

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 2(yab)x_1^3 + 3(yac)x_1^2x_2 + (3(yad) + (ybc))x_1x_2^2 + (ybd)x_2^3 = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = (yac)x_1^3 + (3(yad) + (ybc))x_1^2x_2 + 3(ybd)x_2^2 + 2(ycd)x_2^3 = 0$$

Nous disposons également des trois équations :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ y_2 &= a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \\ y_3 &= a_3x_1^3 + b_3x_1^2x_2 + c_3x_1x_2^2 + d_3x_2^3 \end{aligned}$$

De ces 5 équations on tire une condition nécessaire de compatibilité :

$$\mathcal{I} = |M_5| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & y_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & y_3 \\ 2(yab) & 3(yac) & 3(yad) + (ybc) & (ybd) & 0 \\ (yac) & 3(yad) + (ybc) & 3(ybd) & 2(ycd) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

### Les formules d'inversion

Pour tout point  $y$  image de  $x$ , les cofacteurs  $2 \times 2$  de la matrice de Bézout donnent les valeurs  $Kx_1^4$ ,  $Kx_1^3x_2$ ,  $Kx_1^2x_2^2$ ,  $Kx_1x_2^3$  et  $Kx_2^4$  où  $K$  est un polynôme du second degré en  $x$ . Ils nous permettent donc de déterminer  $x_1$  et  $x_2$ .

$K$  Si la courbe est une vraie cubique,  $K$  ne s'annule que pour son point double.

Si on utilise la méthode de la tangente, les cofacteurs de  $M_5$  obtenus par suppression de la dernière colonne et d'une des deux dernières lignes permettent d'obtenir directement  $Kx_1$  et  $Kx_2$ . Les formules sont linéaires par rapport à  $y$

### Cas d'exception

Posons d'abord  $A_i = (-1)^{i+1}\delta_i$  avec  $\delta_i$  déterminant de la matrice  $M$  privée de la colonne  $i$ , où



$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Par développement on obtient :

$$K = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \\ x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = C_1x_1^2 + C_2x_1x_2 + C_3x_2^2$$

Si  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  alors  $K$  est identiquement nul. L'équation peut correspondre à une droite comptée trois fois. Dans ce cas  $|M_5| = \mathcal{I}^3$ . S'il y a un ou plusieurs points de base, nous aurons également  $K \equiv 0$  mais ce cas a été exclu.

### Calcul du point double de la cubique

Le problème se ramène à trouver le triplet  $(y_1, y_2, y_3)$  qui annule les cofacteurs. Si on utilise la matrice de Bézout, les équations associées sont du second degré en  $(y_1, y_2, y_3)$  : le problème est difficile.

Si on part de la méthode de la tangente, on a deux équations linéaires homogènes en  $(y_1, y_2, y_3)$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 &= 0 \\ \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 2(ab)_1 & 3(ac)_1 & 3(ad)_1 + (bc)_1 & (bd)_1 \end{vmatrix} \dots$$

et où  $(ab)_1$  est le cofacteur de  $(ab)$  associé à  $y_1$ , i.e.  $(ab)_1 = a_2b_3 - a_3b_2$ ,  $(ab)_2$  est le cofacteur de  $(ab)$  associé à  $y_2$ , i.e.  $(ab)_2 = -(a_1b_3 - a_3b_2) \dots$

On en déduit la solution :

$$y_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \quad y_2 = -(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1); \quad y_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

On peut vérifier que ces trois expressions ne sont généralement pas factorisables : elles sont donc premières entre elles.

### 3.1.3 Les degrés supérieurs

Pour une courbe paramétrique de degré  $n$  l'équation paramétrique de la tangente est, en  $x$  de degré  $2 \times (n - 1)$ . Ses deux dérivées sont donc de degré  $2n - 3$  et comportent donc  $2n - 2$  termes.

On peut également construire  $3 \times (n - 2)$  équations :

$$P_i \times x_1^j x_2^{n-2-j} = x_1^j x_2^{n-2-j} y_i; \quad i = 1, \dots, 3, \quad j = 0, \dots, n - 2.$$

la partie gauche des équations est de degré  $2n - 3$ ; la partie droite est de degré  $n - 3$ .

Si on rajoute les équations des dérivées de la tangente, on peut bâtir une matrice carrée  $(3n - 4) \times (3n - 4)$

$$M = \left( \begin{array}{c|c} (3n - 6) \times (2n - 2) & (3n - 6) \times (n - 2) \\ \hline & 0 \\ & 2 \times (n - 2) \\ \hline 2 \times (2n - 2) & 2 \times (n - 2) \end{array} \right)$$

Nous donnons l'expression de cette matrice dans le cas  $n = 4$ ,  $y_i = a_1 x_1^4 + b_i x_1^3 x_2 + c_1 x_1^2 x_2^2 + d_i x_1 x_2^3 + e_i x_2^4$  :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & 0 & y_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & y_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & 0 & y_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & y_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & y_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Où  $A_i, B_i \dots$  correspondent aux coefficients en  $x_1^{2n-3}, x_1^{2n-2} x_2, \dots$  de la dérivée de l'équation de la tangente par rapport à  $x_i$ .

On peut vérifier que :

- si la paramétrisation est irréductible le déterminant de la matrice est l'équation implicite de la courbe,
- si la paramétrisation est propre, en remplaçant les  $y_i$  par  $P_i$ , les cofacteurs de  $M$  correspondant à la sous-matrice 0 valent  $K x_1^{n-3}, K x_1^{n-4} x_2$ ,

...  $Kx_2^{n-3}$  (où  $K$  est un polynôme de degré  $(n-1) \times (n-2)$  dont les racines sont les antécédents des  $\frac{1}{2}(n-1) \times (n-2)$  points doubles de la courbe). Nous disposons pour déterminer  $x$  de  $n-2$  couples de polynômes. Ces derniers sont de degré  $n-2$  par rapport à  $y_2$ .

Dans le cas  $n=4$  nous avons pu vérifier que généralement :

– les deux solutions :

$$x' = (MC_{7,7}, MC_{7,8}) \text{ et } x'' = (MC_{8,7}, MC_{9,8})$$

sont linéairement indépendantes, où  $MC_{i,j}$  est le cofacteur  $(i,j)$  de la matrice  $M$ ,

- toutes les solutions  $x_1x' + x_2x''$  sont acceptables,
- il n'y a pas d'autre solution de degré 2 en  $y_2$ ,
- il n'y a pas de solution de degré 1 en  $y_2$ .

Nous n'avons pas cette fois une solution optimale, mais un ensemble de solutions, combinaisons linéaires de deux solutions. En plus des points doubles, la première solution échouera si  $x = (0, 1)$ , la seconde si  $x = (1, 0)$ .

### 3.2 Condition pour que trois courbes planes aient un point commun ; calcul de ses coordonnées

Toujours en préambule à l'étude des surfaces paramétriques, on est amené à déterminer la condition pour que trois courbes aient au moins un point commun et, quand ce point est unique, à en calculer les coordonnées.

Pour trois droites, la condition s'exprime comme le déterminant  $3 \times 3$  des coefficients des trois droites. Le calcul du point commun s'obtient comme l'intersection de deux droites distinctes prises parmi les trois droites.

Pour les courbes de degré supérieur le problème se complique notablement.

### 3.2.1 Condition pour que trois coniques aient un point commun : la méthode de Salmon

Soit

$$\begin{cases} P_1(x) = a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + 2f_1x_2x_3 + 2g_1x_1x_3 + 2h_1x_1x_2 = 0 \\ P_2(x) = a_2x_1^2 + b_2x_2^2 + c_2x_3^2 + 2f_2x_2x_3 + 2g_2x_1x_3 + 2h_2x_1x_2 = 0 \\ P_3(x) = a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3x_3^2 + 2f_3x_2x_3 + 2g_3x_1x_3 + 2h_3x_1x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

l'équation générale de trois coniques du plan projectif.

L'élimination de  $x$  par la méthode des résultants n'est pas envisageable, du moins formellement : les expressions intermédiaires dépassent très largement les possibilités des calculateurs formels actuels.

On trouve dans Salmon ??, des formules relativement simples pour des formes particulières de coniques mais assez lourdes dans le cas général : il exprime la condition pour que trois coniques aient un point commun par :

$$T^2 + 8 |M| = 0 \quad (3.8)$$

où

$$\begin{aligned} T = & (abc)^2 + 4(abf)(acf) + 4(bcg)(bag) + 4(cah)(cbh) \\ & + 8(afg)(bfg) + 8(afh)(cfh) + 8(cgh)(bgh) - 8(agh)(bcf) \\ & - 8(bhf)(cag) - 8(cfg)(abh) + 4(abc)(fgh) - 8(fgh)^2 \end{aligned}$$

avec comme précédemment  $(abc) = a \wedge b \wedge c$ ,  $(abf) = a \wedge b \wedge f$ , ... et

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & F_1 & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & F_2 & G_2 & H_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & F_3 & G_3 & H_3 \\ A_{23} & B_{23} & C_{23} & F_{23} & G_{23} & H_{23} \\ A_{13} & B_{13} & C_{13} & F_{13} & G_{13} & H_{13} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & F_{12} & G_{12} & H_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A_1 &= b_1 c_1 - f_1^2 & B_1 &= c_1 a_1 - g_1^2 & C_1 &= a_1 b_1 - h_1^2 \\ F_1 &= 2g_1 h_1 - 2a_1 f_1 & G_1 &= 2h_1 f_1 - 2b_1 g_1 & H_1 &= 2f_1 g_1 - 2c_1 h_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } A_{23} &= b_2 c_3 + c_2 b_3 - 2f_2 f_3 & F_{23} &= 2g_2 h_3 + 2h_2 g_3 - 2a_2 f_3 - 2a_3 f_2 \\ B_{23} &= c_2 a_3 + c_3 a_2 - 2g_2 g_3 & G_{23} &= 2h_2 f_3 + 2f_2 h_3 - 2b_2 g_3 - 2b_3 g_2 \\ C_{23} &= a_2 b_3 + a_3 b_2 - 2h_2 h_3 & H_{23} &= 2f_2 g_3 + 2g_2 f_3 - 2c_2 h_3 - 2c_3 h_2 \end{aligned}$$

Et où  $A_2, B_2, \dots, A_3, B_3, \dots, A_{13}, B_{13}, \dots, A_{12}, B_{12}, \dots$  s'obtiennent par permutation des indices.

Développé, le polynôme  $T^2 + 8|M|$  comporte 21 894 termes. Il est du 12ème degré par rapport à l'ensemble des coefficients des trois coniques ; il est du 4ème degré par rapport aux coefficients  $a, b, c, f, g$  ou  $h$ . Il n'admet pas de factorisation rationnelle.

Cette forme est difficilement manipulable : nous avons été amenés à en proposer une autre, mais il est nécessaire de rappeler au préalable la définition et les principales propriétés du Jacobien de trois coniques.

### 3.2.2 Condition pour que trois coniques aient un point commun : nouvelle formulation

#### Le Jacobien de trois coniques

Salmon en donne la définition :

“Le lieu du point dont les polaires par rapport à trois coniques données concourent en même point, est une courbe du troisième degré qu'on appelle le Jacobien des trois coniques<sup>2</sup>.”

Le Jacobien est formé par l'ensemble des points singuliers de l'application  $x \rightarrow (P_1(x), P_2(x), P_3(x))$ . Son expression est :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \partial^1 P_1 & \partial^2 P_1 & \partial^3 P_1 \\ \partial^1 P_2 & \partial^2 P_2 & \partial^3 P_2 \\ \partial^1 P_3 & \partial^2 P_3 & \partial^3 P_3 \end{vmatrix} = 0$$

où  $P_1, P_2$  et  $P_3$  représentent les équations des trois coniques. D'où :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + g_1 x_3 + h_1 x_2 & b_1 x_2 + f_1 x_3 + h_1 x_1 & c_1 x_3 + f_1 x_2 + g_1 x_1 \\ a_2 x_1 + g_2 x_3 + h_2 x_2 & b_2 x_2 + f_2 x_3 + h_2 x_1 & c_2 x_3 + f_2 x_2 + g_2 x_1 \\ a_3 x_1 + g_3 x_3 + h_3 x_2 & b_3 x_2 + f_3 x_3 + h_3 x_1 & c_3 x_3 + f_3 x_2 + g_3 x_1 \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme homogène du troisième degré en  $x$  qu'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & -(agh)x_1^3 + (bfh)x_2^3 - (cfg)x_3^3 \\ & + ((bch) + (bfg))x_2^2x_3 + ((afg) - (ach))x_1^2x_3 + ((cgh) - (acf))x_3^2x_1 \\ & + ((abf) + (bgh))x_1x_2^2 + ((abg) - (afh))x_1^2x_2 - ((cfh) - (bcg))x_2x_3^2 \\ & + (2(fgh) + (abc))x_3x_2x_1 \end{aligned}$$

2. On retrouve dans d'autres ouvrages cette même cubique sous le nom de Hessien ou de Caleyenne. Sans vouloir trancher entre Jacobi, Hesse, et Caley sur la paternité de cette courbe, nous conserverons par la suite le nom de Jacobien (figure 3.1).

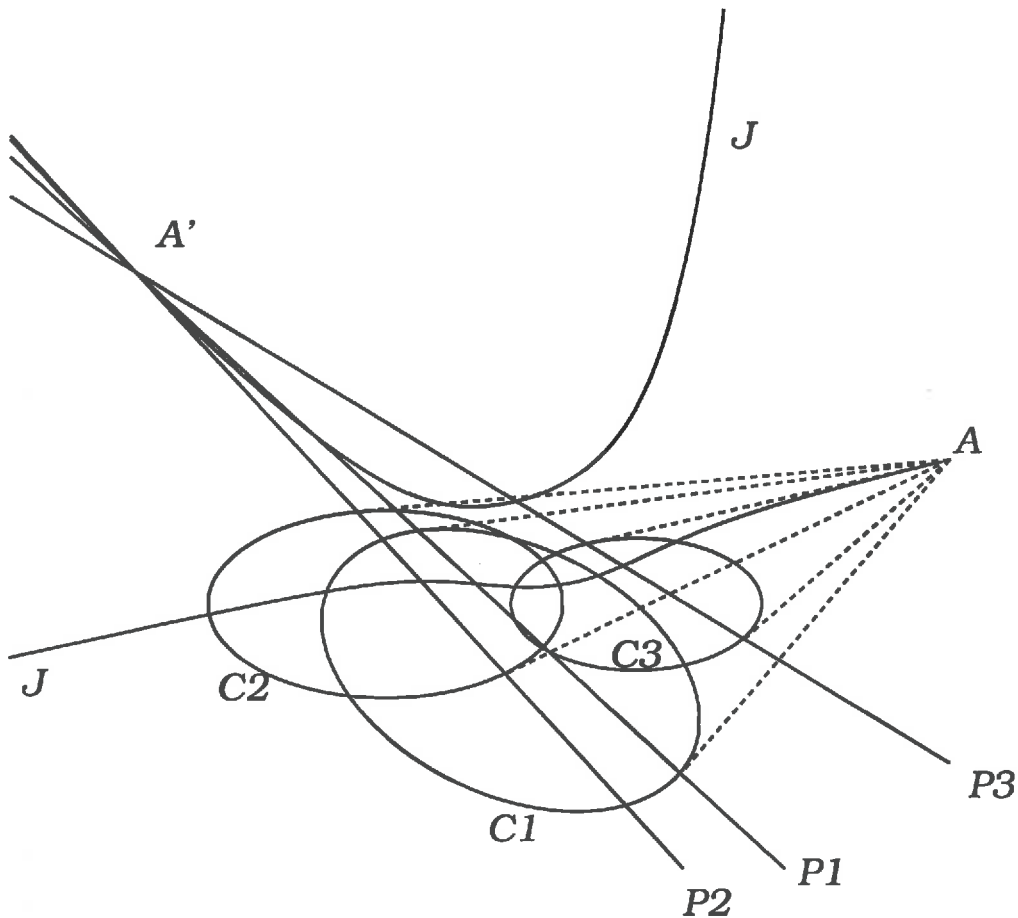


FIG. 3.1 – Le Jacobien  $J$  est une cubique associée aux trois coniques  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  et  $C_3 = 0$ . Il est représenté ici en deux morceaux. Par définition, les polaires  $P_1, P_2, P_3$ , associées à tout point  $A$  de  $J$ , par rapport aux trois coniques, sont concourantes en un point  $A'$  de  $J$ . Comme la réciproque est vraie, on dit que  $A$  et  $A'$  sont conjugués.

**Définition 1** On appelle faisceau de deux coniques, l'ensemble des coniques qui passent par les points d'intersection de ces deux coniques. Soit  $C_1 = 0$  et  $C_2 = 0$  l'équation de deux coniques. L'équation générale d'une conique de ce faisceau s'écrit :  $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ . Le faisceau est dit dégénéré si les deux coniques de départ ont une droite en commun ou sont confondues.

**Lemme 1**  $\mathcal{J} \equiv 0$  si et seulement si les trois coniques  $P_1, P_2$  et  $P_3$  appartiennent au même faisceau de coniques.

**Démonstration :**

Si les trois coniques appartiennent au même faisceau on a, quitte à inverser l'ordre des indices, les relation :  $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2 \Rightarrow \partial^i P_3 = \lambda \partial^i P_1 + \mu \partial^i P_2$ ,  $i = 1, \dots, 3 \Rightarrow \text{rang } \mathcal{J} = 0 \Rightarrow \mathcal{J} \equiv 0$

Réciproquement si  $\mathcal{J} \equiv 0$  on a, par exemple :  $\partial^i P_3 = \lambda \partial^i P_1 + \mu \partial^i P_2$ ,  $i = 1, \dots, 3 \Rightarrow \sum x_i \partial^i P_3 = \lambda \sum x_i \partial^i P_1 + \mu \sum x_i \partial^i P_2 \Rightarrow P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2$

□

Le Jacobien de trois coniques possède trois propriétés importantes [Picquet, 1882] :

- si trois coniques du plan projectif ont un point en commun, leur Jacobien a un point double en ce point,
- si trois coniques du plan projectif ont deux points en commun, leur Jacobien a deux points doubles en ces points ; il est donc décomposé en une droite et une conique,
- si trois coniques du plan projectif ont trois points en commun, leur Jacobien a trois points doubles en ces points ; il est donc décomposé en trois droites.

### Nouvelle formulation

La première propriété nous permet de trouver une nouvelle forme à la condition "trois coniques ont un point commun" : le point double de  $\mathcal{J}$  est un point singulier et doit satisfaire aux trois conditions :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{J} = 0, \quad i = 1, \dots, 3$$



Soit :

$$\begin{cases} -3(agh)x_1^2 + ((abf) + (bgh))x_2^2 + ((cgh) - (acf))x_3^2 + (2(fgh) + (abc))x_2x_3 \\ + (2(afg) - 2(ach))x_1x_3 + (2(abg) - 2(afh))x_1x_2 = 0 \\ \\ ((abg) - (afh))x_1^2 + 3(bfh)x_2^2 + (-cfh) + (bcg)x_3^2 + (2(bch) + 2(bfg))x_2x_3 \\ + (2(fgh) + (abc))x_1x_3 + (2(abf) + 2(bgh))x_1x_2 = 0 \\ \\ ((afg) - (ach))x_1^2 + ((bch) + (bfg))x_2^2 - 3(cfg)x_3^2 + (-2(cfh) + 2(bcg))x_2x_3 \\ + (2(cgh) - 2(acf))x_1x_3 + (2(fgh) + (abc))x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Ces trois équations peuvent être considérées comme trois coniques du plan projectif ; elle ne sont pas, dans le cas général, linéairement dépendantes des trois coniques de départ  $C_1, C_2, C_3$ .

En considérant comme inconnues les expressions  $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$  nous disposons d'un système de six équations homogènes à six inconnues : la condition de compatibilité implique :

$$|\mathcal{A}| = 0$$

où  $\mathcal{A}$  vaut

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 2f_1 & 2g_1 & 2h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 2f_2 & 2g_2 & 2h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 2f_3 & 2g_3 & 2h_3 \\ -3(agh) & (abf) + (bgh) & (cgh) - (acf) & 2(fgh) + (abc) & 2(afg) - 2(ach) & 2(abg) - 2(afh) \\ (abg) - (afh) & 3(bfh) & -(cfh) + (bcg) & 2(bch) + 2(bfg) & 2(fgh) + (abc) & 2(abf) + 2(bgh) \\ (afg) - (ach) & (bch) + (bfg) & -3(cfg) & -2(cfh) + 2(bcg) & 2(cgh) - 2(acf) & 2(fgh) + (abc) \end{bmatrix}$$

En développant cette expression, on retrouve la condition proposée par Salmon mais la formule proposée est plus concise. Elle permet surtout de voir qu'elle peut s'exprimer uniquement en fonction des déterminants  $(abc), (abf) \dots$

En effet, en utilisant l'expansion de Laplace par rapport au trois premières lignes de  $\mathcal{A}$ , il vient :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 \sum_{k=j+1}^6 (-1)^{1+i+2+j+3+k} \delta(i, j, k) \bar{\delta}(i, j, k)$$

où

- $\delta(i, j, k)$  est le déterminant de la sous-matrice  $3 \times 3$  composée des trois premières lignes et des colonnes  $(i, j, k)$  de  $\mathcal{A}$ ,

- $\bar{\delta}(i, j, k)$  est le déterminant de la sous-matrice  $3 \times 3$  composée des trois dernières lignes et des colonnes  $(i', j', k')$  de  $\mathcal{A}$  complémentaires de  $(i, j, k)$  ( $i' \neq (i, j, k), j' \neq (i, j, k), k' \neq (i, j, k)$  et  $i' < j' < k'$ ).

Le nombre de termes de  $|\mathcal{A}|$  est le le nombre de triplets  $(i, j, k)$  tels que  $1 \leq i < j < k \leq 6$  soit  $\binom{6}{3} = 20$ .

Comme  $\delta(1, 2, 3) = (abc)$ ,  $\delta(1, 2, 4) = 2(abf) \dots$  et que les  $\bar{\delta}(i, j, k)$  sont des polynômes homogènes du troisième degré par rapport à  $(abc), (abf) \dots$ ,  $|\mathcal{A}|$  est un polynôme homogène du quatrième degré par rapport à ces sous-déterminants au nombre de 20. Ce polynôme comporte 287 termes mais se simplifie.

En effet les 20 sous-déterminants ne sont pas algébriquement indépendants et des regroupements sont possibles. En pratique nous avons été amenés à :

- partitioner le polynôme en fonction des puissances de  $(a, b, c, f, g, h)$  : cette partition conduit à 28 sous-polynômes,
- prendre chacun de ces polynômes et tenter la factorisation : elle se fait pour 17 d'entre eux,
- essayer empiriquement pour les 11 sous-polynômes restants d'utiliser les relations existantes entre les sous-déterminants.

On aboutit à un polynôme composé de 60 termes

### 3.2.3 Équation du point commun

Les méthodes pour trouver, quand il existe, le point commun à trois coniques sont nombreuses mais sont loin d'être algorithmiquement équivalentes. La méthode naturelle, consistant à calculer les quatre intersections des deux premières coniques, puis à tester si l'une de ces intersections appartient à la troisième est particulièrement grossière : il n'est pas raisonnable de résoudre des équations du quatrième degré, alors que la solution, si elle est unique, s'exprime rationnellement en fonction des coefficients des trois coniques.

Pour le calcul du point commun à trois coniques, nous proposons quand il existe et est unique :

- de prendre le système composé par cinq des six coniques définies par  $\mathcal{A}$  et de le résoudre comme un système linéaire homogène à six inconnues

$(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$  (voir addendum de de la deuxième partie du quatrième chapitre)).

Supprimons par exemple la dernière ligne ( $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_3} = 0$ ).

On vérifie que :

$$\begin{array}{lll} \Delta_{6,1} = x_1^2 Q_6 & -\Delta_{6,2} = x_2^2 Q_6 & \Delta_{6,3} = x_3^2 Q_6 \\ -\Delta_{6,4} = x_2 x_3 Q_6 & \Delta_{6,5} = x_1 x_3 Q_6 & -\Delta_{6,6} = x_1 x_2 Q_6 \end{array}$$

où  $\Delta_{i,j}$  est le cofacteur  $(i, j)$  de  $\mathcal{A}$ ,  $x$  est le vecteur des coordonnées homogènes du point commun au trois coniques,  $Q_6$  est un polynôme qui se décompose  $Q_6 = Kx_3$  : il constitue la partie "parasite" de la solution.

– de considérer les cas suivants :

- Si  $Q_6 \neq 0$  on peut prendre  $x = (x_1 Q_6, x_2 Q_6, x_3 Q_6)$  puisque les coordonnées homogènes sont définies à un facteur près.
- Sinon il faut reprendre les calculs en supprimant la ligne 5 ( $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v} = 0$ ) au lieu de la ligne 6. Le parasite  $Q_5$  se décompose cette fois en  $Kx_2$ . Si  $Q_5 \neq 0$  alors  $x_2 \neq 0$  et on peut prendre  $(x) = (x_1 Q_5, x_2 Q_5, x_3 Q_5)$
- sinon il faut supprimer la ligne 4. La partie parasite  $Q_4$  se décompose cette fois en  $Kx_1$  et on peut prendre  $x = (x_1 Q_5, x_2 Q_5, x_3 Q_5)$

Dans le cas  $K = 0$  l'algorithme aboutit à la solution  $x = (0, 0, 0)$  qui est impossible. En fait, on peut vérifier que si  $K = 0$ , tous les sous-déterminants  $5 \times 5$  de  $\mathcal{A}$  sont nuls :  $\mathcal{A}$  est au plus de rang 4. Les trois coniques de départ ont au moins deux points communs qui ne peuvent donc généralement s'exprimer de manière rationnelle.

### 3.2.4 Cas particuliers

On vérifie que la méthode peut s'adapter aux cas où les coniques passent toutes par un ou plusieurs points connus.

Si par exemple, les trois coniques passent par le point  $(0, 0, 0)$ , le coefficient associé à  $x_3^2$  est nul pour les trois coniques. La condition s'exprime comme le déterminant de la matrice  $\mathcal{A}$  privée de la troisième colonne et de la dernière ligne.

Si les trois coniques sont des formes bilinéaires (pas de terme en  $x_1^2$  ni en  $x_2^2$ ), elles passent par les point à l'infini de coordonnées  $(1, 0, 0)$  et

$(0, 1, 0)$ . La condition pour qu'elles aient un point commun s'exprime comme le déterminant de la matrice  $\mathcal{A}$  privée des colonnes 2 et 3 et des lignes 4 et 5.

Si les trois coniques sont des cercles, elle passent par les point cycliques :  $(1, \sqrt{-1}, 0)$  et  $(1, -\sqrt{-1}, 0)$ . On doit alors supprimer de  $\mathcal{A}$  les colonnes 1 (ou 2) et 6 et les lignes 5 et 6.

On calculera le point supplémentaire d'intersection, quand il est unique, à l'aide de sous-déterminants de la matrice  $\mathcal{A}$ .

### 3.2.5 Généralisation : condition pour que trois cubiques aient un point d'intersection : calcul de ce point quand il est unique

Nous disposons de 3 équations homogènes  $P_i x = 0, i = 1, 3$ . Le jacobien des trois cubiques se calcule de manière analogue au cas des coniques.

$$\mathcal{J} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \partial^1 P_1 & \partial^2 P_1 & \partial^3 P_1 \\ \partial^1 P_2 & \partial^2 P_2 & \partial^3 P_2 \\ \partial^1 P_3 & \partial^2 P_3 & \partial^3 P_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\mathcal{J}$  est un polynôme homogène du sixième degré par rapport à  $x$ . Il est identiquement nul si les trois cubiques font parties d'un même faisceau. Ses trois dérivées  $\partial^i \mathcal{J}, i = 1, \dots, 3$ , sont donc du cinquième degré. Elles s'annulent au point d'intersection des trois courbes car le jacobien a un point double en ce point : nous disposons donc de trois équations.

Si on ajoute les 18 équations :

$$P_i U = 0, i = 1, 3 ; U \in \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2\}$$

On dispose d'un système de  $3+18=21$  équations qu'on peut considérer comme un système homogène à 21 inconnues  $x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_1^4 x_2 \dots$

Une condition nécessaire pour que ce système soit compatible est que le déterminant de la matrice  $21 \times 21$  des coefficients associés soit nul.

Les sous-déterminants  $20 \times 20$  de la matrice permettent de calculer les valeurs  $x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_1^4 x_2 \dots$ , donc de trouver les valeurs  $x$  recherchées.

#### Remarque

Il est clair que la condition est nécessaire et il semble qu'elle soit également suffisante, mais nous n'avons pas réussi à établir un tel résultat.

La généralisation aux degrés supérieurs à trois est assez difficile. Les formules ne "tombent pas juste" comme c'était le cas pour le calcul de la

forme implicite d'une courbe paramétrique plane: il y plus d'équations que d'inconnues mais certaines sont linéairement dépendantes, même quand les trois courbes n'ont aucun point commun.

## Rationalité

*La rationalité de la solution unique d'un système algébrique fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre. Nous donnons, sous la forme d'un projet d'article, deux démonstrations. La première très générale établit le résultat de manière algébrique. La seconde dans un cadre plus restreint, propose une démonstration "constructiviste" qui permet de calculer effectivement la solution. Ce travail a été fait en collaboration avec Rachid Senoussi, chercheur à l'Unité de Biométrie de l'INRA d'Avignon.*



# Rationalité et Procédure de Calcul de la Solution Unique d'un Système Algébrique

Franck Aries et Rachid Senoussi

*Résumé.* Soit  $\bar{K}$  un corps commutatif algébriquement clos et de caractéristique 0 et  $\mathcal{P} = \{P_i(x) = 0, i \in I\}$  un système d'équations algébriques de  $\bar{K}[X_1, \dots, X_p]$ . On démontre que l'unicité de la solution de  $\mathcal{P}$  implique son appartenance au plus petit sous corps contenant les coefficients des  $P_i$ . Une procédure de calcul effectif de la solution est proposée pour  $p = 2$ . Le théorème est illustré par quelques applications en géométrie.

## 3.3 Rationalité de la solution d'un système algébrique

Le problème est de démontrer que l'unicité de la solution d'un système d'équations polynomiales à plusieurs variables implique que les coordonnées de celle ci peuvent s'exprimer sous forme rationnelle à partir des coefficients des polynômes.

La rationalité de la solution est facile à établir pour des polynômes à une variable car c'est une conséquence de la théorie de Galois, mais elle est plus difficile à établir dans le cas de deux variables. En dimension une et deux une démonstration "constructiviste" de la solution est proposée. La démonstration générale est théorique, elle utilise la théorie de Galois sur les extensions, mais elle ne fournit pas de procédure pour le calcul de cette solution. Quelques applications viennent ensuite illustrer l'intérêt de ce résultat. On utilise par exemple cette procédure pour trouver une paramétrisation rationnelle et canonique des courbes algébriques planes de degré  $d$  possédant un point multiple d'ordre  $d - 1$ .

### Rappels et notations

Les équations algébriques qui nous intéressent sont principalement à coefficients dans l'anneau  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, mais il ne coûtera rien de raisonner dans le



cadre plus général d'un domaine d'intégrité  $A$  (anneau commutatif, unifié et sans diviseurs de zéro) quelconque. On supposera que son corps des fractions  $K$  est de caractéristique zéro et on notera  $\bar{K}$  sa clôture algébrique et  $K_\pi$  son corps primitif. On adoptera les notations classiques  $K[X_1, \dots, X_p]$  pour l'anneau des polynômes à  $p$  indéterminées et  $K(X_1, \dots, X_p)$  pour son corps des fractions rationnelles à coefficients dans  $K$ . On rappelle que pour  $p = 1$ ,  $K[X]$  est euclidien, donc principal et factoriel mais  $K[X_1, \dots, X_p]$  est lui, *seulement* noetherien et factoriel.

Par ailleurs, une extension  $\Sigma$  de  $K$  sera dite *normale* si elle est algébrique et de dimension finie sur  $K$  et si tout polynôme irréductible de  $K[X]$  ayant une racine dans  $\Sigma$  se décompose entièrement dans  $\Sigma$ .

Un polynôme sera souvent écrit

$$P(x) = \sum_{l \in J} \alpha_l x^l$$

avec  $l = (l_1, \dots, l_p)$  multi-indice d'un ensemble fini  $J$  de  $\mathbb{N}^p$  et  $x^l = x_1^{l_1} \times \dots \times x_p^{l_p}$ . Pour tout vecteur  $x = (x_1, \dots, x_p)$  de dimension  $p$  et tout indice  $j = 0, \dots, p$ , on écrira  $x^{(j)} = (x_1, \dots, x_j)$  avec  $x^{(0)} = 1$  et  $x^{(p)} = x$ .

Voici le résultat principal de l'article: soit une famille quelconque d'équations polynomiales de  $K[X_1, \dots, X_p]$

$$\mathcal{P} = \{P_i(x) = \sum_{l \in J_i} \alpha_{i,l} x^l = 0, i \in I\}$$

**Théorème 1** *Si le système  $\mathcal{P}$  possède une unique solution  $\nu^{(p)} = (\nu_1, \dots, \nu_p)$  dans  $\bar{K}^p$ , alors il existe  $I^* \subset I$  fini tel que*

$$\nu_j \in K_{\mathcal{P}} = K_\pi(\alpha_{i,l}, i \in I^*, l \in J_i), \forall j = 1, \dots, p.$$

De même, on notera  $A_\pi$  l'intersection de tous les sous anneaux unitaires de  $A$  et  $A_{\mathcal{P}}$  le plus petit sous anneau unitaire contenant les coefficients  $\alpha_{i,l}$ . Le tableau qui suit montre les principales injections canoniques entre ces différentes structures.

$$\begin{array}{ccccc} A_\pi & \subset & A_{\mathcal{P}} & \subset & A \\ \cap & & \cap & & \cap \\ K_\pi & \subset & K_{\mathcal{P}} & \subset & K \subset \bar{K} \end{array} \quad (3.9)$$

### 3.4 Démonstration formelle

- 1-  $K[X_1, \dots, X_p]$  est noetherien, il possède donc la propriété des suites ascendantes pour les idéaux et on peut sans perte de généralité se restreindre pour la suite à un système fini d'équations, noté

$$\mathcal{P} = \{P_i(x) = \sum_{l \in J_i} \alpha_{i,l} x^l = 0, 1 \leq i \leq n\}. \quad (3.10)$$

- 2- Supposons donc, que  $\mathcal{P}$  admet une seule solution  $\nu^{(p)} = (\nu_1, \dots, \nu_p)$  sur l'espace affine  $\overline{K}^p$  et pour tout  $i = 1, \dots, p$  posons  $K(\nu^{(j)}) = K(\nu_1, \dots, \nu_j)$ , c'est à dire la plus petite extension de  $K$  contenant les  $j$  premières coordonnées de  $\nu$ . On a donc la suite d'inclusions  $K = K(\nu^{(0)}) \subset K(\nu^{(1)}) \subset \dots \subset K(\nu^{(p)}) \subset \overline{K}$ :

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer par itération que  $K(\nu^{(j)}) = K(\nu^{(j-1)})$  pour  $j = p, \dots, 1$

- 3- Prenons la famille d'équations  $\mathcal{P}^{(p)} = \{P_i^{(p)}(x_p) = 0; i = 1, \dots, n\}$  où les  $P_i^{(p)}(X_p) = P_i(\nu_1, \dots, \nu_{p-1}, X_p)$  sont des polynômes en l'indéterminée  $X_p$  et à coefficients dans le corps  $K(\nu^{(p-1)})$  et calculons

$\phi = \text{pgcd}(P_i^{(p)}; i = 1, \dots, n)$ . Le polynôme  $\phi$  se décompose en facteurs irréductibles  $\phi = \phi_1^{r_1} \dots \phi_s^{r_s}$  et comme  $\nu_p$  est solution de  $\phi$ , on a  $d^p \phi \geq 1$ . On peut supposer que  $\phi_1$  est le polynôme minimal de  $\nu_p$  et considérer la plus petite extension normale  $\Sigma$  de  $K(\nu^{(p-1)})$  contenant  $\nu_p$ . Une telle extension existe [van der Waerden, 1991], elle correspond au corps de décomposition de  $\phi_1$ .

Par construction  $K(\nu^{(p-1)}) \subset K(\nu^{(p)}) \subset \Sigma$  et puisque  $K$  est de caractéristique 0, toutes les extensions sont séparables et on peut appliquer la théorie de Galois sur les extensions algébriques. On a seulement les possibilités suivantes:

- a- La dimension  $[\Sigma : K(\nu^{(p-1)})] = 1$ , et ceci signifie que  $\nu_p$  est dans  $K(\nu^{(p-1)})$ : c.à.d. il existe deux polynômes  $A_p, B_p$  de  $K[\nu_1, \dots, \nu_{p-1}]$  tels que  $\nu_p = A_p(\nu_1, \dots, \nu_{p-1})/B_p(\nu_1, \dots, \nu_{p-1})$ .
- b- La dimension  $[\Sigma : K(\nu^{(p-1)})] > 1$ . Il existe donc au moins deux racines conjuguées et distinctes de  $\phi_1$ , donc du système  $\mathcal{P}^{(p)}$ , donc de  $\mathcal{P}$  dans  $\Sigma^p$ . Or cela contredit l'hypothèse d'unicité car  $\Sigma \subset \overline{K}$ .

Ainsi on obtient  $K(\nu^{(p-1)}) = K(\nu^{(p)}) = \Sigma$ .

- 4- Pour établir la récurrence, supposons que l'on a prouvé l'égalité  $K(\nu^{(j)}) = K(\nu^{(p)})$ . Il existe donc des polynômes  $A_s^{(j)}, B_s^{(j)} \in K(\nu^{(j)})$  tels que  $\nu_s = A_s^{(j)}/B_s^{(j)}(\nu^{(j)})$ ,  $s = j+1, \dots, p$ , avec  $B_s^{(j)}(\nu^{(j)}) \neq 0$ ,  $\forall s = j+1, \dots, p$

Considérons le système rationnel  $\mathcal{R}^{(j)} = \{R_i^{(j)}(x_j) = 0, i = 1, \dots, n\}$  où  $R_i^{(j)}(X_p) = P_i(\nu^{(j-1)}, X_j, A_{j+1}^{(j)}/B_{j+1}^{(j)}(\nu^{(j-1)}, X_j), \dots, A_p^{(j)}/B_p^{(j)}(\nu^{(j-1)}, X_j))$ .

$\mathcal{R}^{(j)}$  équivaut à un système polynomial  $\mathcal{P}^{(j)} = \{P_i^{(j)}(x_j) = 0, i = 1, \dots, n\}$  de polynômes à coefficients dans le corps  $K(\nu^{(j-1)})$ . Le polynôme  $\psi = \text{pgcd}(P_i^{(j)}; 1 \leq i \leq n)$  se décompose en facteurs irréductibles  $\psi = \psi_1^{t_1} \dots \psi_k^{t_k}$ .

Comme  $\nu_j$  est solution de  $\psi$ , on peut supposer que  $\psi_1$  est le polynôme minimal de  $\nu_j$ . Soit  $\Omega$  le corps de décomposition de  $\psi_1$ , c'est une extension normale de  $K(\nu^{(j-1)})$  contenant  $\nu_j$  et on peut écrire  $K(\nu^{(j-1)}) \subset K(\nu^{(j)}) \subset \Omega \subset \bar{K}$ . De la théorie de Galois, on a seulement les possibilités :

- a- La dimension  $[\Omega : K(\nu^{(j-1)})] = 1$ , signifie qu'il existe deux polynômes  $N, M$  de  $K[\nu_1, \dots, \nu_{j-1}]$  tels que  $\nu_j = N/M(\nu_1, \dots, \nu_{j-1})$ .
- b- La dimension  $[\Omega : K(\nu^{(j-1)})] > 1$  et il existe donc au moins une racine conjuguée  $\mu_j$  distincte de  $\nu_j$ . Remarquons d'abord qu'il ne peut exister des indices  $s$  pour lesquels  $B_s^{(j)}(\mu_j) = 0$ . En effet  $\psi_1$  étant le polynôme minimal de  $\nu_j$ , sera minimal pour sa conjuguée  $\mu_j$ , divisera  $B_s^{(j)}$  et donc on aura  $B_s^{(j)}(\nu_j) = 0$ , contrairement à la définition de  $B_s^{(j)}$ .

Ainsi  $B_s^{(j)}(\mu_j) \neq 0, \forall s$ , mais alors par construction,

$$\mu^{(p)} = (\nu^{(j-1)}, \mu_j, A_{j+1}^{(j)}/B_{j+1}^{(j)}(\nu^{(j-1)}, \mu_j), \dots, A_p^{(j)}/B_p^{(j)}(\nu^{(j-1)}, \mu_j)).$$

est une solution du système  $\mathcal{P}$ , distincte de  $\nu^{(p)}$ . Ceci contredit une fois de plus l'hypothèse d'unicité de la solution.

On a donc prouvé que  $K(\nu^{(j-1)}) = K(\nu^{(j)}) = \Omega$ .

- 5- On ne change rien à la démonstration précédente, si on remplace  $K$  par le plus petit sous corps  $K_{\mathcal{P}}$  de  $K$  qui contient les coefficients du système  $\mathcal{P}$ . Autrement dit, si  $K_{\pi}$  est le corps primitif de  $K$ , on a

$$K_{\mathcal{P}} = K_{\pi}(\alpha_{i,l}, i \in I, l \in J_i) \text{ et la solution } \nu \text{ est dans l'espace affine } K_{\mathcal{P}}^p. \quad \square$$

### Corollaires

Soit  $P(x) \in \bar{K}[X_1]$  un polynôme de degré  $d$ ,  $\mathcal{P} = \{P\}$  réduit à un seul polynôme et  $q$  un entier quelconque  $1 \leq q \leq d$ .

**Corollaire 1** Si  $\nu$  est la seule racine de  $P$  ayant une multiplicité supérieure ou égale à  $q$ , alors  $\nu \in K_{\mathcal{P}}$ .

### Démonstration

Il s'agit de remarquer que  $\nu$  est l'unique solution du système d'équations :

$$\mathcal{P} = \{ P(x) = 0, DP(x) = 0, \dots, D^{(q-1)}P(x) = 0 \} \text{ et que les coefficients des polynômes dérivés } D^{(r)}P, r = 1, \dots, q-1 \text{ sont aussi dans } K_{\mathcal{P}}. \quad \square$$

Voici une deuxième conséquence du théorème. Sur  $\bar{K}$  algébriquement clos et de caractéristique nulle, considérons une application rationnelle  $S : \bar{K}^p \rightarrow \bar{K}^n$ ,  $S(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$  où

$$y_i = \frac{R_i(x)}{Q_i(x)}, \text{ avec } R_i, Q_i \in \bar{K}[X_1, \dots, X_p], i = 1, \dots, n.$$

$S$  est définie sur l'ouvert (de Zariski)  $D = \overline{K}^p - V(Q_i, 1 \leq i \leq n)$  [Perrin, 1995] et nous dirons qu'un point du support  $\Gamma = S(D)$  est *simple* s'il est l'image d'exactement un point de  $D$ .

**Corollaire 2** *Si  $\mu$  est un point simple du support  $\Gamma$ , alors les coordonnées de son antécédent (fibre)  $\nu = S^{-1}(\mu)$ , s'expriment rationnellement en fonction des coefficients des polynômes  $R_i, Q_i, i = 1, \dots, n$  et des coordonnées de  $\mu$ .*

**Démonstration**

Il suffit de considérer l'intersection des hypersurfaces algébriques de  $\overline{K}^p$  définies par les équations:

$$P_i(x) = \mu_i Q_i(x) - R_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\mu$  simple, signifie que la solution est unique et on conclut par le théorème.  $\square$

### 3.5 Démonstration constructiviste en dimensions 1 et 2

On va se restreindre au système (3.10) de  $n$  équations polynomiales à coefficients dans un domaine d'intégrité  $A$ .

Le cas de la dimension 1 est là pour rappeler la procédure et préciser les structures sous-jacentes et qui vont intervenir dans la suite. Il est bien clair que, une fois le système  $\mathcal{P}$  fixé, on peut remplacer en toute généralité  $A$  par  $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$  et  $K$  par  $K_{\mathcal{P}}$ , tout en gardant  $\overline{K}$ .

#### 3.5.1 La dimension 1

**Proposition 1** *Si le système,*

$$\mathcal{P} = \{P_i(x) = 0, \quad P_i \in A[X], \quad 1 \leq i \leq n\} \quad (3.11)$$

*possède une solution unique  $\nu$  dans  $\overline{K}$ , alors  $\nu \in K_{\mathcal{P}}$ .*

**Démonstration**

Elle repose sur l'algorithme d'Euclide.

**i- Recherche du pgcd:** Sur le corps  $K_{\mathcal{P}}$ , le pgcd des  $P_i$  existe et son calcul se fait entièrement dans  $K_{\mathcal{P}}$  avec l'algorithme d'Euclide:

$$Q_1 = P_1, \quad Q_i = \text{pgcd}(Q_{i-1}, P_i), \quad 2 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad Q_n = \text{pgcd}(P_1, \dots, P_n).$$

Si  $Q_n$  est de degré  $k$ , alors il s'écrit

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^k \gamma_i x^i \in K_{\mathcal{P}}[X], \quad \gamma_k \neq 0.$$

**ii- Identification de la solution:** L'unicité de la solution dans  $\overline{K}$  revient à poser  $Q_n(x) = a(x - \nu)^k$ ,  $a, \nu \in \overline{K}$  et la solution s'obtient alors par identification  $\nu = -\gamma_{k-1}/k\gamma_k \in K_{\mathcal{P}}$ .  $\square$

## 3.5.2 La dimension 2

Considérons le système,

$$\mathcal{P} = \{P_i(x) = 0, P_i \in A[X_1, X_2], 1 \leq i \leq n\}. \quad (3.12)$$

Notons  $\Gamma_i$  les courbes algébriques du plan  $\overline{K}^2$  associées aux  $P_i$  et  $\Gamma_{ij} = \Gamma_i \cap \Gamma_j$  leurs intersections.

Commençons par étudier le cas particulier d'une famille composée de deux polynômes  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2 \in \overline{K}[X_1, X_2]\}$ .

**Lemme 2** *Il existe un représentant de  $Q_{12} = \text{pgcd}(P_1, P_2)$  dans  $K_{\mathcal{P}}[X_1, X_2]$ .*

**Démonstration**

$$P_i(X_1) = \sum_{l_1} \left( \sum_{l_2} \alpha_{i, (l_1, l_2)} X_2^{l_2} \right) X_1^{l_1} = \sum_{i_1} A_{i, l_1} X_1^{i_1}, \quad i = 1, 2 \quad (3.13)$$

se décompose dans  $K_{\mathcal{P}}[X_1, X_2]$  en  $P_i(X_1, X_2) = \gamma_i(X_2) \tilde{P}_i(X_1, X_2)$  avec :

$\gamma_i(X_2) = \text{pgcd}(A_{i, l_1}(X_2); l_1 \geq 0)$  et  $\tilde{P}_i$  primitif. Maintenant si on considère les  $P_i$  comme éléments de l'anneau euclidien  $\overline{K}(X_2)[X_1]$ , et si on pose :

$\gamma_{12} = \text{pgcd}(\gamma_1, \gamma_2)$ ,  $\tilde{Q}_{12} = \text{pgcd}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ , on a  $Q_{12} = \gamma_{12} \tilde{Q}_{12}$ . D'après la proposition précédente,  $\gamma_{12} \in K_{\mathcal{P}}[X_2]$ . De même  $\tilde{P}_{12}$  se calcule par l'algorithme d'Euclide et ses coefficients sont dans  $K_{\pi}(A_{i, l_1}; i = 1, 2; l_1 = 0, \dots, k_i)$  et donc *a fortiori* dans  $K_{\mathcal{P}}(X_2)$  i.e. :

$$\tilde{Q}_{12}(X_1, X_2) = \sum_{l_1} \frac{\sum_{l_2} s_l X_2^{l_2}}{\sum_{l_2} t_l X_2^{l_2}} X_1^{l_1}, \quad l = (l_1, l_2)$$

avec  $s_l, t_l \in K_{\mathcal{P}}$ . Mais  $\tilde{Q}_{12}$  étant primitif se réduit alors à un polynôme :

$$Q_{12}(X_1, X_2) = \sum_l \rho_l X_1^{l_1} X_2^{l_2}, \quad \rho_l \in K_{\mathcal{P}}. \quad (3.14)$$

**Corollaire 3** *Si  $\Gamma_{12}$  possède une infinité de points dans  $\overline{K}^2$ , alors elle se décompose en une partie finie de points et en une courbe algébrique  $\tilde{\Gamma}_{12}$  associée à un polynôme  $\tilde{Q}_{12} \in K_{\mathcal{P}}[X_1, X_2]$ .*

**Démonstration**

$P_1$  et  $P_2$  admettent dans l'anneau factoriel  $\overline{K}[X_1, X_2]$  une décomposition unique en facteurs irréductibles (à un élément de  $\overline{K}$  près). Comme deux courbes distinctes et irréductibles ne peuvent admettre qu'un nombre fini de points en commun, on a donc :  $d^{\circ} Q_{12}(X) = d^{\circ} \text{pgcd}(P_1, P_2) \geq 1$ . On peut donc écrire  $P_i = Q_{ij} P_{ij}^*$  avec  $P_{12}^*, P_{21}^*$  premiers entre eux. Mais d'après ce qui précède, la décomposition se fait

dans  $K_{\mathcal{P}}$  i.e.  $Q_{ij}, P_{ij}^* \in K_{\mathcal{P}}[X_1, X_2]$ . La partie finie correspond à l'intersection des courbes associées à  $P_{12}^*, P_{21}^*$  et  $\bar{\Gamma}_{12}$  est la courbe associée au polynôme  $Q_{12}$ .  $\square$

Revenons à la situation générale (3.12).

**Proposition 2** *Si le système (3.12) possède une seule solution  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  dans  $\bar{K} \times \bar{K}$ , alors  $\nu$  est dans  $K_{\mathcal{P}} \times K_{\mathcal{P}}$ .*

**Démonstration**

1- L'unicité de la solution implique que les  $P_i$  sont premiers entre eux. De plus, comme conséquence du corollaire on peut se ramener au cadre suivant :

**H<sub>1</sub>** : *Les  $P_i$  sont deux à deux premiers entre eux.*

En effet, ayant déjà pris soin de supprimer les équations redondantes, supposons qu'il existe  $i, j$  tels que  $1 \leq d^{\circ} Q_{ij} \leq \inf(d^{\circ} P_1, d^{\circ} P_2)$ , on peut alors remplacer le système original  $\mathcal{P}$ , soit par le système  $\{P_{ij}^*(X) = 0, P_{ji}^*(X) = 0, P_l(X) = 0; l \neq i, j\}$ , soit par le système  $\{Q_{ij}(X) = 0, P_l(X) = 0; l \neq i, j\}$  car ils sont encore tous les deux dans  $K_{\mathcal{P}}[X_1, X_2]$ . Dans le premier cas  $P_{ij}^*$  et  $P_{ji}^*$  sont premiers entre eux et sont de degré strictement moindre que ceux de  $P_i, P_j$ , dans le second cas on a une équation en moins. En itérant la procédure, le système initial sera équivalent à un système de polynômes premiers entre eux et appartenant à  $K_{\mathcal{P}}[X_1, X_2]$ .

2- Sous l'hypothèse précédente, les intersections  $\Gamma_{ij}$  possèdent toutes un nombre fini de points et il en est de même de leur union

$$\Gamma = \cup\{\Gamma_{ij}; i < j\} = \{x^r = (x_1^r, x_2^r); 1 \leq r \leq l\}$$

Il n'est pas restrictif de supposer que:

**H<sub>2</sub>** : *Tous les points de  $\Gamma$  ont des ordonnées distinctes, i.e.  $x_2^r \neq x_2^s, \forall r \neq s$ .*

Si tel n'est pas le cas on effectue une transformation linéaire (du plan  $\bar{K}^2$ ) à coefficients dans le corps primitif  $K_{\pi}$ . Ceci est toujours possible, en prenant par exemple pour  $\delta \in K_{\pi}$ , la transformation :

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_2 + \delta x_1. \end{cases} \tag{3.15}$$

En effet, pour tout couple de points  $x^r, x^s$  de  $\Gamma$ , on a, soit  $x_1^r = x_1^s$  et alors  $x_2^r \neq x_2^s$  et tout  $\delta$  de  $K_{\pi}$  convient, soit  $x_1^r \neq x_1^s$  et dans ce cas il y a au plus un  $\delta_{r,s}$  pour lequel on ne peut trouver une transformation de ce type :

$$\delta_{r,s} = - \left( \frac{x_2^r - x_2^s}{x_1^r - x_1^s} \right)$$

Ces transformations linéaires ne changent pas la nature algébrique du problème car elles sont à coefficients dans  $K_{\pi}$  et comme le nombre de couples  $(r, s)$  est fini, il reste une infinité de valeurs  $\delta$  admissibles.

3- Si on considère la famille d'équations à une variable

$$S = \{P_i(x_1, \nu_2) = 0; 1 \leq i \leq n\}, \tag{3.16}$$

la méthode des résultants donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une racine commune  $\nu_1$ . Comme déterminant de la matrice de Sylvester de deux polynômes, le résultant  $R_{ij} = \text{Res}_{X_1}(P_i, P_j)$  est une expression polynomiale des coefficients  $A_{i,l_1}(X_2)$  des polynômes (3.13), il appartient donc à  $K_{\mathcal{P}}[X_2]$ . Ainsi  $\nu_2$  est solution du système:

$$\mathcal{R} = \{R_{i,j}(x_2) = 0; \forall i < j\} \quad (3.17)$$

Nous voici maintenant ramenés au cas d'un système  $\mathcal{R}$  unidimensionnel de  $K_{\mathcal{P}}[X_2]$  admettant au moins une solution  $\nu_2$ . Deux situations se présentent:

- a- La solution est unique et alors  $\nu_2 \in K_{\mathcal{P}}$ . De même, comme unique solution du système  $\mathcal{S}$  dans  $K_{\mathcal{P}}[X_1]$ ,  $\nu_1$  appartient aussi à  $K_{\mathcal{P}}$ .
- b- Il existe une deuxième solution  $\mu_2 \neq \nu_2$  de  $\mathcal{R}$ , mais alors  $R_{i,j}(\mu_2) = 0$  pour tout  $i < j$  entraîne l'existence d'au moins un  $\mu_1^{i,j}$  tel que  $(\mu_1^{i,j}, \mu_2) \in \Gamma_{ij}$  et nous avons encore deux cas à traiter :
  - b.1- soit les  $\mu_1^{i,j} = \mu_1$  sont tous identiques, et alors  $(\mu_1, \mu_2)$  est une deuxième solution de  $\mathcal{P}$ . Or ceci contredit l'hypothèse d'unicité,
  - b.2- soit, il existe  $(i, j), (k, l)$  tels que  $\mu_1^{i,j} \neq \mu_1^{k,l}$  et donc il existe deux points  $(\mu_1^{i,j}, \mu_2), (\mu_1^{k,l}, \mu_2)$  de  $\Gamma$  ayant même ordonnée  $\mu_2$ , or ceci est interdit par l'hypothèse  $H_2$ . □

### 3.5.3 Procédure de Calcul

Nous traitons le cas où la solution du système (3.12) existe et est unique.

- 1- On établit d'abord les équations du système (3.17) des résultants, puis on calcule une version unitaire de son *pgcd*:

$$Q_{\mathcal{R}}(X_2) = \sum_{i=0}^k \gamma_i X_2^i, \quad \gamma_k = 1.$$

C'est un polynôme en la variable  $X_2$  et on a  $k \geq 1$ . Car en effet  $Q_{\mathcal{R}} = 0$  entraîne l'existence d'au moins une courbe commune aux  $\Gamma_i$  et  $Q_{\mathcal{R}} = C$  constante non nulle, entraîne l'absence de solution commune. Or ces deux possibilités sont contraires aux hypothèses initiales.

- 2- On calcule  $\mu_2 = -\frac{1}{k}\gamma_{k-1}$ , puis  $Q_{\mathcal{R}}^*(X_2) = (X_2 - \mu_2)^k$ 
  - 2.1- Si  $Q_{\mathcal{R}} \neq Q_{\mathcal{R}}^*$ , l'hypothèse  $H_2$  n'est pas vérifiée. On effectue un changement de variable du type (3.15) et on recommence la procédure avec la nouvelle famille  $\mathcal{P}_{\delta} = \{P_{\delta,i}(x_1, x_2) = P_i(x_1, x_2 + \delta x_1); i = 1, \dots, n\}$ . Après un nombre fini d'essais, on trouvera un  $\delta \in K_{\pi}$ , pour lequel
  - 2.2-  $Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathcal{R}}^*$  et  $\mu_2$  sera l'unique solution du système  $\mathcal{R}$ .



3- On calcule ensuite le  $pgcd(\mathcal{S})$  du système (3.16) :

$$Q_{\mathcal{S}}(X_1) = \sum_{i=0}^m \sigma_i X_1^i$$

On a,  $m \geq 1$  et  $\mu_1 = -\frac{\sigma'_{m-1}}{m\sigma_m}$  est son unique solution.

En conclusion,  $(\mu_1, \mu_2 + \delta\mu_1)$  est la solution du système initial  $\mathcal{P}$ .

**Remarque.** Par division simultanée, on peut améliorer la procédure de descente vers le  $pgcd$  d'un système  $\mathcal{P}$  à une variable :

Si  $P_{i_1}$  est l'un des polynômes de plus petit degré, disons  $d_1$ , notons  $P_i^{(2)}$  le reste de la division euclidienne de  $P_i$  par  $P_{i_1}$  lorsque  $i \neq i_1$  et  $P_{i_1}^{(2)} = P_{i_1}$  sinon. Comme  $pgcd(P_{i_1}, P_i) = pgcd(P_{i_1}^{(2)}, P_i^{(2)})$ , on a  $pgcd(\mathcal{P}) = pgcd(\mathcal{P}^{(2)})$ .

Maintenant, à moins que les  $P_i$  ne soient tous proportionnels entre eux, il existe  $i_2$  tel que  $d^{\circ}P_{i_2}^{(2)} = d_2 < d_1$ , et  $d_2$  minimum. Il suffit alors d'itérer la procédure pour la famille  $\mathcal{P}^{(2)}$ .

### 3.5.4 Exemple

Voici une illustration du théorème en géométrie affine plane ; soit  $\Gamma$  une courbe algébrique plane d'équation

$$F(x) = \sum_l \alpha_l x_1^{l_1} x_2^{l_2} = 0, \quad l = (l_1, l_2) \quad (3.18)$$

de degré  $d$ , irréductible et admettant un point multiple  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  d'ordre  $d-1$  sur un corps  $\bar{K}$  algébriquement clos et de caractéristique 0. On sait alors [Samuel, 1986], [Lebesgue, 1949] que  $\Gamma$  est unicursale, irréductible et d'après le théorème de Lüroth admet une représentation paramétrique propre.

Nous montrons maintenant comment on peut trouver une paramétrisation canonique propre sans sortir du corps  $K_F = K_{\pi}(\alpha_{l_1 l_2} ; |l| \leq d)$ .

#### 1. Détermination du point multiple.

Comme  $\nu$  est d'ordre  $d-1$ , il est le seul point pour lequel toutes les dérivées partielles  $D^j F = \frac{\partial^{j_1} \partial^{j_2}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} F$ , jusqu'à l'ordre  $d-2$  vérifient :

$$F_j(x) = D^j F(x) = 0, \quad |j| = j_1 + j_2 = 0, \dots, d-2. \quad (3.19)$$

L'hypothèse d'unicité nous permet d'utiliser l'algorithme et de déterminer  $\nu_1, \nu_2 \in K_F$ . On améliore l'algorithme en remarquant que trois des équations suffisent généralement à déterminer le point multiple et que l'on réduit notablement les calculs en prenant celles de plus petit degré.

#### 2. Changement de repère.

En plaçant l'origine en  $\nu$ , l'équation (3.18) devient

$$G(x) = F(\nu + x) = 0.$$

$G$  est dans  $K_F[X_1, X_2]$  et possède (développement de Taylor au point  $\nu$ ), seulement deux composantes homogènes,  $G(x) = G^{(d)}(x) + G^{(d-1)}(x)$ . On peut alors prendre la paramétrisation classique  $y = tx$ , qui donne :

$$x_1(t) = -\frac{G^{(d-1)}(1, t)}{G^{(d)}(1, t)}; \quad x_2(t) = -\frac{tG^{(d-1)}(1, t)}{G^{(d)}(1, t)}$$

Identifions maintenant  $G^{(d)}$  et  $G^{(d-1)}$ , en utilisant encore un développement de Taylor, mais au point  $x$  :

$$G(x) = F(x + \nu) = F(x) + \nu_1 F_1(x) + \nu_2 F_2(x) + \dots$$

Il vient  $G^{(d)} = F^{(d)}$  et  $G^{(d-1)} = F^{(d-1)} + \nu_1(F_1)^{(d-1)} + \nu_2(F_2)^{(d-1)}$ .

Finalement, on a la paramétrisation propre et canonique (i.e.  $t = x_2/x_1$ ) :

$$x_1(t) = -\frac{F^{(d-1)}(1, t) + \nu_1(F_1)^{(d-1)}(1, t) + \nu_2(F_2)^{(d-1)}(1, t)}{F^{(d)}(1, t)} \quad (3.20)$$

$$x_2(t) = -t \frac{F^{(d-1)}(1, t) + \nu_1(F_1)^{(d-1)}(1, t) + \nu_2(F_2)^{(d-1)}(1, t)}{F^{(d)}(1, t)} \quad (3.21)$$

## Bilan

### Du théorème de rationalité

*La rationalité, quand elle est unique, de la solution d'un système algébrique a été prouvée de deux manières :*

- *une méthode basée sur les extensions algébriques des corps de Galois. Elle permet la démonstration générale mais ne fournit aucune indication pour calculer effectivement la solution,*
- *une méthode constructiviste : la démonstration permet, dans le cas des courbes planes de calculer la solution à l'aide des seules opérations  $+$   $-$   $\times$   $/$ .*

*Le résultat semble, en fait, connu des spécialistes de géométrie algébrique, même s'il n'a jamais été proposé sous cette forme : ce serait le simple corollaire d'un théorème plus général établi par Grothendieck dans les années 60.*

*La méthode constructiviste semble nouvelle, même si elle utilise sensiblement les techniques qu'employait déjà Bézout. Elle permet dans le cas des courbes planes de calculer effectivement la solution unique d'un système. Sa généralisation aux dimensions supérieures, se fait naturellement, mais l'élimination des cas d'exception devient, dès la dimension 3, extrêmement difficile. Il faut également noter que l'algorithme proposé, même s'il fournit la solution est loin d'être optimal.*

### De l'ensemble du chapitre

*On voit que le calcul de la forme implicite d'une courbe paramétrique est bien résolu, que l'on soit dans le plan affine ou dans le plan projectif. La méthode proposée, i.e. la méthode de la tangente, donne le même résultat que celui issu de la méthode de Bézout.*

*Les formules d'inversion proposées sont par contre différentes et plus simples que celles issues de la méthode de Bézout : pour une paramétrisation de degré  $n \geq 3$  elles sont de degré  $n - 2$  alors que la méthode de Bézout conduit à des polynômes de degré  $n - 1$ . Ce résultat est important si on utilise la méthode proposée par [Sederberg et Parry, 1986] pour calculer l'intersection de segments paramétriques.*

*Certains calculs annexes sont également simplifiés : c'est le cas pour le calcul du point double d'une cubique paramétrique :*

- *Bézout donne trois équations du second degré correspondant à trois coniques du plan : la solution recherchée correspond aux coordonnées du point commun à ces trois coniques. Il nous faut mettre en œuvre la méthode proposée dans la section suivante,*
- *la méthode proposée donne trois équations linéaires.*

*Pour le calcul de la condition nécessaire et suffisante pour que trois coniques aient un point commun, la méthode proposée ici se révèle supérieure à la méthode de Salmon car :*

- *elle se calcule à partir d'un déterminant d'une matrice  $6 \times 6$ ,*
- *le calcul du point d'intersection, quand il est unique, se fait à partir de sous-déterminants de la même matrice,*
- *la méthode se généralise au calcul de la condition pour que trois cubiques aient un point commun.*

*Ces formules, tant pour trois coniques que pour trois cubiques se généralisent aux calculs de l'équation implicite des surfaces rationnelles du second et du troisième degré : ce problème est traité dans le chapitre "surfaces rationnelles".*



## Chapitre 4

# Surfaces rationnelles

*Notre problème est de modéliser le rayonnement lumineux à l'intérieur d'un couvert végétal, en l'occurrence un couvert de maïs.*

*La géométrie du couvert est décrite par des formes paramétriques rationnelles du second degré. La modélisation du rayonnement se fait à l'intérieur de cette structure par des techniques très proches du "lancer de rayons" développée en infographie [Aries et al., 1993],[España et al., 1995].*

*Le problème essentiel est de calculer le plus rapidement et le plus précisément possible l'intersection entre des droites (les rayons lumineux) et les formes paramétriques caractérisant la géométrie du couvert. Ce chapitre est essentiellement consacré aux surfaces paramétriques du second degré qui conduisent, dans les bons cas, à une surface du quatrième degré, la surface de Steiner.*

*Dans ce chapitre, nous généralisons aux surfaces paramétriques du second degré la méthode proposée pour le calcul de la forme implicite d'une courbe plane étudiée dans le chapitre précédent. La forme implicite de la surface tangentielle et les formules d'inversion sont calculées. Ces résultats mènent aux équations des éléments singuliers dans le plan paramétrique et dans l'espace. Une classification complète des surfaces paramétriques du second degré est établie et permet de préciser le domaine de validité des formules proposées. Enfin la généralisation aux surfaces du troisième degré est proposée. La comparaison avec l'ensemble des méthodes existantes montre l'intérêt de la méthode proposée.*

*La deuxième partie de ce chapitre est constituée d'un projet d'article avec Rachid Senoussi qui reprend, sous une forme plus algébrique, l'essentiel des résultats et prouve certaines affirmations.*

### 4.1 Le carreau de Steiner

La forme paramétrique de la surface de Steiner est donnée sous forme projective dans [Salmon, 1892]. Elle associe à tout point  $x = (x_1, x_2, x_3)$  du plan projectif  $P^2$  un point  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ;  $y_i = P_i(x)$  de l'espace projectif  $P^3$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1^2 + B_1x_2^2 + C_1x_3^2 + 2F_1x_2x_3 + 2G_1x_1x_3 + 2H_1x_1x_2 \\ A_2x_1^2 + B_2x_2^2 + C_2x_3^2 + 2F_2x_2x_3 + 2G_2x_1x_3 + 2H_2x_1x_2 \\ A_3x_1^2 + B_3x_2^2 + C_3x_3^2 + 2F_3x_2x_3 + 2G_3x_1x_3 + 2H_3x_1x_2 \\ A_4x_1^2 + B_4x_2^2 + C_4x_3^2 + 2F_4x_2x_3 + 2G_4x_1x_3 + 2H_4x_1x_2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

A cette forme paramétrique est associée une équation implicite:  $\mathcal{I}(y) = 0$  où  $\mathcal{I}$  est en général un polynôme du quatrième degré en  $y$ . Cette équation définit une surface du quatrième degré: elle correspond, dans les bons cas, à la surface romaine de Steiner caractérisée par trois lignes doubles se rencontrant en un point triple. Elle est de classe 3, i.e. par toute droite de l'espace on peut faire passer trois plan tangent à la surface, i.e. son équation tangentielle est du troisième degré.

Le carreau de Steiner est un morceau de cette surface. Conventionnellement, c'est la partie du plan paramétrique défini par :

$$0 \leq x_1 \leq x_3; 0 \leq x_2 \leq x_3; 0 \leq x_1 + x_2 \leq x_3$$

Pour alléger les notations nous écrirons également :

$$P_i = x' \mathcal{P}^i x, i = 1, \dots, 4$$

et

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} A_i & H_i & G_i \\ H_i & B_i & F_i \\ G_i & F_i & C_i \end{pmatrix}$$

Et on prendra, selon les besoins l'une des notations :

$$\mathcal{P}^{11} = a = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \mathcal{P}^{12} = h = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} \dots$$

Nous noterons également  $L_P$  la matrice  $4 \times 6$  des coefficients initiaux.

Le carreau de Steiner est un compromis entre deux formes paramétriques très utilisées en infographie :

- le triangle, très simple mais mal adapté à la représentation des surfaces gauches : une représentation fidèle de la feuille de maïs en terme de distance mais surtout en terme de respect des normales conduit en effet à un nombre prohibitif de triangles,
- le carreau bicubique très difficile à manipuler algébriquement (c'est une surface du 18 ème degré).

Ce compromis a été proposé dans [Sederberg, 1984]. Pour le calcul de l'intersection entre un carreau de Steiner et une droite, nous reprenons, dans ses grandes lignes, le schéma proposé par Sederberg :

- calculer la forme implicite de la surface,
- calculer les intersections  $y$  entre cette surface et la droite,
- calculer les valeurs  $\tilde{x}(y_i)$  correspondant à chaque point intersection pour savoir si le point est à l'intérieur du triangle paramétrique. Cette partie référence au théorème démontré dans le chapitre précédent : les  $\tilde{x}(y)$  s'expriment rationnellement en fonction des coordonnées de l'intersection  $y$  et des coefficients de la forme paramétrique.

## 4.2 Calcul de la forme implicite

Le calcul de l'équation implicite d'une surface paramétrique rationnelle est difficile dès que l'on dépasse le premier degré. Une solution a été proposée par Dixon au début du siècle pour les carreaux bilinéaires. Pour les carreaux généraux du second degré, nous disposons de plusieurs algorithmes, notamment celui proposé par Sederberg en 1984, mais aucun n'est "propre".

Dans son premier algorithme, Sederberg calcule un polynôme du cinquième degré en  $y$ , puis effectue une division par un polynôme du premier degré. Le résultat est indéterminé si le dénominateur est identiquement nul.

Dans d'autres cas, la forme proposée est bien du quatrième degré, mais on dégage, par factorisation rationnelle, une expression polynomiale des coefficients. C'est un problème qui peut rester masqué si on travaille sur une forme canonique (les coefficients étant réduits à leur plus simple expression) ou avec des approximations flottantes des coefficients.

Dans les deux cas, les algorithmes peuvent être pris en défaut. Même dans leur domaine de validité, les formules sont inutilement compliquées et

sont numériquement instables dans le voisinage des singularités. Nous dirons que les formes ne sont pas propres.

La méthode que nous proposons est calquée sur celle du chapitre précédent pour les courbes planes.

Pour chaque point  $x$  du plan paramétrique, nous pouvons calculer l'équation  $\mathcal{T}_P$  du plan tangent à la surface de Steiner. Si on note  $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \partial^j P_i$  nous avons :

$$\mathcal{T}_P = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \partial^1 P_1 & \partial^2 P_1 & \partial^3 P_1 & y_1 \\ \partial^1 P_2 & \partial^2 P_2 & \partial^3 P_2 & y_2 \\ \partial^1 P_3 & \partial^2 P_3 & \partial^3 P_3 & y_3 \\ \partial^1 P_4 & \partial^2 P_4 & \partial^3 P_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0 = \langle y, N(x) \rangle \quad (4.2)$$

où  $N_i(x)$  sont les cofacteurs de la matrice associée à  $\mathcal{T}_P$  et  $N(x)$  est le vecteur normal à la surface en  $P(x)$ . On peut développer l'expression :  $\mathcal{T}_P =$

$$\begin{vmatrix} A_1 x_1 + H_1 x_2 + G_1 x_3 & H_1 x_1 + B_1 x_2 + F_1 x_3 & G_1 x_1 + F_1 x_2 + C_1 x_3 & y_1 \\ A_2 x_1 + H_2 x_2 + G_2 x_3 & H_2 x_1 + B_2 x_2 + F_2 x_3 & G_2 x_1 + F_2 x_2 + C_2 x_3 & y_2 \\ A_3 x_1 + H_3 x_2 + G_3 x_3 & H_3 x_1 + B_3 x_2 + F_3 x_3 & G_3 x_1 + F_3 x_2 + C_3 x_3 & y_3 \\ A_4 x_1 + H_4 x_2 + G_4 x_3 & H_4 x_1 + B_4 x_2 + F_4 x_3 & G_4 x_1 + F_4 x_2 + C_4 x_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0$$

en un polynôme du troisième degré en  $x$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P = & -(aghy)x_1^3 + (bfhy)x_2^3 - (cfgy)x_3^3 \\ & + ((bchy) + (bfgy))x_2^2x_3 + ((afgy) - (achy))x_1^2x_3 + ((cghy) - (acfy))x_3^2x_1 \\ & + ((abfy) + (bghy))x_1x_2^2 + ((abgy) - (afh y))x_1^2x_2 - ((cfhy) - (bcgy))x_2x_3^2 \\ & + (2(fghy) + (abcy))x_3x_2x_1 \end{aligned}$$

$$\text{où } (abcy) = a \wedge b \wedge c \wedge y = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & y_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & y_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & y_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & y_4 \end{vmatrix}, \text{ etc...}$$

Pour alléger, nous noterons ce polynôme :

$$\mathcal{T}_P = \mathbf{a}x_1^3 + \mathbf{b}x_2^3 + \mathbf{c}x_3^3 + \mathbf{d}x_1^2x_2 + \mathbf{e}x_1^2x_3 + \mathbf{f}x_2^2x_1 + \mathbf{g}x_2^2x_3 + \mathbf{h}x_3^2x_1 + \mathbf{i}x_3^2x_2 + \mathbf{j}x_1x_2x_3$$

En notant que  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{j}$  sont des formes linéaires en  $y$ .

L'équation  $\mathcal{T}_P = 0$  peut être interprétée comme :

- un plan de  $P^3$  tangent à la surface en  $P(x)$
- une cubique du plan paramétrique  $P^2$  qui représente l'ensemble des points  $x$  tel que le plan tangent à  $P(x)$  passe par le point  $y$ .



Si  $y$  est sur la surface, cette cubique a un point double. Si  $y$  est sur une ligne double de la surface, cette cubique a deux points doubles: elle est donc décomposée en une conique et une droite. Si  $y$  est le point triple de la surface, cette cubique a trois points doubles: elle est donc décomposée en trois droites.

Lorsque  $y$  est sur la surface, on dispose de trois nouvelles équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_1} = 3ax_1^2 + fx_2^2 + hx_3^2 + jx_2x_3 + 2ex_1x_3 + 2dx_1x_2 = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} = dx_1^2 + 3bx_2^2 + ix_3^2 + 2gx_2x_3 + jx_1x_3 + 2fx_1x_2 = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} = ex_1^2 + gx_2^2 + 3cx_3^2 + 2ix_2x_3 + 2hx_1x_3 + jx_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Nous savons d'autre part que les quatre équations de départ doivent être compatibles

$$\begin{cases} \lambda y_1 = A_1x_1^2 + B_1x_2^2 + C_1x_3^2 + 2F_1x_2x_3 + 2G_1x_1x_3 + 2H_1x_1x_2 \\ \lambda y_2 = A_2x_1^2 + B_2x_2^2 + C_2x_3^2 + 2F_2x_2x_3 + 2G_2x_1x_3 + 2H_2x_1x_2 \\ \lambda y_3 = A_3x_1^2 + B_3x_2^2 + C_3x_3^2 + 2F_3x_2x_3 + 2G_3x_1x_3 + 2H_3x_1x_2 \\ \lambda y_4 = A_4x_1^2 + B_4x_2^2 + C_4x_3^2 + 2F_4x_2x_3 + 2G_4x_1x_3 + 2H_4x_1x_2 \end{cases}$$

Si on considère les 7 équations comme des équations linéaires homogènes par rapport aux 7 inconnues  $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2$  et  $\lambda$ , cette condition se met sous la forme :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y) = |M_{\mathcal{P}}| = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 2F_1 & 2G_1 & 2H_1 & y_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 2F_2 & 2G_2 & 2H_2 & y_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 2F_3 & 2G_3 & 2H_3 & y_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & 2F_4 & 2G_4 & 2H_4 & y_4 \\ 3a & f & h & j & 2e & 2d & 0 \\ d & 3b & i & 2g & j & 2f & 0 \\ e & g & 3c & 2i & 2h & j & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Si le polynôme  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y)$  n'est pas identiquement nul, il est de degré 4 ( $a, b \dots j$  sont des expressions linéaires en  $y$ ). Il forme une condition nécessaire pour qu'un point appartienne à la surface. C'est généralement l'équation implicite de la surface.

Le polynôme associé n'admet généralement pas de factorisation rationnelle. Les 35 coefficients sont généralement premiers entre eux: nous dirons que la solution est propre.

Cette condition n'est pas suffisante dans le cas général: le polynôme peut être identiquement nul ou se factoriser sous la forme d'un carré parfait. Les cas d'exception seront traités dans un autre paragraphe.

### 4.3 Calcul de l'intersection avec une droite

On prend la droite sous la forme paramétrique à partir de deux points  $y^1$  et  $y^2$  de  $P^3$  :

$$y = \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2$$

En substituant dans l'équation de la forme implicite (4.3)  $y$  par son expression en  $\lambda$ , on obtient une nouvelle équation homogène du quatrième degré par rapport à  $\lambda$ . Le calcul de ses coefficients est donné dans la deuxième partie de ce chapitre. Les quatre racines de cette équation permettent de déterminer les quatre points d'intersection entre la surface de Steiner et la droite.

### 4.4 Inversion : le calcul de $\tilde{x}$

Le calcul de de l'antécédent  $\tilde{x}(y)$  *i.e.* de tout point simple de la surface, peut se faire en suivant pas à pas l'algorithme général proposé au chapitre précédent en l'appliquant au calcul de l'intersection de trois coniques. Il aboutit à des polynômes du douzième degré en  $y$ . Ces polynômes n'admettent pas dans le cas général de factorisation. On remarquera également qu'en changeant simplement l'ordre d'élimination des variables, on obtient des expressions différentes de  $\tilde{x}$  et qu'en utilisant des variantes à l'algorithme on peut baisser le degré des polynômes.

En effet, prenons quatre polynômes quelconques  $k_i$  et notons  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y)$  l'équation implicite. Si  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$  est solution, alors  $(k_1 \tilde{x}_1 + k_2 \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y), k_1 \tilde{x}_2 + k_3 \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y), k_1 \tilde{x}_3 + k_4 \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y))$  est également solution car elles coïncident sur l'hypersurface définie par  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y)$  (on dit que toutes les expressions s'expriment modulo  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y)$ ). Les solutions peuvent donc se compliquer inutilement et ne seront pas propres si  $k_1$  peut s'annuler.

Nous sommes donc amené à répondre à la question : comment trouver directement une forme acceptable? Nous proposons dans cette section une première méthode qui va nous donner une première solution. Des propriétés de cette solution on tire une nouvelle méthode plus directe. On vérifie alors que cette méthode peut à nouveau se simplifier et on propose une troisième méthode. On vérifie pour finir que les formules correspondant à cette méthode peuvent s'obtenir de manière équivalente à l'aide de sous-déterminants de la matrice associée à la forme implicite.

L'idée de la première méthode consiste à associer à tout point de l'espace  $y$  sa projection sur la surface de Steiner. Au point  $y$  on associe une droite  $\delta$  qui joint ce point au point triple de la surface  $(y_1^T, y_2^T, y_3^T, y_4^T)$ . Cette droite

rencontre la surface en un "quatrième" point  $y_p$ . Ce point n'est pas défini si  $y$  est sur l'une des trois lignes doubles de la surface, et *a fortiori* sur le point triple. Partout ailleurs c'est un point simple de la surface. Son expression est rationnelle et on peut lui associer, toujours rationnellement, les valeurs paramétriques correspondantes. On détermine ainsi une fonction rationnelle  $\tilde{x}(y)$  par composition des fonctions :

$$y \in P^3 \rightarrow y_p \in P^3 \text{ t.q. } \mathcal{I}_P(y_p) = 0 \rightarrow x = \tilde{x}(y_p) \in P^2$$

On vérifie par calcul que les polynômes  $\tilde{x}_i(y)$  sont du second degré en  $y$ . Les équations  $\tilde{x}_i(y) = 0$  sont des cônes dont le sommet est le point triple de la surface et qui passe par la conique image de la droite  $x_i = 0$  par  $P$ .

Ces propriétés permettent de donner directement l'expression de chaque cône et d'obtenir pour le premier l'expression :

$$C\tilde{x}_1 = \begin{vmatrix} (yy^T bc) & 2(yy^T cf) \\ 2(yy^T bf) & (yy^T bc) \end{vmatrix}$$

Mais on vérifie que que cette expression se factorise rationnellement et que les équations d'inversion se simplifient.

$$\tilde{x}_1 = \frac{C\tilde{x}_1}{(y^T bcf)}$$

Cette expression n'est pas propre : elle est indéterminée si le dernier dénominateur est nul. On a donc été amené à la remettre en forme et à poser directement :

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 2H_1 & 2G_1 & B_1 & 0 & C_1 & 0 & 2F_1 \\ y_2 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 2H_2 & 2G_2 & B_2 & 0 & C_2 & 0 & 2F_2 \\ y_3 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 2H_3 & 2G_3 & B_3 & 0 & C_3 & 0 & 2F_3 \\ y_4 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 & 2H_4 & 2G_4 & B_4 & 0 & C_4 & 0 & 2F_4 \\ 0 & y_1 & 0 & 0 & B_1 & 0 & A_1 & 0 & 2H_1 & 2F_1 & 0 & C_1 & 2G_1 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 & B_2 & 0 & A_2 & 0 & 2H_2 & 2F_2 & 0 & C_2 & 2G_2 \\ 0 & y_3 & 0 & 0 & B_3 & 0 & A_3 & 0 & 2H_3 & 2F_3 & 0 & C_3 & 2G_3 \\ 0 & y_4 & 0 & 0 & B_4 & 0 & A_4 & 0 & 2H_4 & 2F_4 & 0 & C_4 & 2G_4 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & A_1 & 0 & B_1 & 2G_1 & 2F_1 & 2H_1 \\ 0 & 0 & y_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 & A_2 & 0 & B_2 & 2G_2 & 2F_2 & 2H_2 \\ 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & C_3 & 0 & A_3 & 0 & B_3 & 2G_3 & 2F_3 & 2H_3 \\ 0 & 0 & y_4 & 0 & 0 & C_4 & 0 & A_4 & 0 & B_4 & 2G_4 & 2F_4 & 2H_4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ -\tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \end{pmatrix}$$

où  $\tilde{X}_i$  est le sous déterminant de la matrice  $\tilde{X}$  privée de la colonne  $i$

La matrice  $\tilde{X}$  est construite à partir des 12 équations :

$$\begin{aligned} x_1y_1 &= P_1x_1; & x_1y_2 &= P_2x_1; & x_1y_3 &= P_3x_1; & x_1y_4 &= P_4x_1 \\ x_2y_1 &= P_1x_2; & x_2y_2 &= P_2x_2; & x_2y_3 &= P_3x_2; & x_2y_4 &= P_4x_2 \\ x_3y_1 &= P_1x_3; & x_3y_2 &= P_2x_3; & x_3y_3 &= P_3x_3; & x_3y_4 &= P_4x_3 \end{aligned}$$

On considère ces équations comme un système linéaire homogène à 13 inconnues :

$$\begin{aligned} &x_1, x_2, x_3 \text{ (pour les membres gauches des équations)} \\ &x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_2^2x_1, x_2^2x_3, x_3^2x_1, x_3^2x_2, x_1x_2x_3 \text{ (pour les membres droits)}. \end{aligned}$$

Les sous déterminants indiqués fournissent une solution non nulle au système homogène.

Nous disposons donc pour  $\tilde{x}$  de formes polynomiales du second degré en  $y$  et on peut vérifier que, dans le cas général, elles n'admettent pas de factorisation rationnelle. On vérifie que  $\tilde{x}(y)$  donne le résultat escompté pour point simple. Nous obtenons après factorisation :

$$\tilde{x}(P(x)) = xD_3$$

L'expression est donc correcte si  $D_3$  est différent de 0.

$D_3$  est un polynôme du troisième degré en  $x$ . Il correspond dans le plan paramétrique  $P^2$  aux trois droites doubles de la surface de Steiner ; il se décompose en trois droites. Cette décomposition n'est généralement pas rationnelle. Aux trois points d'intersection de ces droites de l'espace paramétrique correspond un point unique dans  $P_3$ , le point triple. L'équation de  $D_3$  s'obtient en remplaçant  $y$  dans l'équation du plan tangent par les coordonnées du point triple  $(y_1^T, y_2^T, y_3^T, y_4^T)$  de  $P^3$  :

$$D_3 = \langle N(x), y^T \rangle \quad (4.4)$$

Si la surface n'est pas dégénérée, la méthode proposée n'échouera que si le point est sur une des trois droites doubles.

#### remarques

- les formules d'inversion peuvent également être calculées à partir de  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ , la matrice associée à la forme implicite.

$$\tilde{x}_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{5,7}; \quad \tilde{x}_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{6,7}; \quad \tilde{x}_3 = \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{7,7} \quad (4.5)$$

où  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{i,j}$  représente le cofacteur  $(i, j)$  de la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ . En effet si on calcule la comatrice associée à  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(y)$  pour un un point de la surface on trouve:  $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}}(y) = \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{P}}(P(x)) =$

$$D_3 \times \begin{pmatrix} x_1^2 N_1 & x_2^2 N_1 & x_3^2 N_1 & x_2 x_3 N_1 & x_1 x_3 N_1 & x_1 x_2 N_1 & N_1 \\ x_1^2 N_2 & x_2^2 N_2 & x_3^2 N_2 & x_2 x_3 N_2 & x_1 x_3 N_2 & x_1 x_2 N_2 & N_2 \\ x_1^2 N_3 & x_2^2 N_3 & x_3^2 N_3 & x_2 x_3 N_3 & x_1 x_3 N_3 & x_1 x_2 N_3 & N_3 \\ x_1^2 N_4 & x_2^2 N_4 & x_3^2 N_4 & x_2 x_3 N_4 & x_1 x_3 N_4 & x_1 x_2 N_4 & N_4 \\ x_1^2 x_1 & x_2^2 x_1 & x_3^2 x_1 & x_2 x_3 x_1 & x_1 x_3 x_1 & x_1 x_2 x_1 & x_1 \\ x_1^2 x_2 & x_2^2 x_2 & x_3^2 x_2 & x_2 x_3 x_2 & x_1 x_3 x_2 & x_1 x_2 x_2 & x_2 \\ x_1^2 x_3 & x_2^2 x_3 & x_3^2 x_3 & x_2 x_3 x_3 & x_1 x_3 x_3 & x_1 x_2 x_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

- le plan tangent à un point simple de la surface peut être calculé directement à partir des sous-déterminants de  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ :

$$\tilde{\alpha} = (\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{1,7}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{2,7}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{3,7}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{4,7}) \quad (4.6)$$

- la forme implicite  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$  peut également être calculée comme le déterminant d'une matrice  $X$  obtenue en rajoutant à  $\tilde{X}$  la ligne des coefficients de  $T_{\mathcal{P}}(x)$  ou l'une des cubiques  $x_i \partial^i T_{\mathcal{P}}(x)$ . On verra par la suite que d'autres variantes sont possibles.
- on obtient le même résultat en remplaçant dans cette dernière expression, la cubique  $\mathcal{T}$  par l'une des cubiques  $x_1 \partial^1 \mathcal{T}$ ,  $x_2 \partial^1 \mathcal{T}$ ,  $x_3 \partial^1 \mathcal{T}$ ,  $x_1 \partial^2 \mathcal{T}$  ...

## 4.5 Le calcul du point triple

Si  $y$  est le point triple de la surface de Steiner, la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(y)$  est de rang 5, la matrice  $\tilde{X}$  de rang 11. Ceci permet de calculer, de plusieurs manières, trois équations linéaires homogènes en  $y$  et donc de calculer le point triple. Certaines de ces équations peuvent être identiquement nulles.

Les coordonnées du point triple sont données par une expression dont chaque terme est du 9ème degré par rapport aux coefficients initiaux:

$$\begin{aligned} y_i^T &= b_i |abcg|^2 + a_i |abcf|^2 + c_i |abch|^2 + 2g_i |abch| |abcf| \\ &- 4c_i |abcf| |abgh| + 4b_i |acfg| |abfg| - 8f_i |abfh| |acfg| + 4c_i |abfh| |acfh| \\ &- 2h_i |abcf| |abcg| - 2f_i |abcg| |abch| - 4c_i |abgh| |bcgh| - 8g_i |bcfg| |abgh| \\ &+ 4a_i |abch| |bcfg| - 4a_i |bcfg| |abfg| - 16g_i |abfh| |cfgh| + 4a_i |bcfh| |acfh| \\ &- 8h_i |acgh| |bcfh| + 16h_i |acfg| |bfgh| + 4b_i |acgh| |bcgh| + 16a_i |bfgh| |cfgh| \end{aligned} \quad (4.7)$$

Cette expression est sûrement plus facile à programmer qu'à mémoriser.

## 4.6 Les cas dégénérés

Les formules présentées ici peuvent tomber en défaut si :

- il existe un ou plusieurs points de base, *i.e.* les quatre coniques  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  ont un ou plusieurs points communs [Salmon, 1892], [Chionh et Goldman, 1992], [Sederberg et Chen, 1995]. Le degré de la surface est diminué du nombre de points de base (en tenant compte de leur éventuelle multiplicité). En effet si on coupe la surface par une droite quelconque d'équation :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 = 0, \quad \alpha'_1 y_1 + \alpha'_2 y_2 + \alpha'_3 y_3 + \alpha'_4 y_4 = 0,$$

les points d'intersection vérifient :

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0, \quad \alpha'_1 P_1 + \alpha'_2 P_2 + \alpha'_3 P_3 + \alpha'_4 P_4 = 0$$

Ces deux équations correspondent à des coniques du plan paramétrique et ont donc 4 intersections. Cependant si les coniques  $P_1, P_2, P_3, P_4$  ont  $\alpha$  points communs, ces points vont correspondre dans l'espace  $y$  au point  $(0,0,0,0)$  qui ne fait pas partie de l'espace projectif ; il ne restera que  $4 - \alpha$  intersections,

- la paramétrisation n'est pas propre au sens de Luroth *i.e.* si tous les points de la surface ont au moins deux antécédents dans  $P^2$ .

Ces différents cas seront développés dans la section : classification complexe et réelle.

## 4.7 Calcul pratique des expressions précédentes

### a. Calcul de la forme implicite du carreau.

Le polynôme  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$  de la forme implicite est donné sous la forme d'un déterminant : celui-ci contient les coefficients initiaux, donc des valeurs numériques, et les valeurs littérales  $y$ . Ce mélange ne pose pas de problème avec un calculateur formel, mais est plus gênant avec un langage procédural classique. On est donc amené à développer les calculs de manière à déterminer explicitement les coefficients en  $y_1^4, y_2^4, \dots, y_1 y_2 y_3 y_4$  de  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$

On utilise pour cela les résultats données dans la deuxième partie de ce chapitre.

Le calcul des différences successives permet de calculer les 35 coefficients du polynôme associé à la forme implicite :

$$c_{4000} = \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 0, 0)$$

On déduit par symétrie  $c_{0400}$ ,  $c_{0040}$ ,  $c_{0004}$

$$3!c_{3100} = \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(3, 1, 0, 0) - 36\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 0, 0) - 3\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(2, 1, 0, 0) \\ + 3\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 0, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 0, 0)$$

On déduit les 11 autres par des permutations  $c_{3010}$ , ...,  $c_{0013}$

$$2!c_{2200} = 10\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 0, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(2, 1, 0, 0) - 3\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(2, 1, 0, 0) \\ + 7\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 0, 0) + 7\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 0, 0)$$

De même pour les 5 autres coefficients  $c_{2020}$ , ...,  $c_{0022}$

$$2!c_{2110} = \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(2, 1, 1, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(2, 1, 0, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(2, 0, 1, 0) \\ + 2\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 1, 0) + 14\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 1, 0) + 2\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 0, 0) \\ + 2\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 1, 0) + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 1, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 0, 0) \\ - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 0, 0)$$

Et de même pour les 11 autres  $c_{2011}$ , ...,  $c_{0112}$ .

Le dernier coefficient vaut,

$$c_{1111} = +\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 1, 1) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 1, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 0, 1) \\ - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 1, 1) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 1, 1) + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 1, 0, 0) \\ + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 1, 0) + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 1, 0) + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 0, 1) \\ + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 0, 1) + \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 0, 1, 1) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(1, 0, 0, 0) \\ - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 1, 0, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 0, 1, 0) - \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(0, 0, 0, 1)$$

Nous voyons qu'il suffit de calculer 39 déterminants de matrices  $7 \times 7$  dont tous les éléments sont réels.

#### b. Calcul des intersections droite-surface implicite

La droite paramétrique,  $y = \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2$  passant par les points  $y^1$  et  $y^2$  distincts de l'espace, rencontre la surface implicite (4.3) pour les valeurs  $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$  solutions de l'équation  $\lambda_2^4 \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\lambda y^1 + y^2) = 0$ . C'est une équation du quatrième degré par rapport à  $\lambda$ . Le calcul de ses racines peut se faire numériquement ou analytiquement (formule de Ferrari). Ses quatre racines (réelles ou complexes) déterminent quatre points d'intersection entre la surface de Steiner et la droite.

#### c. Calcul des antécédents

Par la formule (4.5), on calcule l'antécédent  $\tilde{x}(y)$  de chaque intersection réelle. Il faut ensuite vérifier si ce dernier se trouve à l'intérieur du triangle de référence de l'espace des paramètres.



**d. Calcul de la normale de la 1<sup>re</sup> intersection réelle**

S'il y a intersection, on calcule la normale  $\tilde{N}(y)$  à la surface en ce point en utilisant (4.6).

**Remarque 1** *Ce sont les coefficients de l'équation implicite qui exigent le plus gros calcul, mais il n'est fait qu'une seule fois (par carreau). Cela est d'autant plus important en lancer de rayon que le nombre de droites intersectant un carreau est très supérieur au nombre de carreaux constituant la scène.*

Dans le cas contraire il est préférable de calculer directement l'intersection de la droite et du carreau : pour cela considérons la droite défini par  $Y(\lambda) = \lambda_1 Y^1 + \lambda_2 Y^2$  où  $Y^1$  et  $Y^2$  sont deux points distinctes de l'espace. Le point intersection entre la surface et la droite est solution de l'équation en  $\lambda$   $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y(\lambda)) = |M_{\mathcal{P}}(\lambda)| = 0$  où  $|M_{\mathcal{P}}(\lambda)|$  est un polynôme homogène du quatrième degré en  $\lambda$ . Nous notons l'équation associée :  $a(\lambda_1)^4 + b(\lambda_1)^3 \lambda_2 + c(\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 + d\lambda_1 (\lambda_2)^3 + e(\lambda_2)^4 = 0$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} - a &= 6 |M_{\mathcal{P}}(1, 0)| \\ - b &= -21 |M_{\mathcal{P}}(1, 0)| - 12 |M_{\mathcal{P}}(1, 1)| - 6 |M_{\mathcal{P}}(0, 1)| + |M_{\mathcal{P}}(1, 2)| + 2 |M_{\mathcal{P}}(2, 1)| \\ - c &= 21 |M_{\mathcal{P}}(1, 0)| + 30 |M_{\mathcal{P}}(1, 1)| + 21 |M_{\mathcal{P}}(0, 1)| - 3 |M_{\mathcal{P}}(1, 2)| - 3 |M_{\mathcal{P}}(2, 1)| \\ - d &= -6 |M_{\mathcal{P}}(1, 0)| - 12 |M_{\mathcal{P}}(1, 1)| - 21 |M_{\mathcal{P}}(0, 1)| + 2 |M_{\mathcal{P}}(1, 2)| + |M_{\mathcal{P}}(2, 1)| \\ - e &= 6 |M_{\mathcal{P}}(0, 1)| \end{aligned}$$

Nous pouvons donc calculer l'intersection entre une droite et la surface sans passer par l'équation implicite. Les coefficients du polynôme se calculent alors à l'aide de 5 déterminants  $7 \times 7$ .

## 4.8 L'équation tangentielle

**Définition 2** *Soit  $\langle y, \alpha \rangle = 0$  l'équation d'un plan  $P$  de l'espace et  $S$  une surface du même espace. On appelle équation tangentielle de  $S$  (ou équation réciproque ou équation de l'enveloppe) les conditions que doivent respecter  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  pour que  $P$  soit tangent à  $S$ .*

Pour la surface Steiner nous avons posé l'équation  $\mathcal{T} = \langle y, N(x) \rangle = 0$  de son plan tangent en fonction de  $(x)$ . On peut également écrire l'équation



paramétrique du plan tangent :

$$\alpha = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{pmatrix}$$

Le but est d'éliminer  $x$  du système, *i.e.* de rechercher la forme implicite. On vérifie que le système à 6 points de base, *i.e.* que les quatre cubiques  $N_i = 0$  du plan  $x$  ont 6 points communs<sup>1</sup>. On peut déterminer l'équation de ces six points en calculant le *pgcd* des résultants, par rapport à  $x_1$ , des équations prises deux à deux. On obtient généralement un polynôme homogène du 6ème degré en  $(x_2, x_3)$ . Ses zéro permettent de calculer les six points de base. On peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{vmatrix} c(N_1, x_1^3) & c(N_1, x_1^2) & c(N_1, x_1^1) & c(N_1, x_1^0) \\ c(N_2, x_1^3) & c(N_2, x_1^2) & c(N_2, x_1^1) & c(N_2, x_1^0) \\ c(N_3, x_1^3) & c(N_3, x_1^2) & c(N_3, x_1^1) & c(N_3, x_1^0) \\ c(N_4, x_1^3) & c(N_4, x_1^2) & c(N_4, x_1^1) & c(N_4, x_1^0) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

où  $c(N_i, x_1^j)$  est le coefficient associé au terme en  $(x_1)^j$  du polynôme  $N_i$ .

L'équation tangentielle  $\mathcal{I}_N(\alpha) = 0$  est de degré  $3^2 - 6 = 3$ : c'est une cubique de l'espace  $\alpha$ .

On reprend la démarche effectuée pour le calcul de l'équation implicite. L'équation  $\mathcal{T}_N$  du plan tangent à la surface  $\mathcal{I}_N = 0$  est :

$$\mathcal{T}_N = \frac{1}{\eta} \begin{vmatrix} \partial^1 N_1 & \partial^2 N_1 & \partial^3 N_1 & \alpha_1 \\ \partial^1 N_2 & \partial^2 N_2 & \partial^3 N_2 & \alpha_2 \\ \partial^1 N_3 & \partial^2 N_3 & \partial^3 N_3 & \alpha_3 \\ \partial^1 N_4 & \partial^2 N_4 & \partial^3 N_4 & \alpha_4 \end{vmatrix} = 0 = \langle \alpha, P(x) \rangle$$

où  $\eta$  est un polynôme du quatrième degré en  $x$  et ne contenant pas  $\alpha$ .

$\mathcal{T}_N$  est du second degré en  $x$ , ses trois dérivés,  $\frac{\partial \mathcal{T}_N}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{T}_N}{\partial x_2}$  et  $\frac{\partial \mathcal{T}_N}{\partial x_3}$  sont donc du premier degré et suffisent à déterminer la condition recherchée :

$$\mathcal{I}_N(\alpha) = |\mathcal{M}_N(\alpha)| = \begin{vmatrix} \langle \alpha, \mathcal{P}^{11} \rangle & \langle \alpha, \mathcal{P}^{12} \rangle & \langle \alpha, \mathcal{P}^{13} \rangle \\ \langle \alpha, \mathcal{P}^{12} \rangle & \langle \alpha, \mathcal{P}^{22} \rangle & \langle \alpha, \mathcal{P}^{23} \rangle \\ \langle \alpha, \mathcal{P}^{13} \rangle & \langle \alpha, \mathcal{P}^{23} \rangle & \langle \alpha, \mathcal{P}^{33} \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

1. On constate que ces 6 points de base sont situés par paires sur les trois droites doubles. Pour chaque droite double les deux points de base encadrent la partie dont les antécédents  $x$  sont réels.

où on rappelle que  $\mathcal{P}^{11} = (A_1, A_2, A_3, A_4)^t$ ,  $\mathcal{P}^{12} = (H_1, H_2, H_3, H_4)^t \dots$

En d'autres termes, on peut dire que le plan  $\langle \alpha, y \rangle = 0$  de  $P^3$  est tangent à la surface de Steiner si la conique  $x^t \mathcal{M}_{\mathcal{N}}(\alpha)x = 0$  du plan  $P^2$  est décomposée en deux droites.

On vérifie que la surface  $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$  a quatre points singuliers, (généralement non rationnels) ce qui est cohérent avec Salmon qui définit la surface de Steiner comme la réciproque d'une surface cubique à quatre points doubles.

Si un plan  $\alpha$  est tangent à la surface  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ , alors la comatrice associée  $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}}(\alpha)$  est de la forme :

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}}(\alpha) = \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}}(N(x)) = \eta x x^t \quad (4.10)$$

On pourra donc, si  $\eta$  est différent de 0, calculer à partir des éléments de cette matrice  $3 \times 3$ , l'antécédent  $\tilde{x}(\alpha)$  de tout plan tangent à la surface  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ . On peut également calculer le point de  $P^3$  associé à un plan tangent :

$$\tilde{y}_k(\alpha) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}}(\alpha)_{i,j} \mathcal{P}_k^{i,j} \quad (4.11)$$

Ces cofacteurs nous permettent aussi d'expliciter  $\eta$ . On peut prendre par exemple :

$$\eta = \frac{1}{x_1^2} \begin{vmatrix} \langle N, \mathcal{P}^{22} \rangle & \langle N, \mathcal{P}^{23} \rangle \\ \langle N, \mathcal{P}^{23} \rangle & \langle N, \mathcal{P}^{33} \rangle \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

L'équation  $\eta = 0$  correspond à l'ensemble des antécédents des 4 points singuliers de la surface. Elle est du 4ème degré en  $x$  mais se décompose dans  $\mathbb{C}$  en 4 droites. Ces quatre droites ont généralement six points d'intersection : les six points de base de l'équation tangentielle. Ils sont donc alignés trois par trois (Fig: 4.1).

**Remarque :** les 4 points singuliers de l'équation tangentielle sont des points :

- doubles par rapport à leur équation implicite : le calcul de l'intersection entre la surface et une droite passant par un des points conduit à une racine double en ce point,
- de multiplicité infini par rapport à la forme paramétrique puisque chacun de ces points à une droite comme antécédent.

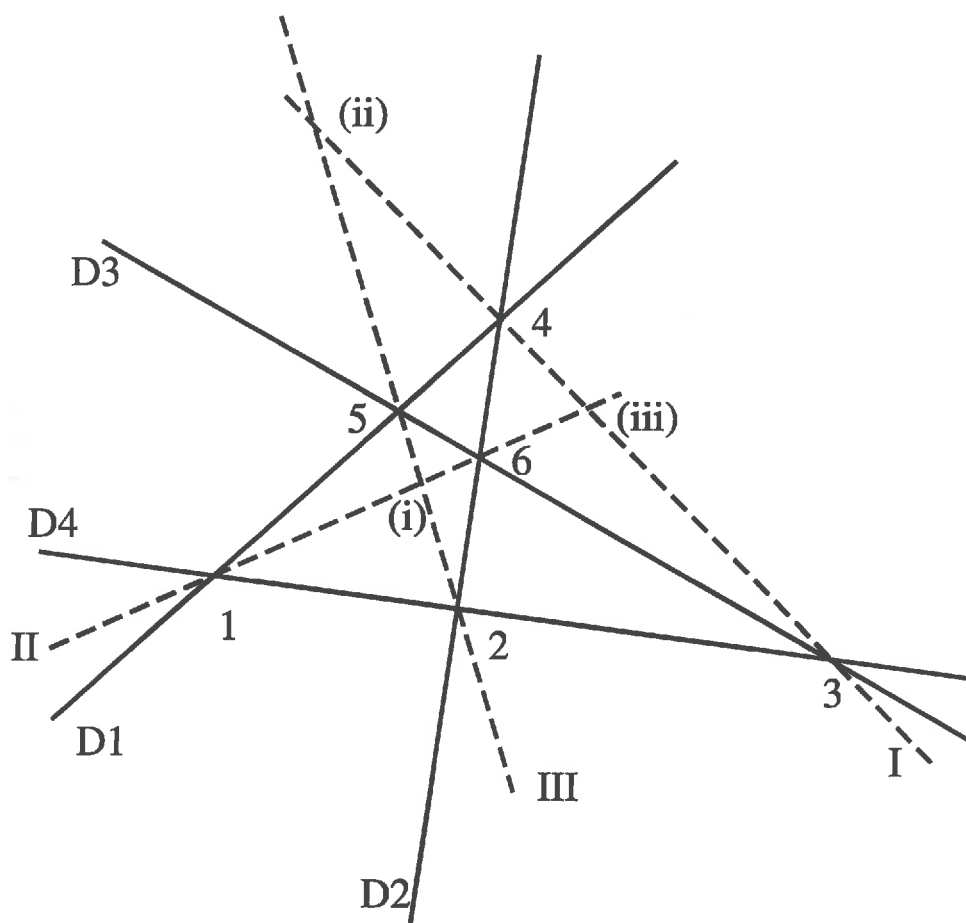


FIG. 4.1 - Singularités dans le plan paramétrique. Dans le plan  $P^2$  il y a 4 droites  $D1, D2, D3, D4$  associées à l'équation  $\eta = 0$ . Ces quatre droites ont pour image les quatre points singuliers de l'équation tangentielle. Elles permettent de construire six points numérotés de 1 à 6 : ce sont les points de base de l'équation tangentielle. Ils nous permettent de construire 3 autres droites  $I, II$  et  $III$  : à ces droites correspondent dans l'espace  $P^3$  les trois droites doubles de la surface de Steiner. Dans le plan  $P^2$  les trois droites permettent de déterminer trois nouveaux points (i), (ii) et (iii) : ce sont les trois antécédents du point triple de la surface de Steiner.

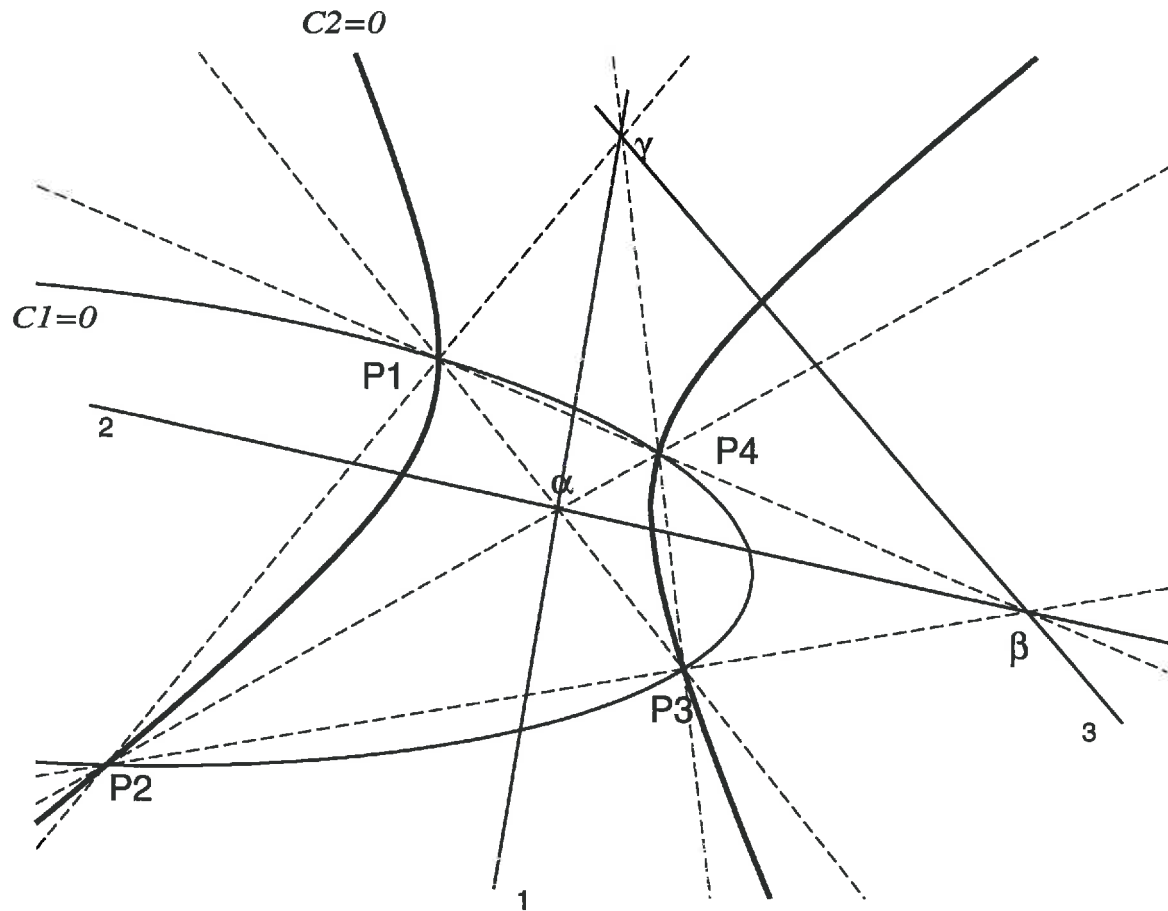


FIG. 4.2 - Dans le plan dual  $P^{*2}$ , les deux coniques  $(C1 = 0)$  et  $(C2 = 0)$  ont quatre intersections, les points  $P1, P2, P3, P4$ . Ils sont associés aux quatre points singuliers de  $Lp^*$ . Ces quatre points déterminent six droites (représentées en tireté). Elles sont associées dans  $P^2$  aux six points de base de l'équation normale. Leurs intersections nous permettent de construire trois nouveaux points  $\alpha, \beta, \gamma$ . Ils sont associés aux trois droites doubles de la surface de Steiner. Ces trois points déterminent le triangle autopolaire des deux coniques constitué des droites 1, 2, 3. Ces trois droites correspondent dans  $P^2$  aux trois antécédents du point triple de la surface.

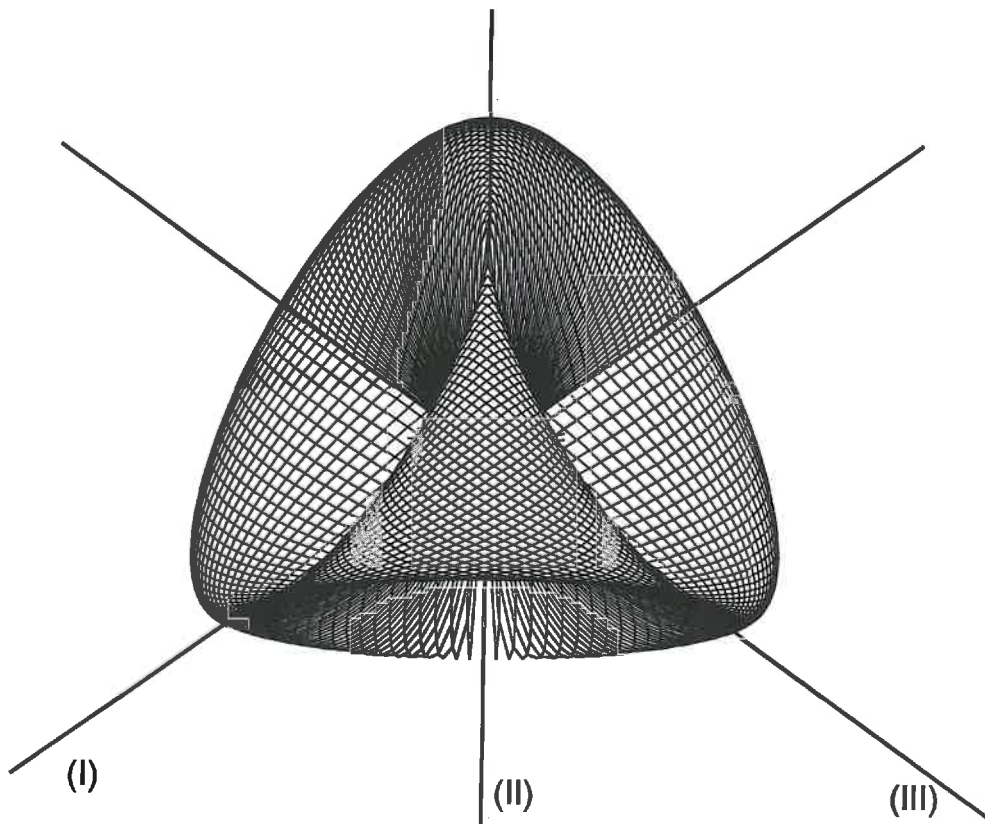


FIG. 4.3 – La surface de Steiner canonique : vue 1. Elle comporte trois lignes doubles (I), (II) et (III). Aux 4 points doubles de l'équation tangentielle correspondent 4 cercles. La surface de Steiner peut être "posée" de quatre manières différentes sur un plan. Son contact avec chacun de ces plans correspond aux quatre cercles.

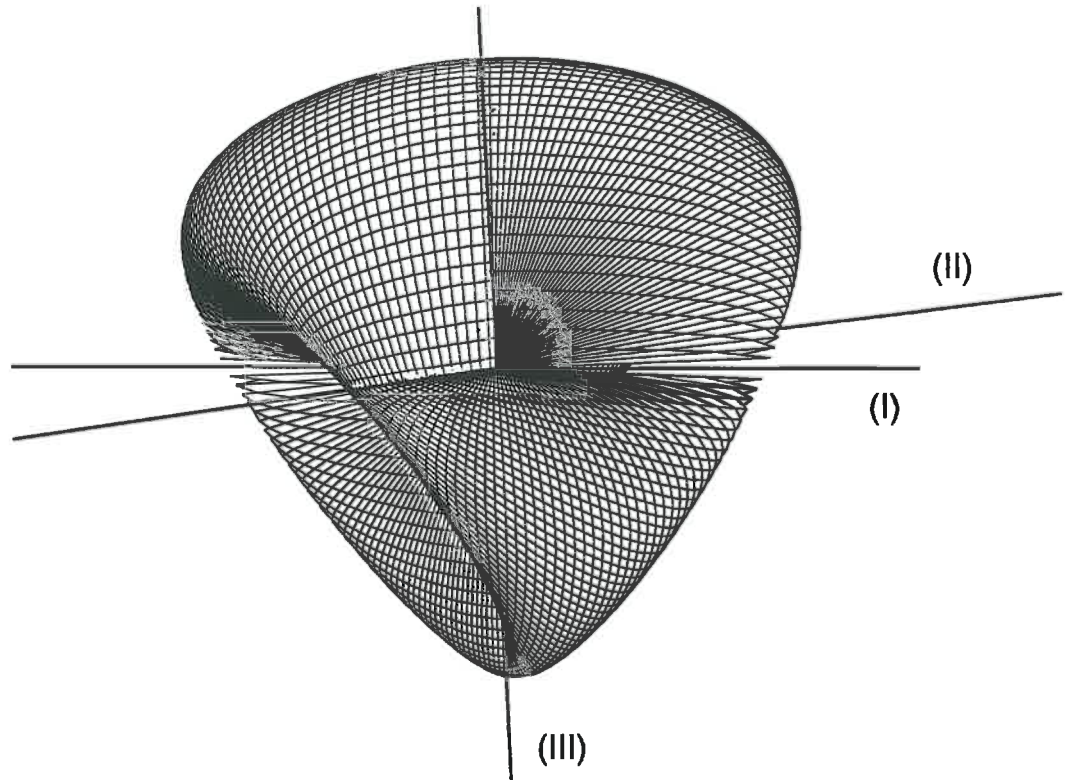


FIG. 4.4 – La surface de Steiner canonique : vue 2. Les trois lignes doubles (I), (II) et (III) se rencontrent en un point triple. Chaque point de chaque ligne double a deux antécédents, réels pour le segment de droite qui correspond à l'intersection de la surface, imaginaires pour la partie isolée de chaque droite. La transition antécédents réels antécédents imaginaires nous donne 6 points conjugués deux à deux. Ces 6 points sont des points de "pincement" de la surface : la normale en ces points n'est pas définie. Ils sont associés aux six points de base de l'équation tangentielle.

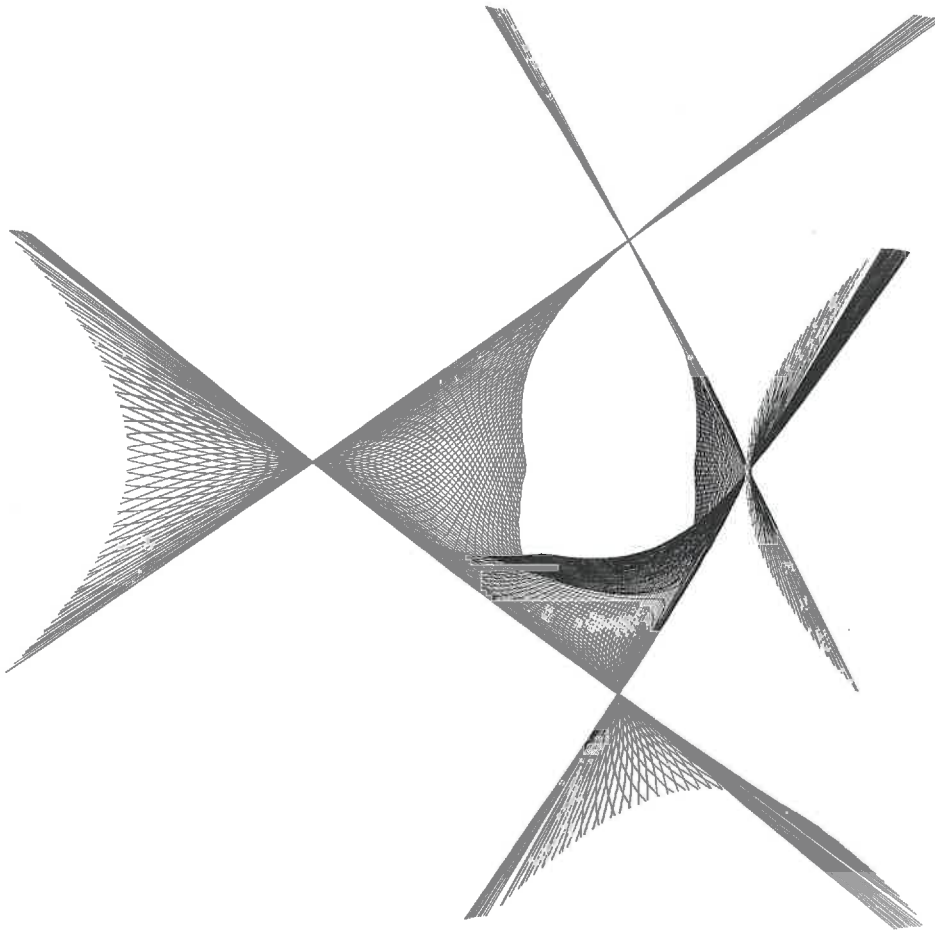


FIG. 4.5 – *Un morceau de la surface réciproque de la Steiner canonique : la surface réciproque a quatre points singuliers situés sur un tétraèdre régulier. Ces quatre points ont pour antécédents les quatre droites du polynôme  $\eta$  et comme homologue les quatre cercles de la surface de Steiner. Par quatre points ont fait passer six droites (quatre sont visibles sur la figure). Ce sont les droites de sutures : elles n'appartiennent pas à la surface paramétrique mais appartiennent à l'équation implicite. Elles sont associées aux six points de base de  $P^2$  et aux 6 points de pincement de la surface de Steiner où le plan tangent n'est pas défini.*



**Calcul du volume englobant d'un carreau de Steiner.** Ces expressions permettent de calculer en particulier la boîte englobante d'un carreau de Steiner *i.e.* les coordonnées affines  $y_{1min}, y_{1max}, y_{2min}, y_{2max}$  et  $y_{3min}, y_{3max}$  qui limitent le parallélépipède rectangle qui contient le carreau.

Trois cas peuvent se présenter :

- le volume englobant est limité par un coin du carreau : on l'obtient par un simple calcul de *min* et de *max*,
- le volume est limité par un bord du carreau : on est amené à calculer les extrema d'une conique, donc à résoudre un problème du second degré,
- le volume est limité par un point situé à l'intérieur du carreau : la face de la boîte englobante est tangente à la surface. L'équation (4.9) permet en effet de calculer les trois plans tangents parallèles à une direction donnée. Les sous-déterminants de la matrice permettent le calcul de l'antécédent  $x$  et donc de savoir si la tangence est à l'intérieur du triangle paramétrique.

#### 4.9 Classification complexe et réelle des surfaces paramétriques du second degré

Elle n'a été réalisée que très récemment dans [Coffman et al., 1996] et dans [Degen, 1996]. Cette classification est basée sur deux constatations :

- toute homographie  $\mathcal{H}_2$  (donc inversible) de l'espace des paramètres  $P^2$  ne modifie pas l'équation de la forme implicite,
- toute homographie  $\mathcal{H}_3$  de  $P^3$  consiste en un changement de base : l'équation implicite de la transformée est la même à condition de changer de base.

$$\begin{array}{ccc}
 P^2 & \xrightarrow{P} & P^3 \\
 \mathcal{H}_2 \updownarrow & & \updownarrow \mathcal{H}_3 \\
 P^2 & \xrightarrow{\tilde{P}} & P^3
 \end{array}$$

On peut donc classer les formes paramétriques du second degré en classe d'équivalence par rapport aux transformations homographiques de  $P^2$  et



$P^3$  : deux formes paramétriques seront dites équivalentes si elles peuvent se déduire l'une de l'autre par transformation homographique de  $P^2$  et  $P^3$ . A chaque classe, on peut associer un représentant, sa forme canonique. Une première classification se fait dans  $\mathbb{C}$ . Elle doit être affinée si on se limite aux transformations projectives réelles.

Cette classification est basée sur le rang de la matrice  $L_P$  des coefficients, des propriétés du noyau de cette matrice et du nombre de points de base. Quand  $L_P$  est de rang 4 on détermine deux vecteurs de dimension 6 qui forment une base du noyau de  $L_P$ . Ces deux vecteurs déterminent deux coniques  $C_1 = 0$  et  $C_2 = 0$  qui engendrent un faisceau *i.e.*, l'ensemble des coniques qui passent par les quatre points d'intersections des deux premières, *i.e.* les coniques dont l'équation générale est  $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$  On vérifie que l'équation  $\eta = 0$ , n'est autre que l'équation tangentielle de ce faisceau, *i.e.*, la condition pour qu'une droite du plan paramétrique passe par l'un des quatre points de base du faisceau.

La classification réelle, se fait en fonction de la nature réelle ou complexe des éléments singuliers (lignes, points...) de la surface.

On reprend maintenant la classification de [Coffman et al., 1996] que l'on complète en donnant les méthodes de calculs de la forme implicite et les formules d'inversion.

On suppose, pour limiter les cas de la classification réelle, que les coefficients de départ sont réels.

#### A : les quartiques

##### les quartiques à trois droites doubles.

Ce sont des transformations homographiques complexes de la surface de Steiner. Elle est représentée Fig. 4.3 et Fig. 4.4. La surface tangentielle est représentée Fig. 4.5. Les singularités de ces surfaces sont représenté dans le plan paramétrique Fig. 4.1 et dans le plan dual Fig. 4.2.

En classification réelle, on peut distinguer trois sous-classes :

- cas 1 :  $P(x) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ . C'est la forme canonique de la surface romaine de Steiner.

(i) A un point  $x$  on associe par (4.2) la normale à la surface :

$$N(x) = (-x_1(x_3^2+x_2^2-x_1^2), x_2(-x_3^2+x_2^2-x_1^2), -x_3(-x_3^2+x_2^2+x_1^2), x_1x_2x_3)$$

qui nous permet de calculer le plan tangent à la surface :  $\langle y, N(x) \rangle = 0$ .

La formule échoue pour 6 points de  $P^2$  : ce sont les points de base de l'équations tangentielle, *i.e.* les solutions du système  $N_1(x) = N_2(x) =$

$N_3(x) = N_4(x) = 0$ . On calcule par (4.8) les coordonnées de ces six points :

$$(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 0)$$

(ii) La forme implicite est donnée par (4.3) :

$\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y) = y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_1^2 y_3^2 - y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$ . Son équation tangentielle, *i.e.* la condition pour que le plan  $\langle \alpha, y \rangle$  soit tangent à la surface, est donnée par (4.9) :  $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\alpha) = \alpha_4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 4\alpha_4^2) - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$

(iii) A un point  $y$  de la surface, on peut associer par (4.5) son antécédent :

$$\tilde{x}(y) = (y_2 y_3, y_1 y_3, y_1 y_2)$$

Cette expression échoue si  $y$  est sur l'une des droites doubles de la surface, *i.e.* sur l'image de la cubique (4.4) :

$$D_3 = x_1 x_2 x_3 = 0$$

Cette cubique décomposée possède trois points doubles,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,0)$  et  $(1,0,0)$ . Ils correspondent au point triple de  $P^3$  qu'on peut calculer aussi à l'aide de (4.7).

$$y^T = (0, 0, 0, 1)$$

A un point  $y$  de la surface on peut associer par (4.6) son plan tangent :

$$\tilde{\alpha}(y) = \begin{pmatrix} 2y_1(y_2^2 + y_3^2) - y_2 y_3 y_4, & 2y_2(y_3^2 + y_1^2) - y_1 y_3 y_4, \\ 2y_3(y_2^2 + y_1^2) - y_1 y_2 y_4, & -y_1 y_2 y_3 \end{pmatrix}$$

Cette expression échoue si  $y$  est sur une des droites doubles de la surface.

(iv) A un plan tangent  $\langle \alpha, y \rangle = 0$  de la surface, on peut associer par (4.10) la comatrice de  $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ . Elle permet de déterminer de plusieurs façons  $\tilde{x}(\alpha)$  :

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 4\alpha_4^2 & 2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3 \\ 2\alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 - 4\alpha_4^2 & 2\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \\ 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3^2 - 4\alpha_4^2 \end{pmatrix} = \tilde{x}\tilde{x}^t$$

La formule échoue si  $\alpha$  est un point singulier de  $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ , *i.e.*, s'il est l'image d'un point du quadrilatère,  $\eta = 0$  donné par la formule (4.12)

$$\eta(x) = (x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)$$

Les quatre points de  $P^3$  associés à ces quatre droites de  $\eta$  (les points singuliers de  $\mathcal{I}_N$ ) sont respectivement :

$$(2, 2, 2, 1), (2, -2, -2, 1), (2, 2, -2, -1), (2, -2, 2, -1)$$

auxquels correspondent 4 plans de  $P^3$  :

$$\begin{aligned} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 &= 0 \\ 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 + y_4 &= 0 \\ 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 &= 0 \\ 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 - y_4 &= 0 \end{aligned}$$

(v) A un point  $\alpha$  de la surface tangentielle  $\mathcal{I}_N$  on peut associer le point correspondant de  $P^3$  en utilisant l'équation (4.11)

$$\tilde{y}(\alpha) = (\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_4, \alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3\alpha_4, -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 12\alpha_4^2)$$

La formule échoue si l'on est sur l'un des 4 points singuliers de  $\mathcal{I}_N$

Les 4 points singuliers de  $\mathcal{I}_N$  permettent de construire 6 droites. Ces droites font partie de  $\mathcal{I}_N$  mais n'ont pas d'antécédent : ce sont les droites de "suture" de la surface. Pour tout point situé sur une de ces droites, la fonction  $\tilde{x}\tilde{x}'(\alpha)$  renvoie sur le point de base associé à chaque droite, la fonction  $\tilde{y}(\alpha)$  renvoie sur un point de pincement.

On trouvera dans la deuxième partie de ce chapitre, quelques résultats complémentaires relatifs à cette surface.

– cas 1' :  $P(x) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)$

$$\begin{aligned} \eta &= (x_2 + ix_3 - ix_1)(x_2 - ix_3 + ix_1)(x_2 + ix_3 + ix_1)(x_2 - ix_3 - ix_1) \\ D_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

où  $i = \sqrt{-1}$ . Les droites de  $D_3$  sont réelles, celles de  $\eta$  imaginaires.

– cas 1'' :  $P(x) = (x_1^2 + x_2^2, x_2^2 + x_3^2, x_1x_3, x_2x_3)$

$$\begin{aligned} \eta &= (x_2 - x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - ix_3)(x_1 + ix_3) \\ D_3 &= (x_2 + ix_1)(x_2 - ix_1)x_3 \end{aligned}$$

Deux des trois droites de  $D_3$  sont imaginaires ; deux des quatre droites de  $\eta$  sont imaginaires.

Les cas 1, 1' et 1'' ne diffèrent que par la nature réelle ou entière des éléments géométriques. Ils se déduisent les uns des autres par transformation homographique complexe, c'est pourquoi nous ne détaillons pas les deux derniers cas. L'ensemble des surfaces obtenues par transformation homographique complexe constitue l'ensemble des surfaces romaines de Steiner. Elles ont trois lignes doubles qui convergent en un point triple.

**Les quartiques à deux droites doubles.**

– cas 2 :  $P = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_2x_3, x_3^2)$

$$\eta = (x_2 + ix_1)(x_2 - ix_1)x_3^2$$

$$D_3 = x_2x_3^2$$

$$C_1 = x_1x_3; \quad C_2 = (x_2 - ix_1)(x_2 + ix_1)$$

$C_1$  passe par le point double de  $C_2$ . Le faisceau est de type II *i.e.* les deux coniques du noyau de  $L_P$  sont tangentes.

– cas 2' :  $P = (x_1x_3 - x_2x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2)$

$$\eta = x_1x_2x_3^2$$

$$D_3 = (x_2 - x_1)x_3^2$$

$$C_1 = x_2x_3 + x_1x_3; \quad C_2 = x_1x_2$$

$C_1$  passe par le point double de  $C_2$ . Le faisceau est de type II.

**Les quartiques à une droite double.**

– cas 3 :  $P(x) = (x_1^2, x_1x_3 - x_2^2, x_2x_3, x_3^2)$

$$\eta = x_1x_3^3$$

$$D_3 = x_3^3$$

$$C_1 = x_2^2 + 2x_1x_3; \quad C_2 = x_1x_2$$

Le faisceau est de type III *i.e.* les coniques sont osculatrices.

Les cas 2, 2' et 3 sont des formes dégénérées de la surface romaine de Steiner puisque deux ou trois des droites doubles sont confondues. Elles ne peuvent être l'image homographique de la surface canonique de Steiner. L'ensemble des formules présentées précédemment restent cependant valables.

**B : Les cubiques****Les cubiques à deux lignes torsales**

Rappelons qu'une ligne torsale a été définie par Cayley comme une ligne sur laquelle le plan tangent est constant [Salmon, 1892].

- cas 4 :  $P = (x_2^2 - x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$

$$\eta = (x_2 + ix_3)^2(x_2 - ix_3)^2$$

$$D_3 \equiv 0$$

$$C_1 = x_1^2; C_2 = (x_1 - ix_3)(x_1 + ix_3)$$

Le faisceau est de type IV i.e. les coniques sont bitangentes.

Il y a un point de base : le point quadruple de  $\eta$  de coordonnées  $(1,0,0)$ .  
La surface est une cubique réglée [Salmon, 1892].

(i) Pour calculer l'équation de la forme implicite, la formule (4.3) ne s'applique pas directement : il faut prendre le déterminant de la matrice  $\mathcal{M}_P$  privée de la colonne 1 et de la ligne 5.

$$\mathcal{I}_P(y) = y_4y_3^2 + y_1y_2y_3 - y_4y_2^2 = 0$$

La cubique a une droite double,  $(y_2 = 0, y_3 = 0)$  mais pas de point triple. Cette droite double est l'image de la droite  $x_1 = 0$

(ii) la formule d'inversion générale est :

$$\tilde{x}(y) = (y_2y_3, y_2y_4, y_3y_4)$$

Elle échoue pour trois droites de  $P^3$  :  $(y_2 = 0, y_3 = 0)$ ,  $(y_2 = 0, y_4 = 0)$  et  $(y_3 = 0, y_4 = 0)$ .

Si  $(y_2 = 0, y_4 = 0)$  nous pouvons prendre la formule :  $\tilde{x}'(y) = (y_3, 0, -y_1)$

Si  $(y_3 = 0, y_4 = 0)$  nous pouvons prendre la formule :  $\tilde{x}''(y) = (y_1, y_2, 0)$

Si  $(y_2 = 0, y_3 = 0)$ , (on est sur la droite double), il n'y a pas d'expression rationnelle de l'antécédent, sauf pour les points  $(-2, 0, 0, i)$  et  $(2, 0, 0, i)$  dont les antécédents sont respectivement  $(0, i, 1)$  et  $(0, -i, 1)$ .

(iii) l'équation normale est :

$$N = (x_1x_2x_3, x_3(x_2^2 + x_3^2), x_2(x_2^2 + x_3^2), x_1(x_2 - x_3)(x_2 + x_3))$$

Les points de base de l'équation normale sont :  $(0, 1, i)$ ,  $(0, 1, -i)$  et  $(1, 0, 0)$  ce dernier étant compté quatre fois (c'est également le point de base de  $P$ ).

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\alpha) = \alpha_2^2 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_3^2 \alpha_1$$

$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$  a également une droite double ( $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ )

– **cas 4'** :  $P(x) = (x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_3^2)$

$$\eta = x_2^2 x_3^2$$

$$D_3 \equiv 0$$

$$\mathcal{C}_1 = x_2 x_3; \quad \mathcal{C}_2 = x_1^2$$

Le faisceau est de type IV, les coniques sont bitangentes, les points de tangence sont réels.

#### Les cubiques à une ligne torsale

– **cas 5** :  $P(x) = (x_1 x_2, x_1 x_3 - x_2^2, x_3^2, x_2^2 + 2x_1 x_3)$

$$\eta = x_3^4$$

$$D_3 \equiv 0$$

$$\mathcal{C}_1 = x_1^2; \quad \mathcal{C}_2 = x_2^2 + 2x_1 x_3$$

Le faisceau est de type V *i.e.* les coniques sont suroscultrices.

### C : Les quadriques propres

#### Les quadriques propres sans point double

– **cas 6** :  $P(x) = (2x_1 x_3, 2x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ .

Il a deux points de base imaginaires, les points cycliques.

(i) Après simplification par le facteur commun  $x_3$ , l'équation paramétrique du vecteur normal est donné par :

$$N = (2x_1 x_3, 2x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\eta = x_3^4; \quad \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0; \quad \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(\alpha) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = 0$$

L'équation implicite s'obtient en prenant le déterminant de la matrice  $M_T$  privée des colonnes 1 et 6 et des lignes 5 et 6. C'est l'équation de la sphère unité.

(ii) A la droite  $x_3 = 0$  privée des points cycliques, est associé dans  $P^3$  un point unique, le point  $(0,0,1,1)$ . On remarque que ce point  $(0,0,1,1)$  est :

- régulier pour la forme implicite: ce point n'est pas solution du système  $\{\partial^i \mathcal{I}_P = 0, i = 1, \dots, 4\}$ ,
- singulier pour la forme paramétrique puisqu'il a une infinité d'antécédents.

Ces deux types de singularités doivent être distingués bien que généralement équivalents.

(iii) La formule  $\tilde{x}(y) = (y_1, y_2, y_4 - y_1)$  permet de calculer l'antécédent de tous les points de la sphère à l'exception du point  $(0,0,1,1)$ , le pôle nord.

(iv) Il y a bijection entre la sphère privée du point  $(0,0,1,1)$  et le plan paramétrique privé de la droite de l'infini *i.e.* le plan affine.

Par transformation homographique réelle, on obtient l'ensemble des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à deux nappes.

- cas 6':  $P(x) = (x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$  Il y a deux points de base réels  $(1,0,0), (0,1,0)$ .

$$\mathcal{C}_1 = x_1^2; \mathcal{C}_2 = x_2^2; \mathcal{F} = \lambda\mathcal{C}_1 + \mu\mathcal{C}_2 = (x_2\sqrt{\mu} + i\sqrt{\lambda}x_1)(x_2\sqrt{\mu} - i\sqrt{\lambda}x_1)$$

Toutes les coniques du faisceau  $\mathcal{F}$  sont décomposées

$$\eta = x_3^4; \mathcal{I}_P(y) = y_4y_1 - y_2y_3 = 0; \mathcal{I}_N(\alpha) = \alpha_4\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 = 0$$

L'équation implicite s'obtient en prenant le déterminant de la matrice  $M_P$  privée des colonnes 1 et 2 et des lignes 5 et 6.

Par transformation homographique réelle on obtient les hyperboloïdes à une nappe et les paraboloides hyperboliques.

#### Les quadriques propres ayant un point double

- cas 7:  $P = (x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3)$ . Il y a deux points de base confondus en  $(1,0,0)$ .  $\mathcal{C}_1 = x_1^2; \mathcal{C}_2 = x_1x_2$ . Toutes les coniques du faisceau contiennent la droite  $x_1 = 0$

$$\eta \equiv 0; \mathcal{I}_P(y) = y_3^2 - y_1y_2 = 0; \mathcal{I}_N(\alpha) = \alpha_4 = 0$$

La surface est un cône dont le sommet est le point  $(0,0,0,1)$ ; tout plan passant par ce point lui est tangent.

Toutes les génératrices d'un cône du second degré sont des lignes tor-sales. Elles ont par définition même plan tangent. Réciproquement, à un plan tangent au cône, on ne peut donc pas associer un point mais une droite: ceci explique le fait que  $\eta$  soit identiquement nul.

Par transformation homographique réelle, on peut obtenir l'ensemble des cônes, des cylindres elliptiques, des cylindres hyperboliques et des cylindres paraboliques.

**Remarques:** Les trois derniers cas, 6, 6' et 7 donnent par transformation homographique réelle de  $P^3$ , l'ensemble des quadriques non décomposées.

#### D: Les surfaces planes propres

– cas 8:  $P(x) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2, 0)$ .

Il y a trois points de base:  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,0)$  et  $(1,0,0)$ . La matrice  $L_P$  est de rang 3 et  $\eta \equiv 0$ .

$\mathcal{I}_P(y) = y_4 =$ . Les trois droites  $(y_1 = 0, y_4 = 0)$ ,  $(y_2 = 0, y_4 = 0)$  et  $(y_3 = 0, y_4 = 0)$  n'ont pas d'antécédent. Ce sont des droites de suture. Les points  $x$  situés sur une droite joignant deux points de base ont une seule image: ils déterminent trois points de  $y$ , les points de base de la forme d'inversion  $\tilde{x}(P(x)) = x_1x_2x_3x$ .

$$\tilde{x}(y) = (y_2y_3, y_1y_3, y_1y_2)$$

Pour compléter la classification des surfaces propres obtenues avec une paramétrisation du second degré, il faudrait traiter les cas où: deux des trois points de base sont imaginaires, deux des trois points de base sont confondus, les trois points de base sont confondus. Nous ne le ferons pas, l'étude des transformations birationnelles quadratiques du plan étant très marginale dans notre étude. Des propriétés intéressantes de ce type de transformation peuvent être trouvées dans [Duporcq, 1949].

En dehors de ces cas, il faut signaler la possibilité d'obtenir des surfaces dont la paramétrisation est impropre, *i.e.* des surfaces dont tous les points ont au moins deux antécédents.



**E : Les quadriques impropres**

- **cas 9** :  $P(x) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2)$ . Il n'y a pas de point de base et la matrice  $L_P$  est de rang plein. Les formules d'inversion ne sont pas rationnelles. L'équation paramétrique de la normale, après simplification par le facteur commun  $x_3$  s'exprime comme :

$$N = (x_2^2, x_1^2, 0, -2x_1x_2)$$

Les équations normales sont linéairement dépendantes.

$$\eta \equiv 0; |\mathcal{M}_P| = (y_1y_2 - y_4^2)^2 = \mathcal{I}_P^2$$

C'est un cône compté deux fois.

**F : Les surfaces planes comptées plusieurs fois**

- **cas 10** :  $P(x) = (x_1^2, x_2^2, x_3^3, 0)$

Il s'agit du plan  $y_4 = 0$  compté quatre fois.

On peut également avoir, s'il y a un ou deux points de base, un plan compté trois fois ou un plan compté deux fois.

**G : Les surfaces dégénérées**

S'il y a quatre points de base, les  $P_i$  sont éléments d'un faisceau :  $L_P$  est de rang 2 et l'image ne correspond plus à une surface.

- **cas 11** :  $P(x) = (x_1^2, x_2^2, x_1x_2, 0)$

donne la conique  $y_1y_2 - y_3^2 = 0$  du plan  $y_4=0$

- **cas 12** :  $P(x) = (x_1^2, x_2^2, 0, 0)$

C'est une droite.

- **cas 13** :  $P = (x_1^2, 0, 0, 0)$  C'est un point.

**Transformation homographique du plan paramétrique**

Après une transformation homographique du plan paramétrique :  $x' = Ax$ , on obtient pour les formes canoniques 1, 2 et 3 que :

$$|\mathcal{M}_{P'}| = |A|^8 |\mathcal{M}_P|$$

$$|\mathcal{M}_{\mathcal{N}'}| = |A|^2 |\mathcal{M}_{\mathcal{N}}|$$

$$y_i^{T'} = |A|^6 y_i^T, i = 1, \dots, 4$$

$$\tilde{\alpha}'(y) = |A|^8 \tilde{\alpha}(y)$$

Comme  $|A| \neq 0$  les polynômes correspondants aux formes implicites directes et tangentielle et les coordonnées du point triple ne sont pas modifiés. On vérifie également que les formules d'inversion et les polynômes associés aux singularités s'obtiennent par changement de repère.

### Transformation homographique de $P^3$

Si on fait une transformation homographique de  $P^3 : y' = By$ , on vérifie que :

$$\eta' = |B|^2 \eta$$

$$D'_3 = |B|^3 D_3$$

et que les déterminants associés aux formes implicites et aux formules d'inversion se déduisent par changement de repère.

### Conclusions

La classification établie étant complète pour  $L_P$  de plein rang, on peut affirmer que :

- la surface est une vraie quartique (*i.e.* une quartique indécomposable) si et seulement si  $D_3$  n'est pas identiquement nul,
- dans ce cas le calcul des formes implicites directe et tangentielle sont toujours correctes. Les formules d'inversion ne tombent en défaut que pour les droites singulières,
- si l'équation proposée pour la forme implicite est identiquement nulle, la surface admet au moins un point de base,
- si c'est un carré ou une puissance quatrième, la paramétrisation est impropre. L'expression obtenue est le carré de l'équation de la quadrique recherchée ou la puissance 4ème de l'équation du plan recherché,
- si la surface est du troisième ou du quatrième degré la formule proposée pour  $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$  est correcte.

## 4.10 Comparaison avec les autres méthodes

### 4.10.1 Les méthodes classiques

#### Calcul de la quartique passant par 34 points

Comme on l'a fait pour la conique dans le chapitre précédent on peut construire une matrice  $35 \times 35$  dont :

- la première ligne est constituée par les valeurs littérales  $y_1^4, y_1^3 y_2 \dots$
- les 34 lignes suivantes par les valeurs associées  $P_1(x^i)^4, P_1(x^i)^3 P_2(x^i) \dots$  où les  $x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i), i = 1, \dots, 34$  représentent 34 points du plan paramétrique.

Le déterminant de cette matrice est, à une "constante" près, l'équation de la forme implicite mais :

- cette "constante" est en fait un polynôme de degré  $34 \times 4 - 12$  par rapport aux coefficients de la forme paramétrique ; elle est de degré  $34 \times 4 \times 2$  par rapport aux coordonnées des points du plan paramétrique. Cette constante aura dans les cas simples plusieurs centaines de chiffres,
- cette constante s'annule dans de nombreux cas et l'équation se réduit au truisme  $0 = 0$ .

La méthode est en pratique inapplicable.

#### Calcul du pgcd des résultants de résultants

La méthode est proposée notamment dans [Peroche et al., 1988]. On part des trois équations :

$$eq_i \equiv y_4 \begin{vmatrix} y_1 & P_i \\ y_4 & P_4 \end{vmatrix} = 0, i = 1, \dots, 3 \quad (4.13)$$

On note  $res(P_1, P_2; x_i)$  le résultant par rapport à  $x_i$  des polynômes  $P_1$  et  $P_2$ . On pose d'abord  $x_3 = 1$ . On calcule :

- $R_{12}(x_2, y) = res(eq_1, eq_2; x_1)/y_4,$
- $R_{13}(x_2, y) = res(eq_1, eq_3; x_1)/y_4$
- $R_{23}(x_2, y) = res(eq_2, eq_3; x_1)/y_4.$

On calcule ensuite

$$- R_{1213}(y) = \text{res}(R_{12}, R_{13}; x_2),$$

$$- R_{1223}(y) = \text{res}(R_{12}, R_{23}; x_2).$$

On peut alors calculer  $F(y) = \text{pgcd}(R_{1233}(y), R_{1223}(y))$ .  $F$  est un polynôme en  $y$ . Le théorème de Bézout nous permet d'affirmer que  $F(y) = 0$  pour tout point de la surface: c'est donc une condition nécessaire. On a pu vérifier que la condition est généralement suffisante, *i.e.* que  $F = 0$  correspond généralement à l'équation implicite. La méthode s'applique bien pour la forme canonique mais elle est très lente même quand on a attribué des valeurs numériques à tous les coefficients. Elle est inapplicable si on laisse un des coefficients sous forme littérale. Le problème est dû au fait que les expressions intermédiaires  $R_{1213}(y)$  et  $R_{1223}(y)$  sont des polynômes du 16ème degré en  $y$ . On a donc des expressions parasites du 12ème degré en  $y$  qui compliquent les calculs et qu'on est obligé d'éliminer par le calcul du *pgcd*.

### La méthode de Dixon

La méthode date du début du siècle [Dixon, 1908a], [Dixon, 1908b] et est décrite notamment dans [Sederberg, 1983]. Elle est cependant limitée aux surfaces bi- $p$ -iques (bilinéaires, biquadratiques, bicubiques...) [Manocha et Canny, 1992a]: elle ne peut donc être utilisée pour les carreaux de Steiner. La méthode permet cependant d'établir des résultats intéressants.

Pour éliminer deux variables  $x_1, x_2$  d'un système (non-homogène) de trois équations, Dixon remarque que s'il existe  $(x_1, x_2)$  tel que  $p_1(x_1, x_2) = p_2(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2) = 0$  alors le déterminant :

$$\text{Det}(x_1, x_2, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} p_1(x_1, x_2) & p_2(x_1, x_2) & p_3(x_1, x_2) \\ p_1(\alpha, x_2) & p_2(\alpha, x_2) & p_3(\alpha, x_2) \\ p_1(\alpha, \beta) & p_2(\alpha, \beta) & p_3(\alpha, \beta) \end{vmatrix}$$

s'annule pour cette valeur et ce indépendamment de  $\alpha$  et  $\beta$ . Ce déterminant s'annule également si  $\alpha = x_1$  (les deux premières lignes sont égales) ou si  $\beta = x_2$  (les deux dernières lignes sont égales). Cela nous permet de définir :

$$\delta = \frac{\text{Det}(x_1, x_2, \alpha, \beta)}{(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta)} = \sum_{i,j} Q_{i,j} \alpha^i \beta^j$$

$\delta$  doit être nul quelque soit  $(\alpha, \beta)$ : cela implique que tous les  $Q_{i,j}$  sont nuls. La méthode de Dixon permet de construire à partir de ces coefficients une matrice dont le déterminant est nul si les trois courbes ont un point commun.

Pour le calcul de l'équation implicite de Steiner nous partons des trois équations (4.13) considérées comme des équations en  $(x_1, x_2)$  :

$$\delta = y_4^2 (\alpha\beta Q_1(x) + \beta x_2 Q_2(x) + 2\alpha^2 Q_3(x) + \alpha x_3 Q_4(x) + x_3^2 Q_5(x))$$

Où les  $Q_i$  sont des polynômes homogènes du second degré en  $x$  sans terme en  $x_1^2$ . Si on élimine les cas particuliers ( $y_4 = 0$  et  $x_3 = 0$ ) on forme les cinq équations  $Q_i = 0, i = 1, \dots, 5$ , conditions nécessaires pour que  $y$  soit élément de la surface. Sous forme matricielle nous avons :

$$M(x_2^2, x_3^2, x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2)' = 0$$

où  $M =$

|           |                     |                     |                     |           |
|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|
| 0         | $(abcy)$            | $2(abfy)$           | $2(abgy)$           | $2(abhy)$ |
| $4(bfhy)$ | $2(bcgy)$           | $2(bchy) + 4(bfgy)$ | $(abcy)$            | $2(abfy)$ |
| $(abhy)$  | $(achy)$            | $2(afhy)$           | $2(agh y)$          | 0         |
| $4(bghy)$ | $4(cghy) - 2(acfy)$ | $(abcy) + 8(fghy)$  | $4(afgy) - 2(achy)$ | $2(abgy)$ |
| $2(bchy)$ | $-4(cfgy)$          | $2(bcgy) - 4(cfhy)$ | $-2(acfy)$          | $(abcy)$  |

Ces cinq équations doivent être compatibles, ce qui permet d'écrire une nouvelle condition pour qu'un point appartienne à la surface :

$$|M| = 0$$

Par développement on vérifie que  $\mathcal{I}_P = |M| / (abhy)$ . La méthode de Dixon permet donc généralement et après adaptation, de calculer la forme implicite d'une surface. Mais la méthode n'est pas directe puisqu'elle passe par une division polynomiale et tombe en défaut si  $(abhy)$  est identiquement nul.

La méthode a permis par contre d'exhiber cinq équations pour qu'un point appartienne à la surface. Deux de ces équations ( $Q_1 = 0$  et  $Q_3 = 0$ ) s'expriment linéairement par rapport aux équations de départ et ne nous apportent rien de nouveau. Les trois autres sont par contre généralement linéairement indépendantes : leur substitution aux dérivées de l'équation tangentielle permet de proposer une nouvelle forme de l'équation implicite :

|       |           |                     |                     |                     |           |       |
|-------|-----------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------|-------|
| $A_1$ | $B_1$     | $C_1$               | $2F_1$              | $2G_1$              | $2H_1$    | $y_1$ |
| $A_2$ | $B_2$     | $C_2$               | $2F_2$              | $2G_2$              | $2H_2$    | $y_2$ |
| $A_3$ | $B_3$     | $C_3$               | $2F_3$              | $2G_3$              | $2H_3$    | $y_3$ |
| $A_4$ | $B_4$     | $C_4$               | $2F_4$              | $2G_4$              | $2H_4$    | $y_4$ |
| 0     | $4(bfhy)$ | $2(bcgy)$           | $2(bchy) + 4(bfgy)$ | $(abcy)$            | $2(abfy)$ | 0     |
| 0     | $4(bghy)$ | $4(cghy) - 2(acfy)$ | $(abcy) + 8(fghy)$  | $4(afgy) - 2(achy)$ | $2(abgy)$ | 0     |
| 0     | $2(bchy)$ | $-4(cfgy)$          | $2(bcgy) - 4(cfhy)$ | $-2(acfy)$          | $(abcy)$  | 0     |

Les trois 0 supplémentaires de cette matrice permettent un calcul de l'équation implicite pratiquement deux fois plus rapide que celui de  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ .

### La méthode de Macauley

C'est une méthode ancienne [Macauley, 1923], mais elle est tombée dans l'oubli et n'a été exhumée que récemment, par Manocha. Elle permet d'éliminer  $n$  variables homogènes d'un système polynomial de  $n$  équations. L'algorithme a été décrit dans [Chionh et Goldman, 1992b], [Chionh et Goldman, 1992a].

Pour le calcul de la forme implicite du système (4.13) de trois équations du second degré par rapport à trois variables homogènes  $x_1, x_2, x_3$ . L'algorithme calcule deux déterminants  $|M|$  et  $|D|$  dont le rapport est généralement le polynôme de la forme implicite multiplié par  $y_4^8$ .

L'algorithme est sensible à l'ordre des variables et des équations. Si on prend  $x_1, x_2, x_3$  et  $Eq_1, Eq_2, Eq_3$  dans leur ordre naturel, il donne : une matrice  $15 \times 15, M$ , dont tous les éléments sont linéaires en  $y$ .  $|M|$  est un polynôme du 15ème degré en  $y$  que l'on peut diviser par  $y_4^8$  pour obtenir un polynôme de degré 7 en  $y$ . Il donne la matrice  $D$  :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \begin{vmatrix} A_4 & A_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_4 & B_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_4 & A_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} C_4 & C_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} A_4 & A_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_4 & B_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Dont le déterminant s'écrit :

$$|D| = y_4 \begin{vmatrix} A_1 & A_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \end{vmatrix}$$

C'est donc un polynôme du 3ème degré en  $y$  décomposé. Nous avons  $|M| = |D| \mathcal{I}_{\mathcal{P}} y_4^8$ . La division polynomiale  $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = |M| / (|D| y_4^8)$  suppose que  $D$  n'est pas identiquement nul. C'est cependant le cas si :  $A_1 = A_4 = 0$  ou si les vecteurs  $(A_1, A_2, A_4)$  et  $(B_1, B_2, B_4)$  sont linéairement dépendants.

La deuxième condition est vérifiée pour la forme canonique de la surface de Steiner et l'algorithme, dans la forme présentée ici, ne permet pas de calculer la forme implicite.

La méthode a par contre l'avantage d'être beaucoup plus rapide que la méthode des résultants de résultants. Le polynôme parasite  $|D|$  est du 3ème degré et on connaît son expression : le calcul du *pgcd* est remplacé par une simple division polynomiale. Dans de nombreux cas, on peut pallier à l'échec de l'algorithme en inversant l'ordre des variables ou des équations.

#### 4.10.2 Les méthodes récentes

##### La première méthode de Sederberg

En 1984, Sederberg publie un article, [Sederberg, 1984] qui va servir de point de départ à tous les travaux ultérieurs sur l'implicitisation des courbes et surfaces paramétriques. Il propose un algorithme qui, pour les surfaces de Steiner, permet généralement de calculer :

- le point triple, mais de manière très indirecte,
- la forme implicite par division polynomiale,
- et les formules d'inversion.

L'ensemble des résultats est parasité par des fonctions des coefficients qui peuvent empêcher l'aboutissement du calcul. Ces facteurs parasites compliquent inutilement les calculs et accroissent, en calcul flottant, les problèmes numériques. Sederberg propose dans le même article des variantes pour pallier à ce problème, mais elles restent insuffisantes.

##### La méthode déduite de la condition pour que trois coniques aient un point commun

Si on considère (4.13) comme les équations de trois coniques du plan projectif, la condition nécessaire pour qu'un point appartienne à la surface équivaut à la condition  $|\mathcal{A}| = 0$  pour que trois coniques aient un point commun donné au chapitre précédent.

En reprenant les calculs on obtient, après factorisation rationnelle :

$$|\mathcal{A}| = (y_4)^8 \mathcal{I}_{\mathcal{P}} = 0$$

Si on prend la forme matricielle proposée, on remarque que les trois dernières lignes de la matrice sont multiples de  $y_4$ . On peut les diviser par  $y_4^2$  et on obtient :

$$|\mathcal{A}'| = y_4^2 \mathcal{I}_{\mathcal{P}} = 0$$

On peut, [Manocha et Canny, 1992b] passer en affine, *i.e.* poser  $y_4 = 1$  et obtenir une expression directe de l'équation implicite. Il faut cependant nuancer le résultat : la dernière équation est intrinsèquement du sixième degré par rapport à  $(y_1, y_2, y_3)$  et même si tous les termes de degré supérieur à quatre disparaissent au cours du calcul ce dernier est inutilement compliqué. Même sans rajouter de singularité vraie, la précision numérique, si on travaille en approximation flottante sera moins bonne.

### L'utilisation des bases de Gröbner

L'utilisation des bases de Gröbner pour le calcul de la forme implicite et des équations d'inversion a été proposé dans [Becker et Weispfenning, 1993]. C'est une méthode algébrique capable, en théorie, de résoudre le problème dans toute sa généralité. Sa réputation de grande consommatrice de temps, nous a conduit à la négliger quelque peu. Elle peut cependant être très utile pour établir des solutions de références.

### La deuxième méthode de Sederberg

Une nouvelle méthode d'implicitisation a été proposé pour les courbes dans [Sederberg et al., 1994] et pour les surfaces dans [Sederberg et Chen, 1995]. Pour le cas de la surface de Steiner, ils démontrent que l'on peut construire :

- deux équations indépendantes linéaires en  $x$  et en  $y$  :  $\alpha_i y x_1 + \beta_i y x_2 + \gamma_i y x_3 = 0, i = 1, 2,$
- une équation linéaire en  $x$  mais quadratique en  $y$  :  $y' M_1 y x_1 + y' M_2 y x_2 + y' M_3 y x_3.$

qui seront respectés pour tout point de la surface  $y = P(x)$ .

Ces trois équations peuvent être considérées comme trois droites variables (*i.e.* dont les coefficients dépendent de  $y$ ) du plan paramétrique. Ils montrent que la condition pour que ces trois droites aient un point commun correspond, à une constante près, à la forme implicite :  $k\mathcal{I} = |M| = 0$  avec

$$M = \begin{pmatrix} A_1 y & B_1 y & C_1 y \\ A_2 y & B_2 y & C_2 y \\ y' M_1 y & y' M_2 y & y' M_3 y \end{pmatrix}$$

Il établit aussi les formules d'inversions  $x_i = \tilde{M}^{3,i}, i = 1, \dots, 3$  où  $\tilde{M}^{3,i}$  est le cofacteur  $(3, i)$  de  $M$ .



La faiblesse de la méthode est la "constante"  $k$ , en fait un polynôme à coefficients entiers et dont les "variables" sont les coefficients de la forme paramétrique initiale. Pour empêcher ce polynôme de s'annuler on peut généralement utiliser des variantes de l'algorithme, mais rien ne prouve que ce soit toujours possible. Le polynôme parasite risque aussi, dans le cas d'un calcul approché, de perturber la solution.

### 4.11 Généralisation : le calcul de forme implicite de la "nonique"

Si les polynômes  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  sont du troisième degré en  $x$  et n'admettent pas de points de base, l'équation de la forme implicite associée est du neuvième degré : c'est une nonique.

En nous inspirant du calcul de  $\mathcal{I}_P$  et de celui de  $\tilde{x}$  on peut, pour donner une forme propre à l'équation implicite :

- calculer les dérivées par rapport à  $x$  de l'équation du plan tangent à la surface en  $x$ . Elles forment, dans le plan paramétrique, 3 équations homogènes du cinquième degré,
- prendre les 24 équations  $UP_k = Uy_k$  avec  $k = 1, \dots, 4$  et  $U \in \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2\}$
- calculer le déterminant de la matrice  $27 \times 27$  des coefficients des équations homogènes en  $x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_1^4x_2 \dots$  et  $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2$ .

On a vérifié sur plusieurs exemples que ce dernier déterminant est une expression propre des 220 coefficients de la forme implicite de la surface.

La généralisation, si elle est possible, de cette méthode, pour calculer la forme implicite des surfaces de degré plus élevé risque d'être délicate. Pour la bicubique par exemple, le calcul des 1330 coefficients est difficile, pas tant en raison de leur nombre mais de leur degré par rapport aux coefficients initiaux.

## Présentation algébrique

*La présentation dans un cadre mathématique propre, fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre : il se présente sous la forme d'un projet d'article rédigé en collaboration avec Rachid Senoussi. Le cadre mathématique, et l'utilisation du produit tensoriel permet de préciser certains résultats et de démontrer plusieurs affirmations.*



# Quelques propriétés des surfaces rationnelles de degré 2

F. Aries and R. Senoussi

## 4.12 Introduction

Dans l'étude d'un couvert végétal, on cherche souvent à estimer par simulation la quantité de rayonnement lumineux absorbée par ce couvert. Les méthodes statistiques de type *lancers de rayons* [SED] utilisent une approximation de la surface de la feuille, par des patches triangulaires plans. Cette approximation linéaire permet une simplification des calculs (des normales à la surface, des intersections avec les rayons lumineux, . . .), mais donne de mauvaises estimations. On améliore les estimations par une augmentation considérable du nombre de patches. L'alternative est de passer à des approximations de degré supérieur, par exemple les patches de surfaces de Steiner. Ce sont des morceaux de surfaces algébriques rationnelles du quatrième degré de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Selon le contexte, on préférera soit la forme implicite soit la forme paramétrique de la surface. Mais une utilisation efficace de ce type d'approximation exige des formules de passage les plus simples entre les deux formes. Plus généralement nous nous proposons de montrer dans cet article quelques propriétés de ce type de surfaces. La première section donne un certain nombre de rappels et elle renvoie aux annexes tout ce qui concerne les notations. La deuxième définit les surfaces rationnelles de second degré dans un cadre projectif. Elle entame une première classification de ces surfaces et développe le cas particulier de la surface de Steiner canonique. La troisième partie étudie les propriétés de ces surfaces du point de vue de la géométrie différentielle. C'est l'étude des points caractéristique de la surface et des formes quadratiques fondamentales associées. La quatrième partie d'aspect algébrique s'intéresse à la fois au problème de la recherche de la forme implicite et aux formules d'inversion. Ces dernières permettent d'associer à un point de la surface ses coordonnées paramétriques. On explicite aussi les calculs des intersections de droites ou rayons lumineux avec la surface.

Certaines formules et procédures présentées ici sont à notre connaissance nouvelles. Elles sont aussi susceptibles de se généraliser aux hypersurfaces rationnelles pour les dimensions supérieures.

#### 4.12.1 Notations, rappels

1- Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique zéro et  $K[X_1, \dots, X_n]$  son algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées. Pour deux multi-indices à valeurs entières (des  $n_s$  indices)  $l = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{A}_{n,s}$  et un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  on écrira  $|l| = l_1 + \dots + l_n$ ,  $x^l = x_1^{l_1} \times \dots \times x_n^{l_n}$ . On dira  $k \leq l$  (ordre lexicographique inverse), lorsque il existe  $1 \leq j_0 \leq n$ , tel que  $k_i \leq l_i, \forall i \leq j_0$ .

La notation  $\otimes$  désignera aussi bien le produit direct (dit de Kronecker) de matrices quelconques ( $A \otimes B$  est la matrice composée des blocs  $a_{ij}B$ ) que le produit tensoriel de formes multilinéaires ( $\phi \otimes \psi(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ ). Si  $\xi^1, \dots, \xi^n$  sont des vecteurs de  $K^{n+1}$ , on sait qu'il existe un unique vecteur  $\xi$  dit produit vectoriel et noté  $\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n$ , qui vérifie  $\langle \xi, \psi \rangle = \det[\xi^1, \dots, \xi^n, \psi]$  pour tout vecteur  $\psi$ . De même, seront notés  ${}^t A$  pour la transposée de  $A$ ,  $A^{*j}$  son  $j^{\text{ième}}$  vecteur colonne et  $A^{i*}$  son  $i^{\text{ième}}$  vecteur ligne.  $\partial^i F = \partial F / \partial x_i$ ,  $\partial^{ii} F = \partial^i(\partial^i F)$  désigneront les dérivées partielles de la fonction  $F$ .

2- Une application rationnelle  $R: D \subset K^n \rightarrow K^m$ ,  $R(x) = y = (y_1, \dots, y_m)$  est définie par  $m+1$  polynômes  $R_i(\cdot)$  à  $n$  variables sur l'ouvert (de Zariski)  $D = \{x; R_{m+1}(x) \neq 0\}$  par

$$y_i = \frac{R_i(x)}{R_{m+1}(x)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.14)$$

Pour gagner en généralités, nous savons qu'il est plus intéressant au niveau des applications rationnelles de travailler directement en projectif. Pour cela, notons  $\mathbf{P}_r = \mathbf{P}(K^{r+1})$  l'espace projectif associé à  $K^{r+1}$  et  $P_j$  les versions homogènes des polynômes  $R_j$ . On peut alors plonger  $K^n$  et  $K^m$  dans  $\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_m$  et traduire l'application (4.14) dans le système de coordonnées homogènes associé au bases canoniques, de la façon suivante :

$$P: K^{n+1} \rightarrow K^{m+1}, \quad P(x) = y, \quad \text{avec } y_j = P_j(x), \quad j = 1, \dots, m+1.$$

Soit  $\mathcal{S} = P(K^{n+1})$  l'image de  $P$  et  $\bar{\mathcal{S}}$  sa clôture projective, i.e. la plus petite variété projective qui la contient et considérons l'idéal,

$$\mathcal{I}_P = \{F; F \in K[Y_1, \dots, Y_{m+1}], F \circ P(\cdot) \equiv 0\}$$

**Théorème 2**  $\mathcal{I}_P$  est un idéal premier homogène et  $\bar{\mathcal{S}} = V_p(\mathcal{I}_P)$  □

Cela signifie que,  $\bar{\mathcal{S}}$  est une variété irréductible. On a  $\mathcal{S} \subset \bar{\mathcal{S}}$ , mais en général  $\mathcal{S} \neq \bar{\mathcal{S}}$ . Si  $\mathcal{I}_P = (F)$  c'est à dire principal,  $\bar{\mathcal{S}}$  est une hypersurface projective irréductible et il existe toujours deux parties ouvertes au sens de Zariski de  $K^{m+1}$  et de  $\mathcal{S}_p$ ,

birationnellement équivalentes. Si  $\mathcal{I}_P$  n'est pas principal,  $\bar{S}$  dégénère en une variété irréductible de dimension plus petite, c'est à dire un point ou une courbe gauche.

Dans ce contexte, nous dirons qu'un point de l'image (ou support)  $\mathcal{S}$  est, *simple*, *double*, ... s'il est exactement l'image, d'un point, de deux points, ...

De même on appellera, ensemble des *point de base* de  $P$ , la variété projective

$$V_P(P) = \{x ; x \in K^{n+1}, P_j(x) = 0, j = 1, \dots, m\}$$

Un point de base  $x$  est dit de multiplicité  $k$ , s'il est de multiplicité  $k$  pour chaque  $P_j, j = 1, \dots, m + 1$ .

3- Nous rappelons la conséquence d'un théorème général prouvé en [AR-SE], qui interviendra lors de formules d'inversion.

**Théorème 3** Si  $y^0$  est un point simple de la surface  $\mathcal{S}$ , alors les coordonnées de son antécédent  $x^0 = S^{-1}(y^0)$ , s'expriment rationnellement en fonction des coefficients des polynômes  $R_i, i = 1, \dots, n + 2$  et des coordonnées de  $y^0$ .

#### 4.12.2 Exemple de la surface de Steiner canonique

C'est la surface paramétrique  $\mathcal{S} = P(K^3)$ :

$$P_1(x) = 2x_2x_3, P_2(x) = 2x_3x_1, P_3(x) = 2x_1x_2, P_4(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (4.15)$$

Le cas réel

**Proposition 3** Si  $K = \mathbb{R}$ , il n'existe pas de surface algébrique projective  $\bar{S} = \{y : F(y) = 0\}$ , qui coïncide exactement avec  $\mathcal{S}$ .

Preuve.

Le calcul de la forme implicite (4.33) donne

$$I_P(y) = y_1^2y_2^2 + y_2^2y_3^2 + y_3^2y_1^2 - 2y_1y_2y_3y_4 = 0 \quad (4.16)$$

Le polynôme  $I_P$  est irréductible,  $\bar{S} = V_P(I_P)$  est la surface projective minimale contenant  $\mathcal{S}$ , dont elle est cependant distincte. Il suffit de constater par exemple que  $\bar{S}$  contient la droite projective  $\{y_1 = 0, y_2 = 0\}$ , alors que  $\mathcal{S}$  ne la contient pas:

Si on prend  $y_4 = 1$  et  $y_3$  quelconque, la forme paramétrique montre que :

- soit  $x_3 = 0$  et dans ce cas,  $y_4 = 1 = x_1^2 + x_2^2$  implique que  $|y_3| = |x_1x_2| \leq 1$ . Il n'y a donc pas d'antécédent pour les valeurs  $|y_3| > 1$ .

- soit  $x_1 = x_2 = 0$ , et alors on aboutit à l'absurdité  $y_3 = 0$  et  $y_4 = 1 = y_3^2$  □.

Cette situation est en fait générale, la surface algébrique contient strictement le support de la nappe paramétrée.

### Le cas complexe

**Proposition 4** Si  $K = \mathbb{C}$ , on a  $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}}$ .

**Preuve.**

On va prouver que tout point  $y$  régulier de  $\overline{\mathcal{S}}$  admet un antécédent.

- 1.  $y_1 y_2 y_3 \neq 0$ . La formule d'inversion (4.35) fournit l'antécédent  $x = G(y)$ ,

$$x_1 = y_2 y_3, \quad x_2 = y_1 y_3, \quad x_3 = y_1 y_2 \quad (4.17)$$

On vérifie facilement que

$$P(x) = (2y_1^2 y_2 y_3, 2y_1 y_2^2 y_3, 2y_1 y_2 y_3^2, y_2^2 y_3^2 + y_1^2 y_3^2 + y_1^2 y_2^2) \text{ et que } I_P(P(G(y))) = 0$$

- 2.  $y_1 y_2 y_3 = 0$ . On peut supposer  $y_1 = 0$  et alors (4.16) se réduit à  $I_P(y) = y_2^2 y_3^2 = 0$ . Si on suppose  $y_2 = 0$  par exemple, le système (4.15) devient  $2x_2 x_3 = 0$ ,  $2x_1 x_3 = 0$ ,  $2x_1 x_2 = y_3$ ,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_4$ .

Dans ce cas la formule (4.17) ne marche plus et deux situations se présentent :

- $y_3 = 0$ , il s'agit du *point triple* et on a trois solutions  $x = (1, 0, 0)$ ,  $x = (0, 1, 0)$ ,  $x = (0, 0, 1)$ .
- $y_3 \neq 0$ , on a deux antécédents  $x = (y_3, y_4 \pm \sqrt{y_4^2 - y_3^2}, 0)$ .  
Le point  $y$  est sur la *droite double*  $\Delta^3$ . Par symétrie, on a pour les deux autres droites doubles :
  - $x = (y_2, 0, y_4 \pm \sqrt{y_4^2 - y_2^2})$  si  $y \in \Delta^2 = \{y_1 = 0, y_3 = 0\}$ .
  - $x = (0, y_1, y_4 \pm \sqrt{y_4^2 - y_1^2})$  si  $y \in \Delta^1 = \{y_2 = 0, y_3 = 0\}$ . □

La formule d'inversion (4.17) est *optimale* pour la Steiner canonique, dans le sens où elle est polynomiale de degré 2 et n'est mise en défaut que pour les points singuliers de  $\mathcal{S}$ .

## 4.13 Les surfaces rationnelles de degré 2

Salmon ([SAL]), définit les surfaces de Steiner comme étant les surfaces rationnelles de degré 2, dont la forme implicite générale est polynôme homogène de degré 4, possédant trois droites doubles. Plus récemment Sederberg ([SED]) l'a reprise en la proposant comme compromis entre deux formes paramétriques fréquemment utilisées en infographie : le morceau triangulaire plan, simple mais mal adapté aux représentations des surfaces et le carreau bicubique qui est une surface du 18<sup>me</sup> degré!

### 4.13.1 Définitions

**Définition 3** On appelle surface rationnelle de degré 2, la donnée d'un polynôme homogène de degré 2,  $P : K^3 \rightarrow K^4$ .

$$P(x) = \sum_{q \in \mathcal{A}_{3,2}} \pi_q x^q / q!, \quad \pi_q \in K^4 \quad (4.18)$$

**Remarque 2** Dans les exemples,  $K$  est soit le corps des réels, soit celui des complexes, mais les résultats restent valables pour les corps de caractéristique différente de 2.

[Cartan, 1982] et [BER] sont de bonnes références pour les propriétés des polynômes vectoriels, on consultera au besoin les annexes, pour la justification des énoncés et des notations introduites ici. Ainsi on suppose pour toute la suite, le choix des bases canoniques,  $e = (e_1, e_2, e_3)$  pour  $K^3$ ,  $f = (f_1, \dots, f_4)$  pour  $K^4$  et de l'ordre lexicographique inverse pour  $\mathcal{A}_{3,2}$ .

Il existe donc, une application  $\phi_P \in \odot^2(K^3, K^4)$ , l'espace vectoriel des applications bilinéaires sur  $K^3$  à valeurs dans  $K^4$ , et donc d'une application linéaire  $L_P$ , telle que

$$\begin{cases} 2!P(x) &= \phi_P(x, x) &= L_P x^{\odot 2} \\ \phi_P(x^1, x^2) &= \Delta_{x^1 x^2} P(0) &= L_P x^1 \odot x^2 \end{cases} \quad (4.19)$$

Les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, se calculent simplement. On se reportera à l'annexe 2 pour les notations complémentaires ( $\Lambda^{(n,s)}(x)$ , etc...).

$$\begin{aligned} \partial^i P(x) &= \phi_P(e_i, x) &= L_P \Lambda^{(3,2)}(e_i) x \\ \partial^{i_1 i_2} P(x) &= \phi_P(e_{i_1}, e_{i_2}) &= L_P \Lambda^{(3,2)}(e_{i_1}) e_{i_2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

La matrice  $L_P$  est de dimension  $4 \times 6$ , ses éléments sont les coordonnées de  $P$  (ou de sa polaire  $\phi_P$ ). Ses vecteurs lignes  $L_P^{j*}$  sont les coordonnées des  $P_j \in \odot^2(K^3, K)$ . Ses vecteurs colonnes  $L_P^{*q}$ ,  $q \in \mathcal{A}_{3,2}$  sont à la base de la représentation de Bézier, ils sont dits *points de contrôle* de la surface: Soit  $q \in \mathcal{A}_{3,2}$  et  $\alpha(q) = (i_1, i_2)$  l'indice associé (annexe A2),

1- si  $i_1 = i_2$ , on a  $L_P^{*q} = \phi_P(e_{i_1}, e_{i_1}) = 2!P(e_{i_1})$  i.e.  $L_P^{*q}$  appartient à la surface.

2- si  $i_1 \neq i_2$ ,  $L_P^{*q} = \phi_P(e_{i_1}, e_{i_2}) = \partial^{i_1} P(e_{i_2})$ , est le vecteur tangent au point  $P(e_{i_1})$  dans la direction  $e_{i_2}$ , et réciproquement.

Ils servent aussi à énoncer les conditions pour un recollement régulier des patches (fonctions *splines*).

### 4.13.2 Espace tangent, surface normale

On tire de (4.20), l'équation de l'espace tangent  $\mathcal{T}_{y,S}$  à  $S$  au point  $y = P(x)$ :

$$y^* \in \mathcal{T}_{y,S} \iff \det[y^* - y, \partial^1 P(x), \dots, \partial^3 P(x)] = 0.$$

D'après la formule d'Euler,  $y = P(x)$  est combinaison linéaire des  $\partial^i P(x)$  et l'équation se réduit donc à

$$\begin{cases} y^* \in \mathcal{T}_{y,S} & \iff \det[y^*, \partial^1 P(x), \dots, \partial^3 P(x)] = 0 \\ & \iff \langle y^*, N(x) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

$N(x) = \partial^1 P(x) \wedge \dots \wedge \partial^3 P(x)$  est le vecteur normal à la nappe paramétrée  $S$  au point  $P(x)$ , il vérifie :

$$\langle N(x), y^* \rangle = \det[\partial^1 P, \dots, \partial^3 P, y^*], \forall y^* \in K^4$$

et en particulier,

$$\langle P, N \rangle(x) = 0 \quad (4.22)$$

On peut écrire la matrice jacobienne de  $P$ , de dimension  $4 \times 3$ , sous la forme,

$$J_P(x) = [\partial^1 P, \partial^2 P, \partial^3 P](x) = L_P \Lambda^{(3,2)}(x).$$

Si  $J_P^{(-j)}$  est la même matrice à laquelle on a supprimé la ligne  $j$ , on obtient l'expression des coordonnées de  $N(x) = \sum_{j=1}^4 N_j(x) f_j$ ,

$$\begin{cases} N_j(x) & = \det[\partial^1 P, \dots, \partial^3 P, f_j] \\ & = (-1)^{4+j} \det(J_P^{(-j)})(x) \end{cases}$$

Par ailleurs,  $N$  est un polynôme vectoriel homogène de degré 3, en  $x$  :

$$N(x) = \sum_{q \in \mathcal{A}_{3,3}} n_q x^q / q!$$

Il existe donc, une application tri-linéaire symétrique, telle que

$$\begin{cases} 3!N(x) & = \phi_N(x, x, x) & = L_N x^{\odot 3} \\ \phi_N(x^1, x^2, x^3) & = \Delta_{x^1 x^2 x^3} N(0) \\ 2! \partial^i N(x) & = \phi_N(x, x, e_i) & = L_N \Lambda^{(3,3)}(e_i) x^{\odot 2} \end{cases} \quad (4.23)$$

On calcule les coordonnées  $n_q$  de  $N$  et  $n_q^{(i)}$  de  $\partial^i N = \sum_{\bar{q} \in \mathcal{A}_{3,2}} n_{\bar{q}}(i) x^{\bar{q}} / \bar{q}!$ , en notant pour  $q \in \mathcal{A}_{3,3}$  son associé  $\alpha(q) = (\alpha_1, \dots, \alpha_3)$

$$n_q = \Delta_{e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} e_3^{\alpha_3}} N(0) = \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{3-|\delta|} N(e_{\alpha_1} \delta_1 + e_{\alpha_2} \delta_2 + e_{\alpha_3} \delta_3)$$

$$n_q^{(i)} = n_{\bar{q} + \delta^{(i)}} \text{ avec } \delta^{(i)} = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)$$

$N$  définit donc, une surface paramétrique  $\mathcal{N}$  dite *surface duale* ou *tangente* de  $S$ . Elle est caractérisée par les relations :  $\forall i = 1, \dots, 3$ ,

$$\begin{cases} \langle \partial^i P, N \rangle(x) & = 0 \\ \langle P, \partial^i N \rangle(x) & = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$



On en déduit que la normale  $R(x)$  au point  $N(x)$  est  $P(x)$ , à un facteur près, i.e. il existe un polynôme homogène  $\eta(x)$  de degré 4 ou identiquement nul tel que

$$R(x) = \partial^1 N \wedge \partial^2 N \wedge \partial^3 N(x) = \eta(x)P(x) \quad (4.25)$$

Ainsi, la surface duale de  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{S}$  (à la courbe  $\eta(x) = 0$  près). Sa matrice jacobienne s'exprime facilement,

$$J_N(x) = [\partial^1 N, \dots, \partial^3 N](x) = L_N \Lambda^{(3,3)}(x) \Lambda^{(3,2)}(x)$$

L'équation de l'espace tangent  $\mathcal{T}_{y,\mathcal{N}}$  à  $\mathcal{N}$  au point  $y = N(x)$  s'écrit :

$$y^* \in \mathcal{T}_{y,\mathcal{N}} \iff \eta(x) \cdot \langle y^*, P(x) \rangle = 0 \quad (4.26)$$

### 4.13.3 Les formes quadratiques fondamentales de la surface, $K = \mathbb{R}$

#### la 1ère forme quadratique

C'est la forme quadratique définie positive  $G(x) = (g_{ij}(x))$ , définie sur l'espace tangent en tout point de la surface  $\mathcal{S}$ . C'est la matrice de Gram des vecteurs tangents à la surface  $\mathcal{S}$ ,

$$g_{ij}(x) = \langle \partial^i P, \partial^j P \rangle(x)$$

Autrement dit,

$$G(x) = {}^t J_P(x) J_P(x) = {}^t \Lambda^{(3,2)}(x) {}^t L_P L_P \Lambda^{(3,2)}(x)$$

Elle restitue simplement la norme euclidienne de l'espace ambiant  $R^4$  à l'espace tangent. Ainsi pour un vecteur de l'espace tangent  $T = \sum_i t_i \partial^i P(x)$ , sa norme s'écrit  $\|T\|^2 = \sum_{ij} t_i t_j g_{ij}(x)$ . En particulier pour  $2P(x) = \sum x_i \partial^i P(x)$ , on a

$$4\|P(x)\|^2 = {}^t x \cdot G(x) \cdot x$$

Le développement du déterminant selon la formule de Binet-Cauchy, donne

$$\|N(x)\|^2 = \det(G(x))$$

De la même façon, on obtient la 1ère forme quadratique de la surface duale  $\mathcal{N}$ ,  $\tilde{G}(x) = (\tilde{g}_{ij}(x)) = {}^t J_N(x) J_N(x)$ . Elle vérifie

$$\begin{aligned} 9 \|N(x)\|^2 &= {}^t x \cdot \tilde{G}(x) \cdot x \\ \det(\tilde{G}(x)) &= 4\eta^2(x) {}^t x \cdot G(x) \cdot x \end{aligned}$$

### la 2ème forme quadratique

La deuxième forme quadratique  $B(x) = (b_{ii}(x))$ , agit aussi sur les vecteurs de l'espace tangent à  $S$ . Elle détermine les *directions de courbure* de la nappe en ce point. Ses coefficients  $b_{ii}(x)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \|N(x)\| b_{ii}(x) &= \langle \partial^{ii} P(x), N(x) \rangle \\ (\det G(x))^{1/2} b_{ii}(x) &= \det[\partial^1 P, \partial^2 P, \partial^3 P, \partial^{ii} P](x) \end{aligned}$$

Des équations (4.24), on tire

$$\langle \partial^i P, \partial^l N \rangle = - \langle P, \partial^{il} N \rangle = - \langle \partial^{ii} P, N \rangle = \langle \partial^l P, \partial^i N \rangle \quad (4.27)$$

L'expression duale, pour les coefficients de la 2ème forme de la surface  $\mathcal{N}$ , s'écrit

$$\|P(x)\| \tilde{b}_{ii}(x) = \langle \partial^{ii} N(x), P(x) \rangle$$

Compte tenu des relations précédentes, on a

$$\|N(x)\| B(x) = \|P(x)\| \tilde{B}(x) = - {}^t J_P(x) J_N(x) = - {}^t J_N(x) J_P(x)$$

Si  $m(x) = N(x)/\|N(x)\|$  est le vecteur normal unitaire, on a  $\langle \partial^i m, m \rangle = 0$ . On peut faire les décompositions

$$\partial^i m = \sum_{s=1}^3 c_{si} \partial^s P \quad \text{et poser } C = (c_{si})$$

**Lemme 3** On a,  $B = -GC$  et  $\det(B(x)) \equiv 0$ .

#### Preuve

La première égalité découle du calcul de  $\partial^i \langle \partial^l P, m \rangle = 0$ . Ensuite, l'homogénéité de  $N$  et l'égalité

$$\partial^i m = \frac{\partial^i N}{\|N\|} - \left\langle \frac{\partial^i N}{\|N\|}, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|}$$

entraînent,  $\sum_i x_i \partial^i m = 0$  et donc  $\partial^1 m \wedge \partial^2 m \wedge \partial^3 m = 0$ .

Par ailleurs, en utilisant les propriétés du déterminant, on vérifie que,  $0 = \partial^1 m \wedge \partial^2 m \wedge \partial^3 m = \det(C).N$ .

Ainsi  $\det(C)$  s'annule sur l'ouvert  $\{x; N(x) \neq 0\}$ , il est donc identiquement nul et on conclut en remarquant que  $\det(B) = (-1)^3 \det(G) \det(C)$ .  $\square$

### Les coefficients de connexité

Les coefficients de connexité ou de Cristoffel de 1ère espèce,  $\Gamma_{ii,s}(x)$  sont définis par

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii,s}(x) &= \langle \partial^{ii} P, \partial^s P \rangle(x) \\ &= \sum_k x_k \langle \partial^{ii} P, \partial^{sk} P \rangle \end{aligned}$$

Les  $\Gamma_{i,s}$  sont de simples formes linéaires. Les coefficients de 2ème espèce, eux sont donnés sous la forme implicite,

$$\Gamma_{i,s}(x) = \sum_k \Gamma_{i1}^k(x) g_{ks}(x)$$

En posant  $\Gamma_{i,o} = {}^t[\Gamma_{i,1}, \Gamma_{i,2}, \Gamma_{i,3}]$  et  $\Gamma_{i1}^o = {}^t[\Gamma_{i1}^1, \Gamma_{i1}^2, \Gamma_{i1}^3]$ , on traduit

$$\Gamma_{i,o} = {}^t J_P \partial^{i1} P \quad \text{et} \quad \Gamma_{i1}^o = G^{-1} \Gamma_{i,o}$$

Les formes quadratiques fondamentales  $G$  et  $B$  de la surface déterminent les courbures de la surface en étudiant les vecteurs et valeurs propres de  $G - \lambda B$ . Elles permettent aussi, selon le théorème de Bonet, de déterminer exactement la surface elle même, grâce aux décompositions

$$\begin{aligned} \partial^{i1} P &= \sum_s \Gamma_{i1}^s(x) \partial^s P + b_{i1} m \\ \partial^i m &= \sum_s c_{si} \partial^s P \end{aligned}$$

### Intégrales de surface

La première forme quadratique permet de calculer les intégrales de surface: Si  $\mathcal{R}$  est un domaine de l'espace des paramètres et  $P(\mathcal{R})$  son image, on a

$$\int_{P(\mathcal{R})} \Psi(\sigma) d\sigma = \int_{\mathcal{R}} \Psi(P(x)) \sqrt{\det(G(x))} dx$$

En particulier, si  $H(y)$  est un champs de vecteurs (rayonnement, etc ...), son flux à travers la surface vaut

$$\int_{P(\mathcal{R})} \langle H(y), N(y) \rangle d\sigma = \int_{\mathcal{R}} \sum_j H_j(P(x)) N_j(x) \sqrt{\det(G(x))} dx.$$

## 4.14 Études des singularités et classification partielle

L'isomorphisme linéaire  $\odot^2(K^3, K^4) \simeq \odot^2(K^3, K) \otimes K^4$ , montre que les surfaces rationnelles de degré 2, forment un espace projectif de dimension

$4 \times C_{3-1}^{3+2-1} - 1 = 23$ . On peut donc prendre comme système de coordonnées homogènes les coefficients de  $L_P$ .

[DEG] et [CO-SC-ST] ont proposé, le premier indépendamment des autres, une même classification pour les surfaces rationnelles standards du second degré. Cette classification se base sur la position du noyau de la forme linéaire  $L_P$  par rapport aux variétés de Véronèse et cordale.

Cette section complète cette classification, en considérant aussi les formes dégénérées mais surtout interprète cette dernière en terme de géométrie par le biais des surfaces tangentielles et du type de faisceaux de coniques mis en jeu.

Considérons les espaces vectoriels,

$$\mathcal{L}_P = \text{Im}(L_P), \quad \mathcal{K}_P = \text{Ker}(L_P) \quad \text{et} \quad p = \dim \mathcal{L}_P \quad (4.28)$$

On commencera par les cas très dégénérés en calculant dans l'anneau factoriel  $K[X_1, X_2, X_3]$ , le polynôme homogène

$$Q(x) = \text{pgcd}(P_1(x), \dots, P_4(x)) \quad \text{et} \quad q = d^\circ Q \quad (4.29)$$

#### 4.14.1 Les cas dégénérés

$q = 2 \Leftrightarrow p = 1$ . Disons pour simplifier  $Q = P_1$  et  $P_j = \gamma_j P_1$ ,  $1 \leq j \leq 4$ .

$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$  se compose du seul point (projectif)  ${}^t(\gamma_1, \dots, \gamma_4)$ , et son *équation implicite* est l'intersection de 3 plans :

$$\bar{\mathcal{S}} = V_p(Y_2 - \gamma_2 Y_1, Y_3 - \gamma_3 Y_1, Y_4 - \gamma_4 Y_1)$$

$q = 1$ . Les  $P_i$  se décomposent  $P_i = Q \tilde{P}_i$ , avec des  $\tilde{P}_i$  homogènes, premiers entre eux :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{\gamma}_j^1 x_1 + \tilde{\gamma}_j^2 x_2 + \tilde{\gamma}_j^3 x_3, \quad 1 \leq j \leq 4, \text{ i.e.} \\ P(x) &= Q(x) \tilde{P}(x) = Q(x) \tilde{\Gamma} \cdot x \end{aligned}$$

On remarquera que le rang de la matrice  $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_{ji}; \quad 1 \leq j \leq 4, \quad 1 \leq i \leq 3)$  vaut  $p$  et ne peut excéder 3. On distinguera deux cas.

$p = 2$ . Quitte à permuter les indices,  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$  sont linéairement indépendants et  $\tilde{P}_j = \gamma_j^1 \tilde{P}_1 + \gamma_j^2 \tilde{P}_2$ ,  $j = 3, 4$ .  $\bar{\mathcal{S}}$  est une droite projective, dont l'*équation implicite* est l'intersection de 2 plans projectifs:

$$\bar{\mathcal{S}} = V_p(Y_3 - \gamma_3^1 Y_1 - \gamma_3^2 Y_2, Y_4 - \gamma_4^1 Y_1 - \gamma_4^2 Y_2)$$

On a,  $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$  sauf si  $Q = \rho^1 P_1 + \rho^2 P_2$ , auquel cas  $\bar{\mathcal{S}}$  sera privée d'un point:  $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}} - \bar{\mathcal{S}} \cap \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D} = V_p(\rho^1 Y_1 + \rho^2 Y_2)$ .

$p = 3$ . On peut aussi supposer  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$  linéairement indépendants et donc écrire  $\tilde{P}_4 = \gamma_4^1 \tilde{P}_1 + \gamma_4^2 \tilde{P}_2 + \gamma_4^3 \tilde{P}_3$ ,  $Q = \rho^1 \tilde{P}_1 + \rho^2 \tilde{P}_2 + \rho^3 \tilde{P}_3$ .

$\tilde{P}$  est une homographie entre  $\mathbf{P}_2$  et la variété linéaire projective plane,

$$\bar{\mathcal{S}} = V_p(Y_4 - \gamma_4^1 Y_1 - \gamma_4^2 Y_2 - \gamma_4^3 Y_3)$$

On a,  $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}} - \bar{\mathcal{S}} \cap \bar{\mathcal{H}}$  avec  $\bar{\mathcal{H}} = V_p(\rho^1 Y_1 + \rho^2 Y_2 + \rho^3 Y_3)$ .

**Remarque 3** Il convient pour ces cas dégénérés de reparamétriser  $P$  en la transformation linéaire  $P(x) = \tilde{\Gamma} x$ .

$q = 0$ . On étudie seulement les deux possibilités  $p = 2$  et  $p = 3$  (car  $p = 1 \Leftrightarrow q = 2$ ) et  $p = 4$  sera étudié plus loin (cas standard).

$p = 2$ . Si on suppose  $P_1, P_2$  linéairement indépendants alors  $P_j = \gamma_j^1 P_1 + \gamma_j^2 P_2$ ,  $j = 3, 4$ , et  $\mathcal{S}$  est contenue dans la droite projective :

$$\bar{\mathcal{S}} = V_p( Y_3 - \gamma_3^1 Y_1 - \gamma_3^2 Y_2, Y_4 - \gamma_4^1 Y_1 - \gamma_4^2 Y_2 )$$

C'est l'étude d'une application rationnelle de  $P^2$  dans  $P^1$ . Sur  $\mathbb{C}$ , on a  $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$ , mais sur  $\mathbb{R}$ , il faut regarder le type du faisceau de coniques  $\rho^1 P_1 + \rho^2 P_2$ . En général  $\mathcal{S}$  et  $\bar{\mathcal{S}}$  sont distinctes, comme c'est le cas par exemple de  $P_1, P_2$  définies positives.

$p = 3$ . De même, on peut supposer  $P_1, P_2, P_3$  linéairement indépendants et  $P_4 = \gamma_4^1 P_1 + \gamma_4^2 P_2 + \gamma_4^3 P_3$ .  $\mathcal{S}$  est contenue dans le plan projectif  $V_p( Y_4 - \gamma_4^1 Y_1 - \gamma_4^2 Y_2 + \gamma_4^3 Y_3 )$ . C'est l'étude d'une application rationnelle de  $P^2$  dans  $P^2$ , et cette étude se confond en celle du réseau de coniques,  $\rho^1 P_1 + \rho^2 P_2 + \rho^3 P_3$ . Sur  $\mathbb{C}$ , cela peut être aussi bien une courbe plane, par exemple l'hyperbole plane ( $P_1(x) = x_1^2, P_2(x) = x_2^2, P_3(x) = x_1 x_2, P_4(x) = 0$ ), que le plan entier ( $P_1(x) = x_1^2, P_2(x) = x_2^2, P_3(x) = P_4(x) = x_3^2$ ).

#### 4.14.2 Les variétés de Véronèse et cordale

Considérons l'image  $\mathcal{U} = U(K^3 \times K^3)$ , du produit symétrique,  $U(x^1, x^2) = x^1 \odot x^2$ , ainsi que l'image de sa restriction sur la diagonale,  $V(x) = U(x, x) = x^{\odot 2}$ .  $\mathcal{V} = V(K^3)$  est dite la variété de Véronèse et  $\mathcal{U}$  la variété cordale. On a  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \subset \odot_2 K^3 \simeq K^6$ . Ayant choisi l'ordre lexicographique inverse, on peut noter

$$U(x^1, x^2) = (x_1^1 x_1^2, x_1^1 x_2^2 + x_2^1 x_1^2, x_1^1 x_3^2 + x_3^1 x_1^2, x_2^1 x_2^2, x_2^1 x_3^2 + x_3^1 x_2^2, x_3^1 x_3^2),$$

$$V(x) = (x_1^2, 2x_1 x_2, 2x_1 x_3, x_2^2, 2x_2 x_3, x_3^2)$$

A tout point  $z = (z_p; p \in \mathcal{A}_{3,2}) \in \odot_2 K^3$ , associons la forme bilinéaire symétrique duale  $\psi(z) = ((p!z_p, p \in \mathcal{A}_{3,2}) \in \odot^2(K^3, K)$  à laquelle correspond bijectivement la matrice symétrique,

$$M(\psi(z)) = \begin{pmatrix} 2!z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & 2!z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & 2!z_6 \end{pmatrix}$$

de conique associée

$$\mathcal{C}(z) = \{x ; \psi(z)(x, x) = {}^t x M(\psi(z)) x = 0\}$$

**Remarque 4** On assimile ainsi  $\psi(\mathcal{V})$  aux formes quadratiques qui se décomposent en un carré,  $\psi(\mathcal{U})$  à celles qui se décomposent en un produit (i.e. dégénérées) et le reste aux formes quadratiques irréductibles.

Voici une caractérisation de  $\mathcal{U}$ ,

$$(z \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\exists u, v \in K^3, M(\psi(z)) = u {}^t v + v {}^t u) \Leftrightarrow (\det(M(\psi(z))) = 0). \quad (4.30)$$

La variété cordale est identifiée ici, sous une forme différente de celle de [DEG] et [CO-SC-ST] où sont énoncées par ailleurs plusieurs propriétés de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ .

**Proposition 5**  $\mathcal{U}$  est l'hypersurface  $V_P(4Z_1Z_4Z_6 + Z_2Z_3Z_5 - Z_2^2Z_6 - Z_3^2Z_4 - Z_5^2Z_1)$ , dont l'ensemble des points singuliers est  $\mathcal{V}$ .

Si  $x = t_1u + t_2v \in D(u, v)$  est un point de la droite projective passant par  $u$  et  $v$ , on a  $V(x) = t_1^2u^{\odot 2} + t_2v^{\odot 2} + 2t_1t_2u \odot v$ . On voit que  $\Gamma_{u,v} = V(D(u, v)) \subset \mathcal{V}$  est une conique du plan projectif  $\Pi_{u,v} = \{\gamma_1u^{\odot 2} + \gamma_2v^{\odot 2} + \gamma_3u \odot v; \gamma_i \in K\}$ . De plus on a,  $\Pi_{u,v} \subset \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U} = \bigcup_{u,v \in K^3} \Pi_{u,v}$  et  $\mathcal{V} = \bigcup_{v \in K^3} \Gamma_{u_0,v}$ , où  $u_0$  est un point fixé quelconque de  $K^3$ .

### 4.14.3 Les singularités de $\mathcal{S}$

L'ensemble des antécédents des points *singuliers* de la surface  $\mathcal{S}$ , correspond aux points où le vecteur normal  $N(x)$  est nul, autrement dit l'ensemble des points de base de la surface  $\mathcal{N}$ . Il s'agit de regarder les conditions de dépendance linéaire des vecteurs  $\partial^i P$ , pour lesquels on a la suite de relations,

$$N(u) = 0 \iff \exists v \neq 0; \sum_{i=1}^3 v_i \partial^i P(u) = 0 \iff \exists v \neq 0; \phi_P(u, v) = 0 \implies N(v) = 0 \quad (4.31)$$

On distinguera les différentes valeurs de  $d_P(u) = \text{rang}(\partial^i P(u), i \leq 3)$ .

$d_P(u) = 2$ .  $u$  possède un point conjugué  $v$ ,  $\phi_P(u, v) = 0$ , et alors

- soit  $u = v$  i.e.  $u$  est un point de base de  $P$ ,
- soit les points  $x^1 = t_1u + t_2v$  et  $x^2 = t_1u - t_2v$ , de la droite  $D(u, v)$  sont distincts si  $t_1 \neq 0$  et  $t_2 \neq 0$ , non nuls et vérifient  $2P(x^1) = 2P(x^2) = t_1^2\phi_P(u, u) + t_2^2\phi_P(v, v)$  i.e ont la même image. Cette image est située sur la droite double  $\Delta(P(u), P(v))$  si  $P(u)$  et  $P(v)$  sont distincts. Sinon  $P$  est constant et  $N$  est nul sur  $D(u, v)$ .

$d_P(u) = 1$ . Il existe une droite projective  $D(v, w)$  telle que,  $\forall t_1, t_2, \phi_P(u, t_1v + t_2w) = 0$ .

- Si  $u \in D(v, w)$  alors c'est un point de base de  $P$ . On peut prendre  $u = v$  et alors tous les points  $x = t_1v + t_2w$  de cette droite  $D(v, w)$  vérifie  $\phi_P(x, x) = t_2^2\phi_P(w, w)$ , c'est à dire ont la même image.  $\phi_P(w, w) \neq 0$ , sinon les  $P_i$  sont dégénérés et possèdent  $D(v, w)$  comme composante commune.
- Si  $u \notin D(v, w)$ , prenons  $\tilde{v} \in D(v, w)$  et  $x = t_1u + t_2\tilde{v}$  un point quelconque de la droite  $D(u, \tilde{v})$ . On a  $\phi_P(x, x) = t_2^2\phi_P(\tilde{v}, \tilde{v})$ , c'est à dire  $P$  est constant et  $N$  est nul sur chacune de ces droite et donc  $N$  est identiquement nul. On conclut que l'image de  $P$  est la conique plane  $\{t_1^2\phi_P(v, v) + 2t_1t_2\phi_P(v, w) + t_2^2\phi_P(w, w), t_1, t_2 \in K\}$ , dégénérant éventuellement en une droite ou un point.

$d_P(u) = 0$ , entraîne  $P(u) = 0$  i.e.  $u$  est un point de base de  $P$  et on est encore dans le cas dégénéré précédent.  $\square$

De ce qui précède, on déduit,

**Proposition 6** *Tout point singulier de  $P$  (i.e. un point de base de  $N$ ) est soit un point de base de  $P$ , soit associé à un autre point de base de  $N$ , appelé son conjugué. Deux points conjugués distincts définissent une droite dont les autres points ont 2 à 2 la même image (droite double), soit dans un cas dégénéré, tous la même image.*

#### 4.14.4 Classification des cas non dégénérés

On ne considérera pour la suite que l'hypothèse,

$$H : q = 0, p = 4$$

Sous cette hypothèse, le noyau  $\mathcal{K}_P$  de l'application linéaire  $L_P : \odot_2 K^3 \simeq K^6 \rightarrow K^4$  est de dimension 2, i.e. une droite projective, et il existe donc  $\theta^1, \theta^2 \in \odot_2 K^3$  tels que  $\mathcal{K}_P = \{z = t_1\theta^1 + t_2\theta^2; t_1, t_2 \in K\}$ .

La classification des surfaces rationnelles du second degré se fait en regardant le type de l'intersection  $\mathcal{K}_P \cap \mathcal{U}$ , ou du faisceau de coniques  $\psi(\mathcal{K}_P) = \{t_1\psi(\theta^1) + t_2\psi(\theta^2), t_1, t_2 \in K\}$  avec la variété  $\psi(\mathcal{U})$ . On montre que la classification (Aa, ...) de [DEG], [CO-SC-ST], revient à la classification usuelle des faisceaux de coniques (type I, ...)( voir [BER]).

On vérifie que  $z = t_1\theta^1 + t_2\theta^2 \in \mathcal{K}_P \cap \mathcal{U}$  si et seulement si

$$F(t_1, t_2) = \det(t_1 M(\psi(\theta^1)) + t_2 M(\psi(\theta^2))) = 0$$

Ce polynôme  $F$  est soit identiquement nul soit homogène de degré 3.

#### les quadriques, $F \equiv 0$

$F \equiv 0$  si et seulement si  $\mathcal{K}_P \subset \mathcal{U}$ , ce qui signifie que le faisceau de coniques  $\psi(\mathcal{K}_P)$  est dégénéré et la surface  $\bar{\mathcal{S}}$  est une quadrique. On la classe selon le type de dégénérescence  $\mathcal{K}_P$ .

1.1. La droite  $\mathcal{K}_P$  est contenue dans un hyperplan  $\Pi_{u,v}$  de  $\mathcal{U}$  contenant une conique  $\Gamma_{u,v}$  de  $\mathcal{V}$ . Il y a 2 points de base  $u$  et  $v$ , qui sont les intersections de  $\mathcal{K}_P$  avec  $\mathcal{V}$ .

1.1.1.  $u \neq v$ , si on prend  $\theta^1 = u^{\odot 2}, \theta^2 = v^{\odot 2}$ , on a  $t_1\theta^1 + t_2\theta^2 = (\sqrt{t_1} u + i\sqrt{t_2} v) \odot (\sqrt{t_1} u - i\sqrt{t_2} v)$ . Cela signifie que le faisceau  $\psi(\mathcal{K}_P)$  est composé de coniques dégénérées comprenant chacune deux droites si  $t_1, t_2 \neq 0$ . En distinguant les cas réel et imaginaire, on obtient

1.1.1.a. Les 2 points de base sont réels (cas Ca: hyperboloïde à une nappe ou paraboloid hyperbolique).

1.1.1.b. Les 2 points de base sont complexes (cas Cb: ellipsoïde ou hyperboloïde à deux nappes).



1.1.2.  $u = v$ , les 2 points de base sont confondus signifie que  $\mathcal{K}_P$  est tangente à  $\Gamma_{u,v}$ . On peut prendre  $\theta^1 = u^{\odot 2}$ ,  $\theta^2 = u \odot v$ , et donc écrire  $t_1\theta^1 + t_2\theta^2 = u \odot (t_1u + t_2v)$ . Le faisceau est composé de coniques dégénérées ayant toute une composante commune. La surface est un cône (cas **Cc**)

1.2. La droite  $\mathcal{K}_P$  ne rencontre pas  $\mathcal{V}$ , i.e. il n'y a pas de point de base. Le faisceau est composé de coniques dégénérées passant par un même point. On peut prendre  $\theta^1 = u^1 \odot v^1$ ,  $\theta^2 = u^2 \odot v^2$ , avec  $u^1 \neq v^1$ ,  $u^2 \neq v^2$ ,  $v^2 = \rho_1 u^1 + \tau_1 v^1$ ,  $v^2 = \rho_2 u^1 + \tau_2 v^1$ .  $\bar{S}$  est une quadrique réglée: le cône compté deux fois (cas **Ae**).

### $F$ non nul

Si  $F \neq 0$ , il y a 3 solutions homogènes  $(t_1^s, t_2^s)$  qui correspondent à  $z^s = u^s \odot v^s \in \mathcal{K}_P \cap \mathcal{U}$ ,  $s = 1, 2, 3$ . Les coniques duales associées sont dégénérées  $\mathcal{C}^s = \{x; {}^t x M(\psi(z^s))x = {}^t x u^s ({}^t v)^s + v^s ({}^t u)^s x = 0\}$ . De plus elles vérifient l'équation,  $L_P z^s = L_P u^s \odot v^s = \phi_P(u^s, v^s) = 0$ , ce qui tenant compte de (4.31), permet d'énoncer,

**Proposition 7** les points  $u^s, v^s$  sont conjugués et singuliers pour  $\mathcal{S}$  (donc des points de base de  $\mathcal{N}$ ). Si  $u^s \neq v^s$ , la droite  $D^s = D(u^s, v^s)$  est double.

$\mathcal{V}$  étant l'ensemble des points singuliers de  $\mathcal{U}$  qui est de degré 3, un point de base est donc une solution de multiplicité au moins 2.

L'énumération qui suit se réfère d'une part à la présence d'un point de base et d'autre part au caractère réel ou imaginaire des solutions.

### les cubiques

Il y a un point de base ( donc racine double i.e.  $z^1 = z^2 = (u^1)^{\odot 2}$  et réelle et  $z^3$  est réelle). Ce sont des cubiques réglées, dont on distinguera 2 types.

2.1.  $z^3 \neq z^1$ . Il y a une droite double  $D(u^3, v^3)$ . En prenant  $\theta^1 = (u^1)^{\odot 2}$ ,  $\theta^2 = u^3 \odot v^3$ ,  $u^3 \neq u^1$ ,  $v^3 \neq u^1$ , on a un faisceau de coniques dites bitangentes, **type III**, qui correspond au cas **Ba**.

2.2. -  $z^1 = z^2 = z^3$ , la solution est triple. Le faisceau est de **type V**, il possède un seul élément dégénéré  $\theta^1 = (u^1)^{\odot 2}$  et toutes ses coniques sont suroscultrices. Il correspond au cas **Bb**.

### les quartiques

Il n'y a pas de point de base et les solutions définissent des droites doubles  $D^1, D^2, D^3$ . Il s'agit de quartiques que l'on différencie de la manière suivante.

3.1. Sur  $\mathbb{C}$ , le faisceau est de **type I**, possède trois coniques dégénérées distinctes (donc 4 points distincts en commun). On peut prendre  $\theta^1 = u^1 \odot v^1$ ,  $\theta^2 = u^2 \odot v^2$  et différencier les solutions complexes des solutions réelles.

3.1.a. Les droites  $D^1, D^2, D^2$  sont réelles, cas **Aa**.



- 3.1.b.  $D^1$  est réelle,  $D^2, D^3$  complexes conjuguées, cas **Ab**.
- 3.2.  $D^1 = D^2 \neq D^3$ , il y a 2 droites doubles, le faisceau est de **type II**. Toutes ses coniques ont une tangente commune et il possède seulement 2 coniques dégénérées. C'est le cas **Ac**.
- 3.3.  $D^1 = D^2 = D^3$ , il y a une seule droite double, le faisceau est de **type IV**. Il y a une seule conique dégénérée, dont le point double est un point d'intersection d'ordre 3 pour les éléments du faisceau, c'est le cas **Ad**.

#### 4.14.5 Les singularités de $\mathcal{N}$

Le type des singularités de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{N}$  détermine entièrement le type de la surface  $\mathcal{S}$ . D'après les équivalences précédentes, on a

**Proposition 8** *i) Sous l'hypothèse  $H$ ,  $N$  a 6 points de bases (comptés avec leur multiplicité).*

*ii) Si le polynôme  $\eta$  de l'équation (4.25) n'est pas identiquement nul, alors il se décompose sur  $\mathbb{C}$  en 4 droites.*

**Preuve** *i) Remarquons que l'égalité  $N(u) = 0$  entraîne  $\eta(u) = 0$ , par homogénéité de  $N$  si  $P(u) \neq 0$ .*

*ii) Si  $\eta$  n'est pas nul, on déduit des propriétés des 3 coniques dégénérées d'un faisceau de coniques, que les racines  $(u^s, v^s)$  sont alignées 3 par 3 sur 4 droites. Ce sont donc des racines doubles pour  $\eta$  qui est de degré 4 et donc se décompose en 4 droites.  $\square$*

## 4.15 Forme implicite, formules d'inversion

### 4.15.1 Forme implicite

La recherche de formes implicites pour la surface de Steiner n'a été abordée que récemment ([SED]). Pourtant l'existence de telles formes est d'importance pour tester l'appartenance d'un point à la surface ou pour calculer les coordonnées des intersections de la surface avec des courbes gauches paramétriques, en particulier avec les droites (*lancers de rayons*). Sederberg [SED] en donne une forme, mais elle n'est que partielle car elle comporte un facteur parasite difficile à extraire.

On a vu dans la classification partielle, que l'existence d'une forme implicite  $I_P$  pour l'application rationnelle  $P$  n'est pas toujours vérifiée. Cependant, dans les bons cas,  $\mathcal{S}_P$  est bien une surface algébrique et c'est une quartique dans le cas général. Il y a plusieurs méthodes pour trouver la forme implicite, dont les 2 principales sont : la technique des bases de Gröbner et la technique des résultants multivariés. Chacune de ces méthodes possède ses avantages et ses inconvénients, mais dans le contexte présent, il est avantageux de procéder de la façon suivante.

**La surface  $\mathcal{S}$** 

Si on introduit une variable auxiliaire  $\lambda$ , alors  $y$  (ou  $\lambda y$ ) est un point régulier de la surface  $\mathcal{S}$ , si on peut trouver un antécédent  $x$  qui vérifie,

$$\begin{aligned} P(x) - \lambda y &= 0 \\ \langle \partial^i N(x), y \rangle &= 0 \end{aligned}$$

En posant  ${}^t \bar{x} = ({}^t x^{\odot 2}, \lambda)$ , on traduit ce qui précède sous la forme matricielle :

$$\tilde{I}_P(y) \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} L_P & y \\ {}^t y L_{N\Lambda}^{(3,3)}(e_1) & 0 \\ {}^t y L_{N\Lambda}^{(3,3)}(e_2) & 0 \\ {}^t y L_{N\Lambda}^{(3,3)}(e_3) & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = 0 \quad (4.32)$$

D'évidence, si le système possède une solution, il en possède une infinité, car  $P$  est homogène et  $y$  est donc solution de l'équation

**Proposition 9** *Si la surface  $\bar{\mathcal{S}}$  est de degré 4, alors*

$$I_P(y) = \det(\tilde{I}_P(y)) = 0 \quad (4.33)$$

*est son équation implicite.*

**Preuve.** On vérifie que  $I_P$  est irréductible pour les différentes formes canoniques, car elles s'obtiennent les unes des autres par des homographies de  $P^2$  ou de  $P^3$ .  $\square$

Dans les autres cas, sous l'hypothèse H,

- si  $I_P$  se décompose, c'est un carré et la surface est le cône compté 2 fois,

- Si  $I_P$  est le polynôme nul, (il y a donc au moins un point de base) et la surface est soit une cubique, soit une quadrique. Dans tous les cas on détermine la fonction implicite, en prenant un sous déterminant non nul du plus haut rang de  $\tilde{I}_P$ .

Les coefficients  $\nu_q$  de

$$I_P(y) = \sum_{q \in \mathcal{A}_{4,4}} \nu_q y^q / q!$$

sont calculés à partir des différences totales successives. Si  $q \in \mathcal{A}_{4,4}$  a pour associé  $\alpha(q) = (\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ , alors

$$\nu_q = \Delta_{f_1^{\alpha_1} \dots f_4^{\alpha_4}} I_P(0) = \sum_{\delta \in \{0,1\}^4} (-1)^{4-|\delta|} I_P(f_{\alpha_1} \delta_1 + \dots + f_{\alpha_4} \delta_4).$$

**La surface  $\mathcal{N}$** 

De la même façon, en un point  $y = N(x)$  non nul, les vecteurs  $\partial^i P$  sont linéairement indépendants et on écrit les égalités  $\langle y, \partial^i P(x) \rangle = 0$ , sous la forme

$$\tilde{I}_N(y) \cdot x = \begin{pmatrix} {}^t y L_{P\Lambda}^{(3,2)}(e_1) \\ {}^t y L_{P\Lambda}^{(3,2)}(e_2) \\ {}^t y L_{P\Lambda}^{(3,2)}(e_3) \end{pmatrix} x = 0.$$

$$I_N(y) = \det(\tilde{I}_N(y)) = \sum_{q \in \mathcal{A}_{4,3}} \mu_q y^q / q!$$

est l'équation implicite de  $\mathcal{N}$ . Il est homogène de degré 3 et si  $\alpha(q) = (\alpha_1, \dots, \alpha_3)$  est l'associé de  $q \in \mathcal{A}_{4,3}$ , on a ses coefficients

$$\mu_q = \Delta_{f_1^{q_1} \dots f_4^{q_4}} I_N(0) = \sum_{\delta \in \{0,1\}^3} (-1)^{3-|\delta|} I_N(f_{\alpha_1} \delta_1 + \dots + f_{\alpha_3} \delta_3)$$

#### 4.15.2 Formules d'inversion

On cherche, connaissant  $P$  et  $I_P$  à établir les équations inverses de (4.19), c'est à dire, trouver pour un point  $y \in \mathcal{S}$ , l'ensemble de ses antécédents  $x$ , (on dit la *fib*re issue de  $y$ ). Quitte à changer l'ordre des indices, on peut localement, c'est à dire supposer  $y_4 \neq 0$  et dans ce cas,  $x$  est l'un des points de l'intersection commune des 3 coniques suivantes du plan projectif:

$$Q_j(x, y) = y_j P_4(x) - y_4 P_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.34)$$

Si  $y$  est un point de la surface qui n'est ni double ni triple, alors il existe un seul antécédent. Dans un cadre plus général ([AR-SE]), on a prouvé que les coordonnées de la solution unique d'un système algébrique, sont des fractions rationnelles des coefficients du système et un algorithme pour le calcul explicite de la solution  $y$  a été développé. Dans le contexte présent des coniques, cet algorithme s'est avéré peu performant (polynôme du 12ème degré en la variable  $y$ ), or on peut améliorer considérablement la procédure.

L'équation  $y = L_P x^{\odot 2}$ , peut aussi s'écrire  $x \otimes y = x \otimes L_P x^{\odot 2} = D_P x^{\odot 3}$ . Plus précisément, si on pose  $\tilde{x} = ({}^t x, {}^t x^{\odot 3})$ , on obtient un système de 12 équations linéaires à 13 inconnues.

$$[e_1 \otimes y, e_2 \otimes y, e_3 \otimes y, D] \tilde{x} = 0$$

Si  $L_P$  est de rang 4, le système est de rang 12, et donc pour tout point régulier  $y = P(x)$ , on peut appliquer la formule (4.39) de l'annexe 1: pour  $i \neq l \neq k$

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^i \det[e_l \otimes y, e_k \otimes y, D] \\ &= (-1)^i \sum_{s,t} y_s y_t \det[e_l \otimes f_s, e_k \otimes f_t, D] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ce sont des polynômes du second degré en  $y$ . La formule d'inversion n'est plus correcte si  $y$  est un point singulier.

#### 4.15.3 Intersection de $\mathcal{S}$ avec les variétés linéaires projectives

On rappelle la formule multinomiale de Newton (valable dans tout anneau commutatif):  $\forall t = (t_1, \dots, t_k) \in K^k$  et  $v = (v^1, \dots, v^k) \in V^k$ , on a

$$(t_1 v^1 + \dots + t_k v^k)^{\odot r} / r! = \sum_{q \in \mathcal{A}_{k,r}} \frac{t_1^{q_1} \dots t_k^{q_k}}{q_1! \dots q_k!} (v^1)^{\odot q_1} \odot \dots \odot (v^k)^{\odot q_k} = \sum_{q \in \mathcal{A}_{k,r}} \frac{t^q}{q!} v^{\odot q}$$

**Intersection de  $\mathcal{S}$  avec une droite  $\Delta$** 

Soit  $\Delta$  une droite projective de  $\mathbf{P}_3$ , donnée sous la forme paramétrique :

$$y(t) = t_1\theta^1 + t_2\theta^2, \quad t_i \in K, \quad \theta^i \in K^4, \quad i = 1, 2. \quad (4.36)$$

Combinant la forme polaire  $\phi_{I_P}$  de (4.33), (4.36) et la formule multinomiale, on a le polynôme homogène :

$$\begin{aligned} G_\Delta(t_1, t_2) &= I_P(t_1\theta^1 + t_2\theta^2) \\ &= \langle (t_1\theta^1 + t_2\theta^2)^{\odot 4} / 4!, \phi_{I_P} \rangle \\ &= \sum_{q \in \mathcal{A}_{2,4}} \frac{t_1^{q_1} t_2^{q_2}}{q_1! q_2!} \langle (\theta^1)^{\odot q_1} \odot (\theta^2)^{\odot q_2}, \phi_{I_P} \rangle \\ &= \sum_{i=0}^4 \frac{t_1^i t_2^{4-i}}{i!(4-i)!} \phi_{I_P} \left( \underbrace{\theta^1, \dots, \theta^1}_i, \underbrace{\theta^2, \dots, \theta^2}_{4-i} \right) \end{aligned}$$

Dans une extension algébriquement close  $\bar{K}$  de  $K$ ,  $G_\Delta$  a ses quatre racines  $\nu_1, \dots, \nu_4$  (résolubles par radicaux) et on peut factoriser

$$G_\Delta(t_1, t_2) = \alpha(t_2 - \nu_1 t_1) \dots (t_2 - \nu_4 t_1).$$

Ces racines déterminent les quatre points d'intersection de  $\mathcal{S}$  avec  $\Delta$  dans  $\mathbf{P}_3$ . En pratique, seule la première valeur réelle positive nous intéresse.

**Intersection de  $\mathcal{S}$  avec un plan projectif  $\Pi$** 

De la même manière, pour un plan projectif  $\Pi$ , de  $\mathbf{P}_3$ , donné sous la forme paramétrique :

$$y(t) = t_1\theta^1 + t_2\theta^2 + t_3\theta^3, \quad t_i \in K, \quad \theta^i \in K^4, \quad i = 1, 2, 3,$$

on obtient la *quartique plane* :

$$\begin{aligned} \text{rcl}G_\Pi(t_1, t_2, t_3) &= \sum_{q \in \mathcal{A}_{3,4}} \frac{t_1^{q_1} t_2^{q_2} t_3^{q_3}}{q_1! q_2! q_3!} \langle (\theta^1)^{\odot q_1} \odot (\theta^2)^{\odot q_2} \odot (\theta^3)^{\odot q_3}, \phi_{I_P} \rangle \\ &= \sum_{i_1+i_2 \leq 4} \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} t_3^{4-i_1-i_2}}{i_1! i_2! (4-i_1-i_2)!} \phi_{I_P} \left( \underbrace{\theta^1, \dots, \theta^1}_{i_1}, \underbrace{\theta^2, \dots, \theta^2}_{i_2}, \underbrace{\theta^3, \dots, \theta^3}_{4-i_1-i_2} \right) \end{aligned}$$

**4.15.4 Représentation canoniques de la surface de Steiner**

Si les droites doubles  $D(u^s, v^s)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , sont distinctes, elles s'intersectent 2 à 2 aux points  $\tilde{e}_s = D(u^i, v^i) \cap D(u^k, v^k)$ ,  $s \neq l \neq k$ . ( $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ ) qui sont linéairement indépendants et forment une base. Ce sont les antécédents du point triple  $\tilde{f}_4 = P(\tilde{e}_1) = P(\tilde{e}_2) = P(\tilde{e}_3)$ . De même  $L_P$  étant de rang 4, les vecteur

$\tilde{f}_s = \phi_P(\tilde{e}_l, \tilde{e}_k), s \neq l, k, s = 1, 2, 3$  et  $\tilde{f}_4$ , sont linéairement indépendants et constituent une nouvelle base.

Ainsi on pour  $x = \sum \tilde{x}_i \tilde{e}_i, y = \sum \tilde{y}_j \tilde{f}_j$ , on a

$$P(x) = \sum_{k,l} \tilde{x}_k \tilde{x}_l \phi(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) \quad (4.37)$$

$$= 2\tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \tilde{f}_1 + 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_3 \tilde{f}_2 + 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{f}_3 + (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) \tilde{f}_4 \quad (4.38)$$

On se ramène donc par un changement de repère projectif à la surface de Steiner canonique, et l'on obtient ( voir figure pour l'interprétation),

- la paramétrisation de la surface normale,

$$N(x) = (-x_1(x_3^2 + x_2^2 - x_1^2), x_2(-x_3^2 + x_2^2 - x_1^2), -x_3(-x_3^2 + x_2^2 + x_1^2), x_1 x_2 x_3),$$

- la forme implicite  $\mathcal{I}_N(y) = y_4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 4y_4^2) - y_1 y_2 y_3$ ,

- le polynôme  $\eta(x) = (x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)$

et enfin, l'équation  $x_1 x_2 x_3 = 0$ , des droites doubles du plan paramétrique.

## Annexe 1. Solution générale d'un système linéaire

Soit un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues sur un corps  $K$

$$Ax = 0$$

et  $\text{rang}(A) = r$ . Quitte à réarranger l'ordre des variables, on suppose le mineur principal d'ordre  $r$  de  $A$ ,  $\det(A^{(1)})$  distinct de 0 et on se ramène à un système de  $r$  équations indépendantes:

$$A^{(1)}x^{(1)} = -A^{(2)}x^{(2)}$$

où  $x^{(1)} = {}^t(x_1, \dots, x_r)$  et  $x^{(2)} = {}^t(x_{r+1}, \dots, x_{r+q})$ ;  $r + q = n$ .

La solution générale vaut dans ce cas

$$x^{(1)} = -[A^{(1)}]^{-1} A^{(2)} x^{(2)} = \frac{-1}{\det(A^{(1)})} \tilde{A}^{(1)} A^{(2)} x^{(2)}$$

$\tilde{A}^{(1)} = (\tilde{\alpha}_{ij}^{(1)}; 1 \leq i, j \leq r)$  avec  $\tilde{\alpha}_{ij}^{(1)} = (-1)^{(i+j)} \det(A_{j^c, i^c}^{(1)})$ , est la transposée de la matrice des cofacteurs de  $A^{(1)}$ .

Si  $A_{(i,j)}^{(1,2)}$  désigne la matrice obtenue en remplaçant la colonne  $i$  de  $A^{(1)}$  par la colonne  $j$  de  $A^{(2)}$ , alors l'ensemble des solutions est la variété linéaire de dimension  $q$ , définie par les équations:

$$x_i = \frac{-1}{\det(A^{(1)})} \sum_{j=1}^q x_{r+j} \det(A_{(i,j)}^{(1,2)}); \quad i = 1, \dots, r$$

**Cas particulier.**

Si  $r = n - 1$ , on peut prendre comme solution homogène particulière:

$$x_n = \det(A^{(1)}) \quad \text{et} \quad x_i = -\det(A_{(i,n)}^{(1,2)}); \quad i = 1, \dots, n-1$$

En définitive, si  $A^{(-i)}$  est la matrice  $A$  à laquelle on a supprimé la colonne  $i$ , on a

$$x_i = (-1)^i \det(A^{(-i)}); \quad i = 1, \dots, n \quad (4.39)$$

**Annexe 2. Produit tensoriel symétrique de vecteurs ou de formes****Indices multiples**

Un élément  $i = (i_1, \dots, i_s)$  de  $\{1, \dots, n\}^s$  sera appelé  $s_n$ -indice ou  $s$ -indice quand il n'y a pas d'ambiguïté. Le même indice réordonné par ordre croissant (par une certaine permutation  $\sigma$  unique), sera noté  $\alpha(i) = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(s)}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . À  $i$  ou  $\alpha(i)$ , on fait ensuite correspondre un  $n_s$ -indice  $q(i) = q(\alpha) = (q_1, \dots, q_n)$  où chaque  $q_j$  désigne le nombre d'apparitions de la valeur  $j$  dans l'indice  $i$  (ou dans  $\alpha(i)$ ). On obtient une bijection entre l'ensemble des  $s_n$ -indices (ordonnés)  $\alpha$  et l'ensemble des  $n_s$ -indices  $q$  qui vérifient  $\sum_{j=1}^n q_j = s$ . On notera cette bijection  $q(\alpha)$  ou  $\alpha(q)$  et on dira  $q$  et  $\alpha$  associés.

Cet ensemble sera noté  $\mathcal{A}_{n,s}$  et son cardinal vaut  $C_{n-1}^{n+s-1}$ . On choisira l'ordre lexicographique inverse pour énumérer ses éléments, i.e. pour  $q, \tilde{q} \in \mathcal{A}_{n,s}$ , on a

$$q = (q_1, \dots, q_n) \leq \tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n) \Leftrightarrow \exists 1 \leq j_0 \leq n; \text{ tel que } q_j \geq \tilde{q}_j \quad \forall j \leq j_0.$$

**Les vecteurs symétriques**

Soit  $X$  un espace vectoriel sur  $K$  et  $\otimes_* X = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \otimes_s X$  l'algèbre des produits tensoriels de  $X$ . Elle est associative, unitaire et graduée. L'idéal bilatère  $\mathcal{I}_s$  engendré par les éléments de la forme  $(x \otimes y - y \otimes x) \in \otimes_2 X$ , définit par passage à l'algèbre quotient, l'algèbre graduée des éléments symétriques de  $X$ , munie du produit symétrique  $\odot$ :

$$\otimes_* X / \mathcal{I}_s = \odot_* X = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \odot_s X$$

Elle est commutative, associative, unitaire. La puissance  $s$ -ième de  $x$  sera notée  $x \odot \dots \odot x = x^{\odot s}$ .

Si  $X$  est de dimension  $n$ , la donnée d'une base  $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$  de  $X$  permet de construire une base  $\mathcal{E}_n^{\odot s} = \{e^q = e_1^{q_1} \odot \dots \odot e_n^{q_n}; \quad q \in \mathcal{A}_{n,s}\}$  de  $\odot_s X$ .

**Exemple**

Pour  $n = 3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et l'ordre lexicographique inverse, on a  $x^{\odot 2} = (x_1^2, 2x_1x_2, 2x_1x_3, x_2^2, 2x_2x_3, x_3^2)$ .

### Les applications et formes symétriques

Soit  $\odot^s(X, Y)$  l'espace vectoriel des applications s-linéaires symétriques de  $X$  dans  $Y$  et  $\odot^*(X, Y) = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \odot^s(X, Y)$  leur somme directe. Il y a pour tout  $s$ , un isomorphisme  $\odot^s(X, Y) \simeq \text{Hom}(\odot_s X; Y)$ : à tout  $\phi \in \odot^s(X, Y)$  correspond une et une seule application linéaire  $L_\phi : \odot_s X \rightarrow Y$ , telle que

$$\phi(x^1, \dots, x^s) = L_\phi(x^1 \odot \dots \odot x^s) \quad (\text{notée } =\langle \phi, x^1 \odot \dots \odot x^s \rangle)$$

Une fois choisis, une base pour  $X$  de dimension  $n$ , une base pour  $Y$  de dimension  $m$  et l'ordre lexicographique inverse sur  $\mathcal{A}_{n,s}$ , on confondra l'application linéaire  $L_\phi$  avec la matrice associée.

Si  $Y$  est elle même une algèbre munie d'un produit  $\times$ , on définit encore le produit symétrique dans  $\odot^*(X, Y)$ : pour  $\phi \in \odot^s(X, Y)$  et  $\psi \in \odot^t(X, Y)$

$$\phi \odot \psi(x^1, \dots, x^{s+t}) = \sum_{\{\sigma \in \mathcal{B}(s,t)\}} \phi(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(s)}) \times \psi(x^{\sigma(s+1)}, \dots, x^{\sigma(s+t)})$$

$\mathcal{B}(s, t)$  est le sous ensemble des permutations de  $\{1, \dots, s+t\}$ , croissantes sur chacune des parties  $\{1, \dots, s\}$  et  $\{s+1, \dots, s+t\}$ .

Munie de ce produit,  $\odot^*(X, Y)$  est une algèbre graduée, associative, commutative et unitaire, dès que  $Y$  l'est.

### Dualité

Si le dual  $X' = \odot^1(X, K)$  est muni de la base duale  $\Omega_n = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , on construit la base (duale)  $\Omega_n^{\odot^s} = \{\omega^q/q! ; q \in \mathcal{A}_{n,s}\}$  où  $\omega^q = \omega_1^{q_1} \odot \dots \odot \omega_n^{q_n}$  de  $\odot^s(X, K)$ . Elle vérifie  $\langle e^q, \omega^q/q! \rangle = \delta_q^q$  et on a  $\dim \odot^s(X, K) = C_{n-1}^{n+s-1}$ .

De la même manière si  $\dim Y = m$ , on a  $\odot^s(X, Y) \simeq \odot^s(X, K) \otimes Y$ , et par conséquent  $\dim \odot^s(X, Y) = m \times C_{n-1}^{n+s-1}$ .

### Différences partielles successives et leur transposées

Pour  $z \in X$  et  $\phi \in \odot^s(X, Y)$ , les relations

$$\Delta_z \phi(x^1, \dots, x^s) = \phi(x^1, \dots, x^s + z) - \phi(x^1, \dots, x^s) = \phi(x^1, \dots, x^{s-1}, z)$$

montrent que le dernier terme est indépendant de  $x^s$ . On définit ainsi un opérateur  $\Delta_z : \odot^*(X, Y) \rightarrow \odot^*(X, Y)$ , qui applique  $\odot^s(X, Y)$  sur  $\odot^{s-1}(X, Y)$ . Cet opérateur est linéaire  $\Delta_z(a\phi + b\psi) = a\Delta_z\phi + b\Delta_z\psi$ ;  $\forall a, b \in K$ . Lorsque  $Y$  est une algèbre,  $\Delta_z$  est même une dérivation i.e.  $\Delta_z(\phi \odot \psi) = \Delta_z\phi \odot \psi + \phi \odot \Delta_z\psi$ .

Si  $Y = K$ , on vérifie que l'application transposée (par dualité):

$${}^t\Delta_z : \odot_* X \rightarrow \odot_* X \text{ vaut } {}^t\Delta_z(\xi) = \xi \odot z.$$

Elle est linéaire, envoie  $\odot_{s-1} X$  sur  $\odot_s X$  et vérifie pour  $\eta \in \odot_{s-1} X, \phi \in \odot^s(X, K)$ :

$$\langle \eta, \Delta_z \phi \rangle = \langle {}^t\Delta_z(\eta), \phi \rangle = L_\phi \eta \odot z$$

Par itération, on obtient les différences partielles successives de  $\phi \in \odot^s(X, Y)$  :

$$\Delta_{z^1 \dots z^t} \phi(x^1, \dots, x^{s-t}) = \begin{cases} \phi(x^1, \dots, x^{s-t}, z^1, \dots, z^t) & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $\Lambda^{(n,s)}(z)$  la matrice associée à la restriction  ${}^t\Delta_z : \odot_{s-1} X \rightarrow \odot_s X$ , dans les bases canoniques respectives  $\mathcal{E}_n^{\odot(s-1)}$  et  $\mathcal{E}_n^{\odot s}$ .

Elle est de dimension  $C_{n-1}^{n+s-1} \times C_{n-1}^{n+s-2}$  et vaut  $\Lambda^{(n,s)}(z) = \left( \lambda_{q, \bar{q}}^{(n,s)}(z) \right)_{q \in \mathcal{A}_{n,s}, \bar{q} \in \mathcal{A}_{n,s-1}}$

Si on note le  $n_1$ -indice de Dirac  $\delta^i = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)$ , alors on a

$$\lambda_{q, \bar{q}}^{(n,s)}(z) = \omega^q(e^{\bar{q}} \odot z) = \sum_{l=1}^n z_l \omega^q(e^{\bar{q} + \delta^l}) = z_l \text{ si } q = \bar{q} + \delta^l \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

### Exemples

Pour  $n = 3$  et  $s$  quelconque, la règle de calcul est la suivante :

pour la colonne  $j$ , on calcule l'entier  $s = s(j)$  qui vérifie  $s(s+1)/2 < j \leq (s+1)(s+2)/2$ , et pour la ligne  $i$ , on pose

$$\lambda_{i,j}^{(3,s)}(z) = \begin{cases} z_1 & \text{si } i = j \\ z_2 & \text{si } i = j + s(j) \\ z_3 & \text{si } i = j + s(j) + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces différentes matrices s'emboîtent l'une dans l'autre et en particulier, on a  $\Lambda^{(3,1)}(z) = z$ ,

$$\Lambda^{(3,2)}(z) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 \\ z_3 & 0 & z_1 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(3,3)}(z) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 & z_2 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}$$



$$\Lambda^{(3,4)}(z) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 & z_2 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}$$

### Annexe 3. Les fonctions vectorielles

#### Les applications dérivées

Rappelons d'abord la formule de Taylor d'une fonction  $F : X \rightarrow Y$  vectorielle suffisamment différentiable :

$$F(a+x) = F(a) + \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} D^s F(a) \underbrace{(x, \dots, x)}_s + \frac{1}{(r+1)!} D^{r+1} F(a + \theta x) \underbrace{(x, \dots, x)}_{r+1}$$

Les applications dérivées  $D^s F(a)(\cdot)$  sont des éléments de  $\odot^s(X, Y)$ , i.e. des applications  $s$ -linéaires symétriques sur  $X$  à valeurs dans  $Y$ .

#### Dérivées partielles

Le lien avec les dérivées partielles usuelles lorsque  $X = K^n$  est le suivant: pour un  $s_n$ -indice  $i = (i_1, \dots, i_s)$  et  $a \in K^n$ , les dérivées partielles d'ordre  $s$ , dans les directions successives  $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$ , s'écrivent

$$\partial^i F(a) = \frac{\partial^s F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(a) = D^s F(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$$

#### Formule d'Euler

Il est utile de rappeler que la formule d'Euler pour une fonction  $F$  homogène d'ordre  $r$  (i.e.  $(F(\lambda x) = \lambda^r F(x))$ ), est valable même lorsque  $F$  est à valeurs vectorielles :

$$rF(x) = \sum_{i=1}^n x_i \partial^i F(x). \quad (4.40)$$

### Différences totales successives

On définit les différences totales successives de  $F$  par

$$\begin{aligned}\Delta_{x^1} F(a) &= F(a + x^1) - F(a) \\ \Delta_{x^1 \dots x^s} F(a) &= \Delta_{x^s} (\Delta_{x^{s-1} \dots x^1} F)(a)\end{aligned}$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\Delta_{x^1 \dots x^s} F(a) = \sum_{\delta \in \{0,1\}^s} (-1)^{s-|\delta|} F(a + x^1 \delta_1 + \dots + x^s \delta_s)$$

où  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_s) \in \{0, 1\}^s$  et  $|\delta| = \sum_{i=1}^s \delta_i$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta_{x^1 x^2} F(a) &= F(a + x^2 + x^1) - F(a + x^2) - F(a + x^1) + F(a) \\ \Delta_{x^1 x^2 x^3} F(a) &= F(a + x^3 + x^2 + x^1) \\ &\quad - F(a + x^3 + x^2) - F(a + x^3 + x^1) - F(a + x^2 + x^1) \\ &\quad + F(a + x^3) + F(a + x^2) + F(a + x^1) \\ &\quad - F(a) \\ \Delta_{x^1 x^2 x^3 x^4} F(a) &= F(a + x^4 + x^3 + x^2 + x^1) \\ &\quad - F(a + x^4 + x^3 + x^2) - F(a + x^4 + x^3 + x^1) \\ &\quad - F(a + x^4 + x^2 + x^1) - F(a + x^3 + x^2 + x^1) \\ &\quad + F(a + x^4 + x^3) + F(a + x^4 + x^2) + F(a + x^4 + x^1) \\ &\quad + F(a + x^3 + x^2) + F(a + x^3 + x^1) + F(a + x^2 + x^1) \\ &\quad - F(a + x^3) - F(a + x^2) - F(a + x^1) - F(a + x^4) \\ &\quad + F(a)\end{aligned}$$

### Les polynômes homogènes

La donnée d'un polynôme vectoriel  $F : K^n \rightarrow K^m$ , homogène de degré  $r$ , équivaut à la donnée d'une application  $r$ -linéaire symétrique  $\phi_F \in \odot^r(K^n, K^m)$ . Ils se caractérisent par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} r!F(x) &= \phi_F(x, \dots, x) \\ \phi_F &= D^r F(a) = D^r F(0) \quad (\text{indépendante de } a) \end{cases} \quad (4.41)$$

Dans le cas des polynômes homogènes, il y a des relations simples entre les applications dérivées et les différences successives :

$$\begin{aligned}\Delta_{x^1 \dots x^r} F(a) &= \phi_F(x^1, \dots, x^r) \\ (r-s)! D^s F(a)(x^1, \dots, x^s) &= \phi_F(x^1, \dots, x^s, \underbrace{a, \dots, a}_{r-s})\end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, on traduit cela en produit matriciel

$$(r-s)! D^s F(a)(x^1, \dots, x^s) = L_F \cdot \Lambda^{(n,r)}(x^1) \dots \Lambda^{(n,r-s+1)}(x^s) \cdot \Lambda^{(n,r-s)}(a) \dots \Lambda^{(n,1)}(a)$$

En particulier, pour la dérivée partielle  $i = (i_1, \dots, i_s)$ ,

$$\begin{aligned} (r-s)! \partial^i F(a) &= \phi_F(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, a, \dots, a) \\ &= L_F \cdot \Lambda^{(n,r)}(e_{i_1}) \dots \Lambda^{(n,r-s+1)}(e_{i_s}) \cdot a^{\odot r-s} \end{aligned}$$

La formule de Taylor s'écrit dans ce cas,

$$F(a+x) = \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!(r-s)!} \phi_F(\underbrace{x, \dots, x}_s, \underbrace{a, \dots, a}_{r-s})$$

Par ailleurs, de la symétrie de  $\phi_F$ , on tire

$$r! F(x) = \phi_F(x, \dots, x) = \sum_i x^{q(i)} \phi_F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \sum_{q \in \mathcal{A}_{n,r}} \nu_q x^q$$

où on a identifié les coefficients,

$$\begin{aligned} \nu_q &= \sum_{\{i: q(i)=q\}} \phi_F(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \\ &= C_{q_1}^r C_{q_2}^{r-q_1} \dots C_{q_n-1}^{r-(q_1+\dots+q_{n-2})} \Delta_{e_1^{q_1} \dots e_n^{q_n}} F(0). \end{aligned}$$

$F$  s'exprime entièrement à partir des valeurs  $F(e_{i_1} + \dots + e_{i_l})$ ,  $l \leq r$ ,

$$F(x) = \sum_{q \in \mathcal{A}_{n,r}} \Delta_{e_1^{q_1} \dots e_n^{q_n}} F(0) \frac{x^q}{q!} \quad \text{i.e.} \quad \phi_F = \sum_{q \in \mathcal{A}_{n,r}} \Delta_{e_1^{q_1} \dots e_n^{q_n}} F(0) \omega^q / q!$$

## Références

- [SAL] G. Salmon. (1892). *Traité de Géométrie Analytique à Trois Dimensions*. Gautier-Villars, Paris.
- [AR-SE] F. Aries and R. Senoussi. (1996) *Rationalité et Procédure de Calcul de la Solution Unique d'un Système Algébrique*. Document interne.
- [CAR] H. Cartan (1982) *Cours de Calcul Différentiel*. Hermann, Paris
- [BER] M. Berger (1990) *Géométrie. Tomes 1,2*. Nathan, Paris
- [SED] T. W. Sederberg. (1984) *Ray Tracing of Steiner Patches*. *Computer Graphic*. Vol 18.
- [SE-AN-GO] T. W. Sederberg and D.C. Anderson and R.N. Goldman. (1984) *Implicit Representation of Parametric Curves and Surfaces*. *Computer vision, Graphics, and image processing*. 28
- [SE-CH] T. W. Sederberg and F. Chen. (1995) *Implicitization using Moving Curves and Surfaces*. *Computer Graphics Siggraph*
- [MA-CA-1] D. Manocha and J. F. Canny. (1992) *Algorithm for Implicitizing Rational Parametric Surfaces*. *Computer Aided Geometric Design* 9
- [MA-CA-2] D. Manocha and J. F. Canny. (1992) *Implicit Representation of Rational Parametric Surfaces*. *Journal of Symbolic Computation*. 13

- [CH-GO-1] E.W Chionh and R.N. Goldman. (1992) *Using Multivariate Resultants to find the Implicit equation of a Rational Surface. Visual Computer. 8*
- [CH-GO-2] E.W Chionh and R.N. Goldman. (1992) *Degree, Multiplicity, and Inversion Formulas for Rational Surfaces using U-Resultants. Computer Aided Geometric Design. 9*
- [CO-SC-ST] A. Coffman, A.J. Schwartz and C. Stanton. (1996) *The Algebra and geometry of Steiner and other quadratically parametrizable surfaces. Computer Aided Geometric Design. 13*
- [DEG] W. L. F. Degen. (1996) *The Types of Triangular Bézier Surfaces. in G. Mullineux ed. The Mathematics of Surfaces IV. The Institute of Mathematics and its Applications Conferences Series, 38. Clarendon, Oxford.*

## Bilan

*La méthode proposée dans ce chapitre, pour le calcul de l'équation implicite d'une surface paramétrique rationnelle du second degré et des équations d'inversion associées, apporte un gain notable par rapport à l'ensemble des méthodes existantes. Elle nous permet, dans le cas général, de mettre la forme implicite d'une surface paramétrique sous la forme du déterminant d'une matrice  $7 \times 7$ . Nous montrons également que les formules d'inversion associées peuvent se calculer à partir de sous-déterminants de la même matrice. Elle se fait en effet sans utiliser la division et les formes proposées ne sont entachées d'aucun facteur parasite. Enfin les cas d'exception sont identifiés. La méthode peut de plus être généralisée aux paramétrisations rationnelles du troisième degré. Une présentation plus algébrique, permet de compléter certains résultats et de démontrer plusieurs affirmations.*

## Chapitre 5

# Discussion et conclusions générales

*Les possibilités du type de maquettes proposées dans l'étude du rayonnement sur couvert végétal sont extrêmement nombreuses. Plusieurs publications sont basées ou intègrent une partie du travail présenté dans ce mémoire. On peut citer [Aries et al, 1987], [Aries et al., 1993], [España et al., 1995], [España et al., 1996a], [Kuusk et al., 1997], [España et al., 1996b]. Nous ne présentons dans ce chapitre que quelques uns des résultats et concluons sur l'ensemble de l'étude.*

### 5.1 Utilisation des maquettes

Nous disposons maintenant d'un modèle que nous supposons représenter de manière fidèle la structure géométrique d'un couvert végétal de maïs au stade adulte. Nous savons approcher ce modèle par un ensemble de primitives géométriques plus simples :

- soit un ensemble composé uniquement de triangles,
- soit un ensemble de troncs de cône représentant les tiges et de carreaux de Steiner représentant les feuilles.

Le premier but est de comprendre comment les différents paramètres du modèle de départ vont influencer sur la réponse radiative du couvert. Le second est de simuler des mesures radiatives, pour des conditions données, et ainsi limiter l'importance des mesures réelles nécessaires. En télédétection le problème essentiel est le problème inverse : estimer, à partir de la

réponse radiative, des caractéristiques du couvert végétal, c'est à dire un ou plusieurs paramètres du modèle. La possibilité et la précision de cette inversion peuvent être étudiées sur nos maquettes. Mais il faut vérifier au préalable l'influence de l'approximation du modèle sur la réponse radiative, ce qui revient à estimer le nombre minimum de triangles ou de carreaux de Steiner nécessaires pour une précision donnée de la réponse radiative.

Il est clair que la réponse ne peut être unique et que, en fonction des objectifs, nous aurons trois types de réponses :

- la réponse est bien estimée même avec une triangulation extrêmement grossière : la méthode est bien adaptée mais une méthode de description plus fruste aurait peut-être donné d'aussi bons résultats,
- la réponse est bien estimée si une approximation fine du modèle est nécessaire : le modèle a toute sa justification,
- la réponse est, en pratique, incalculable pour des raisons de temps de calcul ou de taille mémoire : on est obligé d'attendre un accroissement des performances des ordinateurs, de rechercher des améliorations algorithmiques ou de rechercher d'autres méthodes.

Nous présentons ici quatre méthodes appliquées à des problèmes de complexité croissante.

### 5.1.1 La méthode des spectres pour le calcul du rayonnement intercepté par un couvert

Même si les méthodes par projection sont relativement rapides, la masse de calculs finit par devenir prohibitive si on doit faire varier les paramètres du modèle de manière trop importante.

Pour analyser le rayonnement intercepté dans une direction donnée, on propose une nouvelle méthode basée sur la cartographie des probabilités d'interception. On élimine ainsi la variabilité liée au tirage aléatoire de la maquette.

La méthode consiste en :

- tirer aléatoirement les paramètres associés à  $n$  pieds de maïs,
- calculer pour chaque pied la carte des probabilités d'interception par ce pied en calculant :
  - les  $k$  images binaires correspondant aux  $k$  rotations de  $2\pi/k$  radians du pied autour de son axe,



FIG. 5.1 – Découpage en triangles d'une feuille. Dans l'image de gauche, le plus grand côté du plus grand triangle mesure 5cm. L'approximation est médiocre en terme de distance ; les normales sont très mal représentées. Dans l'image de droite l'approximation est bonne en terme de distance comme en terme de normale. Le nombre de triangles par contre (plus de 10000), rend prohibitif la représentation d'une parcelle.

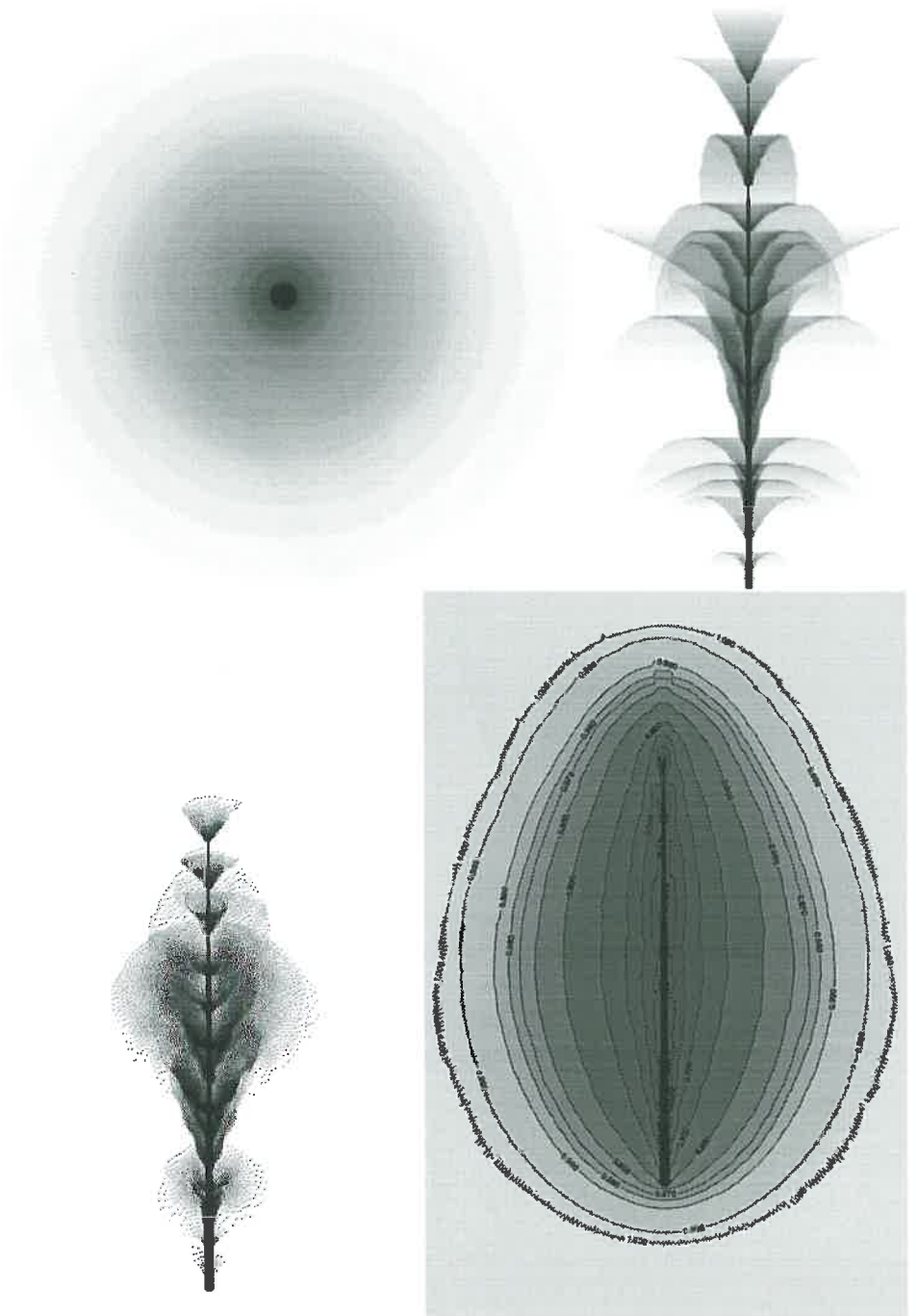


FIG. 5.2 – A un pied donné de maïs on peut associer son "spectre" en visée verticale, en visée horizontale puis en visée à 45 degrés. La probabilité d'interception varie de 1 en noir à 0 en blanc. Sur 120 pieds différents on peut calculer pour chaque angle de visée la moyenne des 120 cartes individuelles ; on représente ici la carte moyenne associée à la visée à 45 degrés.



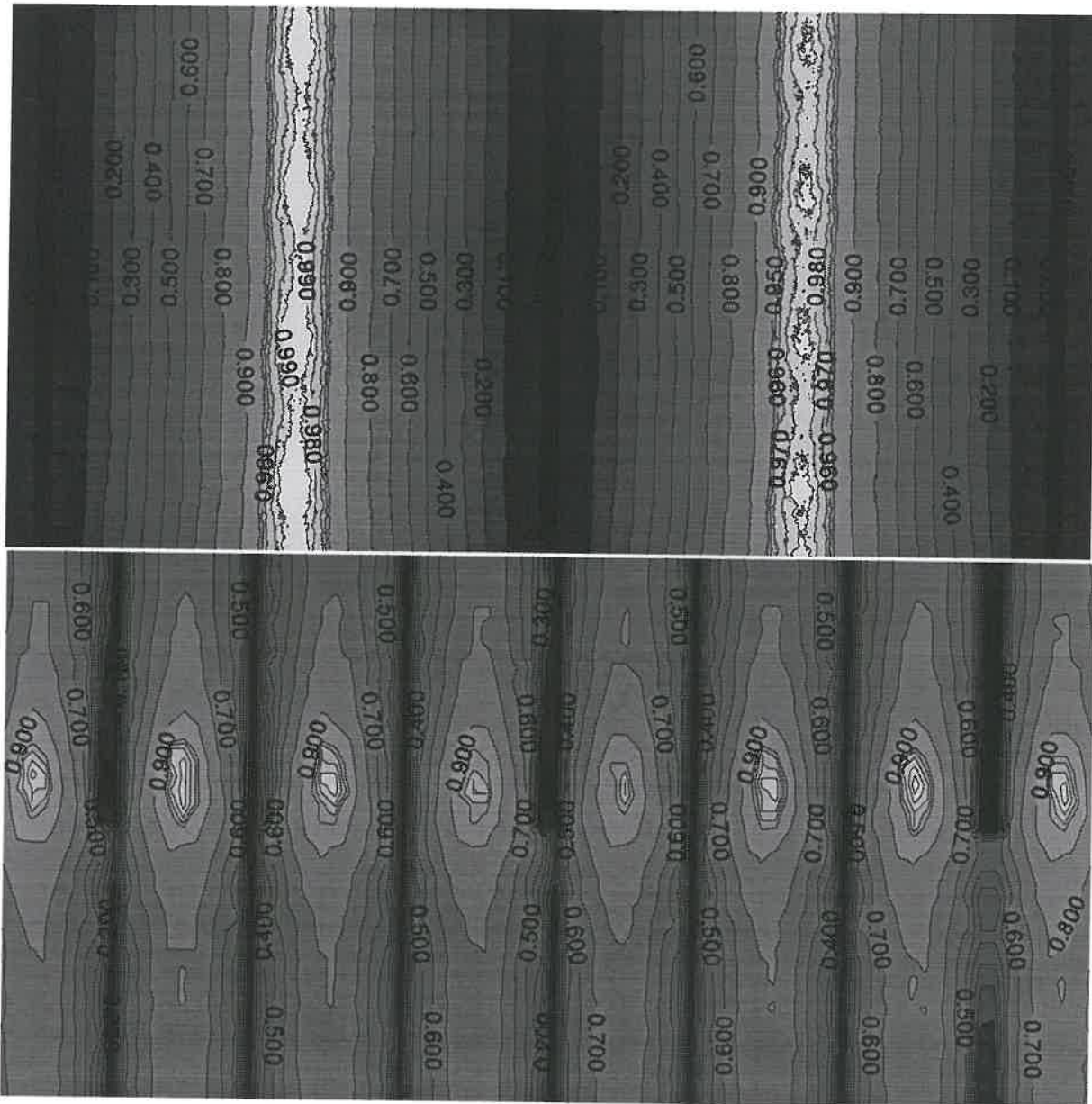


FIG. 5.3 – Cartes des probabilités de transmission pour un couvert de maïs vue à 45 degrés : -dans le sens du rang (en haut) -dans le sens perpendiculaire aux rang (en bas). On remarque dans le sens du rang, de larges bandes correspondent à une probabilité supérieure à 0,9 de voir le sol. Dans le sens perpendiculaire au rang, cette zone se réduit à de petites ellipses.

- l'image moyenne: c'est l'image dont chaque pixel  $P_{i,j}$  est la probabilité d'interception indépendamment de l'orientation du pied; on en déduit  $\bar{P} = 1 - P$  probabilité de non interception,
- calculer la moyenne des  $n$  images: on obtient une image des probabilités d'interception indépendante du pied et de son orientation,
- initialiser à 1 une image de la scène. Placer chaque pied de la scène dans l'image, *i.e.* déterminer  $k$  et  $l$  qui permettent de faire coïncider l'image d'un pied et une sous-image de la scène. On fait alors le produit:  $\bar{I}_{i+k,j+l} = \bar{I}_{i+k,j+l} \bar{P}_{i,j}$  pour tous les  $(i, j)$  de la sous-image,
- déduire  $I = 1 - \bar{I}$  matrice des probabilités d'interception par un élément du couvert. Si l'implantation des pieds de maïs est périodique, la carte des probabilités l'est également.

Nous proposons Fig: 5.2 le "spectre" associé à un pied de maïs donné en visée horizontale, en visée verticale et en visée à 45 degrés. Chacun de ces spectres a été calculé en intégrant 255 angles de rotation du pied. Nous avons intégré 120 spectres à 45 degrés associés à 120 pieds différents pour obtenir la dernière image de la figure.

Dans la Fig: 5.3 nous proposons deux images à 45 degrés constituées par intégration de l'image précédente. La première correspond à une vue dans le sens du rang. Les probabilités indiquées sont les probabilités de transmission *i.e.* les probabilités de voir le sol. L'image se découpe sensiblement en bandes parallèles. La deuxième image correspond à une vue prise dans le sens perpendiculaire au rang. L'image est périodique à la fois horizontalement et verticalement.

### 5.1.2 La méthode du double tampon de profondeur pour le calcul de la simple diffusion

Dans cette méthode, proposée par [Reeves et Cook, 1987] on apparie deux images: l'une vue de la source lumineuse, l'autre du point d'observation.

Bruno Andrieu, (INRA-Grignon), a repris la méthode. Appliquée à notre couvert de maïs, elle permet de calculer très rapidement des images de couvert, en tenant compte des ombres portées et pour des conditions d'éclairage variées. On en donne un exemple dans la Fig. 5.4. Les problèmes d'échantillonnage apparaissent, mais ils diminuent rapidement en fonction de la taille des tampons. On obtient ainsi une image du rayonnement réfléchi au premier ordre, même en dehors de la région de rétrodiffusion (*hot-spot*).

Le problème essentiel de cette méthode est que les pixels  $(i, j)$  et  $(i', j')$  des deux images ne correspondent pas exactement au même point de la scène. Cela conduit à des problèmes complexes d'échantillonnage spatial (*aliasing*) : des déformations gênantes sont souvent observées. Des techniques spécifiques de lissage (*antialiasing*) ont été développées mais elles peuvent conduire à des biais incompatibles avec notre objectif de quantification.

Outre le fait que cette méthode néglige les ordres de diffusions supérieurs, son utilisation pour estimer la BRDF (*Bidirectional Reflectance Distribution Function*) nécessite le calcul d'autant d'images que de couples de directions soleil-observateur.

Si on veut quantifier les erreurs d'*aliasing*, ou calculer le rayonnement réfléchi, on est alors amené à utiliser des méthodes plus élaborées. Deux méthodes sont plus appropriées au calcul du champ de rayonnement dans un couvert végétal, en prenant en compte les diffusions multiple : le lancer de rayons et la méthode des radiosités.

### 5.1.3 Estimation de la réflectance moyenne d'une scène par lancer de rayons

L'utilisation du lancer de rayons pour caractériser la réflectance bidirectionnelle (*Bidirectional Reflectance Distribution Function*) d'un couvert est en cours d'évaluation : les premiers résultats obtenus [España et al., 1997] semblent indiquer :

- que les maquettes détaillées, *i.e.* prenant correctement en compte le gaufrage, sont indispensables pour quantifier avec précision la réflexion spéculaire,
- que le découpage en triangles rend le temps de calcul des réflexions multiples prohibitif.

L'utilisation des carreaux de Steiner, chaque fois qu'une maquette fine est nécessaire, devrait pouvoir réduire considérablement les temps de calcul. En effet, plus la précision demandée est forte, plus la diminution du nombre de carreaux élémentaires nécessaires compensera l'augmentation du temps de calcul de l'intersection entre un carreau et une droite.

### 5.1.4 Les méthodes des radiosités pour le calcul de la réflectance et du champ radiatif distribué

Les méthodes des radiosités appliquées aux calculs du rayonnement dans un couvert végétal ont été étudiées notamment dans [Chelle, 1997] qui pro-





FIG. 5.4 – *Calcul de l'ombre portée par double tampon de profondeur*

pose une méthode de *radiosité mixte* pour pallier les problèmes de temps calcul. Dans l'état actuel, la mise en œuvre de cette méthode est difficilement envisageable pour une maquette fine : les temps calcul et la taille mémoire nécessaires sont prohibitifs. Elle peut par contre être utilisée pour tous les calculs compatibles avec une maquette simplifiée.

## 5.2 Conclusions générales

### Les surfaces paramétriques

Le découpage en triangles d'une surface paramétrique générale ne pose pas de difficulté de mise en œuvre mais peut conduire, si on veut approcher de manière fine une surface gauche, à un nombre de triangles prohibitif. Nous proposons dans ce cas un algorithme de découpage en carreaux rationnels du second degré.

Pour le calcul de l'intersection droite-carreau du second degré, nécessaire en lancer de rayons, nous proposons une nouvelle méthode par *implicitisation-inversion*. L'équation implicite de la surface associée à un carreau est donnée : c'est le déterminant d'une matrice  $7 \times 7$  dont les éléments se calculent facilement. Des sous-déterminants de cette matrice nous donnent les formules d'inversion et la normale à la surface. Tous les cas d'exception sont répertoriés. La méthode que nous proposons apporte des améliorations sensibles en terme de performance algorithmique et en terme de sensibilité aux singularités par rapport aux méthodes préexistantes.

Son utilisation, dans le cadre d'une arithmétique approchée doit encore être étudiée pour mesurer leur sensibilité aux erreurs d'arrondis. On peut cependant dès à présent cerner les principales difficultés. Pour le calcul de la forme implicite, on a vu que la méthode proposée échoue, s'il y a un point de base, *i.e.* si les quatre coniques  $P_i(x) = 0$  ont un point commun. Compte tenu des erreurs d'arrondis, il est clair que l'équation implicite sera instable si les quatre coniques ont "presque" un point commun. Si la paramétrisation est impropre, les formules d'inversion sont identiquement nulles. C'est le cas par exemple si les trois bords du carreau sont coplanaires. Dans le cas où les trois bords sont "pratiquement" coplanaires, les formules d'inversion seront instables. Si la surface est une "bonne" quartique, les formules d'inversion échouent pour tout point double de la surface. Dans le voisinage des droites doubles, les formules d'inversion seront instables. Il semble cependant que la plupart des cas d'instabilité puissent être détectés : ils devront alors faire l'objet de traitements spécifiques.

L'étude nous a également permis de bien mesurer les possibilités mais

aussi les limites de l'utilisation d'un calculateur formel en géométrie algorithmique. Pour les démonstrations notamment, la preuve par le calcul demande une énumération souvent longue de tous les cas particuliers. Ignorer ces singularités, ou les confondre avec les erreurs d'arrondis, peut conduire à des résultats erronés ou à des calculs impossibles (une division par zéro, par exemple). Pour identifier ces cas, il peut alors être nécessaire d'utiliser les résultats de la très abstraite géométrie algébrique, même si elle ne conduit pas toujours à des méthodes opérationnelles. La justification de la généralisation de certaines méthodes proposées ici reste conjecturale. Pour une démonstration complète il faudrait poursuivre l'étude algébrique. C'est dans le cadre des bases de Gröbner qu'on peut espérer obtenir ces résultats.

Nous pensons aussi qu'en dehors de ces problèmes théoriques, l'étude pourrait être poursuivie selon deux voies :

- utilisation d'inéquations quadratiques : dans cette étude le carreau élémentaire est défini, dans le plan paramétrique, par un triangle *i.e.* par un système de trois inéquations linéaires. On gagnerait en souplesse en remplaçant ces inéquations linéaires par des inéquations quadratiques. En d'autres termes, on remplace dans le plan paramétrique le triangle de référence par un "triangle" à bords coniques. Ce type de carreau est nécessaire, par exemple, pour représenter de manière exacte, avec une paramétrisation du second degré, un triangle sphérique,
- utilisation de cubiques paramétriques avec ou sans point de base : nous nous sommes pratiquement limités, dans cette étude, aux paramétrisations du second degré. Nous avons vu cependant que les formules se généralisent à une paramétrisation du troisième degré qui permet de générer une surface du neuvième degré. Reste à voir si ce type de surface a une "souplesse" suffisante pour remplacer avantageusement les quartiques et justifie l'augmentation du degré. Il serait intéressant également d'étudier ces formes paramétriques quand il y a des points de base et en particulier les formes à cinq et six points de base qui permettent de générer des cubiques et des quartiques inaccessibles par paramétrisation du second degré.

#### Utilisation du modèle : avantage et limite des méthodes

Les premiers résultats obtenus ont permis de vérifier l'adéquation du modèle et de ses possibilités par rapport à certaines questions posées par les bioclimatologistes. On peut noter que si les résultats présentés ici ont été obtenus par projections linéaires, une simple adaptation des programmes



permettrait d'utiliser d'autres méthodes de projection. On peut penser, par exemple à la projection azimutale *équivalente* de Lambert pour laquelle la surface de chaque pixel est proportionnelle à l'angle solide vu ; l'image ainsi obtenue peut être directement comparée avec une photographie hémisphérique prise avec les objectifs de type *fish-eye* qui ont souvent ce type de projection.

Une étude, en cours de finalisation, a permis de vérifier par lancer de rayons que si une maquette simplifiée (suppression du gaufrage, triangulation minimale) permet, du moins dans certains cas, de bien modéliser le rayonnement réfléchi pour des feuilles supposées lambertiennes, il n'en est pas de même quand on introduit une composante spéculaire. Comme cette composante est importante dans le visible, ce résultat confirme la nécessité d'un modèle fin et donc le recours à une paramétrisation du second degré si on veut pouvoir représenter une parcelle de taille suffisante.

Le prochain objectif est maintenant d'intégrer les paramétrisations du second degré dans un programme complet de lancer de rayons adapté aux calculs sur couvert végétal. Ce travail doit être fait en collaboration avec l'Unité de Bioclimatologie de l'INRA Grignon. L'estimation du gain effectif que peut apporter cette méthode est encore difficile à estimer : il est très dépendant de la nature du problème à traiter et des choix d'implémentation. En première approximation, on peut estimer que, en remplaçant le triangle plan par un carreau du second degré, la taille mémoire nécessaire au stockage d'un carreau et le temps nécessaire au calcul de l'intersection carreau-droite seront multipliés par 10 : pour que le gain global soit effectif, il faut qu'un carreau paramétrique du second degré puisse se substituer à au moins 10 triangles. C'est le cas chaque fois qu'une maquette fine, en terme de discrétisation spatiale et angulaire, est nécessaire. C'est probablement dans le visible que les gains seront le plus significatifs.

Pour améliorer la précision, il faut également caractériser de manière fine les propriétés optiques de chaque élément végétal : des mesures sont en cours dans l'Unité de Bioclimatologie de l'INRA d'Avignon.

Il est également projeté de faire évoluer dynamiquement la plante. Le modèle proposé s'y prête bien et des travaux sont en cours dans ce sens.

Ce type de modélisation est bien évidemment très lourd pour un certain nombre d'études. Mais il doit pouvoir également servir, dans un cadre donné, de "modèle de référence" pour établir, tester ou cerner le domaine de validité de modèles simplifiés (les modèles milieu turbides ou les modèles inverses utilisés en télédétection).

*Au Moyen-Âge, certains ont cru au caractère sacré des représentations divines. D'autres au contraire, ont voulu interdire toute représentation de Dieu, de ses Prophètes ou de ses Saints. Une véritable guerre a alors opposé les idolâtres et les iconoclastes.*

*Plus récemment, certains ont affirmé que la géométrie n'était qu'une branche de l'algèbre et mis à l'index la réalisation de toute figure, considérée comme un appauvrissement.*

*Aujourd'hui encore, la modélisation est parfois sujette à ce genre de guerres de religions qui s'exacerbent quand le modèle permet de construire une image. Il faut se souvenir que l'image comme le modèle d'un objet ne sont pas l'objet. Leurs critiques peuvent se poursuivre à l'infini et elles sont fondées, si les objectifs de la modélisation sont dissociés du modèle.*

*Le modèle proposé ici n'échappe pas à la règle. Beaucoup trop compliqué pour certains types d'approches, il reste terriblement fruste pour d'autres. Nous espérons cependant qu'il puisse trouver sa place et que les développements mathématiques et algorithmiques puissent le rendre véritablement utilisable.*



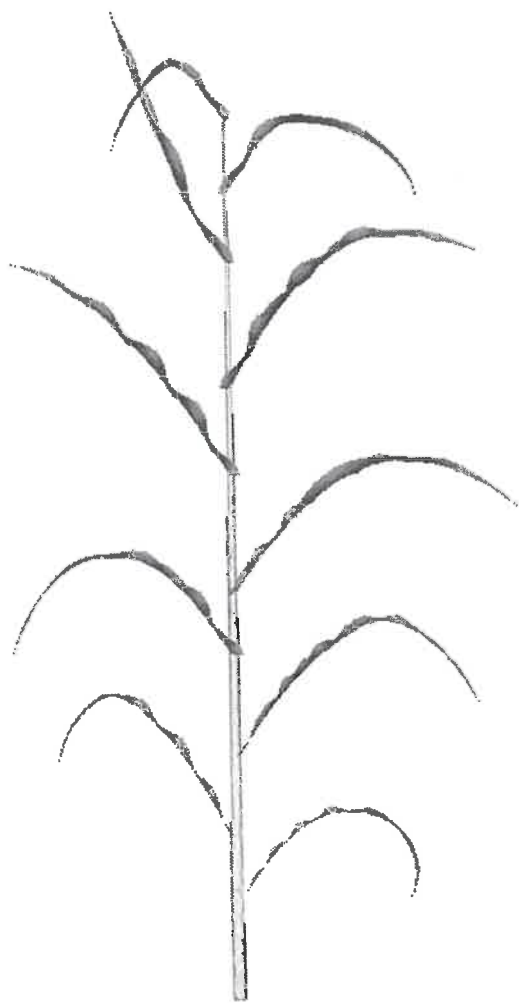


FIG. 5.5 – *Ceci n'est pas un pied de maïs*

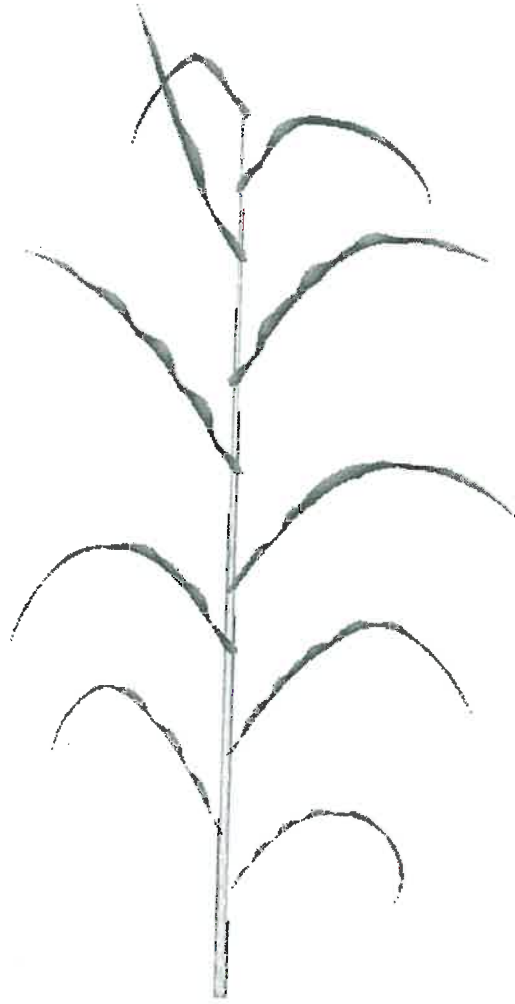


FIG. 5.6 – Ceci est l'image d'un pied de maïs

## Bibliographie

- [Alberti, 1435] Alberti, L. B. (1435). *De Pictura. De la Peinture*. Maculat Dédale 1992 pour la traduction française.
- [Aries et al., 1987] Aries, F., Monestiez, P., de Reffye, P., et Prévot, L. (1987). Modélisation de la géométrie d'un couvert végétal: Cas du maïs. In *3 Colloque MARI87 (Machines et Réseaux Intelligents)*, pages 197-202. CESTA, Paris.
- [Aries et al., 1993] Aries, F., Prévot, L., et Monestiez, P. (1993). Geometrical canopy modeling in radiation simulation studies. In *Crop Structure and Light Microclimate: Characterization and Applications*, pages 159-173. INRA, Versailles.
- [Aries et Senoussi, 1997] Aries, F. et Senoussi, R. (1997). Approximation de surfaces paramétriques par des carreaux rationnels du second degré en lancer de rayons. *Revue Internationale de CFAO et d'Informatique Graphique*.
- [Baret, 1986] Baret, F. (1986). *Contribution au Suivi Radiométrique de Cultures de Céréales*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI Orsay 182 p.
- [Bartels et al., 1987] Bartels, R. H., Beaty, J. C., et Barsky, B. A. (1987). *Mathématiques et CAO 6: B-Splines*. Hermès.
- [Becker et Weispfenning, 1993] Becker, T. et Weispfenning, V. (1993). *Gröbner Bases: a Computational Approach to Commutative Algebra*. Springer-Verlag.
- [Berger, 1990] Berger, M. (1990). *Géométrie. Tome I et II*. Nathan, Paris.
- [Bézier, 1986] Bézier, P. (1986). *Courbes et Surfaces*. Hermès.

- [Bonhomme et Varlet-Grancher, 1978] Bonhomme, R. et Varlet-Grancher, C. (1978). Estimation of gramineous crop geometry by plant profiles including leaf with variation. *Photosynthetica*, 12:193-196.
- [Brown et Pandolfo, 1969] Brown, P. S. et Pandolfo, J. P. (1969). An equivalent-obstacle model for the computation of radiation flux in obstructed layers. *Agricultural Meteorology*, 6:407-421.
- [Cartan, 1982] Cartan, H. (1982). *Cours de calcul différentiel*. Herman.
- [Chelle, 1997] Chelle, M. (1997). *Modélisation des Échanges Radiatifs dans des Couverts Végétaux, Décrits comme une Population de Plantes*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I.
- [Chiapale, 1975] Chiapale, J.-P. (1975). A numerical model for estimating the modification of heat budget introduced by hedges. In *Heat and Mass Transfer in the Biosphere. Part 1 Transfer processes in the Plant Environment*, pages 457-466. Dubrovnic(YUG).
- [Chilov, 1975] Chilov, G. (1975). *Analyse Mathématique. Fonctions de Plusieurs Variables Réelles*. Edition Mir, Moscou.
- [Chionh et Goldman, 1992a] Chionh, E.-W. et Goldman, R. N. (1992a). Degree, multiplicity and inversion formulas for rational surfaces using  $u$ -resultants. *Computed Aided Geometric Design*, 9:93-108.
- [Chionh et Goldman, 1992b] Chionh, E.-W. et Goldman, R. N. (1992b). Using multivariate resultants to find the implicit equation of a rational surface. *The Visual Computer*, 8:171-180.
- [Coffman et al., 1996] Coffman, A., Schwartz, A. J., et Stanton, C. (1996). The algebra and geometry of steiner and other quadratically parametrizable surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 13:257-286.
- [Comar, 1992] Comar, P. (1992). *La Perspective en Jeu*. Gallimard.
- [Daughtry et Hollinger, 1984] Daughtry, C. et Hollinger, S. (1984). Cost of measuring leaf area index of corn. *Agronomy Journal*, 76:836-841.
- [de Casteljaou, 1985] de Casteljaou, P. (1985). *Mathématiques et CAO 2: Formes à Pôles*. Hermès.
- [de Reffye et al., 1988] de Reffye, P., Edelin, C., Françon, J., Jaeger, M., et Puech, C. (1988). Plant models faithful to botanical structure and development. *Computer Graphics*, 22:151-158.

- [Degen, 1996] Degen, W. L. F. (1996). The types of triangular bézier surfaces. In Mullineux, G., editor, *The Mathematics of Surfaces IV*, volume 38 of *The Institute of Mathematics and its Applications Conference*, pages 153–171. Clarendon, Oxford.
- [Dixon, 1908a] Dixon, A. L. (1908a). The eliminant of three quantics in two independant variables. *Proceedings of London Mathematical Society*, 7:49–69.
- [Dixon, 1908b] Dixon, A. L. (1908b). The eliminant of three quantics in two independant variables. second paper. *Proceedings of London Mathematical Society*, 7:473–492.
- [Duporcq, 1949] Duporcq, E. (1949). *Premiers Principes de Géométrie Moderne*. Gautier-Villars, Paris.
- [Dürer, 1525] Dürer, A. (1525). *Instructions pour la Mesure à la Règle et au Compas des Lignes, Plans et Corps Solides*. édité à compte d'auteur à Nüremberg, Edition du Seuil 1995, pour la traduction française, la présentation et les notes de Jeanne Peiffer.
- [España et al., 1995] España, M. L., Aries, F., Baret, F., Collache, L., et Bruguier, N. (1995). Modeling canopy structure time course of corn crops. In *Proceedings of the International Colloquium Photosynthesis and Remote Sensing*, pages 207–213. Gérard Guyot, Paris.
- [España et al., 1996a] España, M. L., Aries, F., Prévot, L., et Baret, F. (1996a). Modeling corn canopy 3d architecture. In *Rapport Interne*. INRA, Paris.
- [España et al., 1997] España, M. L., Baret, F., Chelle, M., Aries, F., et Andrieu, B. (1997). Modélisation 3d du maïs pour la simulation de la réflectance. In *Rapport Interne*. INRA, Paris.
- [España et al., 1996b] España, M. L., Chelle, M., Aries, F., Andrieu, B., et Baret, F. (1996b). Utilización de maquetas informáticas para simular la variación direccional de la reflectancia en campos de maíz. *Photo-Interpretation*, 3-4:79–87.
- [Fiorot et Jeannin, 1989] Fiorot, J.-C. et Jeannin, P. (1989). *Courbes et Surfaces Rationnelles. Applications à la CAO*. Masson.
- [Flocon et Taton, 1990] Flocon, A. et Taton, R. (1990). *La Perspective*. Presses Universitaires de Frances.

- [Foley et van Dam, 1984] Foley, J. D. et van Dam, A. (1984). *Fundamentals of Interactive Computers Graphics*. Addison-Wesley.
- [Glassner, 1989] Glassner, A. S., editor (1989). *An Introduction to Ray Tracing*. Academic Press.
- [Govaerts, 1996] Govaerts, Y. M. (1996). *A Model of Light Scattering in Three-Dimensional Plant Canopy: a Monte Carlo Ray Tracing Approach*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.
- [Hégron, 1985] Hégron, G. (1985). *Synthèse d'Image : Algorithmes Élémentaires*. Dunod, Paris.
- [Ivanov, 1994] Ivanov, N. (1994). *Estimation de Paramètres de Structure du Couvert Végétal par Stéréovision. Application à l'étude de la pénétration du rayonnement*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII.
- [Joly, 1985] Joly, F. (1985). *La Cartographie*. Presses Universitaires de France.
- [Kimes, 1984] Kimes, D. S. (1984). Modeling the directional reflectance from complete homogeneous vegetation canopies with various leaf-orientation distributions. *Journal of Optical Society of America*, 1:725-737.
- [Kuusk et al., 1997] Kuusk, A., Andrieu, B., Chelle, M., et Aries, F. (1997). Validation of a markov chain canopy reflectance model. *International Journal of Remote Sensing*, 18, No10:2125-2146.
- [Lebesgue, 1949] Lebesgue, H. (1949). *Leçons sur les Constructions Géométriques*. Gauthier-Villars (Jacques Gabay pour la réimpression de 1987), Paris.
- [Lindgren et al., 1992] Lindgren, T., Sanchez, J., et Hall, J. (1992). Curve tessellation criteria through sampling. In Kirk, D., editor, *Graphics Gems III*, pages 262-265. Academic Press, Inc., San Diego.
- [Macauley, 1923] Macauley, F. (1923). Note on the resultant of a number of polynomials of the same degree. *Proceedings of London Mathematical Society*, 21C1408:14-21.
- [Manocha et Canny, 1992a] Manocha, D. et Canny, J. F. (1992a). Algorithm for implicitizing rational parametric surfaces. *Computed Aided Geometric Design*, 9:25-50.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Manocha et Canny, 1992b] Manocha, D. et Canny, J. F. (1992b). Implicit representation of rational parametric surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 13:485-510.
- [Marquard, 1963] Marquard, D. (1963). An algorithm for least square estimation of non linear parameters. *SIAM J*, 11:431-441.
- [Milhaud et Pouget, 1931] Milhaud, G. et Pouget, E. (1931). *Cours de Géométrie Analytique*. Librairie Delagrave, Paris.
- [Pacioli, 1509] Pacioli, F. L. (1509). *Divine Proportion*. Librairie du Compagnonnage, 1988, pour la traduction française, Paris.
- [Panowski, 1978] Panowski (1932-1978). *La Perspective comme Forme Symbolique*. Editions de Minuit.
- [Parramon, 1991] Parramon, J. M. (1991). *Le Grand Livre de la Perspective*. Bordas.
- [Peroche et al., 1988] Peroche, B., Argence, J., Ghazanfarpour, D., et Michelucci, D. (1988). *La Synthèse d'Image*. Hermès.
- [Perrin, 1995] Perrin, D. (1995). *Géométrie Algébrique*. Savoirs Actuels. InterEditions/CNRS Edition, Paris.
- [Picquet, 1882] Picquet, M. H. (1882). *Traité de Géométrie Analytique*. Masson, Paris.
- [Prusinkiewicz et Lindenmayer, 1990] Prusinkiewicz, P. et Lindenmayer, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag.
- [Prévoit, 1985] Prévoit, L. (1985). *Modélisation des Échanges Radiatifs au sein des Couverts Végétaux. Application sur un Couvert de Maïs*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI.
- [Reeves et Cook, 1987] Reeves, W. T. et Cook, D. H. S. A. R. L. (1987). Rendering antialiased shadows with depth maps. *Computer Graphics*, 22:283-288.
- [Riou et al., 1989] Riou, C., Valancogne, C., et Piéri, P. (1989). Un modèle simple d'interception du rayonnement solaire par la vigne - vérification expérimentale. *Agronomie*, 9:441-450.
- [Rouleau, 1991] Rouleau, B. (1991). *Les Méthodes de la Cartographie*. Presses du CNRS.



- [Salmon, 1892] Salmon, G. (1882, 1891, 1892). *Traité de Géométrie Analytique à Trois Dimensions*. Gautier-Villars, Paris.
- [Salmon, 1884] Salmon, G. (1884). *Traité de Géométrie Analytique à Deux Dimensions*. Gautier-Villars, Paris.
- [Samuel, 1986] Samuel, P. (1986). *Géométrie Projective*. Presses Universitaires de France, Paris.
- [Schweizer, 1987a] Schweizer, P. (1987a). *Infographie I*. Presses polytechniques romandes.
- [Schweizer, 1987b] Schweizer, P. (1987b). *Infographie II*. Presses polytechniques romandes.
- [Sederberg, 1983] Sederberg, T. W. (1983). *Implicit and Parametric Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Thèse de doctorat, Purdue University.
- [Sederberg, 1984] Sederberg, T. W. (1984). Ray tracing of Steiner patches. *Computer Graphics*, 18.
- [Sederberg et Chen, 1995] Sederberg, T. W. et Chen, F. (1995). Implicitization using curves and surfaces. *Computer Graphics Siggraph 1995*, 18.
- [Sederberg et Parry, 1986] Sederberg, T. W. et Parry, S. R. (1986). Comparison of three curve intersection algorithm. *Computer Aided Design*, 18:58-63.
- [Sederberg et al., 1994] Sederberg, T. W., Saito, T., Qui, D., et Klimaszewski, K. S. (1994). Curve implicitization using moving lines. *Computer Aided Geometric Design*, 11.
- [Sinoquet, 1988] Sinoquet, H. (1988). *Modélisation des Échanges Raditifs de Courte Longueur d'Onde dans certains Couverts Végétaux Hétérogènes*. Thèse de doctorat, INA Paris-Grignon.
- [Sinoquet, 1989] Sinoquet, H. (1989). Modélisation de l'interception des rayonnements solaires dans une culture en rang. I. aspects théoriques. *Agronomie*, 9:125-135.
- [Sinoquet et Bonhomme, 1989] Sinoquet, H. et Bonhomme, R. (1989). Modélisation de l'interception des rayonnements solaires dans une culture

en rang. II. structure géométrique du couvert et validation du modèle.  
*Agronomie*, 9:619-628.

[van der Waerden, 1991] van der Waerden, . L. (1991). *Algebra Vol. I, II*.  
Springer Verlag, New York.

[van Hentenryck et al., 1995] van Hentenryck, P., McAllester, D., et Kapur,  
D. (1995). Solving polynomial systems using a branch and prune ap-  
proach. Technical report, Brown University.



the 1990s, the number of people with a mental health problem has increased by 50% (Mental Health Act 1983, 1990).

There are a number of reasons for this increase. One of the reasons is that the definition of mental health problems has become broader. For example, the term 'mental health problems' now includes a wide range of conditions, such as depression, anxiety, and personality disorders, which were previously considered to be separate entities.

Another reason for the increase is that the number of people with a mental health problem who are in contact with the mental health services has increased. This is due to a number of factors, including the fact that the mental health services have become more accessible and that the stigma associated with mental health problems has been reduced.

There are a number of implications of this increase. One of the implications is that the mental health services need to be able to cope with a larger number of people with a mental health problem. This may require the services to be expanded and the staff to be trained in a wider range of conditions.

Another implication is that the mental health services need to be able to provide a wider range of services. This may include the provision of community care services, such as day care and residential care, and the provision of services for people with a mental health problem who are in contact with the criminal justice system.

There are a number of ways in which the mental health services can be improved. One way is to increase the number of people working in the mental health services. This can be done by recruiting more people and by providing training and development opportunities for existing staff.

Another way is to improve the quality of the services provided. This can be done by implementing evidence-based practice and by ensuring that the services are accessible and acceptable to the people who use them.

There are a number of challenges facing the mental health services. One of the challenges is the need to provide services for a larger number of people with a mental health problem. This may require the services to be expanded and the staff to be trained in a wider range of conditions.

Another challenge is the need to provide a wider range of services. This may include the provision of community care services, such as day care and residential care, and the provision of services for people with a mental health problem who are in contact with the criminal justice system.

There are a number of ways in which the mental health services can be improved. One way is to increase the number of people working in the mental health services. This can be done by recruiting more people and by providing training and development opportunities for existing staff.

Another way is to improve the quality of the services provided. This can be done by implementing evidence-based practice and by ensuring that the services are accessible and acceptable to the people who use them.

There are a number of challenges facing the mental health services. One of the challenges is the need to provide services for a larger number of people with a mental health problem. This may require the services to be expanded and the staff to be trained in a wider range of conditions.

Another challenge is the need to provide a wider range of services. This may include the provision of community care services, such as day care and residential care, and the provision of services for people with a mental health problem who are in contact with the criminal justice system.

## RÉSUMÉ

La quantification du rayonnement lumineux dans un couvert végétal est nécessaire en recherche sur les couverts végétaux, tant au niveau de l'étude de la photosynthèse, de la micrométéorologie que de la télédétection. Le recours aux méthodes proches de l'infographie nous amène à rappeler les principes liés au dessin et à l'image et justifie le cadre de la géométrie projective.

Nous proposons un modèle géométrique fin pour représenter un pied de maïs : un modèle paramétrique unique permet notamment de représenter les feuilles tout au long de leur croissance. Les lois de distribution sont calculées : elles permettent de générer une parcelle aléatoire.

Nous traitons ensuite le problème du découpage des surfaces en éléments plus simples. Le découpage d'une surface en triangles plans peut poser problème : la convergence en distance n'implique pas la convergence de l'aire et des normales (problème de Schwartz). Il conduit généralement à un nombre prohibitif de triangles. Pour cela on propose le découpage en carreaux paramétriques du second degré. Cette étape permet de transformer les surfaces paramétriques quelconques en éléments géométriques standards.

La dernière partie traite essentiellement des courbes et surfaces paramétriques rationnelles. Son but est d'établir les formules de calcul des intersections entre un carreau paramétrique rationnel et une droite en utilisant les méthodes d'implicitisation-inversion. Pour les courbes, nous proposons une nouvelle formulation de l'équation implicite qui conduit à des formules d'inversion plus simples que les formules classiques. Une part importante est consacrée à la surface de Steiner, associée, dans les bons cas, à la paramétrisation rationnelle du second degré. La démonstration de la rationalité de la solution unique d'un système polynomial est donnée.

Les possibilités et les limites de ces méthodes pour la quantification du rayonnement dans un couvert végétal sont étudiées.

## MOTS-CLÉS

infographie, rayonnement, lancer de rayons, géométrie projective, géométrie algorithmique, surface de Steiner, surface rationnelle du second degré, triangulation, équation implicite, formules d'inversion, couvert végétal, maïs.

MINISTÈRE DE L'AGRICULTURE  
I.N.R.A. - Site AGROPARC  
Unité de Bioclimatologie  
Domaine Saint-Paul  
84914 AVIGNON CEDEX 9  
FRANCE

25 AOUT 1997

BIBLIOTHÈQUE