

MECANIQUE DES MILIEUX HETEROGENES

Jean-Louis Auriault - 1991
Institut de Mécanique de Grenoble
Unité Mixte de Recherche 101, C.N.R.S., U.J.F., I.N.P.G.
B.P. 53X, 38041 Grenoble Cedex, France

MILIEUX HETEROGENES : EXISTE-T-IL UN CONTINU EQUIVALENT ?

1 INTRODUCTION

Les matériaux hétérogènes représentent une classe importante parmi les autres. Dans le domaine de la mécanique, on pense tout de suite aux matériaux composites constitués de plusieurs solides, aux mélanges de fluides, aux suspensions de solides dans un fluide ou aux milieux poreux. En fait tout matériau est hétérogène à une échelle ou une autre... ne serait-ce qu'en descendant à l'échelle atomique.

Ces matériaux sont souvent utilisés dans des volumes comprenant un grand nombre d'hétérogénéités (fig.1), si bien que la description des processus physiques qui les concernent devient délicate, voire impossible, si toute les hétérogénéités sont prises en compte.

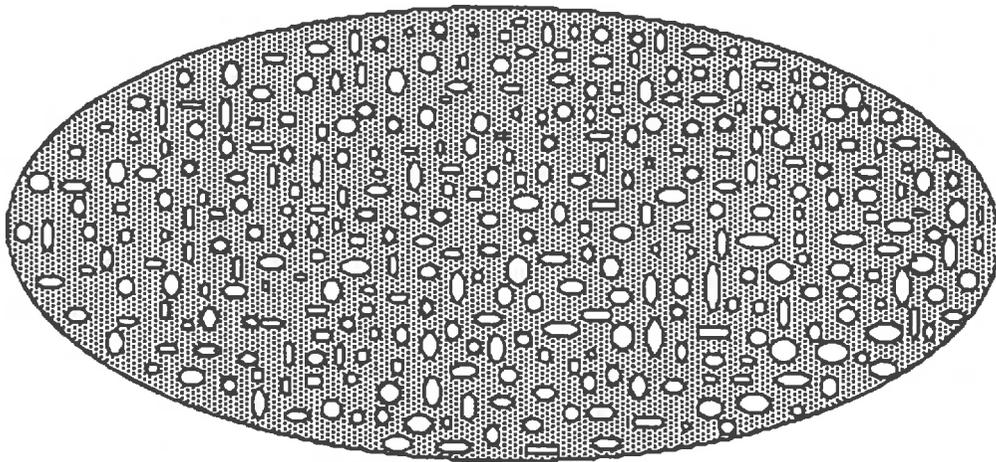


Figure 1 : Matériau hétérogène.

L'idée - très ancienne et classique - est donc de découvrir si possible un matériaux macroscopiquement équivalent, appelé aussi matériau homogénéisé. Il s'agit d'un matériau continu qui se comporte en "moyenne" comme le matériau hétérogène. La description ainsi obtenue doit être intrinsèque au matériau et à la sollicitation étudiés et indépendante des conditions aux limites macroscopiques. Dans la suite, l'échelle des hétérogénéités sera dite échelle microscopique ou locale, par opposition à l'échelle macroscopique, échelle où est défini le continu équivalent. La description macroscopique continue des matériaux hétérogènes introduit des comportements, des équations de bilan, des grandeurs physiques et des coefficients effectifs à la place des comportements, des équations de bilan, des grandeurs physiques et des coefficients valables à l'échelle des hétérogénéités. L'étude de ces correspondances est d'un très grand intérêt.

La description macroscopique peut être obtenue soit, par une étude phénoménologique ou expérimentale, directement à l'échelle macroscopique soit par une technique d'homogénéisation, c'est-à-dire par passage de la description microscopique à la description macroscopique. C'est cette deuxième voie qui est abordée ici. Il n'est pas possible de donner un aperçu complet de toutes les techniques d'homogénéisation, fort nombreuses. Nous nous bornons donc principalement à la présentation de deux d'entre elles : l'homogénéisation utilisant la technique des développements à échelles multiples, introduite pour les structures fines périodiques (HSP) par [BENSOUSSAN et al, 1978] [SANCHEZ - PALENCIA, 1980], et la modélisation statistique (MS) développée par [KRÖNER, 1986] pour les matériaux de structures aléatoires. D'une part ce sont sans doute les méthodes les plus efficaces, d'autre part certains liens de parenté entre elles permettent de tirer quelques idées générales.

La partie 2 présente des généralités sur les méthodes d'homogénéisation ainsi que les relations existant entre certaines d'entre elles. La modélisation statistique est ensuite présentée brièvement dans la troisième partie. En parallèle la technique des développements à échelles multiples fait l'objet de la partie 4, suivie dans la partie 5 d'une comparaison des possibilités de ces deux techniques.

Remarquons tout d'abord, et cela était sous-jacent dans l'introduction ci-dessus, que l'homogénéisation d'un milieu à forte densité d'hétérogénéités n'est possible que si on considère des domaines contenant un grand nombre d'hétérogénéités. Si l est une dimension caractéristique des hétérogénéités et L une dimension caractéristique du volume de matériau ou du phénomène étudié, $\varepsilon = l/L \ll 1$. Deux grandes classes de matériaux peuvent alors être définies suivant que ces deux échelles sont séparées ou non. Pour la première, il n'existe pas d'autre échelle intermédiaire. L'homogénéisation est alors possible. Les matériaux sont alors caractérisés par une invariance (ou quasi-invariance) par translation à l'échelle microscopique, dans un sens qui sera précisé plus loin. Peuvent d'ailleurs coexister plus de deux échelles, mais à la condition qu'elles soient bien séparées les unes des autres. Et on passe alors de l'une à l'autre immédiatement supérieure par homogénéisation, avec toute fois des interférences fortes entre les échelles suivant les différents niveaux de séparation, [AURIAULT et al, 1991].

Lorsqu'il existe une infinité d'échelles non séparées, (la deuxième classe), des résultats peuvent être obtenus lorsque la structure est invariante par dilatation. Par exemple dans le cas d'un réseau régulier de barres conductrices ou non conductrices réparties de façon aléatoires, la structure de la partie conductrice du réseau est invariante par dilatation lorsque la probabilité de barre dans l'état conducteur est voisine de la probabilité critique caractérisant le seuil conducteur - non conducteur du réseau. La théorie de la percolation [CLERC et al 1983] permet alors, pour de telles structures, d'obtenir l'allure de la conductivité du réseau au voisinage du seuil.

Comme on le voit, il s'agit ici aussi d'homogénéisation puisqu'une propriété "moyenne", ici la conductivité effective du réseau, est obtenue. Toutefois on réserve en général le terme d'homogénéisation aux techniques de passage micro-macro concernant les structures à échelles séparées. Nous n'abordons dans la suite que cette seule classe de matériaux.

2.1 Méthodes d'homogénéisations à échelles séparées.

Donnons tout d'abord quelques exemples de matériaux hétérogènes en rapport avec le Génie Civil. L'échelle microscopique de longueur caractéristique l n'est "microscopique" qu'en comparaison de l'échelle macroscopique de longueur caractéristique L . Ainsi l peut prendre des valeurs qui n'ont rien de microscopique comparées à l'échelle humaine. Si pour les argiles l sera la taille des pores, par exemple 50 Å, un composite mat de verre-résine époxy aura un $l \sim 1$ mm, le béton un $l \sim 1$ cm, une terre armée ou un talus drainé par géotextiles un $l \sim 50$ cm, et enfin une fondation sur pieux un $l \sim 5$ m. Sans qu'il soit possible de donner une frontière bien précise, on estime en général que l'homogénéisation devient performante pour $L > 10 l$ soit $\epsilon < 0.1$.

Une autre caractéristique générale de toutes les méthodes est qu'elles utilisent des moyennes pour définir les grandeurs macroscopiques. Mais celles-ci sont soit introduites de façon arbitraire - et ceci constitue un prérequis à l'échelle macroscopique qui impose ainsi la définition des grandeurs physiques macroscopiques - soit elles sont introduites par le processus de passage micro-macro, ce qui est une garantie d'obtention de la "bonne" grandeur physique macroscopique. Remarquons à ce sujet que le théorème des moyennes, qui permet de prendre la moyenne d'un système d'équations aux dérivées partielles et qui est souvent utilisé pour découvrir la description macroscopique, est un piège car il est valable que le problème soit homogénéisable ou non.

Comme on le voit sur les exemples ci-dessus deux classes de matériaux se dégagent à nouveau : les matériaux à structures périodiques et ceux à structures aléatoires. Les premiers sont étudiés par la méthode d'homogénéisation de structures périodiques (HSP), qui utilise des développements à échelles multiples et qui a été développée par [BENSOUSSAN et al, 1978] et [SANCHEZ - PALENCIA, 1980]. Elle est maintenant appliquée à de nombreux domaines de la physique. Nous reviendrons en détail sur la méthode des échelles multiples dans la partie 4 où nous présentons une méthodologie [AURIAULT 1991] permettant en particulier d'étudier les conditions d'homogénéisabilité d'un

des exemples précis dans les chapitres suivants. Les seconds, c'est-à-dire les matériaux à structures aléatoires font l'objet de très nombreuses techniques que nous ne pouvons pas rapporter toutes ici. Citons la méthode de Modélisation Statistique (MS) de [KRÖNER, 1986], les méthodes développées par [GELHAR, 1987] ou par [MATHERON, 1967], les méthodes auto-consistantes (cf par exemple [ZAOUI, 1987]) et d'une façon générale les méthodes de moyennes proprement dites [GILBERT, 1987] , [HOWES et al, 1985], [BEDFORD et al, 1983], [NIGMATULIN, 1981] etc...). La méthode introduite par [KRÖNER, 1986] sera présentée succinctement dans la partie 3. L'étude des matériaux à structures aléatoires présuppose l'hypothèse de stationnarité ou de quasi-stationnarité. Même si elle n'est pas toujours clairement énoncée, cette hypothèse est sous-jacente dans toutes les méthodes et nécessaire pour qu'une homogénéisation puisse être faite. Elle correspond à la propriété de périodicité des structures périodiques, présentant avec elle cette propriété d'invariance par translation qui découle de la séparation des échelles, à opposer à l'invariance par auto-similarité utilisée pour certains matériaux à échelles non séparées.

Il est intéressant de noter les points communs entre les méthodes d'homogénéisation les plus performantes. D'une part les méthodes auto-consistantes apparaissent comme équivalentes à la méthode MS dans le cas d'un désordre parfait : [KRÖNER, 1972, 1986]. D'autre part, pour un composite élastique, les coefficients d'élasticité effectifs (macroscopique) ont une écriture formelle identique, qu'ils soient obtenus par la méthode MS pour un composite aléatoire ou par la méthode HPS pour un composite périodique [KRÖNER, 1980].

Pour les problèmes de filtration, il est aisé de constater qu'un résultat du même ordre est valable pour un poreux composite, en comparant les écritures formelles du coefficient de perméabilité effectif obtenu par [MATHERON, 1967] et celui obtenu par la méthode HPS.

Mais d'une façon générale, plus la séparation des échelles est propre, meilleurs sont les résultats. Cela donne un avantage décisif à la méthode HSP. En effet la périodicité introduit une séparation des échelles parfaites, l pouvant être définie comme dimension

caractéristique de la période. Une définition aussi précise n'est pas possible pour les matériaux à structure aléatoire. Ainsi les résultats seront plus précis pour les matériaux périodiques.

2.2 La méthode d'homogénéisation idéale

La méthode d'homogénéisation idéale prétend, à partir de la description complète à l'échelle microscopique, découvrir la description complète à l'échelle macroscopique sans hypothèse additionnelle. Ainsi à l'échelle microscopique sont supposés connues.

- Les équations de conservation,
- Les rhéologies avec la valeur des paramètres,
- Les grandeurs physiques qui décrivent les phénomènes étudiés,
- La géométrie.

Et le processus de passage micro-macro doit donner une description macroscopique équivalente, intrinsèque au matériau et au phénomène étudiés, soit :

- Les équations de conservation,
- Les rhéologies et les paramètres effectifs,
- Les bonnes grandeurs physiques qui décrivent les phénomènes à l'échelle macroscopique.

Bref le processus idéal doit être indépendant de toute hypothèse à l'échelle macroscopique afin de garantir la qualité scientifique du résultat. Quand on aura remarqué que les structures des modélisations macroscopiques peuvent être très différentes des structures des modélisations microscopiques correspondantes, on comprendra l'importance de ce point ; un exemple en est la filtration dans un poreux rigide : à l'échelle des pores la description pour un fluide newtonien est celle de STOKES avec la rhéologie correspondante; à l'échelle macroscopique la modélisation est celle de la loi de DARCY, certes aussi l'expression du principe fondamental de la mécanique, mais avec une structure fort différente, où la rhéologie se présente maintenant intimement mélangée à la dynamique, [AURIAULT, 1986], cf. chapitre 3.

la détermination des champs de grandeurs physiques locales à partir des valeurs des grandeurs physiques macroscopiques. Il est alors évident que la seule méthode qui réponde à ces conditions est la méthode HSP puisque la périodicité assure la description complète du matériau. Par contre il n'est jamais possible de décrire totalement un matériau aléatoire (même dans le cas limite du désordre parfait). Ainsi les méthodes associées aux structures aléatoires ne peuvent pas être parfaites. La description locale étant incomplète, il est nécessaire d'introduire à l'échelle macroscopique des prérequis sur le danger desquels nous avons attiré l'attention plus haut. La méthode HSP permet par ailleurs de traiter le voisinage des frontières macroscopiques où, perpendiculairement à celles-ci, la séparation des échelles comme la stationnarité sont brisées. L'introduction de couches limites de raccordement permet alors de compléter la solution du problème.

3 LA MODELISATION STATISTIQUE

Cette méthode [KRÖNER,1986] est principalement utilisée pour obtenir des informations sur les coefficients effectifs d'un composite élastique soumis à une sollicitation statique.

Les hypothèses sont :

- Les échelles sont séparées : $\epsilon = l/L \ll 1$. Cette hypothèse est sous-jacente mais il n'en est pas fait usage systématique dans le passage micro-macro.

- Le matériau a une structure aléatoire.

- Le milieu, stationnaire, est de dimension infinie. L'hypothèse d'ergodicité est admise : la moyenne d'ensemble égale la moyenne de volume.

- Un prérequis est imposé : $\langle \sigma e \rangle = \langle \sigma \rangle \langle e \rangle$, où l'opérateur $\langle . \rangle$ représente la moyenne de volume, σ la contrainte et e la déformation. Ceci implique que :

- * la contrainte macroscopique est $\langle \sigma \rangle$,

- * la déformation macroscopique est $\langle e \rangle$,

- * le matériau a un comportement macroscopique élastique,

* la moyenne de la densité locale d'énergie élastique égale la densité macroscopique d'énergie élastique.

Comme nous l'avons indiqué plus haut la description locale d'un matériau à structure aléatoire n'est jamais parfaitement connue. L'intérêt de la modélisation statistique de KRÖNER est de parfaitement s'adapter à cette situation : la méthode fournit des bornes supérieures et inférieures pour les coefficients effectifs, ces bornes étant d'autant plus rapprochées que l'information augmente.

La méthode peut être présentée à partir de la formulation intégrale du problème aux limites pour un milieu infini, prenant en compte toutes les hétérogénéités et utilisant la fonction de GREEN modifiée en déformation. Comme cette fonction de GREEN n'est évidemment pas connue, compte tenu de la complexité du problème, [KRÖNER, 1986] introduit la fonction de GREEN modifiée en déformation associée à un milieu élastique fictif homogène. Cette fonction est parfaitement connue. KRÖNER montre alors que la vraie fonction de GREEN s'exprime à partir de cette fonction de GREEN fictive et de la répartition c du tenseur élastique. Puis, utilisant la définition suivante du tenseur élastique effectif C_{eff} qui découle du prérequis mentionné ci-dessus :

$$\langle \sigma \rangle = \langle c e \rangle = C_{eff} \langle e \rangle,$$

C_{eff} est représenté sous forme d'un développement en série relativement aux fonctions de corrélation d'ordre croissant de c .

Des considérations énergétiques permettent ensuite de montrer que la série tronquée, donc ne nécessitant que la connaissance des fonctions de corrélation d'ordre inférieur à un ordre donné n , correspond à une borne supérieure de C_{eff} , décroissante avec n . La même approche avec $s = c^{-1}$ conduit symétriquement à une suite croissante de bornes inférieures. Les bornes les moins précises sont celles de VOIGT, $\langle c \rangle$, et REUSS, $\langle c^{-1} \rangle^{-1}$. Elles ne nécessitent que la connaissance des moyennes de c et s et sont alors les meilleures possibles. L'introduction de fonctions de corrélation d'ordre 2 conduit à des bornes plus rapprochées. Si le matériau est macroscopiquement isotrope et les modules élastiques de deux grains voisins non corrélés, ce sont les bornes d' [HASHIN et al, 1963]; et ainsi de suite. La connaissance de toutes les fonctions de corrélation conduit en théorie au coefficient effectif lui-même.

La méthode des développements à échelles multiples a été introduite par [BENSOUSSAN et al, 1978] et [SANCHEZ - PALENCIA, 1980] pour étudier des problèmes d'homogénéisation de structures fines périodiques. La méthodologie présentée ici fait usage de tels développements et permet de répondre à la question d'homogénéisabilité. De plus elle met en évidence les points communs entre matériaux périodiques et matériaux aléatoires. Ainsi, il semble bien que si l'homogénéisation est possible, les comportements macroscopiques équivalents sont identiques. Seuls les coefficients effectifs demandent des traitements différents pour leur obtention.

4.1 Généralités

Avant d'entrer dans le sujet, nous devons préciser la notion de milieu macroscopiquement équivalent. Nous désirons obtenir un problème aux limites macroscopique équivalent, c.-à-d. des relations entre des quantités macroscopiques (en pratique des quantités moyennées dont le sens sera précisé plus loin) et des paramètres effectifs. Ces relations sont des lois de comportement ou des bilans, classiques ou non. La description est intrinsèque à une grande classe de milieux soumis à un type donné de sollicitations et donc doit être indépendante des conditions aux limites macroscopiques : la description macroscopique doit être valable pour tout problème aux limites appartenant à cette classe. La description macroscopique est continue, à l'opposé de la description microscopique qui peut être finement discontinue. Nous ne considérerons ici que des milieux et sollicitations continus par morceaux à l'échelle microscopique. Il est d'autre part évident que les descriptions macroscopiques obtenues seront encore valables pour des problèmes macroscopiques continus par morceaux, à la condition que chaque domaine de continuité soit lui-même homogénéisable.

Etudions maintenant les conditions d'homogénéisabilité. Il est clair, à partir des considérations développées ci-dessus que le domaine macroscopique doit contenir un (très) grand nombre d'hétérogénéités et que la taille de celles-ci doit être limitée de telle façon qu'il existe un volume élémentaire représentatif (VER) du milieu petit comparé au volume macroscopique. Le phénomène étudié doit aussi présenter un tel VER. Ceci est la définition d'une bonne séparation d'échelles qui doit donc jouer aussi bien pour la géométrie du milieu que pour la sollicitation (les grandeurs physiques). Le VER se réduit à la cellule périodique quand le milieu est périodique. Soit l une longueur caractéristique du VER ou de la période et L une longueur macroscopique. L représente aussi bien une longueur caractéristique du volume de matériau considéré qu'une longueur caractéristique macroscopique de la sollicitation. Le bon L est le plus petit des deux. La séparation des échelles impose :

$$\frac{l}{L} = \varepsilon \ll 1 \quad (1)$$

Insistons encore sur le fait que les grandeurs physiques doivent aussi vérifier cette condition de séparation des échelles. Par exemple considérons un composite élastique périodique satisfaisant (1) du point de vue géométrique, mais soumis à une excitation dynamique de longueur d'onde $O(l)$. Alors de la diffraction intervient. Le L de la sollicitation est $O(l)$ et la condition (1) n'est pas remplie. Nous ne pouvons pas obtenir de description macroscopique qui satisfasse les conditions d'homogénéisabilité présentées ci-dessus. La diffraction introduit des bandes d'arrêt où l'excitation est confinée près de ses sources. De plus dans ce cas, milieux périodiques et milieux aléatoires se comportent de façons très différentes.

La condition (1) est bien admise comme hypothèse de base pour tous les processus d'homogénéisation, même si la plupart d'entre eux n'en fait pas un usage systématique. Les deux longueurs caractéristiques l et L introduisent deux variables d'espace sans dimension X/l and X/L où X est une variable d'espace physique. Du fait de la séparation d'échelles chaque grandeur Φ apparaît comme

autres. En pratique il est plus courant d'utiliser d'autres variables d'espace (physiques), c-à-d x and $y = x/\epsilon$, où x est la variable d'espace macroscopique (ou lente) et y la variable d'espace microscopique (ou rapide). Deux écritures équivalentes sont alors possibles :

$\Phi = \Phi(x, y)$, $y = x/\epsilon$, qui est le point de vue macroscopique,

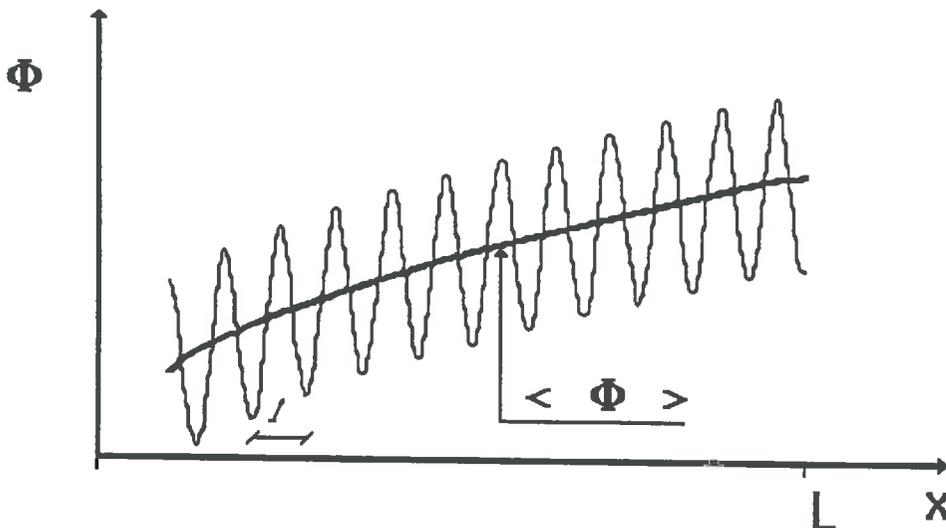
$\Phi = \Phi(x, y)$, $x = \epsilon y$, qui est le point de vue microscopique.

Soit $\langle \Phi \rangle$ la moyenne de Φ . Pour un milieu aléatoire la moyenne est prise sur un volume élémentaire représentatif, par rapport à la variable y , tandis que pour un milieu périodique le volume considéré est la cellule périodique. Nous avons généralement:

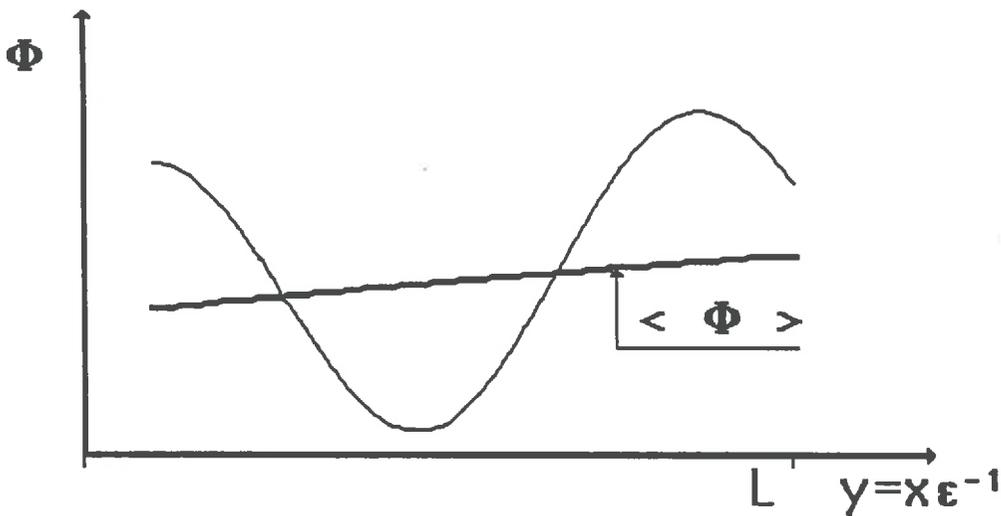
$$\Phi = O(\langle \Phi \rangle), \quad (2)$$

où le symbole $O(\cdot)$ doit être compris relativement à ϵ :

$$\Phi = O(\langle \Phi \rangle) \quad \text{si} \quad \epsilon \ll (\Phi / \langle \Phi \rangle) \ll \epsilon^{-1}.$$



(a)



(b)

Figure 2 : Variations de la quantité Φ en fonction des deux variables d'espace x and y .

(a) Variations macroscopiques de Φ .

(b) Variations locales de Φ .

La séparation d'échelles implique pour Φ que (voir fig. 2) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = O\left(\frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial x}\right) \quad (3)$$

c.-à-d. que le gradient local de Φ est du même ordre de grandeur que le gradient macroscopique de $\langle \Phi \rangle$. Avec (2) nous déduisons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \quad (4)$$

La relation (3) et la fig. 2 montre que la variation de $\langle \Phi \rangle$ en fonction de x sur une distance $O(l)$ est petite, en fait zéro dans le cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela signifie que Φ vérifie une propriété d'y-stationnarité à l'échelle locale. La y-stationnarité de Φ est définie comme suit. Soit $\langle \Phi \rangle$ et $\langle \Phi \rangle_S$ les moyennes de volume et de surface de Φ , respectivement sur un volume et une surface élémentaires représentatifs. Le choix entre une moyenne de volume ou de

contrainte, la moyenne de volume est le bon choix. Si Φ est une contrainte, alors c'est la moyenne de surface qu'il faut considérer, etc... Φ est y-stationnaire si sa moyenne locale est invariante sous une translation locale, d'ordre l et quelque soit la réalisation du milieu aléatoire (hypothèse ergodique). Considérons par exemple une moyenne de surface. Soient Σ_1 et Σ_2 deux sections droites parallèles quelconques d'un VER, voir fig.3. La stationnarité s'écrit :

$$\int_{\Sigma_1} \Phi dS = \int_{\Sigma_2} \Phi dS \quad (5)$$

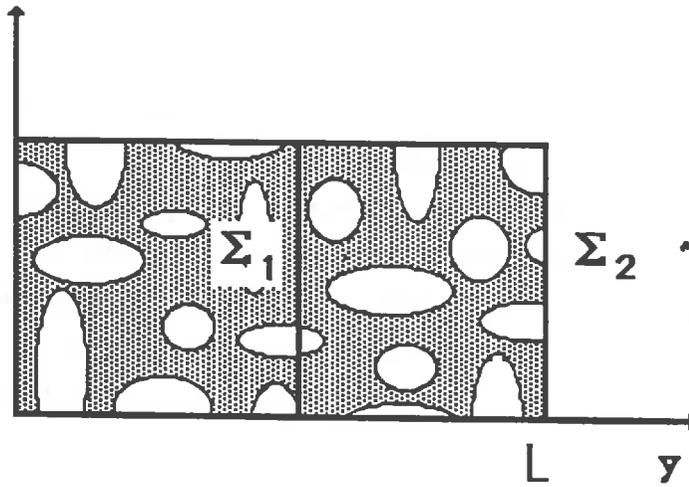


Figure 3: Volume élémentaire représentatif pour un matériau aléatoire.

Une propriété semblable est vérifiée quand la microstructure est périodique, le VER étant remplacé par la cellule périodique. Dans ce cas toutefois la propriété est plus forte: Φ est y-périodique.

Il est maintenant évident que le petit paramètre ε est la clef de voûte du processus d'homogénéisation. Ceci nous conduit à rechercher les champs des grandeurs physiques inconnues sous la forme de développements asymptotiques à échelles multiples, [BENSOUSSAN et al, 1978], [SANCHEZ - PALENCIA, 1980] :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \Phi^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (6).$$

L'homogénéisation parfaite est obtenue pour ε tendant vers zéro .

La stationnarité ou la périodicité impliquent alors la y -stationnarité ou la y -périodicité des $\Phi^{(i)}$. Cette propriété assure en retour une bonne séparation des échelles et par conséquent l'homogénéisabilité : si les inconnues peuvent être trouvées sous la forme (6), où les $\Phi^{(i)}$ sont y -stationnaires ou y -périodiques, alors l'homogénéisation est possible. Dans le cas contraire le milieu et la sollicitation ne sont pas homogénéisables. La méthode est auto-consistante.

4.2 Méthodologie

Plus précisément la méthode à suivre est la suivante. Nous supposons la description locale donnée et nous cherchons la description macroscopique équivalente.

- Nous choisissons tout d'abord le point de vue : macroscopique ou microscopique. Ils sont équivalents et le choix dépend uniquement des commodités. Les développements sont alors pris sous la forme (6) avec respectivement $y=x/\varepsilon$ ou $x=\varepsilon y$. x (respectivement y) est la variable d'espace directrice et L (respectivement l) est la longueur caractéristique à utiliser pour rendre adimensionnelles les diverses quantités intervenant dans la description.

- Nous procédons ensuite à la normalisation de la description locale. Cela signifie que la description est adimensionnalisée et que les nombres adimensionnels sont évalués en fonction des puissances de ε . Une quantité q est dite être $O(\varepsilon^p)$ si:

$$\varepsilon^{p+1} \ll q \ll \varepsilon^{p-1}$$

La normalisation est une étape importante durant laquelle la physique du problème est prise en compte. Elle est nécessaire avant d'utiliser les développements en puissance de ε . Après cette opération, les équations apparaissent sous la forme :

où les opérateurs Ψ_p sont $O(1)$.

- Enfin nous introduisons les développements asymptotiques de la forme (6) dans la description locale normalisée, identifions les termes de même puissance de ϵ et résolvons les problèmes successifs ainsi obtenus sur la cellule. Cette dernière étape est celle décrite en [BENSOUSSAN et al, 1978] pour les milieux périodiques quand le point de vue macroscopique est adopté. Il est possible en général de démontrer dans ce cas l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes successifs et d'en obtenir numériquement les solutions. Dans le cas de matériaux aléatoire il n'en est pas de même. Toutefois, considérant le problème macroscopique (Fig. 1) comme bien posé (quoique insolvable dans la pratique du fait du grand nombre d'hétérogénéités), chaque représentation du milieu possède une solution et une seule. La stationnarité locale implique alors que la moyenne de surface (ou de volume) de la quantité considérée est indépendante de la représentation étudiée, ce qui conduit à l'unicité de la description macroscopique.

Du fait de la normalisation, le premier terme des développements asymptotique doit être non nul:

$$\Phi^{(0)} \neq 0,$$

et conduire, suivant les problèmes, à des grandeurs physiques associées non nulles, telles qu'elles ont été estimées lors de la normalisation. Ceci sera rendu plus clair sur les exemples traités.

Si nous nous limitons à la découverte de la structure de la description macroscopique, milieux aléatoires et périodiques sont équivalents, si l'homogénéisation est possible. Il est donc pratique dans ce cas de supposer le milieu périodique.

La pierre angulaire de l'homogénéisation réside dans une condition nécessaire et suffisante, souvent appelée condition de compatibilité, pour l'existence des solutions de chaque problème à résoudre successivement sur la période. Les équations à résoudre sont en effet de la forme (elles découlent de bilans!):

$$\operatorname{div}_y \Phi^{(i)} = - \operatorname{div}_x \Phi^{(i-1)} ,$$

où les indices x et y indiquent que les dérivées sont prises par rapport à x et y respectivement, et div est l'opérateur divergence. Cette équation représente un bilan local de $\Phi^{(i)}$ où $-\operatorname{div}_x \Phi^{(i-1)}$ apparaît comme un terme source. Puisque les $\Phi^{(i)}$ sont localement périodiques ou stationnaires, la source doit être de moyenne nulle :

$$\langle \operatorname{div}_x \Phi^{(i-1)} \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{div}_x \langle \Phi^{(i-1)} \rangle = 0$$

Cette propriété correspond à l'alternative de FREDHOLM : l'opérateur en y du membre de gauche, muni des conditions aux limites appropriées (périodicité et éventuellement d'autres suivant le problème étudié), possède une valeur propre nulle, associée à une fonction propre indépendante de y . La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution réside dans l'orthogonalité du second membre de l'équation à cette fonction propre, d'où le résultat.

On obtient alors soit à la description macroscopique équivalente soit à la non homogénéisabilité quand on obtient $\Psi_p^{(0)} = 0$, car cela revient à modifier l'ordre de grandeur des nombres sans dimension.

5. COMPARAISON DES METHODES D'ECHELLES MULTIPLES ET STATISTIQUE

Rappelons tout d'abord les points communs. Les deux méthodes s'adressent à des matériaux à échelles séparées : il existe un petit paramètre $\varepsilon = l/L \ll 1$. Bien entendu la non utilisation systématique de ce fait dans la méthode MS explique certaines faiblesses de celle-ci que nous notons dans la suite. La même écriture formelle des coefficients effectifs d'un composite élastique montre que les deux méthodes sont voisines et on peut supposer que cette propriété s'étend à tout problème elliptique. L'invariance par translation (périodicité ou stationnarité) représente un troisième point commun. Enfin, mais là le résultat est obtenu par des voies très différentes les deux méthodes permettent d'étudier le sens physique des moyennes de volume. La solution découle de

caractère solénoïdal local des grandeurs pour la méthode des échelles multiples (cf [AURIAULT, 1986] pour des exemples simples). La méthode des échelles multiples permet toutefois d'envisager des exemples où la moyenne de volume n'égale pas la moyenne de surface. On consultera par exemple [LEVY, 1981] ou [AURIAULT, 1987], [AURIAULT et al, 1989]

Les *différences* concernent d'abord le problème des prérequis à l'échelle macroscopique. Ceux-ci imposent a priori des restrictions sur la description macroscopique et privent de généralité la théorie MS et les autres méthodes d'homogénéisation, excepté la méthode des échelles multiples. Et il est indéniable que ces prérequis ne favorisent pas la découverte de descriptions "exotiques" c'est-à-dire des descriptions qui n'utilisent pas les règles phénoménologiques macroscopiques habituelles. Dans le domaine des composites élastiques on pourra consulter à ce sujet [DUVAUT, 1976]. Il y est montré sans prérequis que les comportements statiques microscopique et macroscopique possèdent la même structure de description. L'étude des composites à l'état plastique est un autre exemple, moins simple [de BUHAN et al, 1987], [de BUHAN, 1986] [PASTOR et al, 1986], [SUQUET, 1987]. L'étude de la filtration dans un poreux rigide représente un cas où les structures des descriptions microscopiques et macroscopiques sont très différentes, équations de NAVIER - STOKES et loi de DARCY, même si elles représentent dans les deux échelles l'écriture du principe fondamental de la mécanique, [ENE et al, 1975], [AURIAULT, 1980, 1986]. Le cas de sollicitations dynamiques [LEVY, 1979] , [AURIAULT, 1986] présente la particularité que la loi macroscopique de filtration ou loi de DARCY généralisée est une loi "exotique" de dynamique héréditaire : le fluide filtrant se souvient de ses accélérations passées. L'étude des suspensions dans un liquide newtonien [FLEURY, 1980], [LEVY et al, 1983], [SANCHEZ PALENCIA, 1985] ainsi que des mélanges de fluides [LEVY, 1981], [AURIAULT et al, 1989], [BOUTIN et al, 1991] permet comme dans l'étude de tout mélange de mettre clairement en évidence les causes microscopiques de comportements macroscopiques mono ou pluriphasiques.

La question de l'homogénéisabilité n'a été abordée que plus récemment. On pourra consulter [AURIAULT et al, 1991, a, b] pour les poreux à double porosité et la dispersion de TAYLOR en milieux poreux, ainsi que [BOUTIN et al, 1990, 1991] pour l'acoustique des bétons bitumineux et celle des liquides newtoniens à forte concentration de bulles gazeuses.

La cohérence physique des résultats est un point très important. Si nous appliquons la méthode des échelles multiples telle qu'elle est décrite au paragraphe 4, la description macroscopique est obtenue au moyen d'équations de bilan, de lois rhéologiques, avec les grandeurs macroscopiques adéquates. Si le sens physique de ces dernières doit être étudié comme nous venons de le mentionner, il est nécessaire aussi de vérifier les cohérences de type énergétique. Ainsi pour un composite élastique sous sollicitation statique, la moyenne de la densité d'énergie élastique locale doit égaler la densité d'énergie élastique macroscopique définie à partir des bonnes grandeurs physiques macroscopiques. La méthode des échelles multiples se prête bien à cette étude. En ce qui concerne la méthode MS, la question ne se pose pas puisque la cohérence est incluse dans le prérequis (du moins en ce qui concerne les composites élastiques).

La localisation est un autre avantage de la méthode des échelles multiples, lorsqu'elle est appliquée aux milieux périodiques, que ce soit pour obtenir les champs locaux dans la masse du matériau ou pour se libérer du cas simpliste que représente le milieu infini. Près des frontières macroscopiques, la séparation des échelles comme la stationnarité sont brisées perpendiculairement à celles-ci. L'introduction des couches limites de raccordement permet à la méthode des échelles multiples de traiter des problèmes aux limites sur des domaines finis et d'étudier les problèmes qui y sont liés, [ENE et al, 1975], [AURIAULT et al, 1987], [TURGEMAN et al, 1987], [LEVY et al, 1975, 1977], [SANCHEZ-PALENCIA, 1987].

L'utilisation systématique du petit paramètre ε donne à la méthode des échelles multiples un avantage décisif. Ainsi il n'est pas possible avec la méthode MS d'envisager la dynamique d'un composite élastique ou l'introduction de forces de volume [KRÖNER, 1986]. Par contre, la méthode des échelles multiples montre

utilisables en description dynamique macroscopique, du moins pour les cas classiques (cf. [AURIAULT et al, 1985]). D'autres exemples résident dans la possibilité de traiter avec la méthode des échelles multiples les problèmes à plusieurs échelles séparées ainsi que les problèmes où en plus du petit paramètre d'homogénéisation ε , d'autres petits paramètres interviennent concernant la géométrie interne de la période ou les coefficients rhéologiques des matériaux composites. Ainsi de nombreuses situations peuvent être étudiées suivant les niveaux respectifs des différents petits paramètres. On trouvera dans les chapitres suivants quelques exemples de telles applications. On peut ranger dans cette catégorie les poreux rigides à double porosité [LEVY,1988]. Trois échelles bien séparées sont utilisées. Une première échelle est celle des pores où la description relève des équations de Stokes. La deuxième échelle est celle des fissures. A cette échelle les équations de STOKES sont valables dans les fissures et le poreux équivalent au microporeux de l'échelle précédente est décrit par la loi de DARCY. Enfin à l'échelle macroscopique l'homogénéisation conduit à une loi de DARCY. Lorsque la matrice est déformable, [AURIAULT, 1991] les interférences entre les échelles deviennent fortes et la description macroscopique est dépendante des valeurs relatives des séparations d'échelles. Cela devrait permettre de valider ou invalider certaines descriptions macroscopiques introduites directement à cette échelle par des études phénoménologiques, par exemples celles de [BARENBLATT et al,1960] ou de [WARREN et al, 1963]. La filtration dans un poreux classique (où la géométrie ne fait pas intervenir qu'un seul petit paramètre) est régie par la loi de DARCY. Quand la matrice est constituée de particules (où de fibres minces) petites par rapport à la période, ce qui introduit un petit paramètre géométrique supplémentaire, la description devient celle d'une loi de BRINKMAN [LEVY, 1983]. Dans le même ordre d'idée, on trouvera en [CIORANESCU et al, 1985] l'étude du problème de DIRICHLET pour un domaine avec de petits trous. Les talus drainés par des nappes de géotextiles [AURIAULT et al, 1982] introduisent outre ε deux autres petits paramètres caractérisant l'un la géométrie de la période (rapport des épaisseurs de géotextile et de sol), l'autre les propriétés hydrauliques (rapport des perméabilités

du sol et du géotextile). L'étude de la terre armée [PASTOR et al, 1986], comme la diffusion stationnaire dans un corps contenant de petites inclusions de grande conductivité [CAILLERIE, 1983], le comportement de corps élastiques renforcé de fibres minces de grande rigidité [CAILLERIE, 1981] ou la statique des plaques minces élastiques à structure fine périodique [CAILLERIE, 1982] sont aussi des problèmes à trois petits paramètres. Citons enfin l'homogénéisation de structures réticulées qui permet de remplacer ces structures par un continu équivalent [CIORANESCU et al, 1986, 1988]. Ce type de problème introduit outre ε , un deuxième petit paramètre caractérisant la géométrie de la période.

La méthode des échelles multiples permet de résoudre rapidement le problème de savoir si la mesure ponctuelle d'une grandeur physique ϕ est licite ou non au sein d'un matériau hétérogène. En fait le comportement est donné au premier ordre par $\phi^{(0)}(x, y)$ et tout le problème se ramène à celui de savoir si la grandeur macroscopique $\langle \phi^{(0)} \rangle$ égale en tout point de la période la grandeur $\phi^{(0)}(x, y)$. Ceci n'est possible que si $\phi^{(0)}(x, y)$ est indépendant de la variable y . C'est le cas par exemple pour la température T dans les problèmes de transferts thermiques dans un composite de matériaux à conductivités de même ordre de grandeur au regard de ε : $T^{(0)}$ est fonction de la variable lente x seule et la mesure ponctuelle est licite [AURIAULT, 1983]. Dans le problème de filtration d'un liquide newtonien dans un poreux, la pression est telle que $p^{(0)} = p^{(0)}(x)$ alors que la vitesse (évidemment) dépend de la variable rapide y : $v^{(0)} = v^{(0)}(x, y)$ [AURIAULT, 1986]. La mesure ponctuelle est licite pour la pression alors que la mesure de la vitesse doit être globale (une moyenne de surface !). De telles conclusions sont aussi possibles pour les autres méthodes d'homogénéisation et les raisonnements reposent plus ou moins sur la présence d'échelles séparées. On consultera à ce sujet [WHITAKER, 1986], [NOZAD et al, 1985].

Signalons aussi le problème du choix du volume élémentaire représentatif (VER) pour certaines techniques de moyenne. Alors que pour les milieux périodiques le problème ne se pose pas car le VER est la période, le VER est nécessairement approché pour les matériaux aléatoires. Il s'avère que pour un même matériau, le VER optimal dépend souvent de la grandeur étudiée ainsi que de la

obtenir la porosité interne du VER optimal pour la perméabilité. Ceci est la conséquence de la mauvaise séparation des échelles. Une bonne étude concernant les poreux non-saturés se trouve en [ROUGER,1988].

Enfin la question se pose de savoir s'il est possible de transférer quelques avantages de la méthode des échelles multiples appliquée aux milieux périodiques à l'étude des matériaux aléatoires, pour le calcul des coefficients effectifs. Nous avons vu que la structure de la description macroscopique est indépendante de la nature périodique ou aléatoire du matériau. En pratiquant donc la méthode des échelles multiples sur un matériau périodique fictif de "même nature" que le matériau aléatoire, on obtient des coefficients effectifs qu'il s'agit ensuite de relier à ceux du matériau aléatoire. Une tentative timide utilisant la périodisation du matériau aléatoire est aussi présentée par [CHEREL et al, 1987].

II

UN EXEMPLE

UNIDIMENSIONNEL

1 INTRODUCTION

Nous allons maintenant et dans la suite appliquer systématiquement la méthode des échelles multiples en suivant la méthodologie définie dans le chapitre précédent. Pour présenter le déroulement du processus, nous avons choisi un exemple monodimensionnel qui permet le calcul analytique jusqu'au bout. Du fait de sa simplicité cet exemple ne peut pas rendre compte de tous les problèmes soulevés par les méthodes d'homogénéisation. Nous les découvrirons dans les chapitres suivants lors de l'étude de problèmes multidimensionnels.

Nous considérons un milieu élastique unidimensionnel de module oedométrique E , soumis à une sollicitation dynamique. Le milieu est périodique, de période l petite et nous considérons un échantillon de longueur $L \gg l$. Le déplacement u est donné par :

$$\operatorname{div}(E \operatorname{grad} u) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

où div et grad désignent les opérateurs divergence et gradient, confondus ici puisque le problème est unidimensionnel. Rappelons que E est une quantité positive, ainsi que la masse volumique ρ . Ils sont tous deux périodiques de période l et peuvent présenter des discontinuités. La figure 1 montre un exemple de répartition de E .

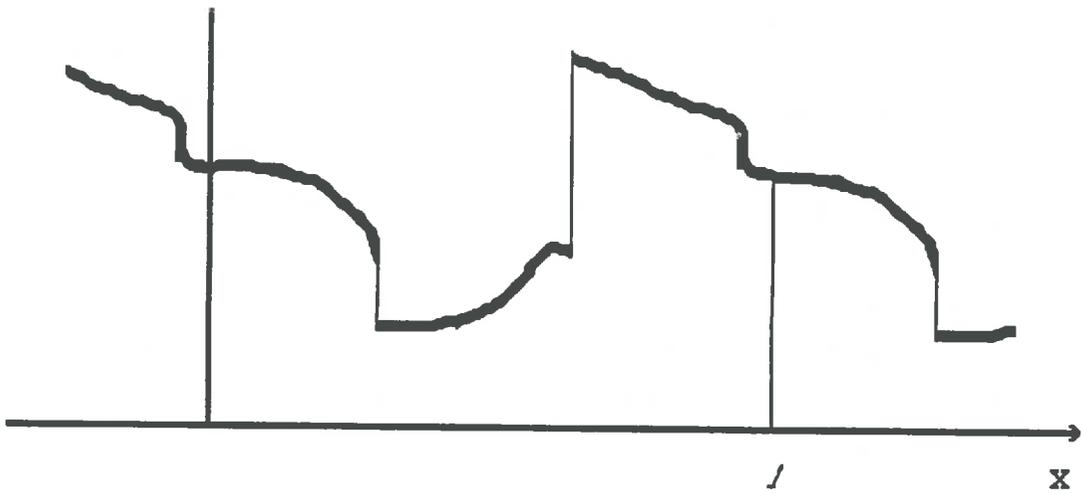


Figure 1 : Répartition périodique de E.

Sur les discontinuités, la contrainte σ et le déplacement sont continus :

$$[\sigma] = [E \text{ grad } u] = 0 \quad (2)$$

$$[u] = 0 \quad (3)$$

Nous étudions dans un premier temps le problème statique, où le deuxième membre de (1) s'annule. La dynamique sera ensuite abordée dans la troisième partie.

2 STATIQUE

L'équation (1) s'écrit ici :

$$\text{div}(E \text{ grad } u) = 0 \quad (4)$$

Adoptons le point de vue microscopique. L'inconnue u est donc à rechercher sous la forme :

$$u(x,y) = u^{(0)}(x,y) + \varepsilon u^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x,y) + \dots, \quad x = \varepsilon y \quad (5)$$

où $\varepsilon = l/L$ et les $u^{(i)}$ sont périodiques par rapport à la variable locale y , de période L . Les équations (2,3,4) n'introduisent pas de nombre sans dimension. Il n'y a donc pas lieu de normaliser. Toutefois, compte tenu du choix fait pour le point de vue, nous les considèrerons comme adimensionnalisées au moyen de la longueur l . Les opérateurs différentiels sont donc des opérateurs par rapport à la variable y comme il apparaît dans (5) une fois x remplacé par εy . La description macroscopique équivalente sera valable dès que la sollicitation vérifiera la condition (I,3) de séparation d'échelles (la séparation des échelles géométriques est supposée acquise). Celle-ci s'écrit ici, pour une sollicitation en contrainte :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = O\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)$$

2.1 Description macroscopique équivalente

La méthode consiste à introduire le développement (5) dans le système (4, 2, 3) et à identifier les puissances de ε . Remarquons que du fait des deux variables d'espace et du choix du point de vue microscopique, la dérivation prend la forme suivante :

$$\frac{d}{d y} = \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$$

La description microscopique (4, 2, 3) devient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(E(y) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) u \right) = 0$$

$$\left[E(y) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\right) u \right] = 0$$

$$[u] = 0$$

Portant dans ces expressions le développement (5), nous obtenons successivement:

$$\frac{\partial}{\partial y} (E (y) \frac{\partial}{\partial y} u^{(0)}) = 0 \quad (6)$$

$$[E (y) \frac{\partial}{\partial y} u^{(0)}] = 0$$

$$[u^{(0)}] = 0$$

où $u^{(0)}$ est L-périodique en y.

Par intégration successive de (6) il vient, compte tenu des conditions aux discontinuités :

$$E(y) \frac{\partial}{\partial y} u^{(0)} = C_1(x)$$

$$u^{(0)} = C_1(x) \int_0^y E^{-1}(y) dy + C_2(x)$$

où C_1 et C_2 sont fonctions de x seul.

D'autre part la périodicité s'écrit :

$$u^{(0)}(x,0) = u^{(0)}(x,L)$$

$$C_1(x) \int_0^L E^{-1}(y) dy = 0$$

soit $C_1 = 0$, puisque $E > 0$. Finalement :

$$u^{(0)}(x,y) = u^{(0)}(x), \text{ fonction de } x \text{ seul.}$$

b A l'ordre suivant nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial y} (E (y) (\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx})) = 0$$

$$[E (y) (\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx})] = 0$$

$$[u^{(1)}] = 0$$

où $u^{(1)}$ est L-périodique en y .

La solution générale de l'équation différentielle s'obtient comme plus haut :

$$u^{(1)} = D_1(x) \int_0^y E^{-1}(y) dy - y \frac{du^{(0)}}{dx} + D_2(x)$$

où D_1 et D_2 sont fonctions de x seul.

A nouveau la périodicité de l'inconnue, $u^{(1)}(x,0) = u^{(1)}(x,L)$ permet de déterminer une constante :

$$D_1(x) \int_0^L E^{-1}(y) dy - L \frac{du^{(0)}}{dx} = 0$$

$$D_1(x) = \langle E^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx}$$

où $\langle * \rangle$ représente l'opérateur moyenne sur la période :

$$\langle * \rangle = L^{-1} \int_0^L * dy$$

c Enfin l'ordre suivant s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(E(y) \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(y) \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx} \right) \right)$$

$$[E(y) \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right)] = 0$$

$$[u^{(2)}] = 0$$

où $u^{(2)}$ est L-périodique en y .

macroscopique. En effet l'équation différentielle représente le bilan de la quantité périodique

$$\sigma^{(2)} = E(y) \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right)$$

en présence de la source

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(E(y) \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx} \right) \right)$$

Il existe donc une condition de compatibilité imposant à la source d'être de moyenne nulle:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(E(y) \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx} \right) \right) \right\rangle = 0$$

soit :

$$\frac{d}{dx} \left(\langle E^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx} \right) = 0 \tag{7}$$

Cette équation de compatibilité représente la description macroscopique équivalente recherchée.

2.2 Remarques

a Coefficient effectif

La structure de la description macroscopique est identique à celle de la description locale. En particulier la propriété $E > 0$ est préservée puisque le coefficient effectif élastique macroscopique est tel que :

$$E_{\text{eff}} = \langle E^{-1} \rangle^{-1} > 0$$

Ce résultat est d'ailleurs classique et ne nécessite pas pour sa démonstration de technique particulière d'homogénéisation. En

effet dans ce problème unidimensionnel en statique, la contrainte est constante :

$$\sigma = E \frac{du}{dx} = \text{Cste.}$$

Prenant la moyenne de σ/E sur la période, il vient :

$$\langle \frac{\sigma}{E} \rangle = \sigma \langle \frac{1}{E} \rangle = \langle \frac{du}{dx} \rangle$$

qui conduit au résultat quand on aura remarqué que la moyenne de la déformation est la déformation macroscopique.

Remarquons enfin que $E(y)$ tend vers $\langle E(y) \rangle$ quand ε tend vers zéro, faiblement dans L^2 , cf. [SANCHEZ-PALENCIA, 1980], mais que de façon générale :

$$E_{\text{eff}} \neq \langle E(y) \rangle$$

b Grandeurs physiques macroscopiques

Les grandeurs physiques - le déplacement $u^{(0)}$ et la contrainte $\sigma^{(0)}$ - sont données au premier ordre par :

$$u^{(0)} = u^{(0)}(x)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= E \left(\frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right) = E \left[\langle E^{-1} \rangle^{-1} E^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx} \right] = \\ &= \langle E^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx} \end{aligned}$$

Elles sont indépendantes de la variable locale y et représentent les grandeurs macroscopiques, sans opération de moyenne. Les significations physiques des grandeurs macroscopiques ne posent donc ici aucun problème puisqu'elles sont identiques à celles introduites localement.

Le cas de quasi-périodicité où le module E est fonction non seulement de y mais de x ne soulève aucune difficulté. Le coefficient effectif s'écrit toujours $\langle E^{-1} \rangle^{-1}$ mais il dépend maintenant de la variable x . En effet x joue dans le processus le rôle d'un paramètre : rappelons que les systèmes différentiels à résoudre portent sur la variable y . Cette remarque s'applique bien entendu à tous les problèmes d'homogénéisation, permettant ainsi d'étendre systématiquement les résultats aux milieux macroscopiquement hétérogènes.

3 DYNAMIQUE

Nous prenons maintenant en compte le terme inertiel. La description locale est donc donnée par le système (1, 2, 3) :

$$\operatorname{div}(E \operatorname{grad} u) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$[\sigma] = [E \operatorname{grad} u] = 0 \quad (2)$$

$$[u] = 0 \quad (3)$$

Nous adoptons encore ici le point de vue microscopique, si bien que la longueur caractéristique pour adimensionnaliser est l . Et le déplacement u sera à nouveau rechercher sous la forme :

$$u(x,y) = u^{(0)}(x,y) + \varepsilon u^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x,y) + \dots, \quad x = \varepsilon y \quad (5)$$

où $\varepsilon = l/L$ et les $u^{(i)}$ sont périodiques par rapport à la variable locale y , de période L .

Le fait nouveau est que le système (1, 2, 3) introduit un nombre adimensionnel noté P , rapport du terme inertiel au terme élastique :

$$P = \frac{\left| \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|}{\left| \text{div}(E \text{ grad } u) \right|}$$

Avant de procéder à toute homogénéisation, il est nécessaire d'évaluer P_l , la valeur de P utilisant l comme longueur caractéristique, en fonction des puissances de ε . Nous allons en fait étudier différentes valeurs de P_l , mettant ainsi en évidence les situations homogénéisables ou non. Nous commençons par la description locale conduisant à une description macroscopique équivalente de dynamique. Cette situation correspond à un $P_l = O(\varepsilon^2)$. Puis nous envisagerons les valeurs voisines de P_l : $P_l = O(\varepsilon^3)$ conduisant à une description macroscopique de statique, celle étudiée au paragraphe 2, et $P_l = O(\varepsilon)$ correspondant à une description locale non homogénéisable.

3.1 Dynamique macroscopique

a Normalisation

Nous recherchons la description locale correspondant à une dynamique macroscopique. Elle doit donc être homogénéisable et la géométrie comme la sollicitation doivent donc présenter une séparation d'échelles. Nous considérons celle-ci acquise pour la géométrie. Pour ce qui est de la sollicitation, un bon candidat pour figurer une longueur caractéristique est la longueur d'onde λ . La séparation d'échelles impose alors :

$$l / \lambda = \varepsilon \ll 1$$

Nous pouvons par ailleurs anticiper que le module élastique effectif E_{eff} , s'il existe, est du même ordre de grandeur que le module local E . La célérité des ondes est donc :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

où désignant une fréquence caractéristique, il vient :

$$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{\omega \omega_0}{2\pi} \quad (8)$$

D'autre part, utilisant l pour adimensionnaliser, l'équation (1) donne pour P_l :

$$P_l = \frac{\left| \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|}{\left| \text{div}(E \text{ grad } u) \right|} = \frac{\rho \omega^2 l^2}{E}$$

Finalement, avec (8) :

$$P_l = O\left(\frac{l^2}{\lambda^2}\right) = O(\varepsilon^2)$$

Nous pouvons raisonnablement espérer que cette estimation de P_l traduit une description locale homogénéisable conduisant à une description macroscopique de dynamique. Cela est démontré ci-dessous. Remarquons que la condition de séparation d'échelles, en imposant une longueur d'onde grande par rapport à l , implique par conséquent une fréquence ω suffisamment petite. L'estimation proposée n'est donc valable que dans un domaine de fréquence borné : $\omega < \omega_c$. Pour bien mettre en relief cela, nous considérons dans la suite des sollicitations monochromatiques. L'équation (1) est formellement adimensionnalisée suivant :

$$\text{div}(E \text{ grad } u) = - \varepsilon^2 \rho \omega^2 u \quad (9)$$

b Homogénéisation

Portant le développement (5) dans (9, 2, 3), il est aisé de voir que les deux premiers problèmes à résoudre, d'inconnues $u^{(0)}$ et $u^{(1)}$, sont identiques à ceux obtenus pour la statique. On a donc :

$$u^{(0)} = u^{(0)}(x)$$

$$u^{(1)} = D_1(x) \int_0^y E^{-1}(y) dy - y \frac{du^{(0)}}{dx} + D_2(x)$$

avec
$$D_1(x) = \langle E^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx}$$

Seul l'ordre suivant est modifié, avec l'apparition du terme inertiel $-\rho \omega^2 u^{(0)}$ dans la source :

$$\frac{\partial}{\partial y} (E(y) (\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x})) = - \frac{\partial}{\partial x} (E(y) (\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx})) - \rho \omega^2 u^{(0)}$$

$$[E(y) (\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x})] = 0$$

$$[u^{(2)}] = 0$$

On est ainsi conduit, en écrivant que la source est de moyenne nulle, à la description macroscopique :

$$\frac{d}{dx} (\langle E^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx}) = - \langle \rho \rangle \omega^2 u^{(0)} \quad (10)$$

c Remarques

* L'estimation correspond bien à une situation homogénéisable conduisant à une description macroscopique de dynamique.

* Le module élastique effectif à utiliser en dynamique est celui de la statique !

* La masse volumique effective est la moyenne de volume de la masse volumique locale.

* La description dynamique contient comme cas particulier la statique. Il suffit de faire $\omega = 0$. Son domaine de validité est donné par :

$$\omega \leq O(\epsilon \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}})$$

grandeurs macroscopiques sont toujours valables ici.

3.2 $P_I = O(\varepsilon^3)$: statique

La normalisation est évidente :

$$\operatorname{div}(E \operatorname{grad} u) = -\varepsilon^3 \rho \omega^2 u$$

les relations aux discontinuités restant inchangées. Il est clair que maintenant, jusqu'au troisième ordre, les problèmes à résoudre sont identiques à ceux obtenus dans le paragraphe 2 pour la statique. Il existe donc une description macroscopique équivalente donnée par :

$$\frac{d}{dx} \left(\langle E^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^{(0)}}{dx} \right) = 0$$

Il s'agit, comme pour les autres descriptions macroscopiques obtenues jusque là, d'une approximation. L'étude de l'ordre suivant (quatrième problème), donne une deuxième approximation d'ordre ε . Comme il est aisé de s'en rendre compte, cette approximation comprend un terme inertiel. Pour $P_I = O(\varepsilon^p)$, $p \geq 2$, la dynamique apparaît à l'ordre d'approximation $p-2$.

3.3 $P_I = O(\varepsilon)$: description non homogénéisable

A nouveau la normalisation est évidente :

$$\operatorname{div}(E \operatorname{grad} u) = -\varepsilon \rho \omega^2 u$$

les relations aux discontinuités restant inchangées. Mais maintenant seul le premier problème reste identique à celui obtenu précédemment, avec :

$$u^{(0)} = u^{(0)}(x)$$

La dynamique apparaît dès le deuxième problème qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(E(y) \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx} \right) \right) = -\rho \omega^2 u^{(0)}$$

$$\left[E(y) \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{du^{(0)}}{dx} \right) \right] = 0$$

$$[u^{(1)}] = 0$$

où $u^{(1)}$ est L-périodique en y .

La première équation est le bilan d'une quantité périodique et fait apparaître la source $-\rho \omega^2 u^{(0)}$ qui doit être de moyenne nulle :

$$\langle \rho \rangle \omega^2 u^{(0)} = 0,$$

soit, puisque $\rho > 0$:

$$u^{(0)} = 0.$$

Ainsi le premier terme du développement de u est nul. Le premier terme non nul est $O(\varepsilon)$, si bien que P_I devient ipso facto $O(\varepsilon^2)$, situation étudiée en 3.1. $P_I = O(\varepsilon)$ caractérise une description non homogénéisable. En effet, d'après la normalisation conduite en 3.1.a, cela conduirait à :

$$P_I = O\left(\frac{l^2}{\lambda^2}\right) = O(\varepsilon)$$

et donc à :

$$\lambda = l \sqrt{\varepsilon} \ll L.$$

L'excitation dynamique ne remplit pas la condition de séparation d'échelles.

4 CONCLUSION

fonction des valeurs de P_l . On remarquera que la description macroscopique la plus riche, qui correspond au comportement dynamique, $P_l = O(\epsilon^2)$, se situe à la limite des situations homogénéisables.

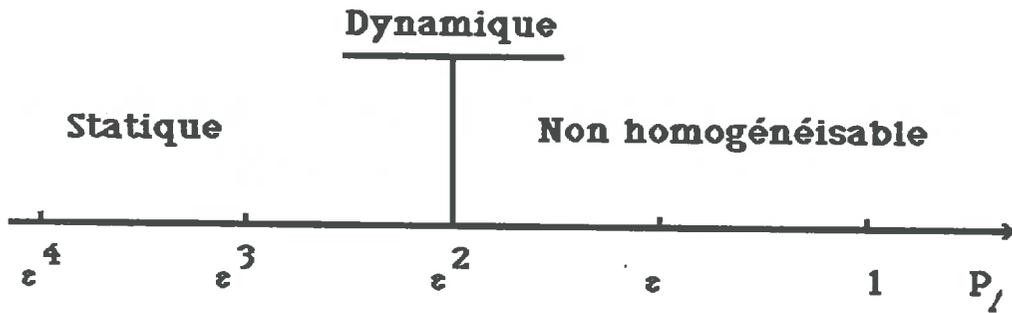


Figure 2: Descriptions macroscopiques possibles ou non suivant les valeurs de P_l .

III

LOI DE DARCY. ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE NEWTONIEN DANS UN POREUX RIGIDE.

1 INTRODUCTION

Nous nous proposons ici de déterminer la description macroscopique d'un écoulement de fluide newtonien à température constante dans une matrice poreuse rigide, quand cela est possible.

Ce sujet a fait l'objet de nombreuses recherches. En ce qui concerne l'utilisation de l'homogénéisation de structures périodiques, citons [ENE et al, 1975] pour la loi de DARCY, [LEVY, 1979] et [AURIAULT, 1980] pour l'acoustique d'un fluide incompressible dans un poreux rigide, [AURIAULT, 1987] et [AURIAULT et al, 1989] pour l'écoulement quasi-statique et l'acoustique de fluides non miscibles dans un poreux rigide, [MEI et al, 1991] pour l'étude des faibles non-linéarités inertielles de la loi de DARCY, ou encore [AURIAULT et al, 1991] pour la dispersion de TAYLOR en milieux poreux. D'autres techniques de moyennes sont appliquées aussi dans ces domaines, cf. [BEAR, 1972], [WHITAKER, 1986] pour la loi de DARCY, [BRENNER, 1980] ou [GELHAR, 1987] pour la dispersion en milieux poreux.

Par contre l'écoulement de fluides compressibles ne semble avoir reçu que peu d'attention. [KELLER, 1980] a bien étudié la loi de DARCY dans ces conditions, mais l'oubli d'une condition de compatibilité restreint fortement la validité de ses résultats, cf. la partie 4 qui reprend les études menées en [AURIAULT et al, 1990]. Une bonne revue des travaux anciens se trouve dans [SCHEIDEGGER, 1974].

nous considérons une matrice poreuse périodique de période Ω en variable locale y . Le fluide occupe les pores Ω_F , et Γ représente la surface du solide (Figure 1).

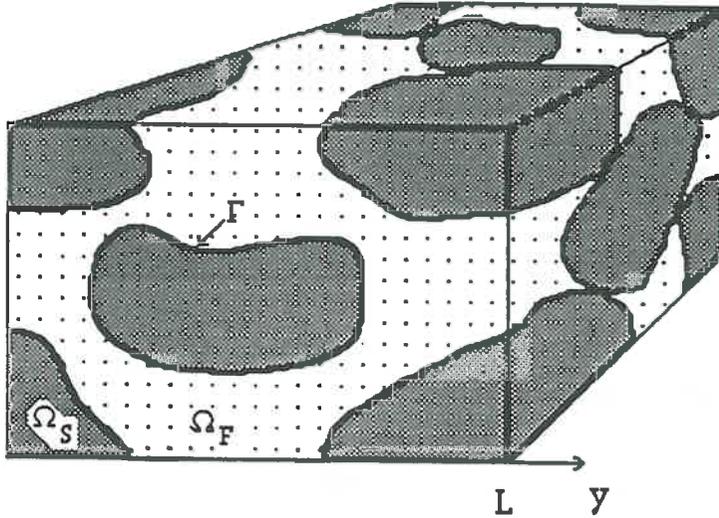


Figure 1 : Milieu poreux, période.

Les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide newtonien sont les suivantes:

- Equation de la dynamique :

$$\mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{v} - \text{grad } p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad }) \mathbf{v} \right) \quad (1)$$

- Bilan de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\rho \mathbf{v}) \quad (2)$$

- Condition d'adhérence :

$$\mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

- Equation d'état pour un écoulement barotrope :

$$f(p, \rho) = 0 \quad (4)$$

Les équations (1) et (2) introduisent trois nombres adimensionnels :

- Le nombre de REYNOLDS R_e :

$$R_e = \left| \rho (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} \right| / \left| \mu \Delta \mathbf{v} \right|$$

- Le nombre de REYNOLDS transitoire R_t :

$$R_t = \left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| / \left| \mu \Delta \mathbf{v} \right|$$

- Le nombre Q défini par :

$$Q = \left| \text{grad } p \right| / \left| \mu \Delta \mathbf{v} \right|$$

Nous utiliserons aussi le nombre de STROUHAL S :

$$S = \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| / \left| \text{div} (\rho \mathbf{v}) \right| = \left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| / \left| \rho (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} \right| = R_t / R_e$$

Nous considérons donc dans la suite un poreux rigide saturé par un fluide. Et nous allons étudier successivement l'écoulement permanent lent d'un fluide incompressible (partie 2), l'apparition des non-linéarités (partie 3), l'écoulement permanent lent d'un fluide compressible (partie 4), et enfin l'acoustique d'un fluide incompressible (partie 5). Pour changer, nous adopterons ici le point de vue macroscopique. Tous les nombres adimensionnels seront donc évalués au moyen de la longueur caractéristique L .

Rappelons que les indices x et y désignent la variable de dérivation.

2 ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE: LOI DE DARCY

La première étude de passage micro-macro permettant de déduire la loi de DARCY se trouve en [ENE et SANCHEZ-PALENCIA, 1975]. La présentation ci-dessous est tirée de [AURIAULT, 1983, 1987, 1990, 1991].

2.1 Description locale

L'écoulement étant permanent, R_t et S sont nuls. D'autre part les mouvements sont supposés lents : le nombre de REYNOLDS local est petit si bien que les non-linéarités n'apparaissent pas à l'échelle macroscopique, du moins au premier ordre d'approximation. Pour cela il suffit de considérer :

$$Re_l = O\left(\frac{\rho v l}{\mu}\right) = O(\varepsilon) \text{ soit } Re_L = O\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right) = O(1)$$

Ainsi les termes prépondérants dans l'équation de NAVIER-STOKES sont le terme visqueux et le terme de pression. Evaluons maintenant le rapport Q_L entre ces deux quantités. Dans un essai de filtration, l'écoulement est forcé par un gradient macroscopique de pression :

$$\text{grad } p = O\left(\frac{p}{L}\right)$$

Dans le même temps v varie à l'intérieur des pores de dimension caractéristique l :

$$\mu \Delta v = O\left(\frac{\mu v}{l^2}\right)$$

Il s'en suit que :

$$\frac{p}{L} = O\left(\frac{\mu v}{l^2}\right)$$

Le nombre sans dimension Q_L est donc :

$$Q_L = O\left(\frac{p L^2}{L \mu v}\right) = O(\varepsilon^{-2})$$

Les équations décrivant la situation locale s'écrivent alors formellement :

- Equation de la dynamique :

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{grad} p = \varepsilon^2 \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \quad (5)$$

- Du fait de l'incompressibilité, le bilan de masse se réduit à :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

- La condition d'adhérence :

$$\mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

- Enfin l'équation d'état devient :

$$\rho = \text{constante.}$$

2.2 Loi de DARCY

Ayant adopté le point de vue macroscopique, les inconnues \mathbf{v} et p sont recherchées sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (8)$$

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon p^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 p^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

avec $\mathbf{y} = \varepsilon^{-1} \mathbf{x}$, $\mathbf{v}^{(i)}$ et $p^{(i)}$ Ω -périodiques en \mathbf{y} .

Introduisons ces développements dans le système (5, 6, 7). Notant que les dérivées qui apparaissent dans ce système doivent être considérées comme étant prises par rapport à \mathbf{x} (point de vue macroscopique), et que du fait de la double échelle l'opérateur dérivée devient :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}$$

nous obtenons, en identifiant les puissances de ε :

$$\mu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} - \text{grad}_x p^{(0)} - \text{grad}_y p^{(1)} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{div}_y \mathbf{v}^{(0)} &= 0, \\ \text{div}_y \mathbf{v}^{(1)} + \text{div}_x \mathbf{v}^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)} &= 0, \\ \mathbf{v}^{(1)} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

L'équation (9a) donne $p^{(0)} = p^{(0)}(\mathbf{x})$.

Ensuite, (9b) avec (10a) et (11a) représentent le problème fondamental à résoudre sur la période pour $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(1)}$ Ω -périodiques en y . Il montre que $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(1)}$ sont des fonctions linéaires de $\text{grad}_x p^{(0)}$ (pour plus de détails, voir ci-après). En particulier, la vitesse $\mathbf{v}^{(0)}$ s'écrit :

$$v_i^{(0)} = -k_{ij} \frac{dp^{(0)}}{dx_j}.$$

où le tenseur k est fonction de la variable y .

Considérons maintenant (10b). Il s'agit d'un bilan de volume local de $\mathbf{v}^{(1)}$ où $\text{div}_x \mathbf{v}^{(0)}$ apparaît comme un terme source. De plus $\mathbf{v}^{(1)}$ est W périodique et (11b) indique qu'il s'annule sur Γ . Le terme source $\text{div}_x \mathbf{v}^{(0)}$ doit vérifier une condition de compatibilité : sa moyenne de volume doit être nulle. Ceci se constate en intégrant (11b) sur Ω_F . Posant :

$$\langle * \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} * d\Omega$$

nous obtenons :

$$\langle \text{div}_x \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \text{div}_x \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle =$$

$$- |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} \operatorname{div}_y \mathbf{v}^{(1)} d\Omega = - |\Omega|^{-1} \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{N} dS = 0 \quad (12)$$

où \mathbf{N} est la normale unitaire à Γ , extérieure à Ω_F . Il est aisé de constater que ce résultat reste valable quand la périodicité est remplacée par une propriété de stationnarité, au moins comme condition nécessaire d'existence de $\mathbf{v}^{(1)}$.

Finalement nous avons :

$$\operatorname{div}_x \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \operatorname{grad}_x p^{(0)}, \quad \mathbf{K} = \langle \mathbf{k} \rangle, \quad (13)$$

qui représente un bilan macroscopique de volume, mais aussi un bilan de quantités de mouvement. (13b) est la loi de DARCY (à la condition que $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ soit un flux, c.-à-d. une moyenne de surface, voir ci-après).

Il faut remarquer que la périodicité locale des inconnues (qui est une conséquence directe de l'homogénéisabilité) est à la base du résultat. Si nous l'abandonnons, (12) ne tient plus et (13) ne peut plus être obtenu. Pour un milieu de structure aléatoire, localement stationnaire, Ω est le volume élémentaire représentatif et les raisonnements conduisant à (12) sont toujours valables. Si alors nous admettons l'unicité du problème (9b), (10a) and (11a), (13) s'en suit.

2.3 Remarques sur le comportement macroscopique

a Sens physique des grandeurs macroscopiques

La pression $p^{(0)}$ ne soulève aucun problème, car du fait qu'elle est indépendante de la variable locale, sa définition macroscopique est celle introduite à l'échelle microscopique. Ce n'est pas *a priori* le cas pour $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$, défini par une moyenne de volume alors qu'une vitesse de DARCY est un flux c.-à-d. une moyenne de surface. En fait ici les deux moyennes sont égales. Cela découle du caractère solénoïdal de $\mathbf{v}^{(0)}$. Partons de l'identité :

$$\overline{\partial y_k (v_k y_i)} = \overline{\partial y_k} y_i + v_k \delta_{ik}$$

Intégrant sur Ω_F , avec le théorème de la divergence et la condition d'adhérence (11a), il vient :

$$\langle v_i \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\delta\Omega_F \cap \delta\Omega} v_k y_i N_k dS$$

où $\delta\Omega_F$ et $\delta\Omega$ sont les frontières de Ω_F et Ω , et N le vecteur unitaire normal extérieur à Ω_F . Soit L_i la longueur de la période suivant l'axe y_i et Σ_i la section droite de la période en $y_i = L_i$, voir figure 2. Du fait que $v_k y_i$ est Ω -périodique dans la direction y_j , $j \neq i$, et s'annule pour $y_i = 0$, il reste :

$$\langle v_i \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Sigma_{F_i}} v_i L_i dS = |\Sigma_i|^{-1} \int_{\Sigma_{F_i}} v_i dS$$

(non sommation sur i). $\langle v^{(0)} \rangle$ est bien un flux.

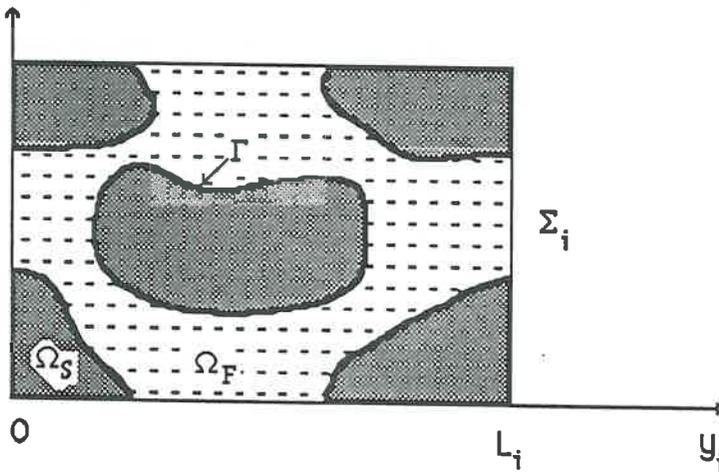


Figure 2 : Période Ω du milieu poreux, cas bidimensionnel.

b Structure de loi macroscopique

La structure de la loi de DARCY est très différente de celle des équations de NAVIER-STOKES du départ. Il s'agit toutefois toujours

du principe fondamental de la mécanique, ce qui se remarque plus aisément quand la loi est écrite sous la forme :

$$\text{grad}_x p^{(0)} = \mathbf{H} \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle, \quad \mathbf{H} = \mathbf{K}^{-1}$$

La valeur du nombre adimensionnel Q définie en 2.1 ou l'équation (5) donnent une estimation de $\mathbf{v}^{(0)}$ et donc de \mathbf{k} puis de \mathbf{K} :

$$|\mathbf{K}| = |\mathbf{k}| = O(l^2 \mu^{-1})$$

Cette estimation est très approximative, la géométrie des pores pouvant modifier la valeur de \mathbf{K} dans des proportions très importantes.

Enfin, en présence de gravité, il suffit de remplacer $\text{grad}_x p^{(0)}$ par $\text{grad}_x p^{(0)} - \rho \mathbf{g}$, où ρ est la masse volumique du fluide.

c Etude du problème fondamental

Pour étudier le problème aux limites (9b), (10a) et (11a) où les inconnues $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(1)}$ sont Ω -périodiques en \mathbf{y} , introduisons l'espace \mathcal{V} de HILBERT des vecteurs de divergence nulle, définis sur Ω_F , à valeur nulle sur Γ , Ω -périodiques et munis du produit scalaire :

$$(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v})_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega_F} \mu \boldsymbol{\alpha}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega$$

Multipliant les deux membres de (9)₂ par $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{V}$, il vient :

$$\int_{\Omega_F} \mu \boldsymbol{\alpha} \Delta \mathbf{v}^{(0)} d\Omega = \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\alpha} \text{grad}_x p^{(0)} d\Omega + \int_{\Omega_F} \boldsymbol{\alpha} \text{grad}_y p^{(1)} d\Omega$$

Compte tenu de ce que :

$$\boldsymbol{\alpha} \Delta \mathbf{v} = \text{div}(\boldsymbol{\alpha} \text{grad } \mathbf{v}) - \text{grad } \boldsymbol{\alpha} \text{grad } \mathbf{v},$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{V} : \int_{\Omega_F} \mu \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} d\Omega = - \int_{\Omega_F} \alpha_i \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} d\Omega \quad (14)$$

Réciproquement, il est possible de montrer [SANCHEZ-PALENCIA, 1980] que cette formulation est équivalente à (9b), (10a) et (11a). L'existence et l'unicité de la solution découlent ensuite du lemme de LAX-MILGRAM, [NECAS, 1967].

d Propriété de K

Le tenseur de perméabilité \mathbf{K} est symétrique et positif, quand les pores sont connexes dans les trois directions d'espace. Soit \mathbf{k}^p la vitesse $\mathbf{v}^{(0)}$ solution particulière de (14) correspondant à :

$$\text{grad}_{x_i} p^{(0)} = \delta_{ij}$$

Considérons la forme (14) avec d'une part $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{k}^q$ et $\alpha = \mathbf{k}^p$ et, d'autre part $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{k}^p$ et $\alpha = \mathbf{k}^q$. Il vient, compte tenu de la symétrie du produit scalaire :

$$\int_{\Omega_F} \mu \frac{\partial k_i^q}{\partial y_j} \frac{\partial k_i^p}{\partial y_j} d\Omega = - \int_{\Omega_F} k_j^q d\Omega = - \int_{\Omega_F} k_j^p d\Omega$$

Le tenseur \mathbf{K} est donc symétrique. Remarquons que cette symétrie découle des équations de conservation à l'échelle des pores.

Considérons maintenant la forme (14) avec $\alpha = \mathbf{v}^{(0)}$:

$$|\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} \mu \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} d\Omega = - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} v_i^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} d\Omega = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \quad (15)$$

Le premier membre est positif. Il en est de même du membre de droite et K est positif.

e Cohérence énergétique

Le premier membre de (15) représente la moyenne de la densité locale de dissipation. En effet :

$$\mu \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}^{(0)} = 2 \mu \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathfrak{D}_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}^{(0)})$$

où \mathfrak{D} est la vitesse de déformation. La symétrie de \mathfrak{D} permet d'écrire la formulation faible (14) sous la forme :

$$\forall \alpha \in \mathcal{V} : \int_{\Omega_F} 2 \mu \mathfrak{D}_{ij}(\alpha) \mathfrak{D}_{ij}(\mathbf{v}^{(0)}) \, d\Omega = - \int_{\Omega_F} \alpha_i \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \, d\Omega$$

et (15) devient :

$$|\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} 2 \mu \mathfrak{D}_{ij}(\mathbf{v}^{(0)}) \mathfrak{D}_{ij}(\mathbf{v}^{(0)}) \, d\Omega = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}$$

Ainsi la moyenne de la densité locale de dissipation égale la densité macroscopique de dissipation.

2.4 Situations non homogénéisables

Considérons maintenant des situations où $Q_L \neq O(\varepsilon^{-2})$, toute chose restant égale par ailleurs. Il suffit d'étudier les cas $Q_L = O(\varepsilon^{-1})$ et $Q_L = O(\varepsilon^{-3})$, les autres s'en déduisant immédiatement.

a $Q_L = O(\varepsilon^{-1})$

L'équation normalisée de NAVIER-STOKES s'écrit maintenant :

$$\varepsilon \mu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{grad} \, p = \varepsilon \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

$$\mu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{grad}_y p^{(0)} = 0 ,$$

(16)

$$\begin{aligned} \mu \Delta_y \mathbf{v}^{(1)} + \mu (\mathbf{div}_x \mathbf{grad}_y \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{div}_y \mathbf{grad}_x \mathbf{v}^{(0)}) \\ - \mathbf{grad}_x p^{(0)} - \mathbf{grad}_y p^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{div}_y \mathbf{v}^{(0)} = 0 ,$$

$$\mathbf{div}_x \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{div}_y \mathbf{v}^{(1)} = 0 ,$$

(17)

$$\mathbf{div}_x \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{div}_y \mathbf{v}^{(2)} = 0 ,$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = 0 ,$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = 0 ,$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = 0 ,$$

sur Γ .

(18)

Le système (16a) (17a) (18a), avec $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(0)}$ Ω -périodiques, représente un problème aux limites homogène. Il est aisé de montrer l'existence et l'unicité de la solution. Cela découle directement de l'étude menée en 2.3. On a manifestement :

$$\mathbf{v}^{(0)} = 0 , \quad p^{(0)} = p^{(0)} (\mathbf{x}) .$$

Le problème suivant concerne $\mathbf{v}^{(1)}$ et $p^{(1)}$ Ω -périodiques. Il s'écrit :

$$\mu \Delta_y \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{grad}_x p^{(0)} - \mathbf{grad}_y p^{(1)} = 0 ,$$

$$\mathbf{div}_y \mathbf{v}^{(1)} = 0 ,$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = 0 , \quad \text{sur } \Gamma .$$

C'est le problème aux limites (Le problème fondamental sur la cellule de base) étudié en 2.3, où $\mathbf{v}^{(0)}$ est remplacé par $\mathbf{v}^{(1)}$. Alors :

$$\mathbf{v}^{(1)} = -\mathbf{k} \operatorname{grad}_x p^{(0)} .$$

Finalement (17c) avec (18c) et la Ω périodicité donnent la condition de compatibilité :

$$\operatorname{div}_x \langle \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0 \quad \text{avec} \quad \langle \mathbf{v}^{(1)} \rangle = -\mathbf{K} \operatorname{grad}_x p^{(0)} .$$

Comme nous le voyons, il s'agit à nouveau d'une description macroscopique équivalente. Mais le premier terme non nul de \mathbf{v} est maintenant $\varepsilon \mathbf{v}^{(1)}$ si bien que la valeur de Q_L est *ipso facto* $O(\varepsilon^{-2})$. Une situation avec $Q_L = O(\varepsilon^{-1})$ n'existe pas dans la pratique et il est donc satisfaisant de constater qu'elle n'est pas homogénéisable.

$$\text{b } Q_L = O(\varepsilon^{-3})$$

L'équation normalisée de NAVIER-STOKES s'écrit maintenant :

$$\varepsilon^3 \mu \Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} p = \varepsilon^3 \rho (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v}$$

ce qui donne aux différents ordres :

$$\operatorname{grad}_y p^{(0)} = 0 ,$$

$$\operatorname{grad}_x p^{(0)} + \operatorname{grad}_y p^{(1)} = 0 , \quad (19)$$

$$\mu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} - \operatorname{grad}_x p^{(1)} - \operatorname{grad}_y p^{(2)} = 0$$

L'équation (19a) donne à nouveau $p^{(0)} = p^{(0)}(\mathbf{x})$. Mais (19b) avec $p^{(1)}$ Ω -périodique introduit la condition de compatibilité $\operatorname{grad}_x p^{(0)} = 0$. Par conséquent $p^{(0)}$ est indépendant de \mathbf{x} et (19b) conduit à $p^{(1)} = p^{(1)}(\mathbf{x})$. Finalement (19c) donne $\mathbf{v}^{(0)}$ sous la forme d'une fonction vectorielle linéaire de $\operatorname{grad}_x p^{(1)}$. Regroupant $p^{(0)}$ et $p^{(1)}$ en $p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}$ avec

$$\operatorname{grad}_x (p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}) = \varepsilon \operatorname{grad}_x p^{(1)} ,$$

valeur $O(\varepsilon^{-2})$ utilisée en 2.2. Une situation avec $Q_L = O(\varepsilon^{-3})$ peut exister dans la pratique mais elle n'est pas homogénéisable. Une description macroscopique intrinsèque n'existe pas. Rechercher une telle description macroscopique, par exemple au moyen du théorème de la moyenne, est certes possible mais cela conduirait à une "description macroscopique" dépendant directement des conditions aux limites sur les frontières macroscopiques du milieu. Ainsi la méthode des développements à échelles multiples peut être dite auto-consistante dans la mesure où elle ne donne un résultat que lorsque l'homogénéisation est possible.

3 APPARITION DES NON-LINEARITES INERTIELLES

L'apparition des non-linéarités dans la loi de DARCY se produit pour de faibles nombres de REYNOLDS locaux Re_l . On trouvera en [MEI et al, 1991] une étude menée avec $Re_l = O(\varepsilon^{0.5})$, et en [WODIE et al, 1991] une analyse englobant tous les petits Re_l tels que $O(\varepsilon) < Re_l < O(\varepsilon^{0.5})$. Nous reprenons ici le travail de [RASOLOARIJAONA, 1990] où $Re_l = O(\varepsilon)$, c.-à-d. que nous adoptons la normalisation utilisée en 2.2. Le fluide est toujours supposé incompressible.

3.1 Homogénéisation

La description locale normalisée s'écrit, cf. 2.1 :

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{grad} p = \varepsilon^2 \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} |_{\Gamma} = 0$$

Afin d'étudier l'apparition des non-linéarités, nous sommes amenés à poursuivre aux ordres supérieurs les développements de 2.2.

Introduisant dans les équations ci-dessus les développements de v et p , nous obtenons successivement :

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y_i} = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial y_k \partial y_k} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

$$\mu \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_k} \right) - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial y_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = \rho v_k^{(0)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_k}$$

$$\mu \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial y_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_k} \right) \right) - \frac{\partial p^{(3)}}{\partial y_i} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} =$$

$$\rho \left(v_k^{(1)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_k} + v_k^{(0)} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_k} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_k} \right) \right)$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0$$

(21)

$$\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_i^{(3)}}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_i} = 0$$

$$v^{(0)} = 0 ,$$

$$v^{(1)} = 0 ,$$

$$v^{(2)} = 0 ,$$

sur Γ

(22)

linéaires de $\text{grad}_x p^{(0)}$:

$$v_i^{(0)} = - k_{ij} \frac{dp^{(0)}}{dx_j}$$

$$p^{(1)} = - a_i \frac{dp^{(0)}}{dx_i} + \bar{p}^1(x)$$

où le tenseur k vérifie en particulier :

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial y_i} = 0$$

$p^{(1)}$ étant défini à une constante près, la moyenne de volume du coefficient a peut être prise nulle.

L'existence de $v^{(1)}$ conduit alors à :

$$\text{div}_x \langle v^{(0)} \rangle = 0, \quad \langle v^{(0)} \rangle = - K \text{grad}_x p^{(0)}, \quad K = \langle k \rangle \quad (23)$$

Le problème suivant est donné par (20c) avec (21b) et (22b). Les inconnues $v^{(1)}$ et $p^{(2)}$ apparaissent comme des fonctions

linéaires de $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j}$, $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k}$, si bien que :

$$v_i^{(1)} = - k_{ij} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j} - l_{ijk} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} - m_{ijk} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k} - n_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}$$

$$p^{(2)} = - a_i \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_i} - b_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} - c_{ij} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} - d_i \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \bar{p}^{(2)}(x)$$

où nous retrouvons les tenseur k et a introduits ci-dessus. $p^{(2)}$ étant défini à une constante près, les moyenne de volume des coefficients a , b , c et d peuvent être prises nulles. L'existence de $v^{(2)}$ implique, par intégration de (21c) :

$$\text{div}_x \langle v^{(1)} \rangle = 0. \quad (24)$$

Enfin (20d) avec (21c) et (22c) donnent $v^{(2)}$ et $p^{(3)}$ comme des fonctions linéaires de :

$$\frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j \partial x_k},$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_1}, \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_k \partial x_1}, \frac{\partial^3 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_1}.$$

Nous n'avons besoin que de l'expression de $v^{(2)}$:

$$v_i^{(2)} = - n'_{ij} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j} - k_{ij} \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial x_j} - r_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} - l'_{ijk} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j} \right)$$

$$- m'_{ijk} \frac{\partial^2 \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j \partial x_k} - q_{ijk} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} - q'_{ijk} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$- s_{ijkl} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_l} - s'_{ijkl} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_k \partial x_l} - s''_{ijkl} \frac{\partial^3 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}$$

Nous retrouvons à nouveau dans cette expression les tenseurs k et a définis plus haut.

L'existence de $v^{(3)}$ implique, par intégration de (21d) :

$$\text{div}_x < v^{(2)} > = 0. \quad (25)$$

En fin de compte on remarquera que l'ordre n introduit à l'échelle macroscopique des dérivées d'ordre n de la pression dans la loi de DARCY, et des dérivées d'ordre $n+1$ dans les bilans de volume, cf. (24) et (25). Les termes correcteurs donnés par ces deux dernières équations relèvent d'une mécanique non locale. Ils sont non négligeables quand la séparation d'échelle est mauvaise.

3.2 Milieu macroscopiquement isotrope et homogène

Dans le cas d'isotropie macroscopique, tous les tenseurs effectifs d'ordre impaire sont nuls. Le milieu étant homogène, les tenseurs d'ordre paire, isotropes, sont indépendants de X . Ainsi :

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -K \operatorname{grad}_x p^{(0)}$$

$$\langle p^{(1)} \rangle = n \bar{p}^1(x)$$

et (23) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \quad (26)$$

A l'ordre suivant, compte tenu de l'homogénéité, les expressions de $\mathbf{v}^{(1)}$ et $p^{(2)}$ se réduisent à :

$$v_i^{(1)} = -k_{ij} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j} - l_{ijk} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} - m_{ijk} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$p^{(2)} = -a_i \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_i} - b_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} - c_{ij} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} + \bar{p}^{(2)}(x)$$

L'équation (24) devient alors avec l'isotropie :

$$\operatorname{div}_x \langle \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{v}^{(1)} \rangle = -K \operatorname{grad}_x \bar{p}^{(1)}$$

$$\text{et } \langle p^{(2)} \rangle = n \bar{p}^2(x).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}^{(1)}}{\partial x_k \partial x_k} = 0$$

Enfin l'homogénéité simplifie l'expression de $\mathbf{v}^{(2)}$ en :

$$v_i^{(2)} = -k_{ij} \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial x_j} - l'_{ijk} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j} \right)$$

$$- m'_{ijk} \frac{\partial^2 \bar{p}^{(1)}}{\partial x_j \partial x_k} - q_{ijk} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} - q'_{ijk} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$- s_{ijkl} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_l} - s'_{ijkl} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_k \partial x_l} - s''_{ijkl} \frac{\partial^3 p^{(0)}}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}$$

L'isotropie annule les moyennes de l' , m' , q et q' . Et tout tenseur du quatrième ordre isotrope s'écrit :

$$\langle s_{ijkl} \rangle = \lambda I_{ij} I_{kl} + \alpha (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}) + \beta (I_{ik} I_{jl} - I_{il} I_{jk})$$

En tenant compte de (26), il vient :

$$\langle v_i^{(2)} \rangle = -K \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial x_i} - (\lambda + 2\alpha) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} - 2\alpha' \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k}$$

En récapitulant les résultats obtenus pour les différents ordres de la vitesse, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \langle v_i \rangle &= \langle v_i^{(0)} \rangle + \varepsilon \langle v_i^{(1)} \rangle + \varepsilon^2 \langle v_i^{(2)} \rangle + O(\varepsilon^3) \\ &= -K \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \varepsilon K \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial x_i} - \varepsilon^2 K \frac{\partial \bar{p}^{(2)}}{\partial x_i} \\ &\quad - \varepsilon^2 (\lambda + 2\alpha) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} - \varepsilon^2 2\alpha' \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle p^{(0)} \rangle + \varepsilon \langle p^{(1)} \rangle + \varepsilon^2 \langle p^{(2)} \rangle + O(\varepsilon^3) \\ &= n p^{(0)} + \varepsilon n \bar{p}^{(1)} + \varepsilon^2 n \bar{p}^{(2)} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \langle v_i \rangle \langle v_k \rangle \langle v_k \rangle &= -K^3 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} + O(\varepsilon) \\ \langle v_k \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} &= K^2 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$p = n^{-1} \langle p \rangle$$

nous obtenons finalement :

$$\langle v_i \rangle (1 - \varepsilon^2 K^{-3} (\lambda + 2\alpha) \langle v_k \rangle \langle v_k \rangle) + 2 \varepsilon^2 K^{-2} \alpha' \langle v_k \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} = -K \frac{\partial p}{\partial x_i} + O(\varepsilon^3) \quad (27)$$

On montre comme en [MEI et al, 1991] que $\lambda + 2\alpha \leq 0$.

3.3 Conclusion

Dans le cas d'un milieu isotrope et homogène et d'un $Re_l = O(\varepsilon)$, la description macroscopique (27) introduit deux termes correctifs à la loi de DARCY. Le premier est un terme de vitesse au cube, et non au carré comme il est affirmé un peu partout, cf. par exemple [SCHEIDEGGER A.E., 1974]. Le deuxième terme correctif est un terme convectif classique. Il disparaît dans les problèmes à une dimension. Il n'apparaît pas pour $Re_l = O(\varepsilon^{0,5})$, [MEI et al, 1991], et pour $O(\varepsilon) < Re_l < O(\varepsilon^{0,5})$, [WODIE et al, 1991]. Dans le cas général anisotrope ou non homogène, le résultat ne semble pas pouvoir se mettre sous la forme d'une loi de DARCY généralisée simple.

4 FLUIDE TRES COMPRESSIBLE [AURIAULT et al, 1990]

Les équations décrivant l'écoulement d'un fluide compressible dans un poreux s'écrivent :

- Bilan des quantités de mouvement :

$$\mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + 2\mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{grad} p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) \quad (1)$$

- Bilan de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

- Condition d'adhérence :

$$v|_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

- Equation d'état du fluide supposé barotrope :

$$f(p, \rho) = 0 \quad (4)$$

On consultera la figure 2 pour les notations.

4.1 - Estimations

Les équations (1) et (2) introduisent trois nombres sans dimension indépendants :

- Le nombre de REYNOLDS R_e :

$$R_e = |\rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}| / |\mu \Delta \mathbf{v}|$$

- Le nombre de REYNOLDS transitoire R_t :

$$R_t = \left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| / |\mu \Delta \mathbf{v}|$$

- Le nombre Q défini par :

$$Q = |\text{grad } p| / |\mu \Delta \mathbf{v}|$$

Nous aurons besoin du nombre de STROUHAL S :

$$S = \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| / |\text{div}(\rho \mathbf{v})| = \left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| / |\rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}| = R_t / R_e$$

Ces nombres sans dimension sont sujet à certaines restrictions pour qu'il existe une description macroscopique équivalente. Ces restrictions qui seront analysées au paragraphe 4.3. s'écrivent en utilisant l pour normaliser:

$$S_l = \omega l / \nu \leq O(\varepsilon), \quad R_{el} = \rho v l / \mu \leq O(1), \quad Q_l = pl / \mu v \leq O(\varepsilon^{-1}),$$

où ω est une fréquence angulaire caractéristique. Avec L , ces restrictions deviennent :

$$S_L = \omega L / \nu \leq O(1), \quad R_{eL} = \rho v L / \mu \leq O(\varepsilon^{-1}), \quad Q_L = pL / \mu v \leq O(\varepsilon^{-2}),$$

contrairement à l'acoustique d'un fluide dans un milieu poreux où un deuxième petit paramètre lié à la petite amplitude des ondes est introduit et permet de tels écoulements, cf. le paragraphe 5, les phénomènes transitoires ne peuvent être pris en compte ici dans les équations de NAVIER-STOKES. En fait de tels écoulements existent mais ils ne sont pas homogénéisables.

La dernière restriction qui porte sur Q a déjà été analysée plus haut.

Différentes situations homogénéisables dignes d'intérêt peuvent être distinguées :

- Ecoulement permanent : $R_t = 0$ et $S = 0$

Si $R_{el} = \rho v l / \mu \leq O(\epsilon)$, alors nous allons voir que l'écoulement macroscopique est décrit par la loi de DARCY classique.

Si $R_{el} = O(1)$, les non linéarités apparaissent à l'échelle macroscopique.

Dans les deux cas le bilan de volume macroscopique est non linéaire.

- Bilan de masse transitoire : $S_L = O(1)$

Si $R_{tl} = \rho \omega l^2 / \mu = O(\epsilon^2)$ et $R_{el} = O(\epsilon)$, alors $S_L = O(1)$. Le terme transitoire du bilan de volume sera pris en compte à l'échelle macroscopique. Cependant, comme $R_{tl} = O(\epsilon^2)$, le terme transitoire de l'équation du mouvement est négligé. L'écoulement sera décrit macroscopiquement par la loi classique de DARCY et le bilan de masse non linéaire contiendra un terme transitoire.

Enfin si $R_{tl} = O(\epsilon)$ et $R_{el} = O(1)$, c.-à-d. $S_L = O(1)$, les non-linéarités apparaissent dans la loi d'écoulement.

4.2 Ecoulement permanent

Avec les estimations ci-dessus et un nombre de REYNOLDS macroscopique $O(1)$, le système d'équations (1-4) s'écrit formellement :

$$\epsilon^2 \mu \Delta v + \epsilon^2 (\lambda + 2\mu) \text{grad div } v - \text{grad } p = \rho \epsilon^2 (v \text{ grad }) v \quad (5)$$

$$\text{div}(\rho v) = 0 \quad (6)$$

$$v|_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

$$f(p, \rho) = 0$$

(8)

où nous avons utilisé L pour adimensionaliser les longueurs (ce qui revient à choisir le point de vue macroscopique).

Introduisons le double système de coordonnées x_i et $y_i = \varepsilon^{-1}x_i$ et les développements suivants :

$$v(x, y) = v^{(0)}(x, y) + \varepsilon v^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 v^{(2)}(x, y) + \dots$$

$$p(x, y) = p^{(0)}(x, y) + \varepsilon p^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, y) + \dots$$

$$\rho(x, y) = \rho^{(0)}(x, y) + \varepsilon \rho^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 \rho^{(2)}(x, y) + \dots$$

où $v^{(i)}$, $p^{(i)}$, $\rho^{(i)}$ sont des fonctions de x_i et y_i , Ω -périodiques en y .

L'équation (5) donne aux ordres $O(\varepsilon^{-1})$ et $O(1)$:

$$\text{grad}_y p^{(0)} = 0,$$

$$\mu \Delta_y v^{(0)} + (\lambda + \mu) \text{grad}_y \text{div}_y v^{(0)} - \text{grad}_x p^{(0)} - \text{grad}_y p^{(1)} = 0 \quad (9)$$

De la même façon (6), (7) et (8) donnent :

$$\text{div}_y (\rho^{(0)} v^{(0)}) = 0,$$

(10)

$$\text{div}_y (\rho^{(0)} v^{(1)} + \rho^{(1)} v^{(0)}) + \text{div}_x (\rho^{(0)} v^{(0)}) = 0,$$

$$v^{(0)} = 0,$$

$$v^{(1)} = 0, \quad \text{sur } \Gamma$$

(11)

$$f(\rho^{(0)}, p^{(0)}) = 0$$

(12)

$$p^{(1)} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^{(0)} + \rho^{(1)} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^{(0)} = 0$$

où les indices y et x indiquent la variable de dérivation.

Avec (9a) et (12a) il vient :

$$\rho^{(1)} = \rho^{(1)}(x) \quad p^{(1)} = p^{(1)}(x)$$

$$\operatorname{div}_y \mathbf{v}^{(0)} = 0$$

Ainsi le problème aux limites pour $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(1)}$ s'écrit à partir de (9b), (10a) et (11a) sous la forme :

$$\begin{aligned} \mu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} - \operatorname{grad}_x p^{(0)} - \operatorname{grad}_y p^{(1)} &= 0, \\ \operatorname{div}_y \mathbf{v}^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{v}^{(0)} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

où $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(1)}$ sont Ω -périodiques.

Le système (13) est le système classique déjà obtenu pour l'écoulement d'un fluide incompressible dans un poreux. La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)} &= -\mathbf{k}(y) \operatorname{grad}_x p^{(0)}, \\ p^{(1)} &= \tau(y) \operatorname{grad}_x p^{(0)} + \bar{p}^{(1)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où \mathbf{k} (déjà défini plus haut) et τ sont un tenseur du second ordre et un vecteur. $\bar{p}^{(1)}(\mathbf{x})$ est une fonction arbitraire de \mathbf{x} à ce stade.

La description macroscopique s'obtient à partir de (10b) que nous écrivons sous la forme :

$$\operatorname{div}_y (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}) = -\operatorname{div}_x (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) \quad (14)$$

Cette équation représente le bilan de la quantité périodique $\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}$, avec le terme source $-\operatorname{div}_x (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)})$. L'existence de $\mathbf{v}^{(1)}$ et $\rho^{(1)}$ requière que la moyenne de volume de la source soit nulle. Il vient :

$$\langle \operatorname{div}_x (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) \rangle = 0$$

où rappelons le :

$$\langle * \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} * d\Omega$$

Finalement le comportement macroscopique est donné par :

$$\operatorname{div}_x (\rho^{(0)} \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle) = 0 \quad (15)$$

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \text{grad}_x p^{(0)}, \quad \mathbf{K} = \langle \mathbf{k} \rangle \quad (16)$$

$$f(\rho^{(0)}, p^{(0)}) = 0 \quad (17)$$

Ainsi l'écoulement est gouverné par la loi classique de DARCY. Les non-linéarités dues à la compressibilité du fluide apparaissent à l'échelle macroscopique dans le bilan de masse (15).

Quand l'équation d'état est linéaire, c.-à-d. quand elle s'écrit $\rho = A p$, où A est une constante, (15) devient :

$$\text{div}_x (\mathbf{K} \text{grad}_x p^{(0)2}) = 0.$$

Si de plus le milieu poreux est macroscopiquement isotrope et homogène, cette équation se simplifie en :

$$\Delta_x p^{(0)2} = 0$$

Enfin, envisageons un nombre de REYNOLDS local $O(1)$, toutes choses restant égales par ailleurs. La nouvelle normalisation de l'équation (1) s'écrit :

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \mathbf{v} + \varepsilon^2 (\lambda + 2\mu) \text{grad} \text{div} \mathbf{v} - \text{grad} p = \rho \varepsilon (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v}$$

Il est aisé de voir que rien n'est changé excepté l'équation donnant $\mathbf{v}^{(0)}$ et $p^{(1)}$:

$$\mu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} - \text{grad}_x p^{(0)} - \text{grad}_y p^{(1)} = \rho^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \text{grad}_y) \mathbf{v}^{(0)}$$

En conséquence $\mathbf{v}^{(0)}$ apparaît comme une fonction vectorielle non linéaire de $\text{grad}_x p^{(0)}$ et $\rho^{(0)}$. La loi d'écoulement est non linéaire.

4.3 Bilan de masse transitoire

Suivant 4.1 nous adoptons les valeurs suivantes pour les nombres sans dimension :

$$S_L = O(1), \quad R_{iL} = O(1), \quad Re_L = O(1).$$

Le système (1-4) s'écrit donc maintenant formellement sous la forme :

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \mathbf{v} + \varepsilon^2 (\lambda + 2\mu) \text{grad} \text{div} \mathbf{v} - \text{grad} p = \rho \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} \right)$$

$$\mathbf{v} |_{\Gamma} = 0$$

$$f(\mathbf{p}, \rho) = 0$$

L'introduction des développements asymptotiques de \mathbf{v} , \mathbf{p} et ρ conduit successivement à :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_y \mathbf{p}^{(0)} &= 0, \\ \mu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} + (\lambda + \mu) \mathbf{grad}_y \operatorname{div}_y \mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{grad}_x \mathbf{p}^{(0)} - \mathbf{grad}_y \mathbf{p}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\operatorname{div}_y (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div}_y (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} + \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}) + \operatorname{div}_x (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0)} &= 0, \\ \mathbf{v}^{(1)} &= 0, \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \tag{20}$$

$$f(\rho^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}) = 0 \tag{21}$$

$$\mathbf{p}^{(1)} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right)^{(0)} + \rho^{(1)} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^{(0)} = 0$$

Nous obtenons donc les mêmes résultats que ci-dessus, avec maintenant une dépendance par rapport au temps :

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \quad \rho^{(0)} = \rho^{(0)}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div}_y \mathbf{v}^{(0)} = 0$$

Le problème aux limites pour $\mathbf{v}^{(0)}$ et $\mathbf{p}^{(1)}$ est celui obtenu pour un fluide incompressible. Donc :

$$\mathbf{v}^{(0)} = -\mathbf{k} \operatorname{grad}_x \mathbf{p}^{(0)}$$

L'équation (19b) comporte cependant le terme supplémentaire $\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}$ dans le terme source. La condition de compatibilité correspondante devient alors :

$$n \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \text{div}_x (\rho^{(0)} \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle) = 0 \quad (22)$$

où n est la porosité, $n = |\Omega_F| / |\Omega|$

Ainsi le comportement macroscopique est donné par :

$$n \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \text{div}_x (\rho^{(0)} \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle) = 0$$

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \text{grad}_x p^{(0)}, \quad f(\rho^{(0)}, p^{(0)}) = 0$$

On retrouve là un résultat classique [BEAR, 1972, p. 198].

Comme en 4.2 un nombre de REYNOLDS macroscopique $O(\varepsilon^{-1})$ conduit à une loi d'écoulement non linéaire.

Il est maintenant temps de clarifier les restrictions introduites en 4.1 sur S , Re et Q . Considérons tout d'abord un nombre de SROUHAL macroscopique S_L d'ordre ε^{-1} . Le bilan de masse doit être réécrit formellement sous la forme :

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$$

Cette normalisation correspond à celle introduite par [KELLER, 1980]. Le terme du premier ordre (19a) devient :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \text{div}_y (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) = 0 \quad (23)$$

Cette équation peut être trouvée dans [KELLER, 1980, p.438]. Cependant, contrairement à (19a), l'équation (23) introduit une condition de compatibilité :

Le nombre de STROUHAL macroscopique est donc réduit à $O(1)$! Nous en concluons que les écoulements caractérisés par un nombre de STROUHAL S_L ordre de ε^{-1} ne sont pas homogénéisables. Ce résultat s'étend aisément aux nombres de STROUHAL supérieurs.

Un nombre de REYNOLDS macroscopique d'ordre ε^{-2} conduit aussi à une normalisation qui a pour effet de le réduire d'un ordre de grandeur. Pour simplifier considérons un écoulement permanent. (9a) s'écrit maintenant :

$$-\text{grad}_y p^{(0)} = \rho^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \text{grad}_y) \mathbf{v}^{(0)}$$

Cette équation donne le problème aux limites pour $\mathbf{v}^{(0)}$, $p^{(0)}$ et $\rho^{(0)}$ quand on la complète par (10a), (11a) et (12a) :

$$\text{div}_y (\rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)}) = 0, \quad \mathbf{v}^{(0)} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad f(\rho^{(0)}, p^{(0)}) = 0$$

Si nous supposons la solution unique, celle-ci prend la forme suivante :

$$\mathbf{v}^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = p^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \rho^{(0)} = \rho^{(0)}(\mathbf{x}).$$

Le nombre de REYNOLDS est donc réduit. Un écoulement avec un REYNOLDS macroscopique d'ordre ε^{-2} (ou plus grand) n'est pas homogénéisable.

Enfin un Q_L d'un ordre différent de ε^{-2} sera automatiquement augmenté ou réduit à l'ordre ε^{-2} par annulation des premiers termes appropriés dans les développements asymptotiques. Un écoulement avec un $Q_L \neq O(\varepsilon^{-2})$ n'est pas homogénéisable.

5 ACOUSTIQUE D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE DANS UN POREUX RIGIDE [LEVY, 1979, AURIAULT, 1980]

L'étude du comportement acoustique d'un fluide dans une matrice poreuse rigide peut paraître à première vue purement académique puisque on ne voit guère d'application où le fluide puisse vibrer tandis que le squelette reste immobile. Il apparaîtra toutefois dans la suite que cette étude constitue la pierre angulaire de l'approche de l'acoustique des poreux saturés déformables.

Nous considérons donc une matrice poreuse rigide. Les notations sont celles utilisées jusqu'ici. La période tri-dimensionnelle (la cellule) est appelée Ω en variable locale y , où ses dimensions sont $O(L)$. Au niveau macroscopique, où la variable est x , la période est $\varepsilon\Omega$ et ses dimensions sont $O(l)$. La période est constituée d'une partie solide rigide Ω_S et de pores Ω_F . La frontière commune à Ω_S et Ω_F est notée Γ . Les pores sont saturés par un fluide incompressible de viscosité μ . Une telle période est à nouveau représentée sur la figure 2 ci-dessous dans le cas particulier d'un problème à deux dimensions.

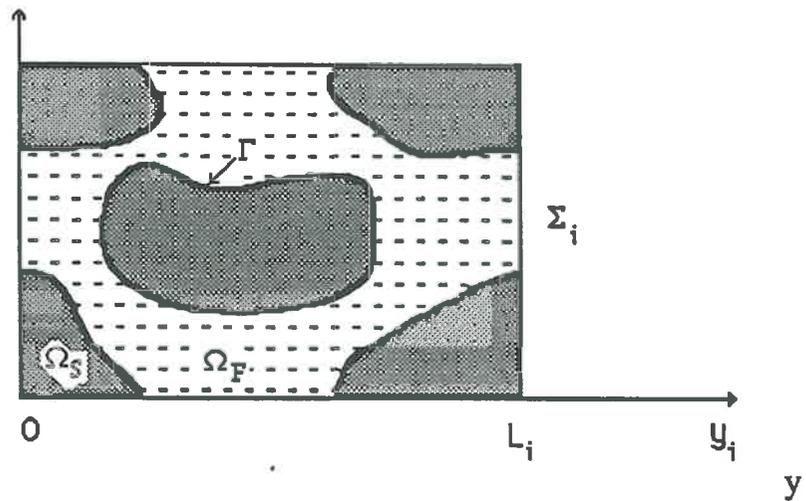


Fig. 2
Cellule d'un poreux périodique (cas 2D)

5.1 Description locale et estimations

La description locale est donnée par l'équation de NAVIER-STOKES, la condition d'incompressibilité et la condition d'adhérence sur Γ :

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{grad} p = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) \quad (1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

Le bilan des quantités de mouvement (1) introduit trois nombres sans dimension. Et la description macroscopique dépend bien

Comme nous avons en vue une sollicitation acoustique, les perturbations sont petites et il en est de même du nombre de REYNOLDS local. Nous le prenons $O(\epsilon)$:

$$Re_l = \left| \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \right| / \left| \mu \Delta \mathbf{v} \right| = O(\epsilon)$$

L'acoustique fait intervenir le terme inertiel transitoire à l'échelle locale. Le nombre de REYNOLDS transitoire local est donc $O(1)$:

$$Rt_l = \left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| / \left| \mu \Delta \mathbf{v} \right| = O(1)$$

Ce nombre peut s'exprimer de différentes façons :

$$Rt_l = \frac{\rho_1 l^2 \omega}{\mu} = \left(\frac{l}{\lambda_b} \right)^2 = (\omega \tau_d)^2$$

où :

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{\mu}{\omega \rho_1}}$$

est l'épaisseur de la couche limite qui apparaît le long de l'interface fluide-solide Γ , et :

$$\tau_d = l \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu \omega}}$$

est le temps mis par l'onde diffusive de cisaillement pour traverser la période. Un nombre de REYNOLDS transitoire local $O(1)$ correspond à une épaisseur de couche limite du même ordre de grandeur que la taille des pores et à une vibration du même ordre de grandeur que le temps mis par l'onde diffusive de cisaillement pour traverser la période.

Enfin l'estimation faite au paragraphe 2 pour le nombre Q est toujours valable :

$$Q_l = \left| \text{grad } p \right| / \left| \mu \Delta \mathbf{v} \right| = \frac{pl}{\mu v} = O(\epsilon^{-2})$$

Cette valeur de Q_l est comme dans les autres situations étudiées jusqu'à maintenant la seule qui conduise à une description macroscopique.

Ainsi en adoptant le point de vue microscopique, (1) s'écrit formellement :

$$\mu \Delta v - \varepsilon^{-1} \text{grad } p = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon (v \text{ grad }) v \right) \quad (4)$$

5.2 Comportement macroscopique

Nous cherchons v et p sous la forme :

$$v(x, y) = v^{(0)}(x, y) + \varepsilon v^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 v^{(2)}(x, y) + \dots$$

$$p(x, y) = p^{(0)}(x, y) + \varepsilon p^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, y) + \dots$$

$$x = \varepsilon y, \quad p^{(i)} \text{ et } v^{(i)} \text{ } \Omega\text{-périodiques.}$$

En reportant ces développements dans (2), (3) et (4) nous obtenons pour les ordres successifs :

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_i} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{-----} \\ v^{(0)} = 0, \\ v^{(1)} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \quad (6)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y_i} = 0 \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial y_i \partial y_i} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i}$$

Une suite de problèmes aux limites sont ainsi définis qui permettent d'obtenir les termes successifs $p^{(i)}$ et $v^{(i)}$.

Le premier problème est constitué par (7a) et donne $p^{(0)}$ sous la forme :

pore.

Le deuxième problème à résoudre représente le problème fondamental et concerne les inconnues $p^{(1)}$ et $v^{(0)}$. $p^{(0)}$ est considéré à ce stade comme une fonction de x connue. Avec (5a), (6a) and (7b) il vient :

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_i} = 0$$

$$v^{(0)} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial y_i \partial y_i} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i}$$

où $p^{(1)}$ et $v^{(0)}$ sont Ω -périodiques.

Il est commode d'étudier ce problème dans l'espace de FOURIER. Si ω est la fréquence, (8c) peut être écrite sous la forme :

$$\rho i \omega v_i^{(0)} = \mu \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial y_i \partial y_i} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i} \quad (9)$$

Le problème (8a,b) et (9) est linéaire. L'existence et l'unicité de $p^{(1)}$ et $v^{(0)}$ sont étudiés ci-dessous en 5.3b. $v^{(0)}$ and $p^{(1)}$ sont des fonctions linéaires de $\text{grad}_x p^{(0)}$. Dans ce qui suit, nous n'avons besoin que de $v^{(0)}$:

$$v_i^{(0)} = -k_{ij}(y, \omega) \frac{dp^{(0)}}{dx_j} \quad (10)$$

Les composantes k_{ij} sont ici fonctions de ω et complexes en raison du terme inertiel contenu dans (9). La viscosité μ et la masse volumique ρ sont prises en considération dans k mais la séparation entre les effets visqueux et inertiels dans la description macroscopique se révèle très ardue (cf. 5.3.b).

Recherchons maintenant cette description macroscopique. Elle est obtenue à partir de (5b) et (6b) :

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} = 0$$

$$v^{(1)} = 0, \quad \text{sur } \Gamma$$

où $v^{(1)}$ est Ω -périodique. Comme nous l'avons déjà vu à différentes reprises, ce bilan de volume implique une équation de compatibilité :

$$\left\langle \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} \right\rangle = 0$$

D'où il vient :

$$\frac{\partial \langle v_i^{(0)} \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

avec :

$$\langle v_i^{(0)} \rangle = -K_{ij}(y, \omega) \frac{dp^{(0)}}{dx_j} \quad (12)$$

$$K = \langle k \rangle.$$

Le système (11-12) représente la description macroscopique recherchée. (12) est une loi de DARCY généralisée.

5.3 Etude de la description macroscopique

Nous nous limitons ici aux faits principaux. Le lecteur se réfèrera à [AURIAULT, 1980; AVALLET, 1981; BORNE, 1983 et AURIAULT et al, 1985] pour plus de détails.

a Le sens physique des grandeurs macroscopiques $p^{(0)}$ et $\langle v^{(0)} \rangle$ s'étudie comme en 2.3a. Nous n'y revenons pas ici.

b Consistance énergétique.

Tout d'abord, n désignant la porosité, et H l'inverse de K , $H = H_1 + i H_2 = K^{-1}$, réécrivons la loi de DARCY généralisée sous la forme :

$$\frac{dnp^{(0)}}{dx_j} = n H_{1ij} \langle v_i^{(0)} \rangle + n H_{2ij} \omega^{-1} \langle \dot{v}_i^{(0)} \rangle \quad (13)$$

rapport au temps à fréquence constante de la vitesse. La relation (13) est une loi de DARCY réelle à fréquence constante. Elle est maintenant écrite sous la forme d'un bilan de quantité de mouvement. Elle introduit un terme dissipatif $nH_1 \langle v^{(0)} \rangle$ et un terme inertiel $nH_2 \omega^{-1} \langle \dot{v}^{(0)} \rangle$.

Cherchons maintenant une forme variationnelle équivalente au système (8a-b - 9). Soit \mathcal{W} l'espace des vecteurs de divergence nulle, Ω -périodiques et à valeur complexe, définis sur Ω_1 , s'annulant sur Γ , et munis du produit scalaire :

$$(\alpha, \beta)_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega_F} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} \frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial y_j} + \alpha_i \tilde{\beta}_i \right) d\Omega$$

où $\tilde{\beta}$ est le complexe conjugué de β . Alors la formulation variationnelle équivalente s'écrit, en procédant comme en 2.3.c :

$$\forall \alpha \in \mathcal{W}, \quad \int_{\Omega_F} \left(\mu \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} \frac{\partial \tilde{\alpha}_i}{\partial y_j} + i \omega \rho v_i^{(0)} \tilde{\alpha}_i \right) d\Omega = \int_{\Omega_F} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \tilde{\alpha}_i d\Omega \quad (14)$$

Cette formulation assure l'existence et l'unicité de $v^{(0)}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder l'étude de la consistance énergétique. Il s'agit de montrer que les densités macroscopiques de dissipation visqueuse et d'énergie cinétique sont respectivement égales aux moyennes de volume des densités microscopiques de ces mêmes quantités. Prenons $\alpha = v^{(0)}$ réelle dans (14). Il vient pour le membre de droite :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} v_i^{(0)} d\Omega = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} |\Omega|^{-1} \langle v_i^{(0)} \rangle = |\Omega|^{-1} H_{ij} \langle v_i^{(0)} \rangle \langle v_j^{(0)} \rangle$$

Prenant les parties réelle et imaginaire de (14) ainsi transformé nous obtenons :

$$H_{1ij} \langle v_i^{(0)} \rangle \langle v_j^{(0)} \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} \mu \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} d\Omega \quad (15)$$

$$H_{2ij} \omega^{-1} \langle v_i^{(0)} \rangle \langle v_j^{(0)} \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} \rho v_i^{(0)} v_j^{(0)} d\Omega \quad (16)$$

Introduisant la vitesse de déformation \mathfrak{D} et utilisant (8a) le membre de droite de (15) peut être aisément transformé en :

$$|\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} \mu \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} d\Omega = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} 2 \mu \mathfrak{D}_{ij}(v^{(0)}) \mathfrak{D}_{ij}(v^{(0)}) d\Omega$$

Si bien que (15) devient :

$$H_{1ij} \langle v_i^{(0)} \rangle \langle v_j^{(0)} \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} 2 \mu \mathfrak{D}_{ij}(v^{(0)}) \mathfrak{D}_{ij}(v^{(0)}) d\Omega \quad (17)$$

(16) et (17) démontrent la consistance énergétique.

c Les tenseurs \mathbf{H} et \mathbf{K} sont symétriques. Considérons deux champs de vitesses réels v^p et v^q correspondant respectivement à $\langle v_i^p \rangle = \delta_{ip}$ et $\langle v_i^q \rangle = \delta_{iq}$, p et q étant donnés, $p \neq q$. Ecrivons la forme (14) successivement pour $v^{(0)} = v^p$, $\alpha = v^q$ puis pour $v^{(0)} = v^q$, $\alpha = v^p$. Nous obtenons :

$$\int_{\Omega_F} \left(\mu \frac{\partial v_i^q}{\partial y_j} \frac{\partial v_i^p}{\partial y_j} + i \omega \rho \langle v_i^q \rangle \langle v_j^p \rangle \right) d\Omega = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} |\Omega| \delta_{ip} = |\Omega| H_{pq}$$

et

$$\int_{\Omega_F} \left(\mu \frac{\partial v_i^p}{\partial y_j} \frac{\partial v_i^q}{\partial y_j} + i \omega \rho \langle v_i^p \rangle \langle v_j^q \rangle \right) d\Omega = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} |\Omega| \delta_{iq} = |\Omega| H_{qp}$$

La symétrie du produit scalaire des deux membres de gauche des deux relations ci-dessus implique l'égalité des membres de droite :

$$H_{pq} = H_{qp}$$

d Le terme inertiel de (9) tend vers zero avec la fréquence. La loi de DARCY généralisée tend alors vers la loi de DARCY classique :

e La densité inertielle $nH_2 \omega^{-1}$ introduite dans la loi de DARCY généralisée est de caractère tensoriel. Un effet de masse ajoutée est facile à mettre en évidence, particulièrement dans le cas isotrope. Nous partons de (16) avec $H_{2ij} = H_2 \delta_{ij}$ et nous considérons le champs des vitesse v^q introduit plus haut :

$$H_2 \omega^{-1} = \rho |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} v_i^q v_i^q d\Omega, \quad \langle v_i^q \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_F} v_i^q d\Omega = \delta_{iq}$$

L'inégalité de SCHWARZ appliquée à l'intégrale de la vitesse v^q conduit à:

$$|\Omega| = \left| \int_{\Omega_F} v^q d\Omega \right| \leq |\Omega_F|^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\Omega_F} v_i^q v_i^q d\Omega \right|^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi :

$$n H_2 \omega^{-1} \geq \rho$$

f Quand le milieu poreux est soumis à une sollicitation transitoire, la loi de Darcy généralisée (par exemple (13)) doit être remplacée par :

$$\text{grad}_x n p^{(0)} = \mathfrak{F}^{-1}(n H) * \langle v^{(0)} \rangle \quad (18)$$

où $\mathfrak{F}^{-1}(n H)$ est la transformée inverse de FOURIER de $n H$ et * désigne le produit de convolution. Ainsi la loi de DARCY généralisée en mouvement transitoire représente une dynamique héréditaire.

g Quand la périodicité est lentement variable, c.-à-d. dans le cas de quasi-périodicité, où la géométrie dépend de la variable macroscopique x , tous les résultats obtenus ci-dessus restent valables. Dans le processus d'homogénéisation x joue alors seulement le rôle d'un paramètre indépendant. Ainsi les coefficients macroscopiques K et H deviennent dépendants de x .

BIBLIOGRAPHIE

- AURIAULT J.-L. (1980)
 "Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a newtonian fluid". Int. J. Eng. Sc., vol. 18, pages 775-785.
- AURIAULT J.-L. (1983)
 "Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites" , J. Heat Mass Transfer, 26,6, pages 861 - 869.
- AURIAULT J.-L. (1983)
 "Homogenization : application to porous saturated media" dans "Two phase medium mechanics", Summer School, Gdansk, 5-9 Sept. 1983, Publications of the Technical University of Gdansk, pages 1-56.
- AURIAULT J.-L. (1986)
 "Mécanique des Milieux Poreux Saturés Déformables", Cours de 3ème cycle MMGE Grenoble, pages 1-71.
- AURIAULT J.-L. (1987)
 "Non saturated déformable porous media : quasi-statics", Transport in Porous Media, 2, 1, pages 45 - 64.
- AURIAULT J.-L. (1987)
 "Comportement des milieux poreux saturés", dans "Manuel de Rhéologie des Géomatériaux", Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pages 299-315.
- AURIAULT J.-L. (1990)
 "Behaviour of porous saturated deformable media" in "Geomaterials : constitutive equations and modelling" Ed. DARVE F., Elsevier Applied Science, London, Chap. 14, pages 311 - 328.
- AURIAULT J.-L. (1991)
 "Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible?", Int. J. Engng. Sci., 29, 7, pages 785-795.
- AURIAULT J.-L., BORNE L., CORDARY D. (1982)
 "Consolidation des remblais au moyen de textiles : étude par homogénéisation" , C.R. 2ème Congrès Int. des Géotextiles, Las Vegas, Août 1982, pages 31 - 36.
- AURIAULT J.-L. et SANCHEZ-PALENCIA E. (1977)
 "Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable", J. de Mécanique, 16, 4, pages 575-603.
- AURIAULT J.-L., BORNE L. CHAMBON R., (1985)
 "Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of DARCY", J.A.S.A., 77, pages 1641-1650.
- AURIAULT J.-L., BONNET G. (1985)
 "Dynamique des composites élastiques périodiques" , Arch. Mech. 27, 4, 5, pages 269 - 284.

- examples", Int. J. Engng. Sci., 25, 3, pages 307 - 323.
- AURIAULT J.-L., BONNET G., LEBAIGUE O. (1989)
 "Dynamics of two immiscible fluids flowing through deformable porous media", Transport in Porous Media, 4, pages 105-128.
- AURIAULT J.L., STRZELECKI T., BAUER J. et HE S. (1990)
 "Porous deformable media saturated by a very compressible fluid", Eur. J. Mech. A/ Solid, 9, 4, pages 373-392.
- AURIAULT J.-L. , BOUTIN C. (1991)
 "Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics: I Coupling effects", à paraître, T.I.P.M..
 "Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics: II Memory effects", sub judice.
- AURIAULT J.-L., ADLER P. (1991)
 "Taylor dispersion in porous media", sub judice.
- AVALLET C. (1981)
 "Comportement dynamique de milieux poreux saturés déformables", thèse, Grenoble le 16 Sept. 1981.
- BARRENBLOTT G.I., ZHELTOV Y.P., KOCHINA I.N. (1960)
 "Basic concepts in theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks", P.M.M., 24, 5, pages 852 - 864.
- BEAR J. (1972)
 "Dynamics of fluids in porous media", American Elsevier, NEW YORK
- BEDFORD A., DRUMHELLER D.S. (1983)
 "Recent advances. Théories of immiscible and structured mixtures" ,Int. J. Engng. Sci., 21,8, pages 863 - 960.
- BENSOUSSAN A, LIONS J.L., PAPANICOLAOU G. (1978)
 "Asymptotic analysis for Periodic Structures" , North - Holland Publishing Company, AMSTERDAM.
- BIOT M.A. (1941)
 "General theory of three-dimensional consolidation", J. Appl. Physics, 12, pages 155-164.
- BIOT M.A. (1955)
 "Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid", J. Appl. Physics, 26, pages 182-185.
- BIOT M.A. (1956)
 "Theory of propagation of élastic waves in a fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range." J.A.S.A., 28, 2, pages 168-178.
 "II Higher frequency range", J.A.S.A., 28, 2, pages 179-191.

- BIOT M.A. (1962)
 "Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media", JASA, 34, 9, pages 1254-1264.
- BORNE L. (1983)
 "Contribution à l'étude du comportement dynamique des milieux poreux saturés déformables. Etude de la loi de filtration dynamique", thèse, Grenoble le 29 Sept. 1983.
- BOUTIN C. (1987)
 "Dynamique des milieux poreux saturés déformables - Fonction de GREEN - Perméamètre dynamique", Thèse de doctorat, Grenoble.
- BOUTIN C., AURIAULT J.-L. (1990)
 "Dynamic behaviour of porous media saturated by a viscoelastic fluid. Application to bituminous concretes", Int. J. Engng. Sc., 28, 11, pages 1157-1181.
- BOUTIN C., AURIAULT J.-L. (1990)
 "Acoustics of newtonian fluid with large bubble concentration", sub judice.
- BRENNER H. (1980)
 "Dispersion resulting from flow through spacially periodic porous media" Philosophical transaction of the Royal Society of London, pages 81-133.
- de BUHAN P. (1986)
 "Approche Fondamentale du Calcul de la Rupture"
 Thèse de Doctorat d'Etat, PARIS VI, 24 Octobre 1986.
- de BUHAN P, SALENCON J. (1987)
 "Analyse de la stabilité des ouvrages en sols renforcés par une méthode d'homogénéisation" , Revue Française de Géotechnique, 41, pages 29 - 43.
- CAILLERIE D. (1981)
 "Homogénéisation d'un corps élastique renforcé par des fibres minces de grande rigidité réparties périodiquement" , C.R.A.S. Paris série II, t 292, 9 Février 1981, pages 477 - 480.
- CAILLERIE D. (1982)
 "Etude de quelques problèmes de perturbation en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique" , Thèse de Doctorat d'Etat Paris VI, 26 Avril 1982.
- CAILLERIE D. (1983)
 "Etude de la conduction stationnaire dans un domaine comportant une répartition périodique d'inclusions minces de grande conductivité" , R.A.I.R.O., Analyse numérique/Numerical Analysis, 17,2, pages 137 - 159.

Symposium on Nonlinear Mechanics, Villard-de-Lans, 28
Sept.- 1th Oct. 1987. Archives of Mechanics, 40, 5-6, pages
529-542, 1988.

CIORANESCU D., MURAT F. (1985)

"Un terme étrange venu d'ailleurs", Rapport n°82005,
Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie
Curie, Paris.

CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J. (1986)

"Reinforced and Honeycomb structures" , J. Math. Pures et
Appliquées, 65, pages 403 - 422.

CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J. (1988)

"Elastic behaviour of very thin cellular structures" dans
"Material Instabilities and Continuum Mechanics and Related
Problems" , Ed. J.M. BALL Oxford Science Publications - -
Clarendon Press Oxford 1988, pages 65 - 75.

CLERC J.P. et al. (1983) "La Percolation" , Annales de Physiques, 8,1,
pages 4 - 105.

DUVAULT G. (1976)

"Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus.
Application à l'étude des matériaux composites élastiques à
structure périodique - Homogénéisation" , dans "Theoretical
and Applied Mechanics", W.T. KOITER ed., North Holland,
pages 119 - 132.

ENE H.I., SANCHEZ - PALENCIA E., (1975)

"Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans
un modèle de milieu poreux", Journal de Mécanique, 14, 1,
pages 73 - 108.

FLEURY F. (1980)

"Propagation of waves in a suspension of solid particles"
Wave Motion, 2, pages 39 - 50.

GELHAR L.W. (1987)

"Stochastic analysis of solute transport in saturated and
unsaturated porous media" in "Fundamentals of Transport
Phenomena in Porous Media" , ed. J. BEAR et Y. CORAPCIOGLU,
Martinus NIJHOFF Publishers, pages 657 - 700.

GILBERT F. (1987)

"Description des sols saturés par une méthode
d'homogénéisation" dans "Manuel de Rhéologie des
Géomatériaux", Presses des Pont-et-Chaussées, pages 317 -
333.

HASHIN Z., SHTRIKMAN S. (1963)

"A variational approach to the theory of the elastic behaviour
of multiphase materials", J. Mech. Phys. Solids, 11, pages 127-
140.

- HOWES F., WHITAKER S., (1985)
 "The spacial averaging theorem revisited"
 Chem. Engng. Sci., 40, 8, pages 1387 - 1392.
- KELLER J.B. (1980)
 "Darcy's law for flow in porous media and the two-space method" dans " Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science", Lecture notes in pure and applied mathematics, Eds STERNBERG R.L., KALINOWSKI A.J. and PAPADAKIS J.S., Dekker, N.Y., pages 429-443.
- KRÖNER E. (1972)
 "Statistical Continuum Mechanics", Springer Verlag, WIEN.
- KRÖNER E. (1980)
 "Effective elastic moduli of periodic and random media : a unification", Mechanics Research Communications, 7, 5, pages 323 - 327.
- KRÖNER E. (1986)
 "Statistical Modelling" in "Modelling Small Deformations of Polycrystals", Chap 8, J. GITTUS, J. ZARKA eds, Elsevier Appl Sci Publ., London.
- LEVY T. (1979)
 "Propagation of waves in a fluid saturated porous elastic solid", Int. J. Engn. Sci., 17, pages 1005- 1014.
- LEVY T. (1981)
 "Milieu élastique soumis à des forces volumiques de répartition périodique fine", Journal de Mécanique, 20, 3, pages 497 - 508.
- LEVY T. (1981)
 "Propagation of waves in a mixture of fluids", Int. J. Engng. Sci., 19, pages 83 - 90.
- LEVY T. (1983)
 "Fluid flow through an array of fixed particles", Int. J. Engng. Sci., 21, 1, pages 11 - 23.
- LEVY T. (1988)
 "Ecoulement d'un fluide dans un milieu poreux fissuré", C.R.A.S., PARIS, t306, série II, pages 1413 - 1417.
- LEVY T. , SANCHEZ-PALENCIA E. (1975)
 "On Bounday conditions for fluid flow in porous media" , Int. J.. Engng. Sci., 13, pages 923 - 940.
- LEVY T., SANCHEZ-PALENCIA E. (1977)
 "Equations and interface conditions for acoustic phenomena in porous media" , J. of Mathematical Analysis and Applications, 61, 3, pages 813 - 834.
- LEVY T. , SANCHEZ-PALENCIA (1983)
 "Suspension of solid particles in a newtonian fluid", J. of. Non-newtonian Fluid Mechanics, 13, pages 63 - 78

- Masson et Cie.
- MEI C.C., AURIAULT J.L. (1991)
"The effect of weak inertia on the flow through a porous medium", à paraître, J.F.M.
- NECAS J. (1967)
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson? Paris.
- NIGMATULIN R.I. (1981)
"Three - dimensional averaging in the mechanics of heterogeneous media", Fluid Mechanics, 10, 4, pages 72 - 107.
- NOZAD I., CARBONEL R.G., WHITAKER S. (1985)
"Heat conduction in multiphase systems - I :Theory and experiment for two phase systems", Chem. Engn. Sci., 40, 5, pages 843 - 855.
- PASTOR J., TURGMAN S., CISSA A. (1986)
"Calculation of limit loads of structures in soils with metal reinforcement" , Proc. European Conference on Numerical Methods in Geomechanics.Stuttgart.
- PLONA T.J. (1980)
"Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies", Applied Physics Letters, 36, 4, pages 259-261.
- ROUGER P. (1988)
"Séchage des poreux granulaires par thermomigration: analyse théorique et résultats expérimentaux" , Thèse de Doctorat, Grenoble, 29 Novembre 1988.
- SANCHEZ-PALENCIA, E (1974)
"Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes", Int. J. Engng. Sc., 12, pages 331-351.
- SANCHEZ-PALENCIA, E (1980)
"Non-Homogeneous Media and Vibration Theory", Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag Berlin.
- SANCHEZ-PALENCIA E (1985)
"Current problems in high concentration suspensions", J. de Mécanique Th. et Appl., n° spécial, pages 21 - 51.
- SANCHEZ-PALENCIA E. (1987)
"Boundary layers and edge effects in composites", dans Lectures Notes in Physics 272 "Homogenization technics for composite Media", Springer-Verlag Berlin, pages 122 - 192.
- SUQUET P. (1987)
"Eléments of homogénéization for inelastic solid mechanics" in "Homogenization Techniques for Composite Media", Lecture Notes in Physics n° 272, Springer-Verlag , pages 193 - 278.
- TURGEMAN S, PASTOR J. (1987)

"Comparaison des charges limites d'une structure hétérogène et homogénéisée", Journal de Mec. Th. et Appl., 6,1, pages 121 - 143.

TSYTOVICH N.A., ZARETSKIY Y.K. (1969)

"The development of the theory of soil consolidation in the USSR 1917-1967" Geotechnique, 19, 3, pages 357-375.

SCHEIDEGGER A.E. (1974)

"The physics of flow through porous media", 3ème Ed., University of Toronto Press.

WARREN J.O. , ROOT P.J. (1963)

"The Behaviour of naturally fractured reservoirs" Soc. Petrol. Eng. J., pages 245 - 255.

WHITAKER S. (1986)

"Flow in Porous Media. I: A theoretical derivation of Darcy's law" , Transport in Porous Media, 1, pages 3 - 25.

WODIE J.-C., LEVY T. (1991)

"Correction non linéaire de la loi de DARCY", C.R.A.S. Paris, 312, II, pages 157-161;

ZAOUI A. (1987)

"Approximate statistical modelling and applications" dans Lecture Notes in Physics n° 272 "Homogenization Techniques for Composite Media", Springer-Verlag Berlin, pages 338 - 397.