

TH
M 20



THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

GCD

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ
Troisième Cycle de Mécanique des Sols

par

Jean-Michel TERRIEZ

Ingénieur I.D.N.

SUJET

Sur l'identification optimale de lois de comportement élasto-plastiques isotropes : Application au milieu pulvérulent

Essais triaxiaux avec mesure non destructive de la densité

Soutenue le 19 Juin 1974 devant la Commission d'Examen

M. KRAVTCHENKO	Président
M. ANGLES D'AURIAC	Examineurs
M. GUELIN	
M. LE ROY	Rapporteur
M. STUTZ	Invité

à la mémoire de mon père

SUR L'IDENTIFICATION OPTIMALE

DE LOIS DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUES ISOTROPES :

- . Application au milieu pulvérulent
- . Essais triaxiaux avec mesure non destructive de la densité

R E M E R C I E M E N T S

----°----

Cette étude a été effectuée au laboratoire de Mécanique des Sols de l'Institut de Mécanique de Grenoble.

A Monsieur KRAVTCHENKO, qui a été mon Professeur, et qui a accepté de présider ce jury, va toute ma gratitude.

Monsieur le Professeur ANGLES D'AURIAC m'a initié à la Mécanique des Milieux Continus : je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance et mon admiration.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur LE ROY, Maître de Conférences, d'avoir accepté de diriger cette thèse.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur GUELIN pour sa constante sollicitude. Il a suivi ce travail de très près et ses précieux conseils ont été déterminants pour sa réalisation.

Pour ses suggestions et remarques éclairées, pour sa présence au jury, je remercie Monsieur STUTZ qui, avec Monsieur GUELIN, a constitué pour moi un encadrement idéal.

Monsieur SEAUME a participé à l'ensemble des travaux expérimentaux : qu'il soit remercié pour la qualité de son travail méthodique.

Enfin, j'ai l'agréable devoir de rendre hommage à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ces travaux et de ce mémoire : Mesdames ELBERG et FAURE, Messieurs BOLCATO, BRAULT, COMMANDEUR, RABATEL et tous mes camarades du laboratoire.

SOMMAIRE

	Page
INTRODUCTION	1
NOTATIONS	5
CHAPITRE A - <u>IDENTIFICATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE</u>	
<u>ISOTROPE</u>	7
A.I - <u>Loi de comportement</u>	9
A.I.1 - Définition de la loi	9
A.I.2 - Notion d'état critique	11
A.I.3 - Expression des fonctions scalaires dans le cas d'une surface limite de Coulomb	15
A.I.4 - Expression des fonctions scalaires dans le cas d'une surface limite de révolution	17
A.II - <u>Application aux conditions de l'essai biaxial</u>	19
A.II.1- Réduction de la loi à un système non linéaire de deux équations différentielles	19
A.II.2- Intégration par une méthode matricielle directe	22
A.II.3- Intégration par la méthode de Runge-Kutta	27
A.III - <u>Recherche des paramètres de la loi</u>	29
A.III.1- Identification et influence des paramètres	29
A.III.2- Méthode d'optimisation de la recherche des paramètres	35
CHAPITRE B - <u>TRAVAUX EXPERIMENTAUX</u>	37
B.I - Description générale	39
B.II- Bati triaxial	44
B.III- Plateforme de mesure	51
B.III.1- Système radioactif	51
B.III.2- Télémétrie optique	53

B.IV- Automatisation et manipulation	56
B.V - Dépouillement des résultats	59
B.VI- Antifretage	66
CHAPITRE C - <u>RESULTATS EXPERIMENTAUX</u>	71
C.I - Densité locale	73
C.II- Essais triaxiaux	79
C.II.1 - Conditions expérimentales	79
C.II.2 - Discussion sommaire	79
C.III- Détermination des paramètres de la loi	83
C.III.1- Identification	83
C.III.2- Evolution des paramètres	89
CONCLUSION	95
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	97
ANNEXES	99

I N T R O D U C T I O N

L'objet de ce mémoire est d'identifier une loi de comportement élastoplastique isotrope avec écrouissage en densité susceptible de décrire les grandes déformations des matériaux pulvérulents. Les résultats expérimentaux utilisés pour cette identification sont obtenus par des essais biaxiaux associés à une mesure non destructive et continue de la densité du matériau.

La déformation d'un matériau pulvérulent résulte non seulement des déformations et écrasement des grains mais aussi, et principalement, de leur glissement relatif. Toute sollicitation provoque aussitôt des déformations irréversibles : il n'est pas possible de définir un domaine élastique lors d'une première sollicitation.

Le matériau tend, pour de grandes déformations, vers un état critique défini par l'équation de la surface limite $G(\bar{S}_i) = 0$ et par la densité correspondant à l'état limite $\rho_c = \rho_c(\bar{S}_i)$: pour un tel état de contrainte, il apparaît un écoulement indéfini à volume constant (matériau parfaitement plastique).

Les déformations irréversibles qui apparaissent dès les très faibles déformations provoquent une modification de la structure du matériau par réarrangement des grains : ce phénomène conduit à la notion d'écrouissage.

Le comportement rhéologique des milieux pulvérulents est donc, par bien des points, éloigné du schéma élastique et du schéma parfaitement plastique habituellement utilisés, respectivement, pour les calculs de répartition des contraintes et des déformations et pour ceux de résistance limite. Il s'avère donc intéressant de décrire l'évolution depuis l'état initial jusqu'à l'état

critique par un formalisme unique assurant une transition continue.

Dès 1938, PRAGER (*) a étudié un schéma unidimensionnel décrivant un comportement de ce type pour un matériau doté d'un critère de Misès.

Une loi tensorielle susceptible de fournir une approximation du comportement d'un tel matériau a été présentée par THOMAS (*) en 1955. La loi de THOMAS généralise celle de PRANDTL et REUSS proposée pour des déformations infinitésimales.

Citons également les travaux de GREEN qui adopte en 1956 les équations de l'hypo-élasticité proposées par TRUESDELL (*).

S'intéressant aux sols et particulièrement aux matériaux pulvérulents, SAWCZUK et STUTZ (*) ont proposé récemment une loi tensorielle décrivant, jusqu'aux grandes déformations, le passage continu et progressif d'un comportement du type élastique à un comportement du type parfaitement plastique.

Les vérifications expérimentales de la validité de cette loi ont été entamées par STUTZ sur la base des essais de BOUTWELL, DOMASCUK et LELONG.

Cependant, la finesse des mesures expérimentales que demande une identification convenable nécessite la mise en oeuvre d'un procédé expérimental précis.

(*) PRAGER W. - "On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state"
Proc. 5th Int. Conf. Appl. Mech. - Cambridge (1938)

THOMAS T.Y. - "Combined elastic and Prandtl-Reuss stress-strain relations"
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., 41/720-726 (1955)

TRUESDELL C. - "Hyperélasticité"
J. National Mech. Anal. - 4 83-133 (1955)

STUTZ P. - "Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents"
Thèse de Doctorat ès Sciences-Physiques - Grenoble (1972)

Les travaux de WACK (*) ont permis de mettre au point une technique de mesure non destructive de la densité : la transmission d'un faisceau de rayons GAMMA à travers un échantillon cylindrique du matériau soumis à une sollicitation biaxiale ordinaire lui permet de montrer, vers 1965, que les grandes déformations des matériaux pulvérulents se produisent à une densité constante qui ne dépend que de la pression moyenne $\rho_c = \rho_c(S_1)$. Citons à ce propos les travaux de ROSCOE (*) qui aboutit en 1970 à des résultats analogues.

Ce procédé de mesure non destructive de la densité est parfaitement adapté à la définition de théories de comportement élastoplastique avec écroutissage en densité des matériaux pulvérulents.

L'essentiel de ce travail est exposé en trois chapitres. Le premier présente la loi de comportement élastoplastique isotrope et examine les expressions des fonctions phénoménologiques. Le deuxième décrit la plate-forme de mesure utilisée pour les travaux expérimentaux dont le troisième chapitre présente et analyse les résultats.

-----°-----

(*) WACK B. - "Mesures par radioactivité en mécanique des sols"
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques - Grenoble (1968)

ROSCOE K.H. - "The influence of strains in soil mechanics"
Géotechnique, 20, p.129-170 (1970)

PRINCIPALES NOTATIONS

d	- tenseur vitesse de déformation
\bar{d}	- déviateur de d
d_i, \bar{d}_i	- valeurs principales de d et \bar{d}
\bar{E}_1	- premier invariant de d $E_1 = d_{ii}$
\bar{E}_2, \bar{E}_3	- invariants de \bar{d} $\bar{E}_2 = \bar{d}_{ij} \bar{d}_{ji}$ $\bar{E}_3 = \bar{d}_{ij} \bar{d}_{jk} \bar{d}_{ki}$
s	- tenseur contrainte de Cauchy σ_{ij}
\bar{s}	- déviateur de s
$\sigma_i, \bar{\sigma}_i$	- valeurs principales de s et \bar{s}
S_1	- premier invariant de s $S_1 = \sigma_{ii}$
\bar{S}_2, \bar{S}_3	- invariants de \bar{s} $\bar{S}_2 = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ji}$ $\bar{S}_3 = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{\sigma}_{ki}$
\bar{M}, \bar{N}	- invariants mixtes de \bar{s} et \bar{d} $\bar{M} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{d}_{ji}$ $\bar{N} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{d}_{ki}$
\hat{s}	- dérivée de Jaumann de s
\hat{S}_1	- premier invariant de \hat{s} $\hat{S}_1 = \hat{\sigma}_{ii}$
\hat{S}_2, \hat{S}_3	- invariants mixtes de \bar{s} et \hat{s} $\hat{S}_2 = 2 \bar{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ji}$ $\hat{S}_3 = 3 \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \hat{\sigma}_{ki}$
ϕ	- angle de frottement interne
ϕ_c	- valeur critique de ϕ
ρ	- densité
ρ_c	- densité critique
μ	- coefficient d'absorption massique
I	- intensité du rayonnement
N	- taux de comptage

Les autres notations, d'un usage moins fréquent dans le texte, sont définies au moment de leur introduction.

CHAPITRE A

IDENTIFICATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT
ELASTO-PLASTIQUE ISOTROPE

A.I - LOI DE COMPORTEMENT

A.I.1 - Définition de la loi élastoplastique en repère corotationnel

Avec STUTZ (cf (9) et (10) nous supposons que la dérivée par rapport au temps du tenseur de contrainte, en repère corotationnel, est une fonction tensorielle isotrope, de degré -1 relativement au temps, des deux variables tensorielles vitesse de déformation et contrainte et d'une variable scalaire, la densité.

$$\dot{s} = f(d, s, \rho) \quad (1)$$

Notons que, d'une part, le champ de contrainte est indépendant de la vitesse d'application de la sollicitation et que, d'autre part, la variable scalaire ρ va permettre de décrire un écrouissage en densité.

A partir de la définition (1), on peut exprimer la loi dans un autre repère mobile par rapport au repère corotationnel. Si ce nouveau repère est également orthonormé, il vient :

$$\hat{s} = f(d, s, \rho) \quad (2)$$

formule où le tenseur : $\hat{s} = \dot{s} - w s + s w$ est la dérivée de JAUMAN de s .
(w : tenseur-rotation relativement au repère corotationnel)

Etant symétrique, la fonction tensorielle isotrope f est de la forme :

$$\begin{aligned} f(s, d, \rho) = & a_0 I + a_1 d + a_2 s + a_3 d^2 \\ & + a_4 s^2 + a_5 (d s + s d) + a_6 (d^2 s + s d^2) + \\ & a_7 (d s^2 + s^2 d) + a_8 (d^2 s^2 + s^2 d^2) \end{aligned} \quad (3)$$

où les a_i sont des fonctions scalaires de la densité ρ et des invariants :

$$\text{tr}(d) , \text{tr}(d^2) , \text{tr}(d^3) , \text{tr}(s d) , \text{tr}(s^2 d) , \text{tr}(s d^2) , \\ \text{tr}(s^2 d^2) , \text{tr}(s) , \text{tr}(s^2) , \text{tr}(s^3)$$

Les fonctions a_i ($i = 0, \dots, 8$) doivent être telles que :

- a_0, a_2, a_4 soient homogènes, de degré -1 par rapport au temps
- a_1, a_5, a_7 soient homogènes, de degré 0 par rapport au temps
- a_3, a_6, a_8 soient homogènes, de degré +1 par rapport au temps

Nous nous bornerons ici à envisager la forme linéaire de (3) :

$$\dot{s} = a_0 I + a_1 d + a_2 s \quad (4)$$

et à satisfaire la condition d'homogénéité relativement au temps en posant :

$$a_0 = \alpha_0 E_1 + \alpha_3 \bar{M} + \alpha_5 \bar{N}$$

$$a_1 = \alpha_1$$

$$a_2 = \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}$$

où les fonctions α_i ne dépendent que des invariants de s et de la densité ρ et où \bar{M} et \bar{N} représentent les invariants mixtes de \bar{s} et \bar{d} :

$$\alpha_j = \alpha_j (s_j, \rho) \quad j = 1, 2, 3$$

$$\bar{M} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{d}_{ij}$$

$$\bar{N} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{d}_{ki}$$

La loi de comportement (4) s'exprime alors selon :

$$\dot{s} = (\alpha_0 E_1 + \alpha_3 \bar{M} + \alpha_5 \bar{N}) I + \alpha_1 d + (\alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}) s \quad (5)$$

et se décompose en parties isotrope et déviatoire selon :

$$\dot{\sigma}_{ii} = (\alpha_1 + \alpha_2 s_1 + 3\alpha_0) E_1 + (\alpha_4 s_1 + 3\alpha_3) \bar{M} + (3\alpha_5 + \alpha_6 s_1) \bar{N} \\ \dot{\sigma}_{ij} = \alpha_1 \bar{d}_{ij} + (\alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}) \bar{\sigma}_{ij} \quad (6)$$

L'introduction des fonctions k_i telles que $k_i = \alpha_i$ pour $i = 1, 2, 4, 6$, $k_0 = \alpha_1 + \alpha_2 S_1 + 3 \alpha_0$, $k_3 = 3 \alpha_3 + \alpha_4 S_1$ et $k_5 = 3 \alpha_5 + \alpha_6 S_1$, permet la simplification de l'écriture de la loi qui prend la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ii} &= k_0 E_1 + k_3 \bar{M} + k_5 \bar{N} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= k_1 \bar{d}_{ij} + (k_2 E_1 + k_4 \bar{M} + k_6 \bar{N}) \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

De (7)₁, nous tirons :

$$E_1 = \frac{1}{k_0} \left[\frac{d S_1}{d t} - k_3 \bar{M} - k_5 \bar{N} \right]$$

La vitesse de variation de volume E_1 ne dépend donc pas seulement de la variation de pression isotrope S_2 : elle dépend également du déviateur de contrainte.

De même (7)₂ met en évidence l'influence de la vitesse de variation de volume E_1 dans la partie déviatoire de la loi de comportement. Cette influence est importante pour les matériaux dont la résistance dépend de la pression isotrope : c'est le cas des matériaux pulvérulents pour lesquels la fonction $k_2 = \alpha_2$ ne peut être nulle.

A.I.2 - Notion d'état critique

Grâce aux nombreuses expériences effectuées sur les matériaux pulvérulents, on peut caractériser schématiquement leur comportement lors d'un écoulement plastique par deux faits saillants : d'une part, les états de contrainte mis en jeu appartiennent, dans l'espace des contraintes principales, à une surface dite surface limite, d'autre part, la déformation a lieu à volume constant (c'est-à-dire que la densité du matériau évolue vers une densité limite).

Nous nous proposons de montrer que la loi de comportement qui vient d'être définie permet, non seulement de retrouver les aspects qualitatifs cités précédemment mais aussi de préciser les notions d'écoulement, de surface limite et de densité limite qu'ils incitent à introduire.

Avec (6), les quantités $\dot{S}_1 = \dot{\sigma}_{ii}$, $\dot{S}_2 = 2 \bar{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{ji}$, $\dot{S}_3 = 3 \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \dot{\sigma}_{ki}$, s'expriment selon :

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= (3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 s_1) E_1 + (3\alpha_3 + \alpha_4 s_1) \bar{M} + (3\alpha_5 + \alpha_6 s_1) \bar{N} \\ \frac{\dot{s}_2}{2} &= \alpha_2 \bar{s}_2^2 E_1 + (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{s}_2^2) \bar{M} + \alpha_6 \bar{s}_2^2 \bar{N} \\ \frac{\dot{s}_3}{3} &= \alpha_2 \bar{s}_3^3 E_1 + \alpha_4 \bar{s}_3^3 \bar{M} + (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{s}_3^3) \bar{N}\end{aligned}\quad (8)$$

Si le déterminant Δ du système (8) est différent de zéro, les quantités E_1 , \bar{M} , \bar{N} sont parfaitement déterminées par la donnée de l'état de contrainte. Lors d'une évolution complète, la densité ρ du matériau est fournie par l'intégration de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = E_1$$

Aucune notion limite ou critique n'est introduite. Il est important de noter que, près de l'état neutre, la correspondance entre déformation et contrainte peut décrire un comportement quasi élastique.

Au contraire, dans le cas où le déterminant Δ du système (8) est nul, la donnée de l'état de contrainte ne permet plus une détermination complète de la cinématique. Un écoulement du matériau est possible. La condition $\Delta = 0$ s'explique selon :

$$\alpha_1 \left[(3\alpha_0 + \alpha_1) (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{s}_2^2 + \alpha_6 \bar{s}_3^3) + \alpha_2 \left[\alpha_1 s_1 - 3\alpha_3 \bar{s}_2^2 - 3\alpha_5 \bar{s}_3^3 \right] \right] = 0 \quad (9)$$

D'autre part, le mineur formé par les coefficients de E_1 et \bar{N} dans (8)₂ et (8)₃ a pour valeur $\alpha_1 \alpha_2 \bar{s}_2^2$, non nulle si l'état déviatoire est différent de zéro.

Le déterminant caractéristique obtenu à partir de (8) après avoir choisi E_1 et \bar{M} comme inconnues principales est de la forme :

$$\Delta_c = P \dot{s}_1 + Q \frac{\dot{s}_2}{2} + R \frac{\dot{s}_3}{3}$$

Si $\Delta_c = 0$, le système (8) admettra les solutions :

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{s}_2^2} \left[-\frac{\dot{s}_3}{3} \alpha_6 \frac{\dot{s}_2}{2} + \frac{\dot{s}_2}{2} (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{s}_3^3) - \bar{M} \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{s}_2^2 + \alpha_6 \bar{s}_3^3) \right] \\ \bar{N} &= \frac{1}{\alpha_1 \bar{s}_2^2} \left[-\bar{s}_3 \frac{\dot{s}_2}{2} + \frac{\dot{s}_3}{3} + \bar{M} \alpha_1 \bar{s}_3^3 \right]\end{aligned}\quad (10)$$

\bar{M} reste arbitraire. Cet écoulement indéfini présente un caractère critique que la théorie précise comme suit.

Supposons qu'il existe un état de contrainte constant, tel que (9) soit vérifié ($\Delta = 0$), et que la densité reste également constante.

Si cet état existe, alors, d'après (10) :

$$\alpha_1 + \alpha_4 \bar{s}_2^2 + \alpha_6 \bar{s}_3^3 = 0 \quad (11)_1$$

et (9) exige :

$$\alpha_1 s_1 - 3 \alpha_3 \bar{s}_2^2 - 3 \alpha_5 \bar{s}_3^3 = 0 \quad (11)_2$$

L'existence de l'état décrit précédemment exige que (11)₁ et (11)₂ soient vérifiées simultanément. Dans l'espace des invariants s_1 , \bar{s}_2^2 et \bar{s}_3^3 , l'intersection des surfaces (11)₁ et (11)₂ constitue une surface paramétrée suivant les valeurs de la densité ρ . Les relations (11)₁ et (11)₂ s'interprètent donc comme les relations définissant l'état critique : $G(\bar{s}_i) = 0$ et $\rho_c = \rho_c(\bar{s}_i)$.

Compte tenu de (10), la loi de comportement devient donc la loi de plasticité parfaite :

$$\bar{d}_{ij} = \lambda \bar{\sigma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\bar{M}}{\bar{s}_2^2} = \frac{\bar{N}}{\bar{s}_3^3}$$

$$E_1 = 0$$

La loi de comportement (6) conduit donc à la description d'un état critique qui se traduit par un certain nombre de relations entre les fonctions α_i et les invariants \bar{s}_i .

Au sujet des sept fonctions α_i , nous nous intéresserons aux deux questions suivantes :

- la recherche des cas où certaines d'entre elles peuvent devenir identiquement nulles (problème de la réduction du nombre des fonctions inconnues. Un cas sera développé au paragraphe A.I.4)

- la recherche de leur forme à l'état critique et hors de l'état critique (nous rappellerons ici l'examen général effectué par STUTZ).

A l'état critique, les fonctions α_i peuvent être reliées à l'équation de la surface critique.

Pour tout chemin sur la surface critique $G(\bar{S}_i) = 0$, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{S}_1} \hat{S}_1 + \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2} \hat{S}_2 + \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3} \hat{S}_3 = 0 \quad (12)$$

La comparaison de (12) avec la relation $\Delta_c = P\hat{S}_1 + Q\hat{S}_2 + R\hat{S}_3 = 0$ fournit les deux équations suivantes :

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial \bar{S}_1}}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2} = \frac{2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2}}{(3\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_4 \bar{S}_2^2 + 3\alpha_2 \alpha_5 \bar{S}_3^3 - \alpha_1 \alpha_2 S_1} = \quad (13)$$

$$\frac{3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3}}{(3\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_6 - 3\alpha_2 \alpha_5 \bar{S}_2^2}$$

En tenant compte de (11)₁, les relations (13) conduisent à :

$$3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1 = -\alpha_2 \frac{2 \bar{S}_2^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2} + 3 \bar{S}_3^3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3}}{\frac{\partial G}{\partial \bar{S}_1}} \quad (14)$$

Si G est homogène par rapport à $S_1, \bar{S}_2^2, \bar{S}_3^3$, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial S_1} S_1 + 2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2} \bar{S}_2 + 3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3} \bar{S}_3 = 0$$

ce qui donne avec (14) et (13) : $3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1 = \alpha_2 S_1$, c'est-à-dire :

$$\alpha_1 + 3\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_3 = \frac{-\frac{2}{3} \alpha_1 \frac{\partial G}{\partial S_2^2}}{\frac{\partial G}{\partial S_1}} \quad \alpha_5 = \frac{-\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial S_3^3}}{\frac{\partial G}{\partial S_1}}$$

Si la densité critique ne dépend que de la pression moyenne S_1 , l'expression de E_1 impose pour α_5 et α_6 la relation :

$$3 \alpha_5 + \alpha_6 S_1 = 0$$

et les relations (10)₁ et (10)₂ fournissent une relation entre α_3 et α_4 :

$$3 \alpha_3 + \alpha_4 S_1 = 0$$

Les équations (13) nous permettent alors d'exprimer α_4 et α_6 :

$$\alpha_4 = \frac{-2 \alpha_1 \frac{\partial G}{\partial S_2^2}}{2 S_2^2 \frac{\partial G}{\partial S_2^2} + 3 S_3^3 \frac{\partial G}{\partial S_3^3}} \quad \alpha_6 = \frac{-3 \alpha_1 \frac{\partial G}{\partial S_2^2}}{2 S_2^2 \frac{\partial G}{\partial S_2^2} + 3 S_3^3 \frac{\partial G}{\partial S_3^3}}$$

Si les conditions a et b sont réunies simultanément, les dénominateurs des expressions précédentes se simplifient.

En dehors de l'état critique la forme des fonctions α_i ne peut être précisée sans hypothèses supplémentaires.

Nous supposons que les fonctions α_i ont, en dehors de l'état critique, même expression formelle qu'à l'état critique, que les fonctions α_3 et α_5 sont reliées à la densité critique ρ_c et que les fonctions α_4 et α_6 sont reliées à la densité actuelle du matériau.

A.I.3 - Expression des fonctions scalaires dans le cas d'une surface limite de Coulomb

Les restrictions envisagées ci-dessus au sujet de la forme des fonctions scalaires α_i ($i > 2$) ont été appliquées au cas d'une surface critique de Coulomb :

$$\bar{S}_2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} 2^m (K - 1)}{\left[K^{1/m} + 1 - \sqrt{6} \left\{ \frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right\} (K^{1/m} - 1) \right]^m S_1} \quad (15)$$

où $K = \frac{3 + \sin \phi}{3 - \sin \phi}$

On obtient pour les fonctions scalaires $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, les expressions suivantes :

$$\alpha_4 = -\alpha_1 \frac{1}{(\bar{S}_2)_c} \left[1 + \frac{3 \sqrt{6} m (K^{1/m} - 1)}{D_c} \left\{ \frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right\}_c^3 \right]$$

$$\alpha_6 = 3 \alpha_1 \frac{1}{(\bar{S}_2)_c} \frac{\sqrt{6} m (K_c^{1/m} - 1)}{D_c} \frac{1}{(\bar{S}_2)_c^2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_4 S_1}{3}$$

$$\alpha_5 = -\frac{\alpha_6 S_1}{3}$$

avec : $K_c = \frac{3 + \sin \phi_c}{3 - \sin \phi_c}$

$$D_c = (K_c^{1/m} + 1) - \sqrt{6} (K_c^{1/m} - 1) \left\{ \frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \right\}_c^3$$

Les coefficients et les fonctions phénoménologiques de la loi de comportement sont donc, d'une part les quantités ϕ_c et m pour ce qui concerne le critère (15), d'autre part $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et ϕ (nous exposerons au paragraphe A.III.1 un exemple pour le choix de ces fonctions).

A.I.4 - Expression des fonctions scalaires dans le cas d'une surface limite de révolution

La surface limite de plasticité est prise sous la forme :

$$G(S_1) = K^2 \bar{S}_2^2 - (S_1 + c)^n = 0 \quad (0 < n < 2)$$

G étant indépendant de \bar{S}_3^3 , les relations (13) montrent que l'on doit avoir, à l'état critique :

$$(3 \alpha_0 + \alpha_1) \alpha_6 = 3 \alpha_2 \alpha_5 \quad (16)$$

Il reste alors :

$$\frac{1}{\alpha_2 \bar{S}_2^2} \frac{\partial G}{\partial S_1} = - \frac{2}{3 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1} \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2}$$

c'est-à-dire :

$$n (3 \alpha_0 + \alpha_1) = \alpha_2 [S_1 (n - 2) + 2 c]$$

La loi de variation de volume est donnée par la relation :

$$E_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2} \left[-\frac{1}{3} \alpha_6 \bar{S}_2^2 \dot{\bar{S}}_3^3 + \frac{n}{2K^2} (S_1 - c)^{n-1} (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) \dot{S}_1 \right]$$

Dans l'hypothèse où la densité critique ρ_c et donc la vitesse de variation de volume ne dépendent que de S_1 , on doit avoir : $\alpha_6 = 0$.

Comme, pour les matériaux pulvérulents, on a $\alpha_2 \neq 0$, la relation (16) conduit à :

$$\alpha_5 = 0$$

Des relations (11)₁ et (11)₂ on tire les expressions de α_4 et α_3 à l'état critique :

$$\alpha_4 = -\frac{\alpha_1}{\bar{S}_2} \qquad \alpha_3 = \frac{\alpha_1 S_1}{3 \bar{S}_2^2}$$

Diverses formes de α_3 et α_4 peuvent être envisagées hors de l'état critique tout en restant dans le cadre des hypothèses énoncées au paragraphe A.I.2.

GUELIN et STUTZ proposent par exemple (cf (6)) le choix suivant :

- K, C et α_2 sont des constantes intrinsèques du matériau.
- Deux paramètres caractéristiques du matériau sont introduits : les densités critiques ρ_{ct} et ρ_{co} associées respectivement aux états de contrainte critiques tels que :

$$S_1 + C = \bar{S}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{K}^2 \bar{S}_2^2 - C = S_1 = 0$$
- Hors de l'état critique, les fonctions α_3 et α_4 sont choisies égales à :

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} \alpha_1 K^2 \left[1 - \frac{\rho_{co} - \rho_{ct}}{\rho - \rho_{ct}} \right]^{2\alpha_2}$$

$$\alpha_4 = -\alpha_1 \frac{1}{\bar{S}_2} \frac{K}{\sqrt{C}} \left[\frac{\rho_{co} - \rho_{ct}}{\rho - \rho_{ct}} \right]^{\alpha_2}$$

Ce choix correspond à des surfaces limites géométriquement simples (cylindre d'axe S_1 , de rayon :

$$\frac{\sqrt{C}}{K} \left[\frac{\rho - \rho_{ct}}{\rho_{co} - \rho_{ct}} \right]^{\alpha_2}$$

et paraboloïde de sommet à l'origine).

A.II - APPLICATION AUX CONDITIONS DE L'ESSAI BIAxIAL

A.II.1 - Réduction de la loi élastoplastique à un système non linéaire de deux équations différentielles

Dans la formulation la plus générale, la loi de comportement que nous venons de rappeler, s'exprime, une fois décomposée en parties isotrope et déviatoire, par :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ii} &= (\alpha_1 + \alpha_2 S_1 + 3 \alpha_0) E_1 + (\alpha_4 S_1 + 3 \alpha_3) \bar{M} + (3 \alpha_5 + \alpha_6 S_1) \bar{N} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= \alpha_1 \bar{d}_{ij} + (\alpha_2 E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N}) \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

On se place dans le cas de l'essai biaxial homogène appliqué à vitesse d'écrasement constante sur un échantillon cylindrique.

Dans l'espace des contraintes principales, ce types d'essais ne nous permet d'explorer que le plan bissecteur :

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

Bien que les expériences décrites plus loin soient effectuées dans le cas où :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = P_0$$

avec la pression latérale P_0 constante, l'analyse ci-dessous est valable pour tout chemin du plan bissecteur.

Si $\dot{\epsilon}$ désigne la vitesse d'écrasement axiale imposée et si \bar{e}_i représentent les vecteurs de base du trièdre de référence (\bar{e}_1 selon l'axe de l'échantillon), dans une déformation homogène, le champ des vitesses est de la forme :

$$\bar{v} = \dot{\epsilon} \bar{e}_1 + \dot{\eta} (\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$$

Le déviateur \bar{d} a une forme diagonale en :

$$\frac{2}{3} (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \quad , \quad \frac{1}{3} (\dot{\eta} - \dot{\epsilon}) \quad , \quad \frac{1}{3} (\dot{\eta} - \dot{\epsilon})$$

Le déviateur \bar{s} du tenseur contrainte s défini par $\sigma_{ij} = \frac{s_1}{3} \delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}$ est également diagonal en :

$$\frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad , \quad -\frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad , \quad -\frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

Nous poserons :

$$P_0 = \sigma_3 \quad \quad \quad T = \frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

On a alors :

$$\dot{s}_1 = \frac{3}{2} \dot{T}$$

$$\bar{M} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{d}_{ji} = (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) T$$

$$\bar{N} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{jk} \bar{d}_{ki} = (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \frac{T^2}{2}$$

$$E_1 = \dot{\epsilon} + 2 \dot{\eta}$$

Portant ces quantités dans l'équation de comportement (1) :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{dT}{dt} &= (3 a_0 + a_1 + a_2 s_1) (\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}) + (3 a_3 + a_4 s_1) (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) T \\ &+ (3 a_5 + a_6 s_1) (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \frac{T^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_1 \frac{2}{3} (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) + a_2 (\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}) + a_4 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) T + a_6 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \frac{T^2}{2} = \frac{dT}{dt}$$

STUTZ choisit la densité ρ comme inconnue :

$$E_1 = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \dot{\epsilon} + 2 \dot{\eta}$$

d'où :

$$\dot{\eta} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\dot{\epsilon}}{2}$$

en portant $\dot{\eta}$ dans (2), on obtient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{3 \frac{dT}{dt} - 3 \frac{d\epsilon}{dt} (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)^T + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{T^2}{2}}{2 (3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) - [(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)^T + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{T^2}{2}]} \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\epsilon (3\alpha_0 + \alpha_1) [2\alpha_1 + (\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2}) 3 T^2] + \alpha_2 [2\alpha_1 S_1 - 9T^2(\alpha_3 + \alpha_5 \frac{T}{2})]}{2 (3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) + \alpha_1 - 3\alpha_2 T - (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)^T - (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{T^2}{2} \dots}$$

$$\dots + \frac{3}{2} (\alpha_4 + \alpha_6 \frac{T}{2}) T^2$$

En utilisant le critère d'écoulement A.I.14 proposé par STUTZ qui s'écrit, pour l'essai biaxial :

$$\bar{s}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (K - 1) S_1$$

on obtient :

$$\alpha_4 + \frac{\alpha_6}{2} T = \frac{-\alpha_1}{\bar{s}_{2c} \bar{s}_2}$$

$$\alpha_3 + \frac{\alpha_5}{2} T = \frac{\alpha_1 S_1}{3 \bar{s}_{2c} \bar{s}_2}$$

avec :

$$\bar{s}_{2c} = \sqrt{\frac{2}{3}} (K_c - 1) S_1 \quad \bar{s}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} T = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$K_c - 1 = \frac{2 \sin \phi_c}{3 - \sin \phi_c} = \alpha_c \sqrt{\frac{3}{2}}$$

STUTZ pose :

$$\bar{s}_{2c} = \alpha_c S_1 \quad \text{et} \quad \bar{s}_2 = \alpha_\rho S_1$$

Compte tenu de la relation : $S_1 = \frac{3}{2} T + 3 P_0$, le système (3) s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\epsilon} = \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dT}{d\epsilon} - 3 a_1 \left(\frac{1}{a_c} - \frac{1}{a_\rho} \right)}{2\sqrt{\frac{3}{2}} (3 a_0 + a_1 + 3 a_2 P_0) + 3\sqrt{\frac{3}{2}} a_2 T - a_1 \left(\frac{1}{a_c} - \frac{1}{a_\rho} \right)} \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\epsilon} = a_1 \frac{(3 a_0 + a_1 + 3 a_2 P_0) 2\sqrt{\frac{3}{2}} + T \left[3\sqrt{\frac{3}{2}} a_2 - \frac{3 a_0 + a_1}{a_\rho (P_0 + \frac{T}{2})} - \frac{3 a_2}{a_c} \right]}{2\sqrt{\frac{3}{2}} (3 a_0 + a_1 + 3 a_2 P_0) + 3\sqrt{\frac{3}{2}} a_2 T - a_1 \left(\frac{1}{a_c} - \frac{1}{a_\rho} \right)}$$

L'intégration du système différentiel non linéaire (4) nécessite la connaissance des quantités suivantes :

- ρ_0 densité initiale de l'échantillon
- ρ_c densité critique
- ϕ_c angle de frottement critique
- P_0 pression latérale

et des fonctions et paramètres suivants :

$$a_\rho \text{ et } a_0, a_1, a_2$$

A.II.2 - Intégration par une méthode matricielle directe

a - Matrice de dérivation

Cette méthode de discrétisation de l'opérateur de dérivation a été introduite par BOISSERIE au sujet de l'élasticité infinitésimale et appliquée par GUELIN aux problèmes à grandes déformations. Elle effectue cette discrétisation sous forme matricielle. Nous rappelons brièvement la construction de cette matrice de dérivation (cf (3) et (5)).

Supposons qu'une fonction $y(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre nécessaire puisse être convenablement approchée par un développement en série tronquée de polynômes de CHEBYSHEV :

$$y(x) = \sum_1^n a_i T_i(x)$$

En tous points x_j d'une base ponctuelle discrète, on a :

$$y(x_j) = \sum_1^n a_i T_i(x_j) \tag{6}$$

La relation (6) s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_1(x_1) & \dots & T_n(x_1) \\ 1 & T_1(x_2) & & T_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & T_1(x_n) & & T_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$Y = T A \tag{7}$$

La dérivation du développement de $y(x)$ donne, en tous points de la base :

$$\frac{dy(x_j)}{dx_j} = \sum_1^n a_i \frac{dT_i(x_j)}{dx_j}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T'_1(x_1) & & T'_n(x_1) \\ 0 & T'_1(x_2) & & T'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & T'_1(x_n) & & T'_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\dot{Y} = \dot{T} A \tag{8}$$

L'inversion de (7) est possible du fait du bon comportement de T, lié au caractère orthogonal des polynômes de la base fonctionnelle utilisée.

L'élimination de A par l'inversion de (7) et son introduction dans (8) donne :

$$\dot{Y} = \dot{T} T^{-1} Y$$

En posant : $D = \dot{T} T^{-1}$

on obtient : $\dot{Y} = D Y$ (9)

Cette forme matricielle discrète de l'opérateur de dérivation permet d'obtenir les dérivées $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n$ de la fonction $y(x)$ aux points (x_i, y_i) .

b - Intégration numérique

Le système différentiel (5) est de la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = f(\sigma, \epsilon, \rho) \quad (10)$$

$$\frac{d\rho}{d\epsilon} + h(\sigma, \epsilon, \rho) \frac{d\sigma}{d\epsilon} = g(\sigma, \epsilon, \rho)$$

σ représente la contrainte, ϵ la déformation et ρ la densité du matériau.

En écriture matricielle et à l'aide de la matrice de dérivation D, il vient :

$$D \sigma = f$$

$$D \rho + h D \sigma = g$$

À l'aide d'une base discrète de n points (cf A.II.2.a) :

$$[d_{ij}] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\sigma_1, \epsilon_1, \rho_1) \\ \vdots \\ f(\sigma_n, \epsilon_n, \rho_n) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} d_{ij} \\ \rho_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h(\sigma_i, \epsilon_i, \rho_i) d_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\sigma_1, \epsilon_1, \rho_1) \\ g(\sigma_n, \epsilon_n, \rho_n) \end{bmatrix}$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} d_{ij} & 0 \\ h_i d_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i \\ \rho_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix}$$

avec :

$$f_i = f(\sigma_i, \epsilon_i, \rho_i) \quad , \quad g_i = g(\sigma_i, \epsilon_i, \rho_i) \quad \text{et} \quad h_i = h(\sigma_i, \epsilon_i, \rho_i)$$

Nous obtenons donc une équation de la forme :

$$H X = F$$

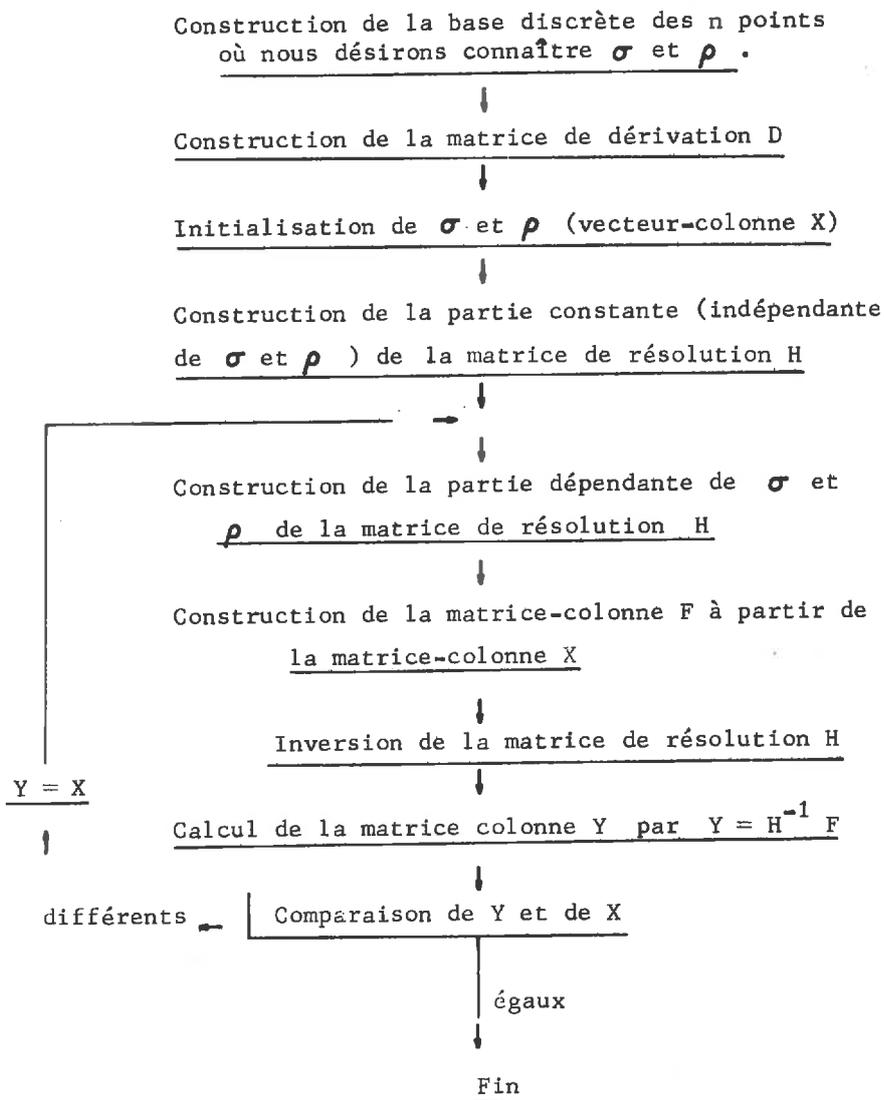
dont l'inversion fournit en n points les valeurs de la contrainte et de la densité :

$$X = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = H^{-1} F \quad (12)$$

Les fonctions f , g et h dépendent de σ , ϵ , ρ . Il est donc nécessaire d'itérer sur (12). A partir de valeurs initiales arbitrairement attribuées aux éléments de la matrice-colonne X de la relation (12) nous calculons les fonctions f_i , g_i , h_i et les éléments de la matrice de résolution H .

L'inversion de H d'une part, l'équation (12) d'autre part, nous fournissent de nouvelles valeurs de σ_i et ρ_i . Ce calcul doit être poursuivi jusqu'à la stabilité des résultats.

L'algorithme de calcul a été construit à partir de l'organigramme que nous présentons. Nous fournissons à l'Annexe I les programmes écrits en Fortran.



Cette méthode, souvent précise, est également d'exécution numérique rapide si la base ponctuelle n'est pas trop riche, sinon le temps de calcul devient vite important et l'inversion de T, matrice pleine (cf A.II.2.a) n'est plus possible sur de petits calculateurs.

A.II.3 - Intégration par la méthode de Runge Kutta

Nous désirions obtenir des courbes théoriques finement discrétisées ; il était donc souhaitable d'effectuer la résolution de (5) avec des bases de 40 points environ. Dans ces conditions, il s'est avéré plus intéressant d'utiliser une méthode d'intégration pas à pas, du genre Runge Kutta.

Cette méthode nous permet de choisir l'erreur absolue sur les valeurs des fonctions σ et ρ . Le pas de calcul est automatiquement corrigé s'il est incompatible avec l'erreur demandée.

Nous fournissons à l'Annexe II l'ensemble des programmes nécessaires à l'intégration du système (5) par la méthode de Runge Kutta.

A.III - RECHERCHE DES PARAMETRES DE LA LOI

A.III.1 - Identification de la loi de comportement. Influence des paramètres

Dans les conditions expérimentales de l'essai biaxial à pression latérale constante ($\sigma_2 = \sigma_3 = P_0$) la loi de comportement élastoplastique isotrope se réduit à un système non linéaire de deux équations différentielles (cf A.II.1).

$$\frac{dT}{d\epsilon} = \alpha_1 \frac{(3\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 P_0) 2\sqrt{\frac{3}{2}} + T \left[3\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_2 - \frac{3\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_\rho \left(\frac{P_0 + T}{2}\right)} - \frac{3\alpha_2}{\alpha_c} \right]}{2\sqrt{\frac{3}{2}} (3\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 P_0) + 3\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_2 T - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_\rho}\right)} \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{d\epsilon} = \rho \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dT}{d\epsilon} - 3\alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_\rho}\right)}{2\sqrt{\frac{3}{2}} (3\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 P_0) + 3\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_2 T - \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_c} - \frac{1}{\alpha_\rho}\right)}$$

où T vaut : $\frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)$. Les quantités α_c et α_ρ sont définies à partir du critère d'écoulement. Rappelons que α_c est une fonction de l'angle de frottement critique ϕ_c , caractéristique du matériau. La quantité α_ρ a une formulation analogue mais concerne l'état actuel du matériau. Avec STUTZ nous supposons que α_ρ est proportionnel à l'écart existant entre la densité actuelle ρ et la densité limite du matériau ρ_c , obtenue lorsque le matériau atteint l'état critique.

Nous choisissons donc l'expression simple :

$$\alpha_\rho = \alpha_c \left[1 + k (\rho - \rho_c) \right] \quad (2)$$

Enfin, les résultats expérimentaux conduisent à poser :

$$\alpha_1 = \alpha_{1I} S_1^R$$

où α_{1I} et R sont constants. Pour les matériaux pulvérulents, R peut être

pris égal à 2/3.

Dans ces conditions, l'intégration du système (1) nécessite, outre la connaissance de la pression latérale P_0 , de la densité initiale ρ_0 , de la densité critique ρ_c et de l'angle de frottement critique ϕ_c , le choix des trois fonctions α_0 , α_{1I} , α_2 et du coefficient k introduit en (2).

L'identification de la loi consiste donc à comparer aux courbes expérimentales obtenues lors d'un essai biaxial les deux courbes théoriques représentant l'évolution de la densité et du déviateur au cours de la déformation du matériau fournies par le système (1).

La variation des coefficients α_0 , α_{1I} , α_2 et k permet de minimiser l'écart existant entre ces courbes théoriques et les courbes expérimentales.

Préalablement à toute recherche des valeurs prises par les paramètres de la loi, nous nous sommes efforcés d'étudier l'influence de leur variation sur l'allure de courbes effort-déformation ($\sigma_1 - \sigma_3 = f(\epsilon)$) et densité-déformation ($\rho = g(\epsilon)$), fictives mais proches de celles auxquelles conduit l'identification. Ces courbes sont obtenues à partir des données générales suivantes :

$$\begin{array}{ll} P_0 = 10 \text{ bars} & \alpha_0 = 350 \\ \rho_0 = 1,61 & \alpha_{1I} = 45 \\ \rho_c = 1,56 & \alpha_2 = - 21 \\ \phi_c = 0,437 \text{ radians} & k = 1,4 \end{array}$$

Nous présentons à la figure 1 l'influence, sur l'allure des courbes, du paramètre α_0 , à la figure 2 celle du paramètre α_{1I} , à la figure 3 celle de α_2 , à la figure 4 celle de k . Leur variation a été effectuée de façon indépendante.

Ces quatre figures montrent qu'aucun paramètre n'a une influence purement locale sur les courbes. Chacun d'eux affecte la totalité de l'évolution de ρ et de $\sigma_1 - \sigma_3$. Cependant l'un des paramètres est facilement estimé à partir d'une partie des courbes : le coefficient α_{1I} paraît être le seul à avoir une influence importante sur la pente à l'origine de la courbe effort-déformation.

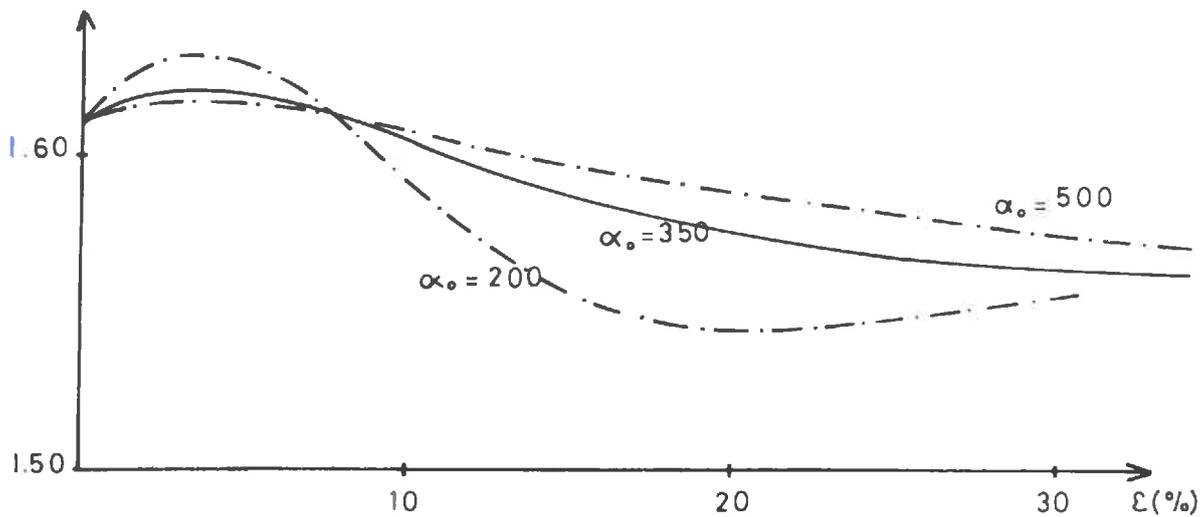
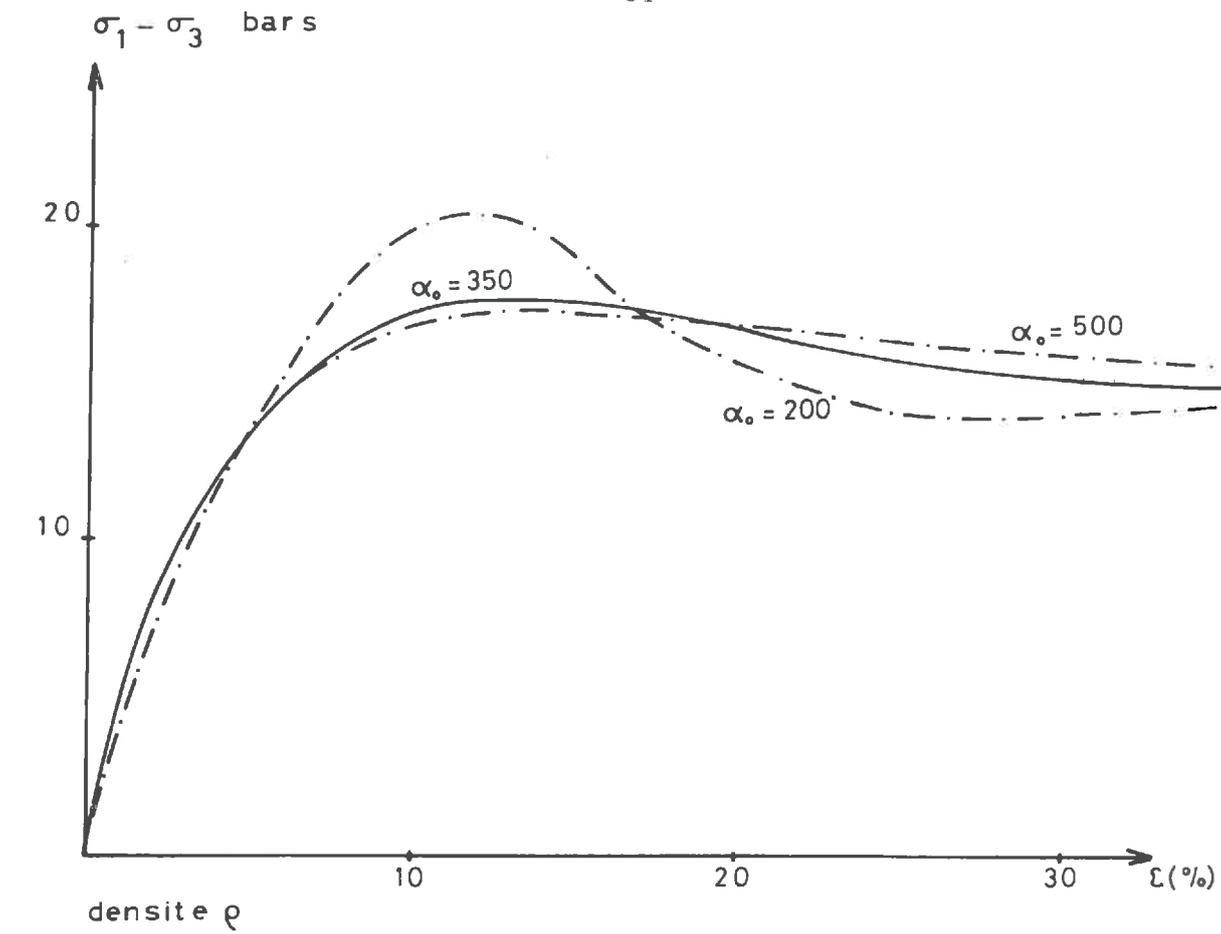


FIGURE 1

INFLUENCE DU PARAMETRE α_0

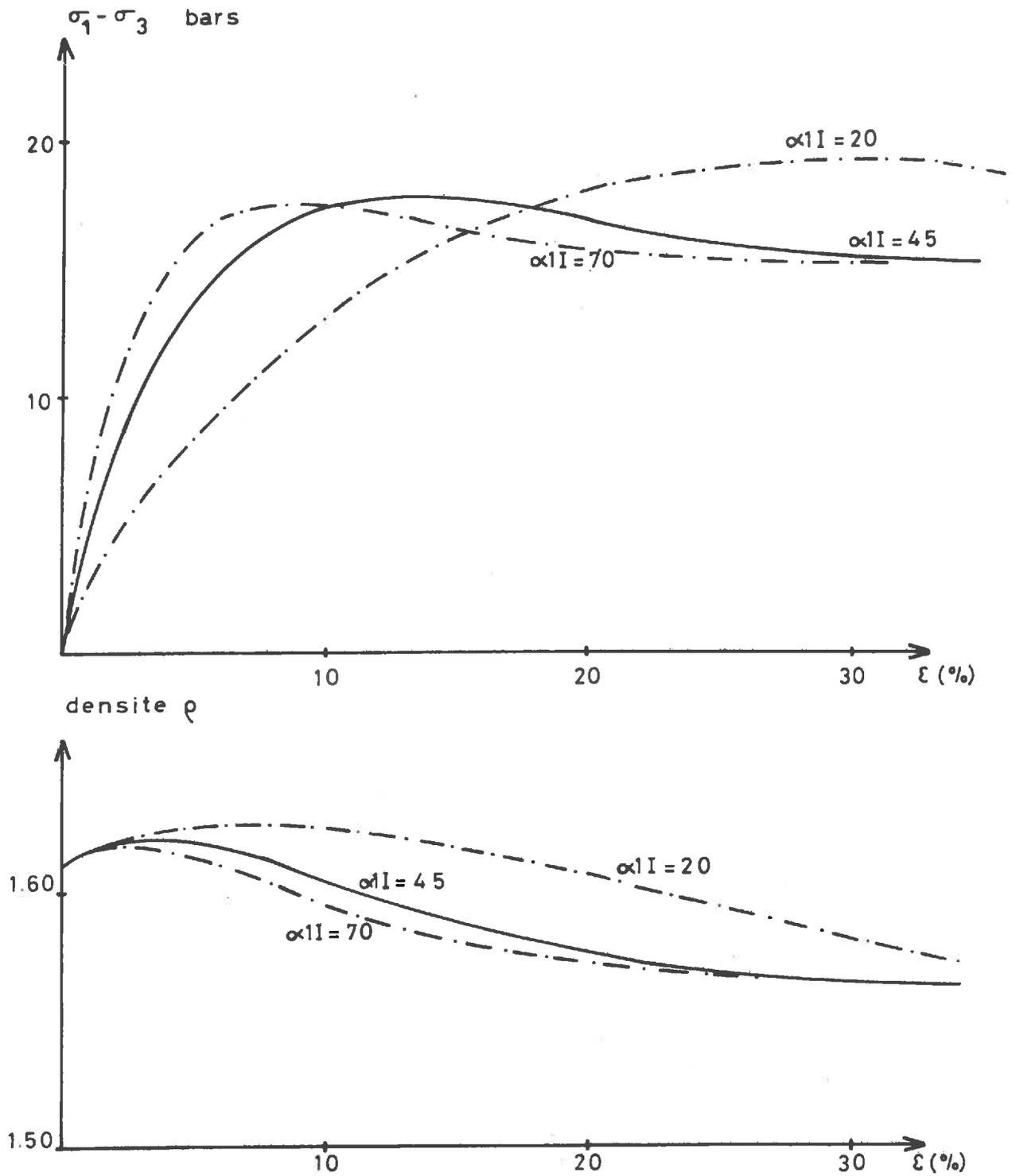


FIGURE 2
INFLUENCE DU PARAMETRE $\alpha I I$

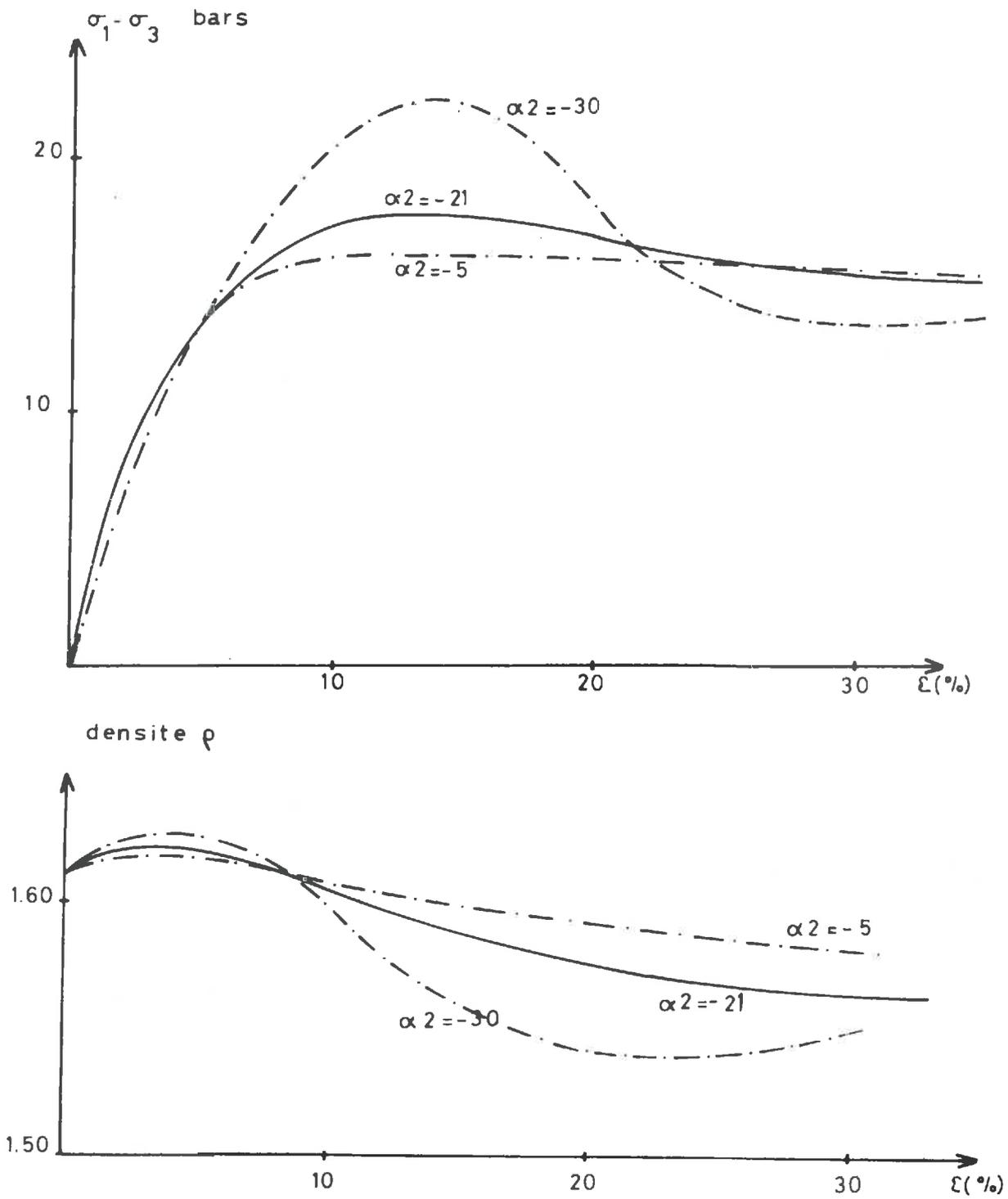


FIGURE 3

INFLUENCE DU PARAMETRE α_2

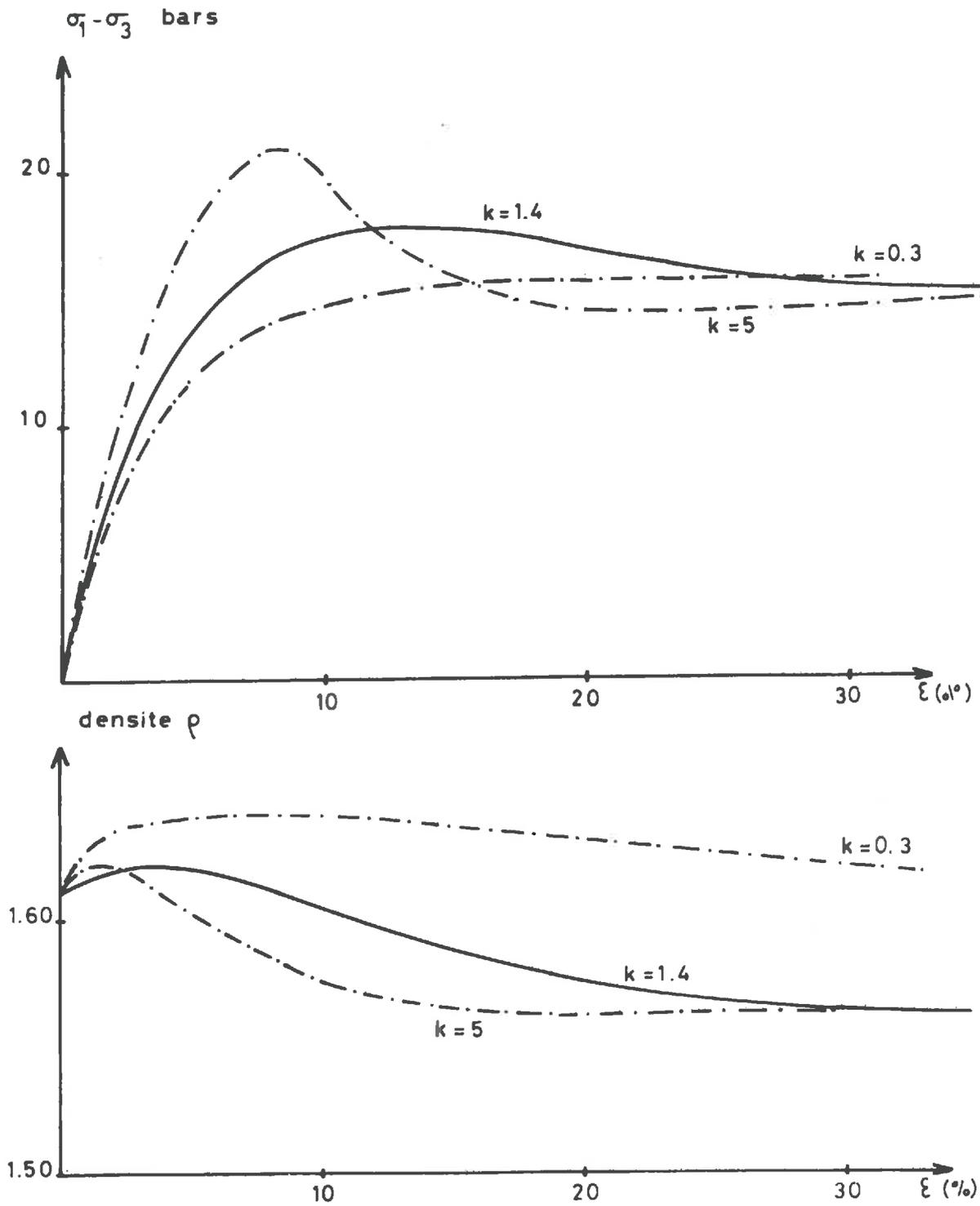
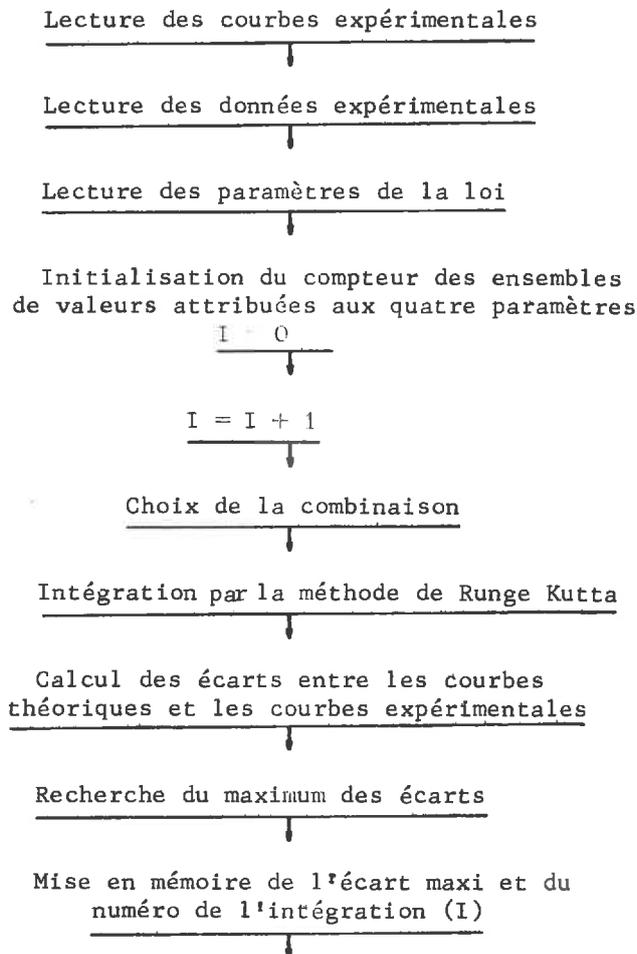


FIGURE 4
INFLUENCE DU PARAMETRE k

A.III.2 - Méthode d'optimisation de la recherche des paramètres de la loi

L'identification de la loi de comportement nécessitant un nombre important d'intégrations du système (1), nous avons été amenés à construire un algorithme d'optimisation de recherche des coefficients. Cependant, leur nombre ne nous permet pas de rendre cette optimisation entièrement automatique. Nous effectuons donc une optimisation à vue à partir des résultats fournis par le calcul pour plusieurs ensembles de valeurs des quatre paramètres de la loi. Une boucle de calcul permet d'effectuer les intégrations correspondant à toutes les combinaisons obtenues à partir des différentes valeurs attribuées aux paramètres. Elle fournit, pour chaque résultat théorique, l'écart relatif en chaque point avec la courbe expérimentale.



Recherche du minimum des écarts maximum
(courbes théoriques coïncidant le mieux
avec les courbes expérimentales)

↓

Écriture du numéro (I) de l'ensemble des quatre paramètres
qui fournit ces courbes théoriques optimales

↓

Fin

Nous présentons à l'Annexe III le programme de calcul, écrit en Fortran, ayant permis cette optimisation à vue.

A l'issue des premiers résultats expérimentaux, nous constatons que deux paramètres peuvent être connus avec facilité : le coefficient k qui semble être constant et le paramètre α_{1I} , qu'une approche manuelle permet de déterminer avec une bonne précision.

Dans ces conditions, une fois déterminés les coefficients k et α_{1I} nous nous sommes efforcés de rendre automatique l'optimisation des deux autres paramètres, α_0 et α_2 , en recherchant le minimum des écarts obtenus pour les couples de valeurs (α_0, α_2) .

CHAPITRE B

TRAVAUX EXPERIMENTAUX :
Essais triaxiaux avec mesure locale
non destructive de la densité

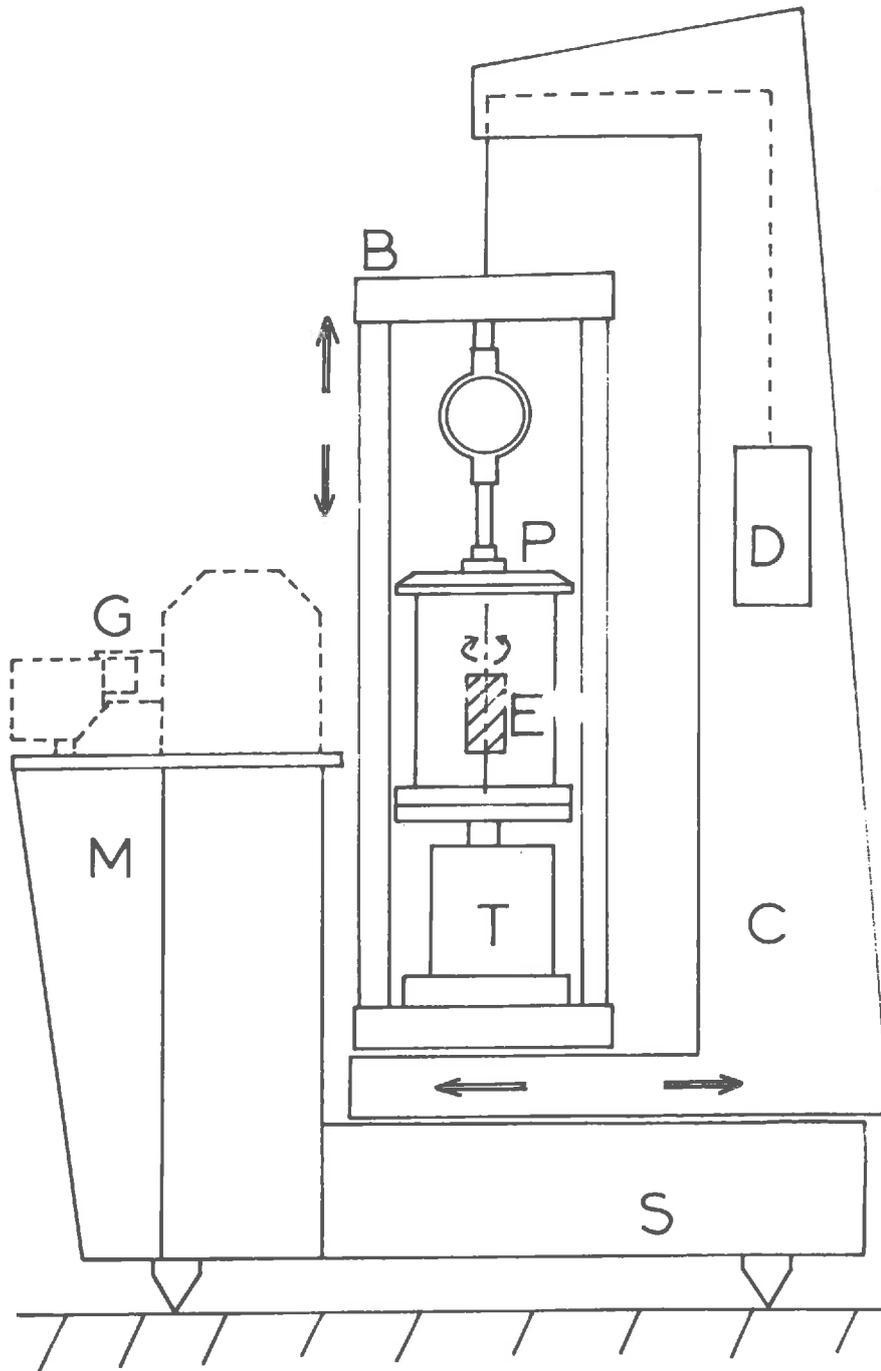
B.I - DESCRIPTION GENERALE ET MONTAGES MECANIQUES

L'appareil utilisé lors des recherches expérimentales permet de réaliser, sur un échantillon cylindrique de matériau, un essai triaxial avec mesure locale et non destructive de la densité.

Il est spécialement adapté à l'examen de la validité de la théorie de l'élastoplasticité avec écrouissage en densité qui vient d'être rappelée au chapitre précédent. Il permet la détermination du domaine d'application de cette théorie et des paramètres qu'elle introduit. Par la précision expérimentale qu'il fournit et par la mesure de la densité locale qu'il permet, il est adapté au raffinement de la théorie explorée : les expériences réalisées n'ont, pratiquement, que peu de points communs avec les essais triaxiaux de routine bien que leurs résultats soient affectés par les limites et les défauts bien connus de l'essai triaxial (chemin strictement imposé dans l'espace des contraintes et hétérogénéité de la déformation).

La densité d'un échantillon soumis à la sollicitation biaxiale s'obtient couramment par la mesure de la variation de son volume global. Cette méthode fournit une densité moyenne et ne tient pas compte des hétérogénéités locales.

L'appareil que nous décrivons permet d'obtenir une valeur locale de la densité du matériau : la mesure s'effectue par transmission d'un faisceau de rayons GAMMA de quatre millimètres de diamètre. La précision offerte par cette technique mise au point par B. WACK (cf (15)) permet de mettre en évidence les hétérogénéités d'un échantillon qui présente en outre l'originalité d'être mobile en rotation autour de son axe de révolution. L'appareil est schématisé à la figure 1. Les flèches symbolisent la direction d'un déplacement possible.



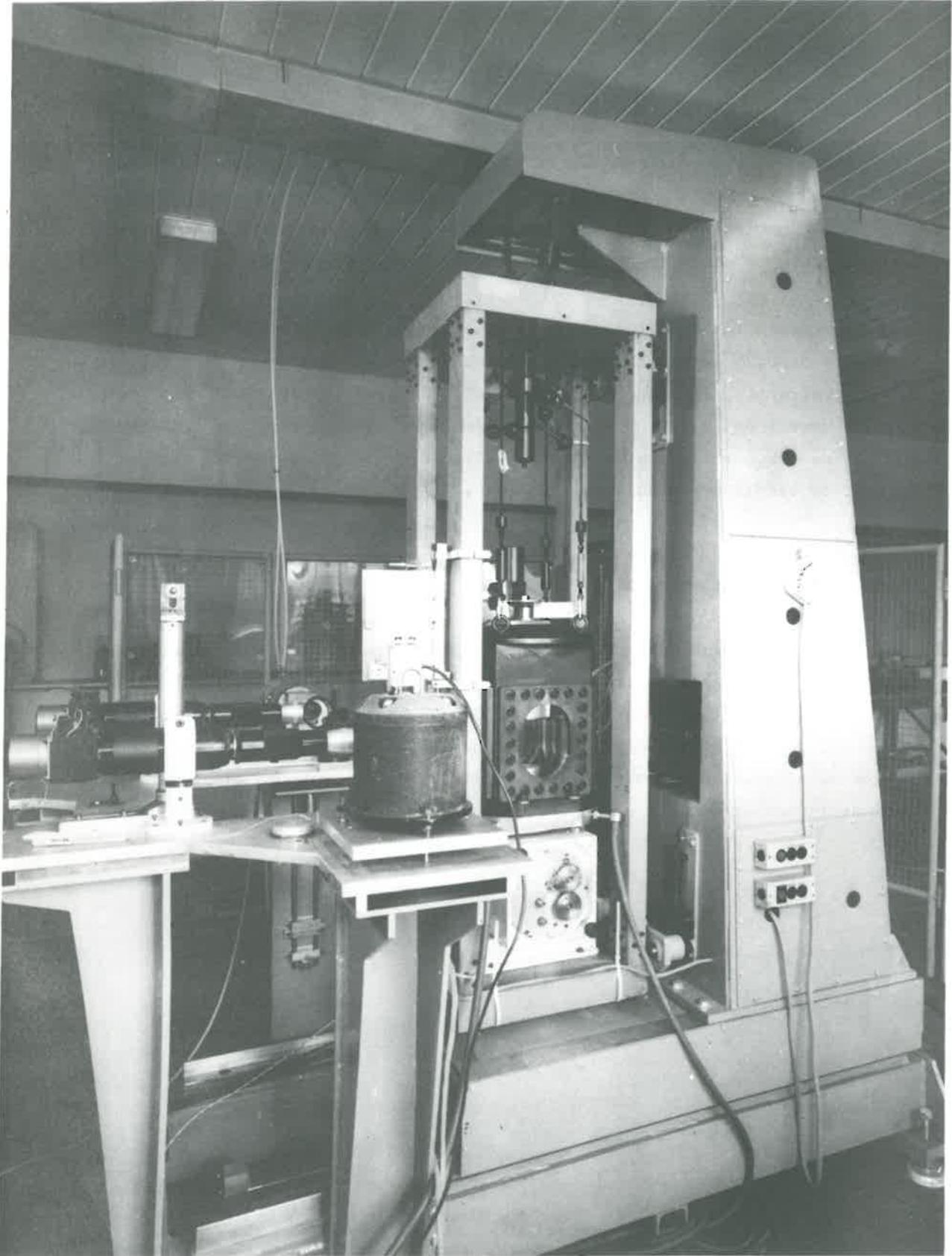
- Figure 1 -

Schéma d'ensemble de l'appareil

L'échantillon cylindrique de matériau (E) est placé au sein de la cellule de pression (P) qui repose sur le plateau d'une presse triaxiale (T) solidaire d'un bâti dénommé "bâti triaxial" (B). Le bâti (B) est suspendu par l'intermédiaire de chaînes au col de cygne (C). Un moteur électrique, d'une puissance de 0,25 kW, placé dans le col de cygne (C), permet le mouvement vertical de (B) par rapport à (C). Cette course verticale est limitée par deux interrupteurs de sécurité. Le contrepoids (D) équilibre le bâti (B) en vue de soulager l'effort du moteur. Le col de cygne (C) se déplace horizontalement le long de deux rails solidaires du socle fixe (S). Un moteur électrique, d'une puissance de 0,25 kW permet un déplacement souple et régulier. Trois interrupteurs de sécurité limitent la course du col de cygne (C) et l'empêchent, d'une part de sortir des rails, d'autre part d'engager intempestivement les parties mobiles de l'appareil dans la zone du faisceau radioactif, troublant ainsi les mesures de références précisées plus loin.

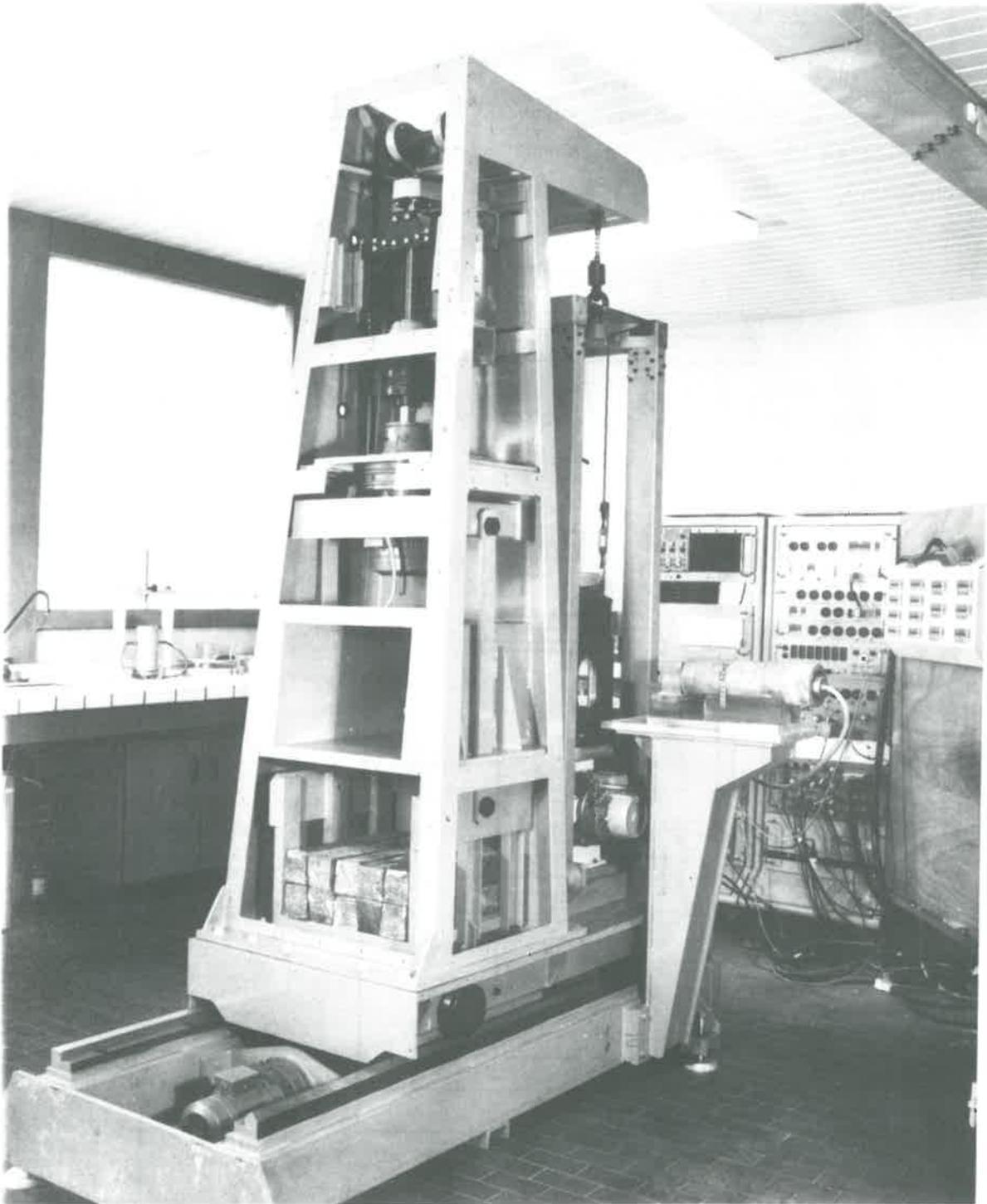
Le socle (S), fixé au laboratoire, supporte la plateforme (M) où prend place le système de mesure (G) de la densité.

Finalement, par rapport au système de mesure (G), l'échantillon (E) est mobile dans un plan vertical : dans la direction horizontale grâce au mouvement de (C) par rapport à (S) et (M), dans la direction verticale grâce au mouvement de (B) par rapport à (C). L'échantillon étant en outre mobile en rotation au sein de la cellule de pression (P), il est possible d'obtenir la valeur de la densité locale en un quelconque de ses points (cf chapitre C).



- Photo 1 -

Ensemble de l'appareil en position de dégagement total

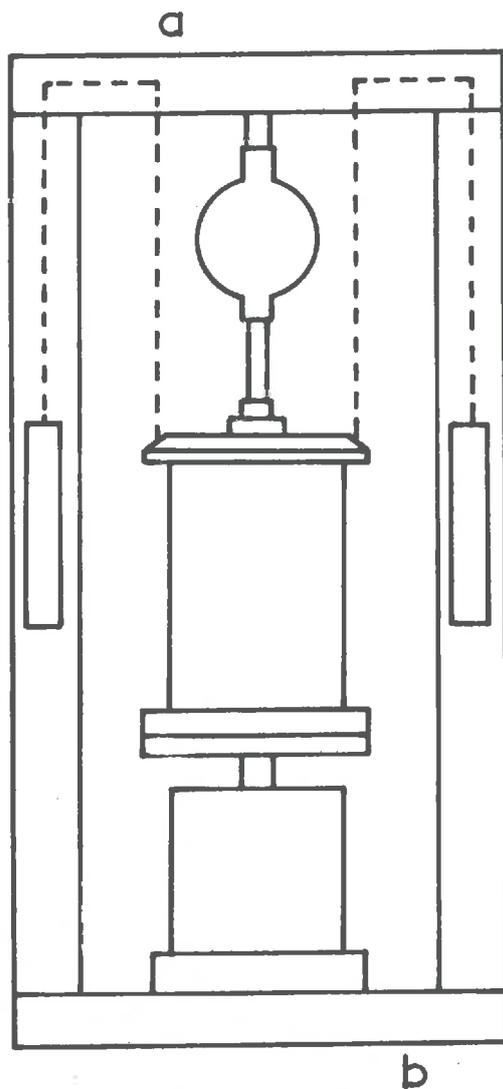


- Photo 2 -

Ensemble de l'appareil en cours de montage

B.II - BATI TRIAXIAL

Deux plaques nervurées (a) et (b) solidarisées par quatre colonnes verticales de section rectangulaire (10 x 5 cm), de 1,5 mètre de longueur, constituent un bâti très rigide suspendu au col de cygne par l'intermédiaire de chaînes.



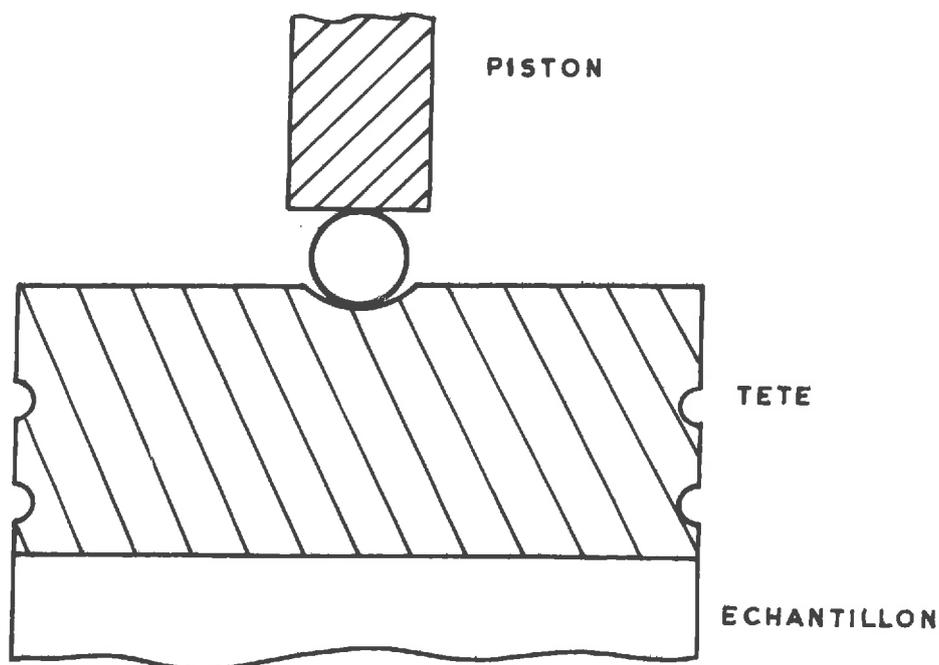
- Figure 2 -

Schéma du bâti triaxial

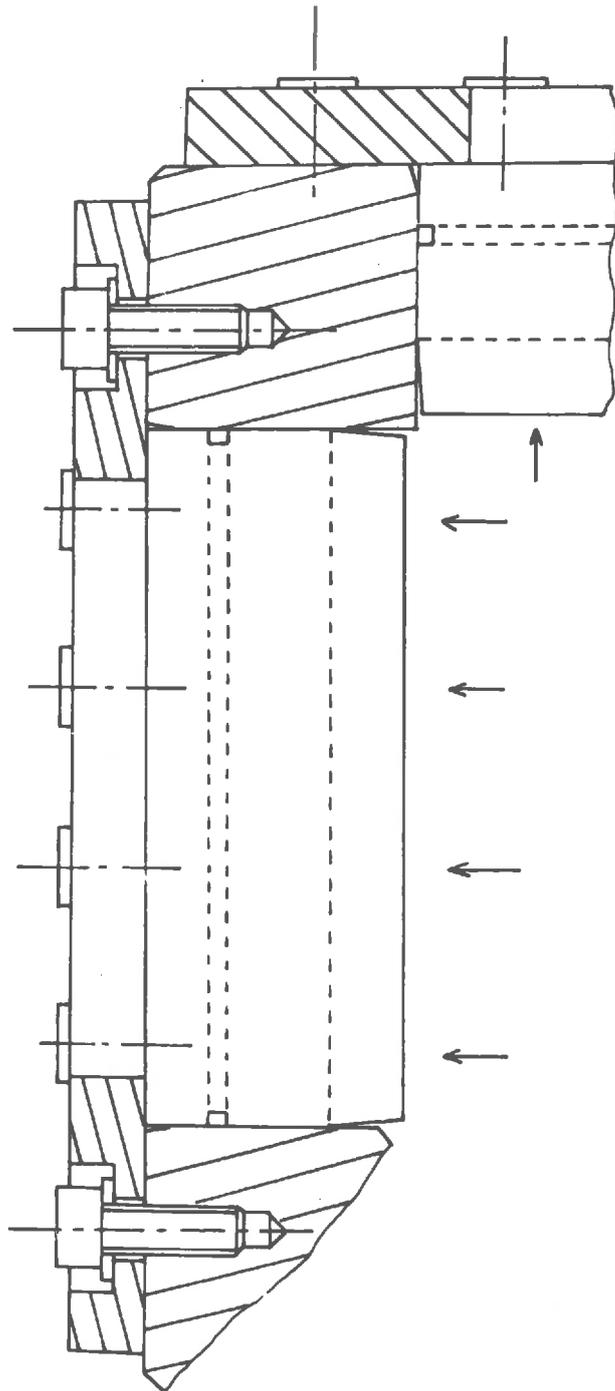
La plaque nervurée (b) supporte une presse électromécanique permettant d'appliquer des vitesses d'écrasement allant de 0,004 mm/mn à 20 mm/mn. Le plateau de cette presse supporte la base de la cellule de pression dont la cloche est suspendue à quatre chaînes munies de contrepoids incorporés aux colonnes du bâti. Un moteur électrique permet de déplacer aisément la cloche (dont le poids dépasse 100 kilos) en agissant sur quatre poulies crantées.

La cellule de pression, fraisée dans la masse, comporte quatre hublots de plexiglass de 5 cm d'épaisseur. L'étanchéité est assurée par deux joints toriques situés entre le hublot et la paroi (cf fig. 3). Leur efficacité croît avec la pression régnant au sein de la cellule. Une plaque de serrage maintient le hublot en position.

Un piston et une tête cylindrique transmettent l'effort axial exercé sur l'échantillon. Généralement, au sein d'une cellule triaxiale, la tête cylindrique en contact avec le matériau est articulée sur le piston (la liaison s'effectuant par l'intermédiaire d'une bille - cf figure 4).



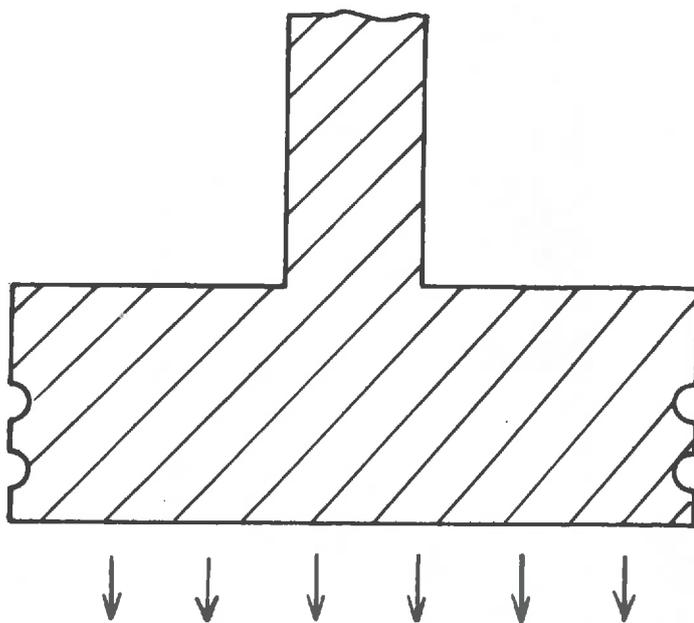
- Figure 4 -



- Figure 3 -

Cellule de pression - Maintien des hublots

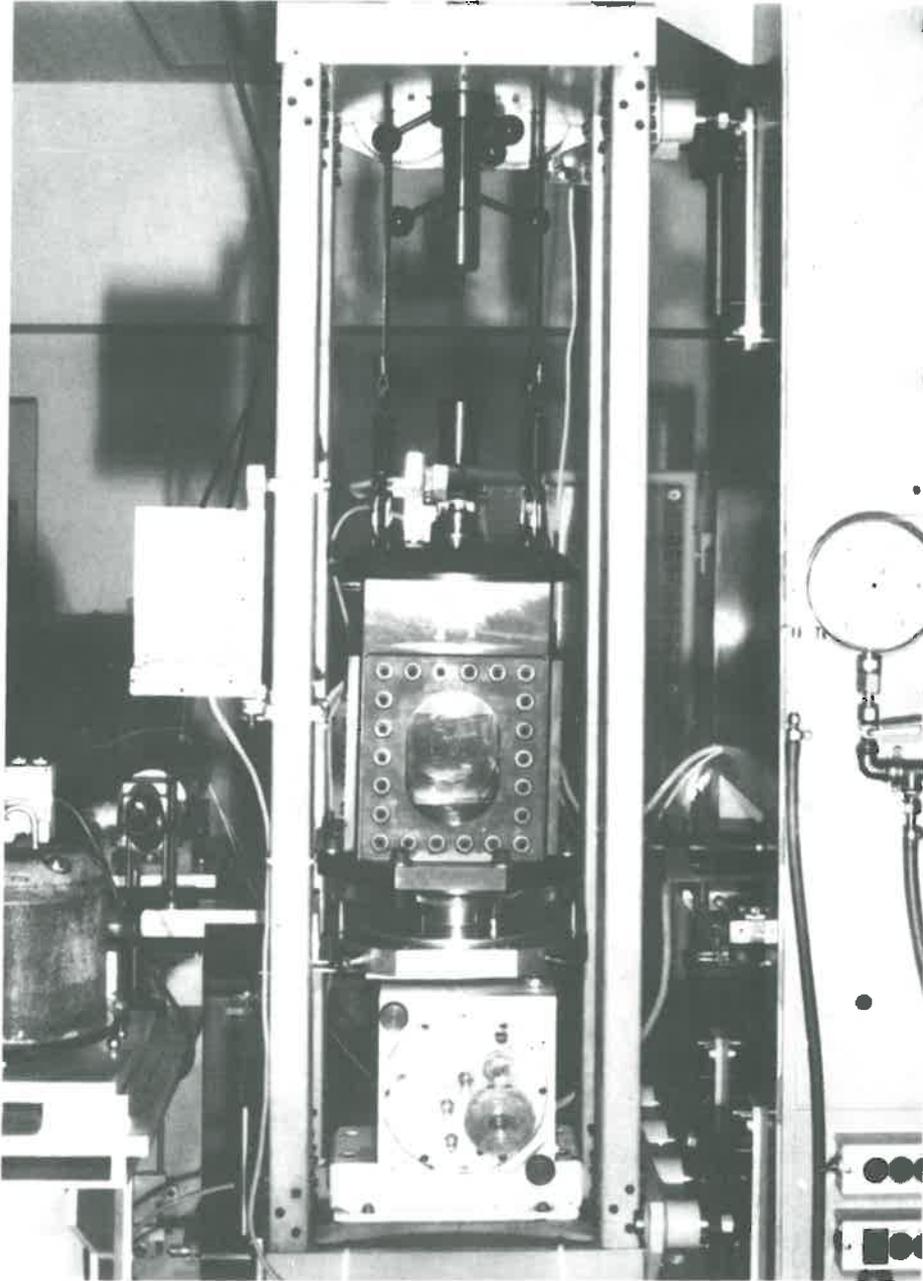
La cellule de pression utilisée ici comporte une tête solidaire du piston : l'extrémité de l'échantillon de sol est animée, au cours de l'écrasement, d'un mouvement de translation dans une direction parallèle à son axe de révolution.



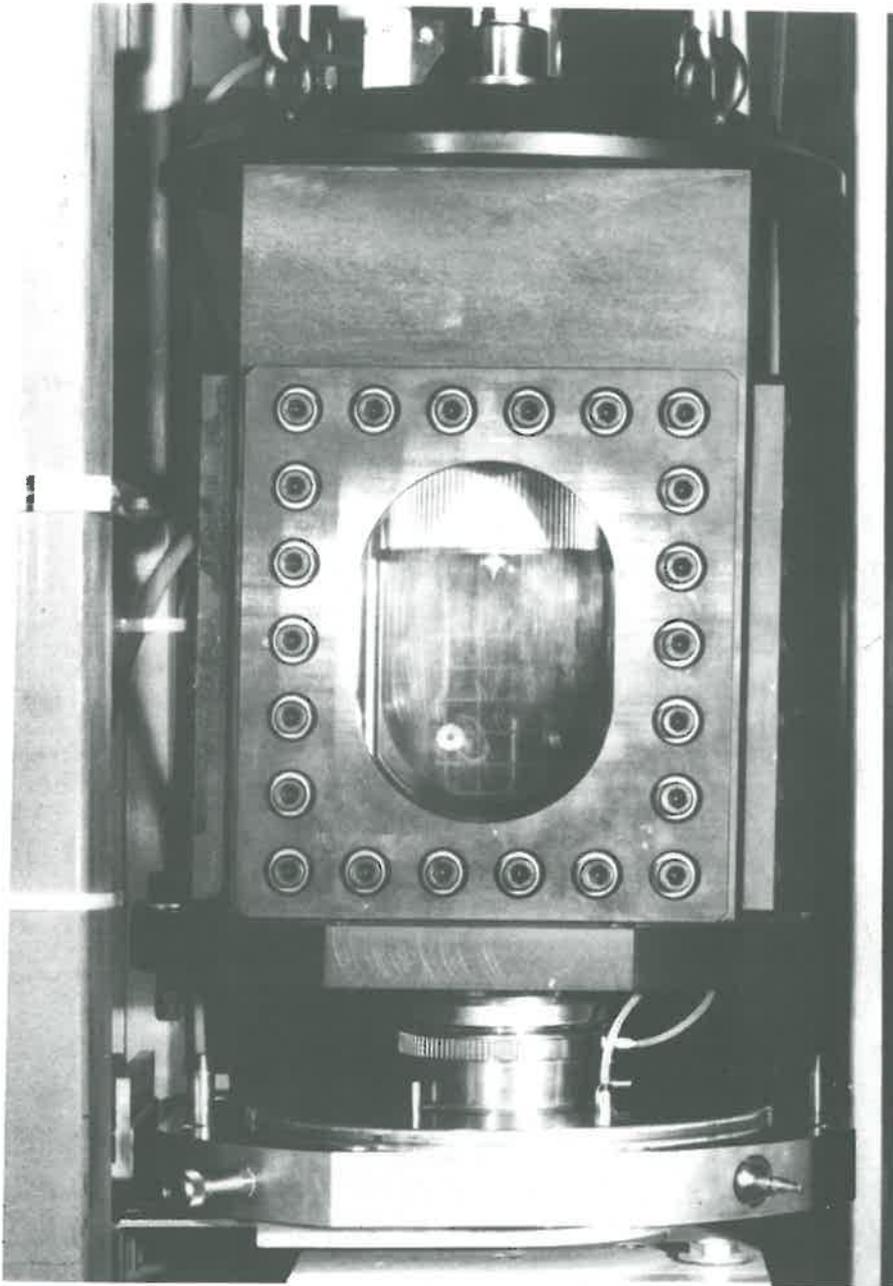
- Figure 5 -

La pression admissible au sein de la cellule est de l'ordre de 40 bars. Elle est appliquée par l'air comprimé. On utilise généralement un fluide incompressible (eau) pour des raisons de sécurité. Son utilisation est impossible ici : la technique de mesure de la densité impose le choix d'un fluide dont le coefficient d'absorption devant le rayonnement GAMMA reste faible.

Au sein de la cellule de pression, l'échantillon est mobile en rotation : un train d'engrenages permet d'entraîner simultanément la base et la tête de l'échantillon dans une rotation de 180° autour de son axe.

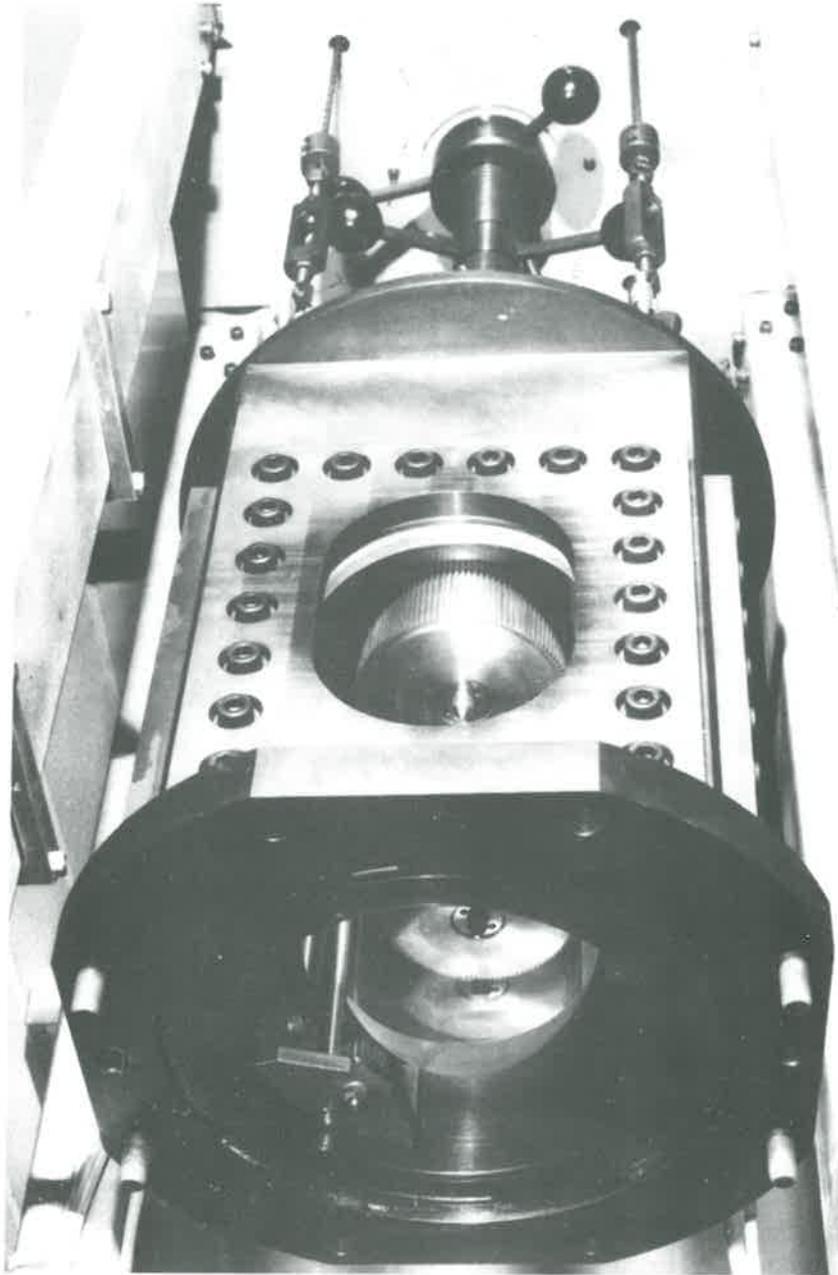


- Photo 3 -
Bâti triaxial



- Photo 4 -

Cellule de pression - Vue générale



- Photo 5 -

Cellule de pression

Train d'engrenages liant la base et la tête de l'échantillon

B.III - PLATEFORME DE MESURE

B.III.1 - Système radioactif

Ce système est destiné à permettre la mesure de la densité. Dans son principe, il utilise essentiellement les modifications subies par un faisceau radioactif au cours de la traversée de la matière. Ici les modifications sont dues aux interactions du rayonnement avec les divers atomes qui constituent le sol. Le rayonnement ne doit pas être complètement atténué : en ce qui concerne nos essais, il doit pouvoir traverser des épaisseurs de sol de l'ordre de 10 centimètres et être encore assez puissant pour être détecté avec une bonne précision. Les sources de rayons GAMMA et les détecteurs à scintillation répondent à ces conditions.

L'intensité du faisceau I , après atténuation à travers une épaisseur l de matière de densité sèche ρ est donnée par l'expression :

$$I = I_0 e^{-\mu \rho l} \quad (1)$$

où I_0 représente l'intensité du faisceau avant la mise en place du sol.

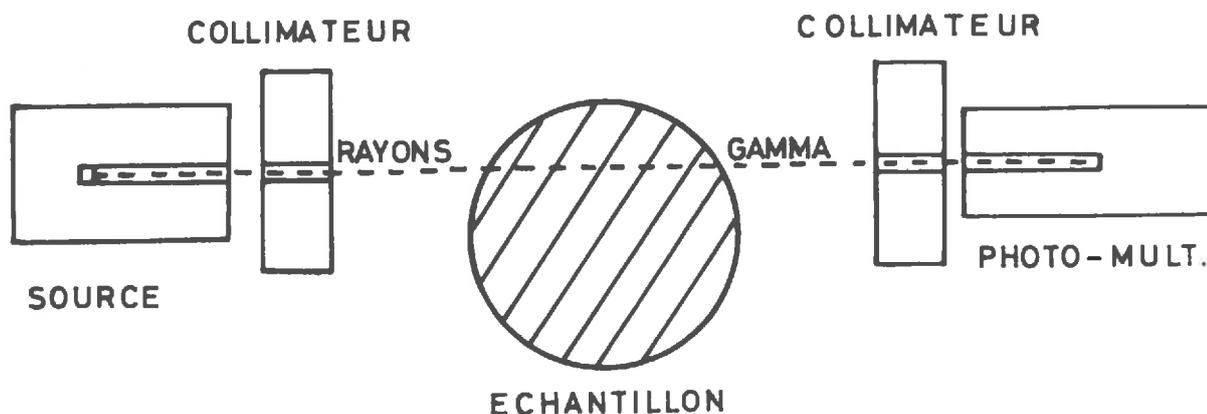
μ est une caractéristique du matériau et représente le coefficient d'absorption massique. Les intensités I et I_0 sont proportionnelles aux taux de comptage N et N_0 produits dans l'ensemble de détection. On obtient donc :

$$\rho = \frac{1}{\mu l} \text{Log} \frac{N}{N_0} \quad (2)$$

La détermination de ρ , nécessite par conséquent une mesure préalable de μ et N_0 et l'évaluation du taux de comptage N et de l'épaisseur de matériau l prise en compte par le faisceau de rayons GAMMA.

Les sources de rayons GAMMA sont nombreuses et offrent un choix très large d'énergies et de périodes. Deux produits radioactifs répondent à nos besoins : rayonnement énergétique et de longue période. Il s'agit du Césium 137 et du Cobalt 60. Le Césium 137 nécessite des protections plus légères. Sa période est élevée : 32 ans et sa puissance suffisante : 0,662 MeV. La source de Césium 137 est protégée par un container en plomb de 8 cm d'épaisseur.

La détection du rayonnement s'effectue à l'aide d'un compteur à scintillation : quand le rayonnement GAMMA traverse le scintillateur, il se produit une excitation des atomes qui, en revenant à l'état stable, émettent des photons lumineux. Un photomultiplicateur accolé au cristal du scintillateur détecte le rayonnement lumineux. L'impulsion électrique résultante est proportionnelle à l'énergie du rayonnement GAMMA qui l'a engendré. Le scintillateur de 50 mm d'épaisseur est du type à iodure de sodium. Le photomultiplicateur est stabilisé en température par une circulation d'eau. Deux collimateurs de 4 mm de diamètre définissent le faisceau utile en éliminant tout rayonnement diffusé. La géométrie de mesure, c'est-à-dire la disposition relative de la source, du détecteur et de l'échantillon de sol est celle représentée sur la figure 6, dite par transmission : source et détecteur sont de part et d'autre de l'échantillon.



- Figure 6 -
Géométrie de mesure

B.III.2 - Système de télémétrie optique

La formule B.III.1 (2) montre que, une fois obtenue la masse surfacique à l'aide du système radioactif précédent, il reste à mesurer avec précision la corde prise en compte par le faisceau de rayons GAMMA. L'échantillon soumis à la sollicitation triaxiale au sein de la cellule de pression n'est pas accessible.

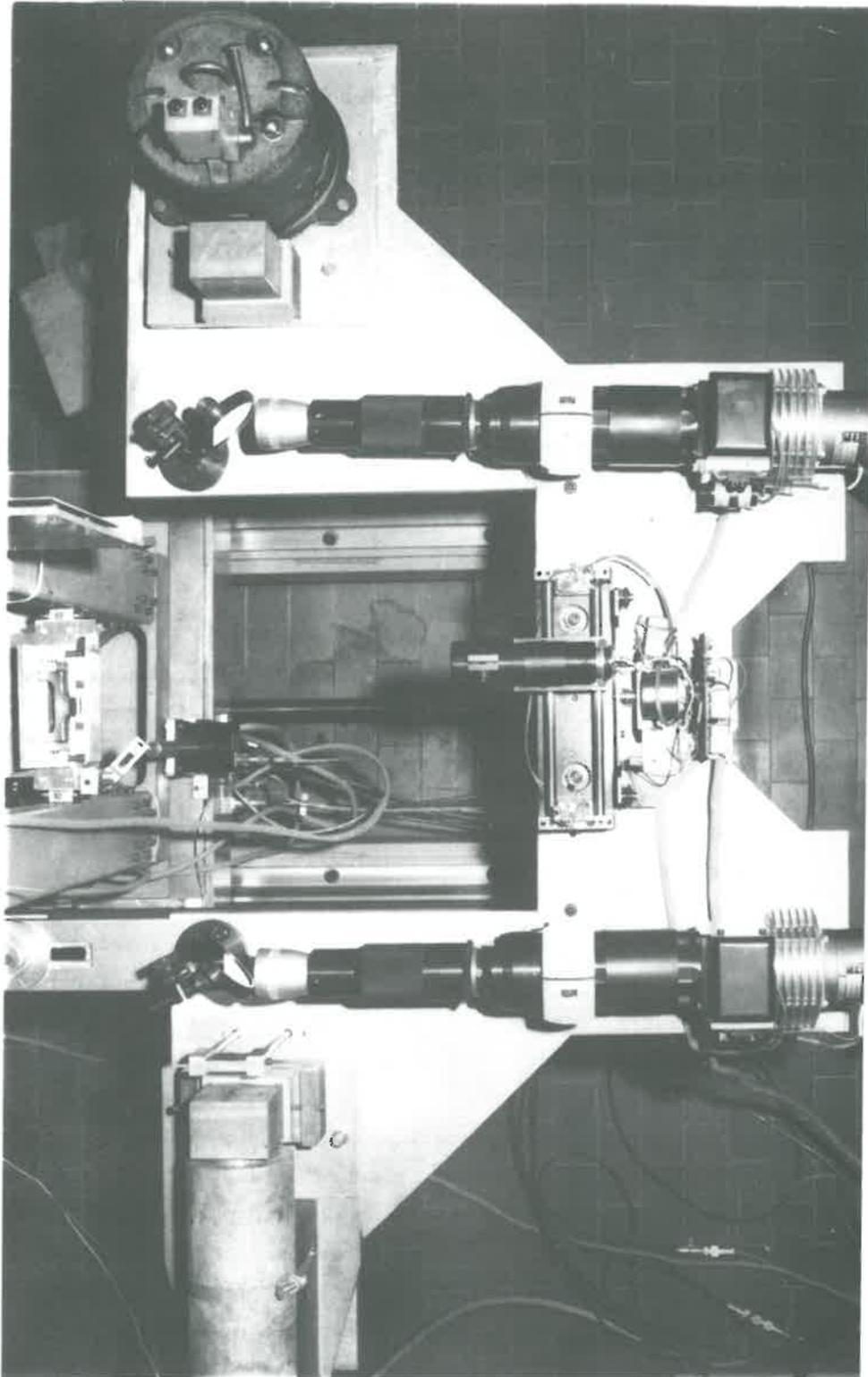
Un système de télémétrie optique a été mis au point. La solution adoptée est représentée à la figure 7.

Un ensemble optique, constitué des projecteurs E et des miroirs M, fournit sur l'échantillon deux taches lumineuses T. L'axe optique TT coïncide avec l'axe GG du faisceau de rayons GAMMA.

La focalisation de la tache à une distance constante de l'axe GG permet à une cellule photo-électrique C1, mobile parallèlement à cet axe, de la détecter. L'échantillon a la possibilité de se déplacer dans le plan LL par rapport à l'ensemble du système de mesure qui est fixe : les taches T peuvent se situer de l'autre côté du plan diamétral AA de l'échantillon. Une deuxième cellule C2 permet alors de les détecter. Un système électronique compte les impulsions dues à la rotation du moteur synchrone d'entraînement entre un point fixe D et chacune des deux taches détectées. A partir de la fréquence d'alimentation du moteur et des caractéristiques du dispositif d'entraînement, nous évaluons la distance qui sépare le point fixe D de l'échantillon. Ce procédé de télémétrie optique fournit la valeur de la corde par différence des deux distances séparant le point fixe D de chacune des taches.

Cette évaluation de la longueur de la corde prise en compte par les rayons GAMMA s'effectue à deux dixièmes de millimètres près. Dans les conditions de mesures les plus défavorables, c'est-à-dire pour des cordes TT éloignées du plan diamétral AA, la précision est de l'ordre de 0,5 %.

Signalons que la plateforme de mesure supporte également une cale de référence qui se place devant le collimateur (figure 6) lorsque l'échantillon est dégagé totalement de la zone de mesure (cas schématisé sur la figure 1). Cette cale permet d'effectuer les taux de comptage de référence et évite à la source d'irradier directement dans le détecteur photomultiplicateur.



- Photo 6 -
Plateforme de mesure

B.IV - AUTOMATISME ET MANIPULATION

L'appareil permet essentiellement d'obtenir :

- la relation effort-déformation
- la relation densité-déformation.

Ces résultats sont l'aboutissement d'un processus semi-automatique dont nous présentons une description détaillée. Il est commode de distinguer deux types de mesures qui seront qualifiées de dynamique et de statique.

- a - Au cours de l'écrasement, nous procédons toutes les trente secondes à une mesure dynamique en un seul point de la zone centrale de l'échantillon. Dans les mêmes conditions, sont mesurées les déformations et efforts ausens de l'essai biaxial ordinaire.
- b - De plus, pour des états de déformation préalablement choisis (0, 2, 5, 10, 20, 30, 40 %) et alors que l'écrasement est interrompu, nous effectuons une exploration statique complète de la densité de l'échantillon. Cette mesure statique est réalisée en 48 points différents suivant trois directions (16 points de mesure par prospection dans une direction). Elle permet d'obtenir une cartographie de la densité.

Le déroulement de l'expérience comprend donc deux genres de manipulations différentes : l'une, originale, du type statique, est une exploration de la densité, l'autre classique, du type dynamique est une mesure biaxiale ordinaire simplement complétée par un point de mesure de densité.

En chaque point de mesure, statique ou dynamique, les données expérimentales suivantes sont évaluées : deux capteurs de déplacement fournissent la position du point où s'effectue la mesure de densité par rapport à l'axe de l'échantillon (cote horizontale), et par rapport au socle fixe de l'appareil (cote verticale), un capteur fournit la déformation de l'échantillon, un anneau dynamométrique l'effort axial qu'il subit. Une échelle de comptage donne l'atténuation du faisceau de rayons GAMMA pour un taux de comptage obtenu au photomultiplicateur pendant un intervalle de temps imposé (20 secondes).

Le système électronique accompagnant la télémétrie optique fournit deux comptages représentant les distances séparant le point fixe de chacune des deux taches rencontrées par la cellule photoélectrique.

Toutes ces mesures analogiques sont transformées par une centrale électronique en valeurs numériques. L'ensemble constitue un cycle de mesures qui est perforé sur bandes. Nous présentons le tableau des différentes informations contenues dans les voies perforées au cours d'un cycle de mesure.

Voie	Information
03	Type de cycle (point de déformation ou d'exploration . N° anneau utilisé. Orientation de l'échantillon)
04	Départ comptage GAMMA ; départ cellules des récepteurs optiques
07	Retard de 10 secondes pour déplacement des récepteurs optiques
11	N° essai
21	Potentiomètre vertical
22	Potentiomètre horizontal
30	Compteur 1 récepteur gauche
31	Compteur 2 récepteur gauche
32	Horloge (instant de la mesure)
33	Potentiomètre anneau
34	Potentiomètre déformation
40	Compteur 1 récepteur droit
41	Compteur 2 récepteur droit
42	Alimentation potentiomètre (10 V)
66	Intervalle de temps du comptage (20 s)
67	Comptage
68	Départ déplacement échantillon
69	Code fin de cycle

Au cours d'une exploration de la densité, les déplacements de l'échantillon entre deux points de mesure successifs ainsi que l'évaluation des variables expérimentales et leur enregistrement sont programmés et entièrement automatiques : un doigt de masse fixe, solidaire de la plateforme de mesure (M) (cf figure 1), se déplace sur une plaquette de contacts mobile, solidaire de l'échantillon.

Nous présentons à l'Annexe IV les différentes opérations, nécessaires à une manipulation, dans l'ordre où elles doivent être effectuées. Leur nombre, comme la durée d'un essai complet, justifie l'automatisme réalisé sur cet appareil.

B.V - DEPOUILLEMENT DES RESULTATS

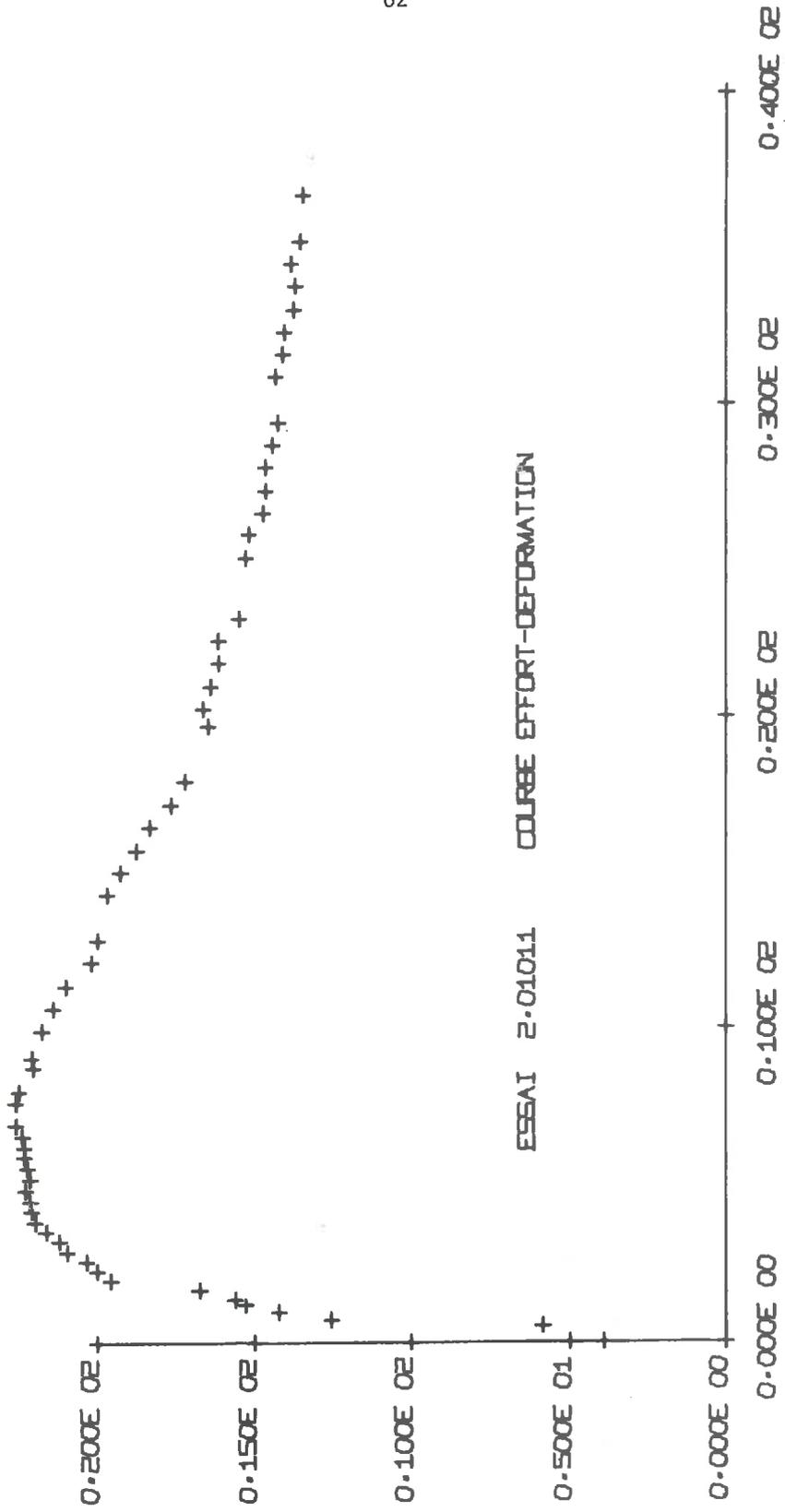
Le dépouillement s'effectue sur ordinateur. Pour chaque cycle de mesure, nous obtenons la contrainte $\sigma_1 - \sigma_3$, la déformation ϵ de l'échantillon, la densité ρ , la cote et l'excentricité du point où s'effectue la mesure. Après le tracé des courbes densité-déformation et contrainte-déformation, l'ordinateur fournit les cartographies des densités obtenues au cours des explorations aux différents états de déformation de l'échantillon.

Nous présentons à l'Annexe V les programmes FORTRAN qui permettent ce dépouillement automatique.

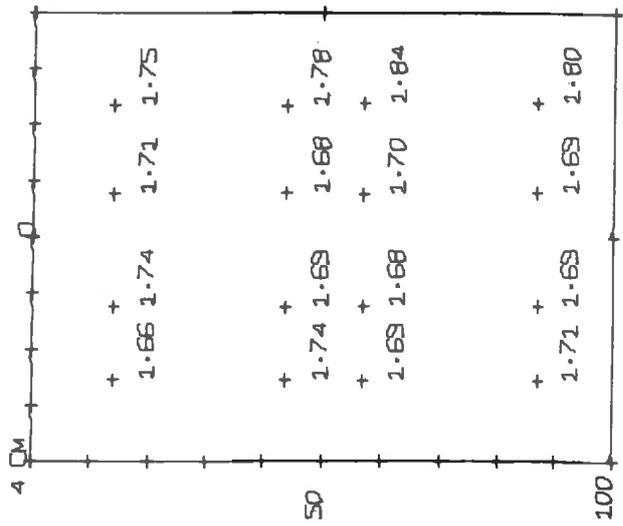
L'ensemble des documents fournis par le calcul à l'issue du dépouillement d'un essai se décompose ainsi :

- a - Les résultats complets pour chaque cycle de mesures
- b - Mesures dynamiques : les courbes effort et densité-déformation. Notons que l'espacement des points correspond à la vitesse d'écrasement (1 mm/mn) et à la fréquence des mesures (1 point toutes les 30 secondes).
- c - Mesures statiques : pour chaque état de déformation, le calcul fournit la cartographie de densité, dans les trois directions de mesure.

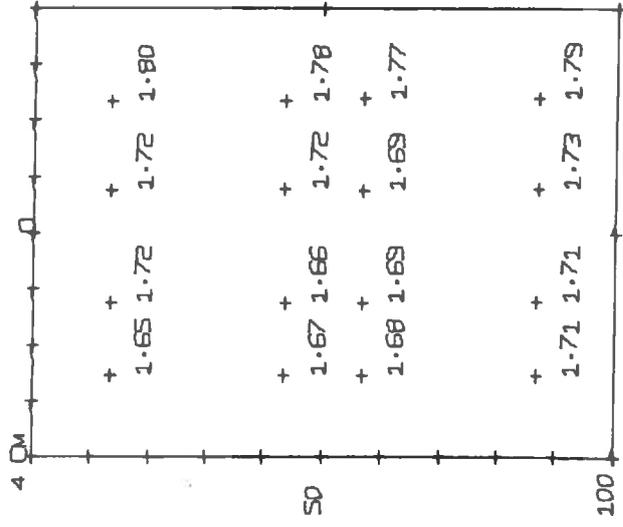
Nous présentons le dépouillement complet d'un essai effectué sur un échantillon de sable soumis à 10 bars de pression latérale constante et à une vitesse d'écrasement de 1 mm/mn.



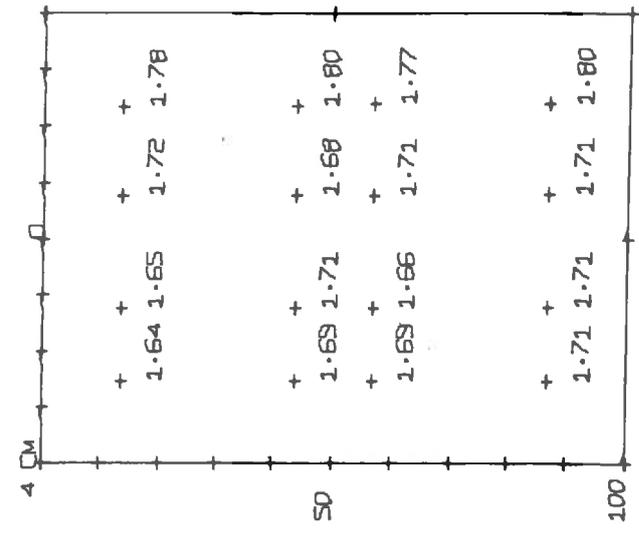
ESSAI NO 2-01011 DEFOR. 1.378



DIR. 0.000

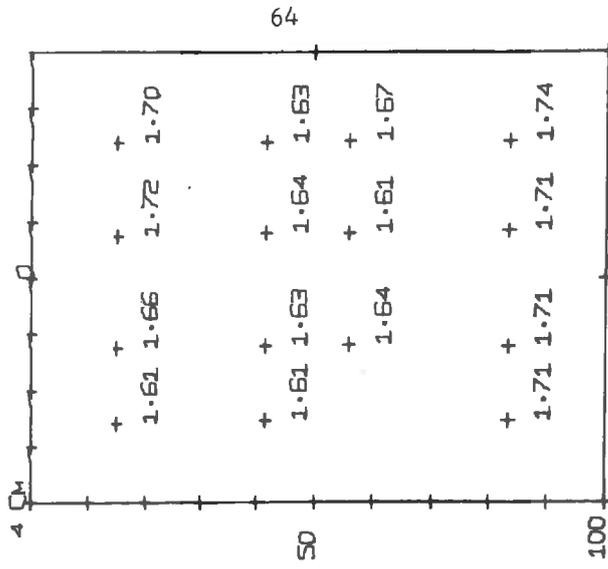
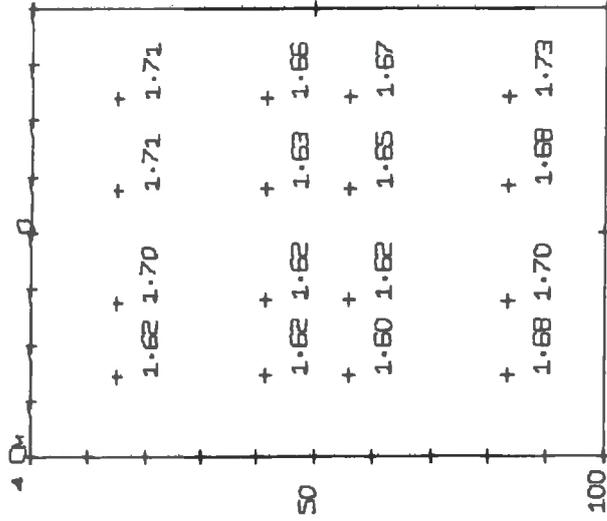
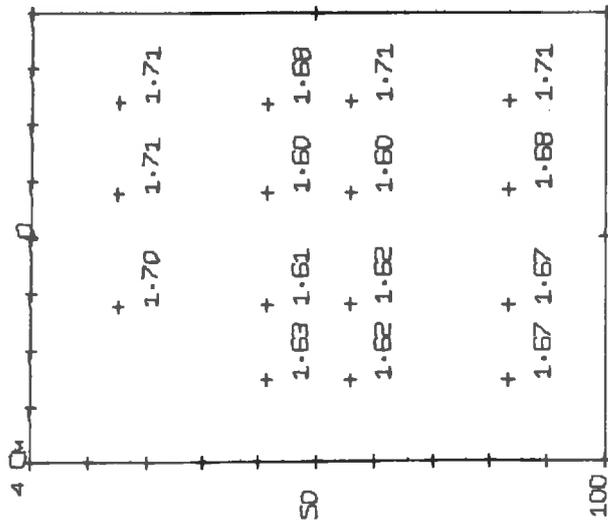


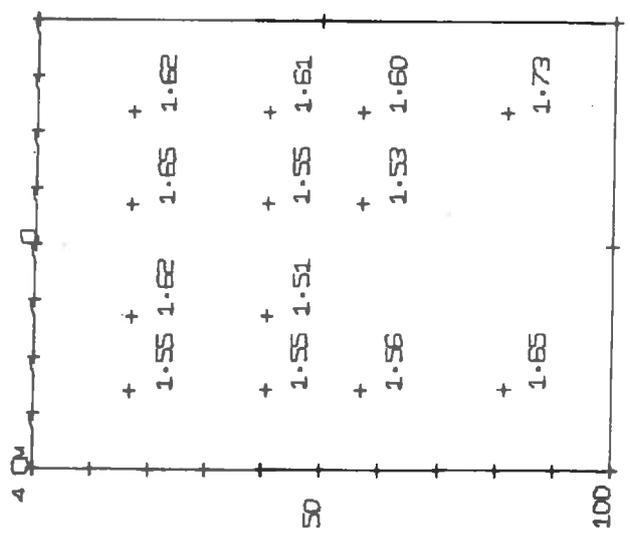
DIR. 60.000



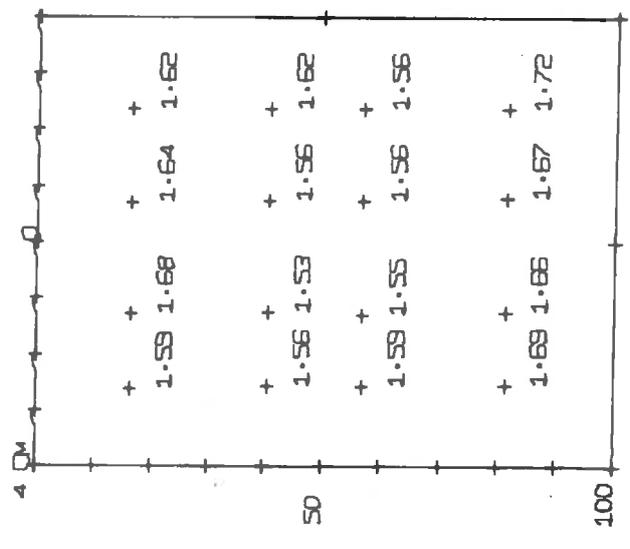
DIR. 120.000

ESSAI NO 2-01011 DEFOR. S.165

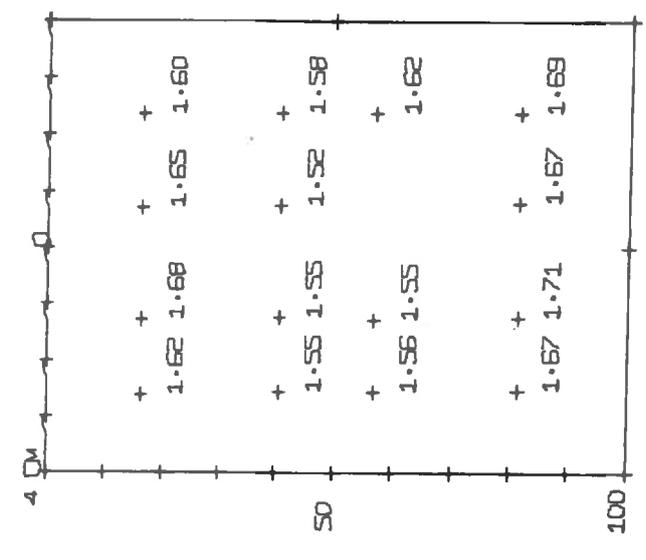




DIR. 0.000



DIR. 60.000



DIR. 120.000

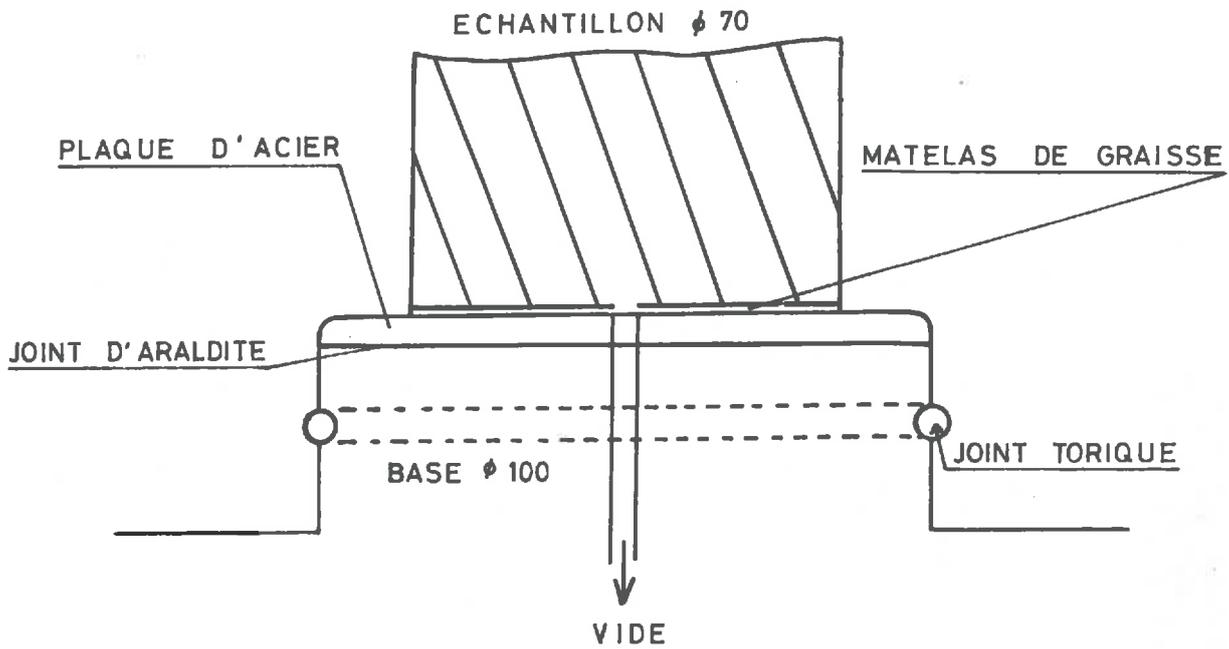
B.VI - ANTIFRETTAGE

Dans l'essai triaxial ordinaire, un frettage considérable aux extrémités de l'échantillon provoque une déformation en tonneau, caractéristique : le champ des déformations n'est pas homogène.

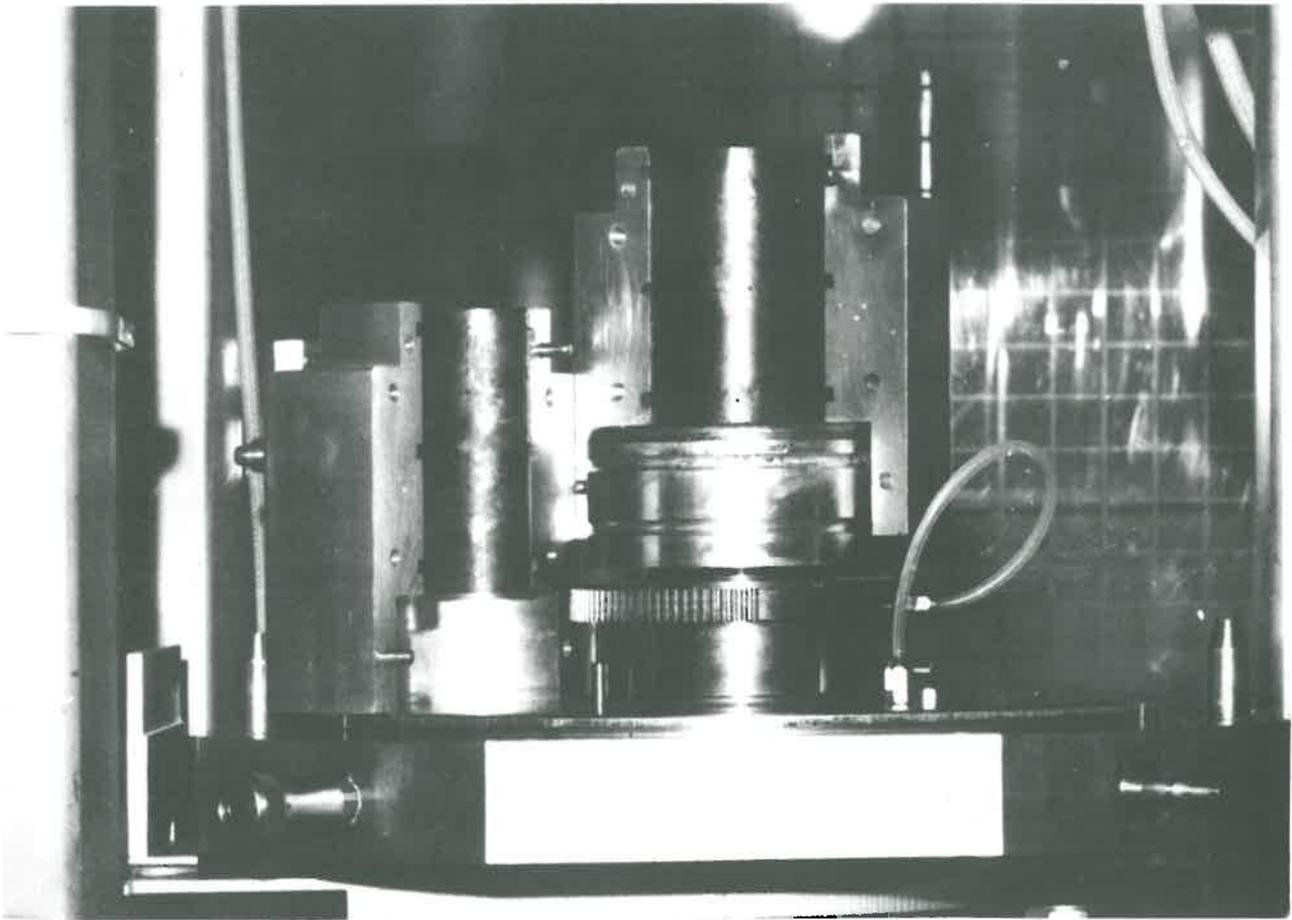
De nombreux auteurs se sont efforcés de mettre en oeuvre des procédés mécaniques diminuant le frettage (cf (4), (7), (11)). La plupart de ces procédés sont délicats à mettre en oeuvre et rendent inexploitable une proportion importante d'essais. Le procédé employé ici est celui décrit par ROWE et BARDEN (cf (8)). Il combine les effets d'une bonne lubrification et d'un élan- cement réduit de l'échantillon dont la hauteur initiale est choisie égale à son diamètre.

L'échantillon (diamètre initial 7 cm, hauteur initiale 9 cm) repose sur une base à très bon état de surface (acier dur XC38 traité et rectifié) de 10 cm de diamètre. Un matelas de graisse est incorporé entre l'échantillon et la base. Nous employons la graisse que les chercheurs de Karlsruhe utilisent pour les essais réalisés sur leur triaxial tridimensionnel.

La figure 8 présente le schéma du procédé d'antifrettage employé.

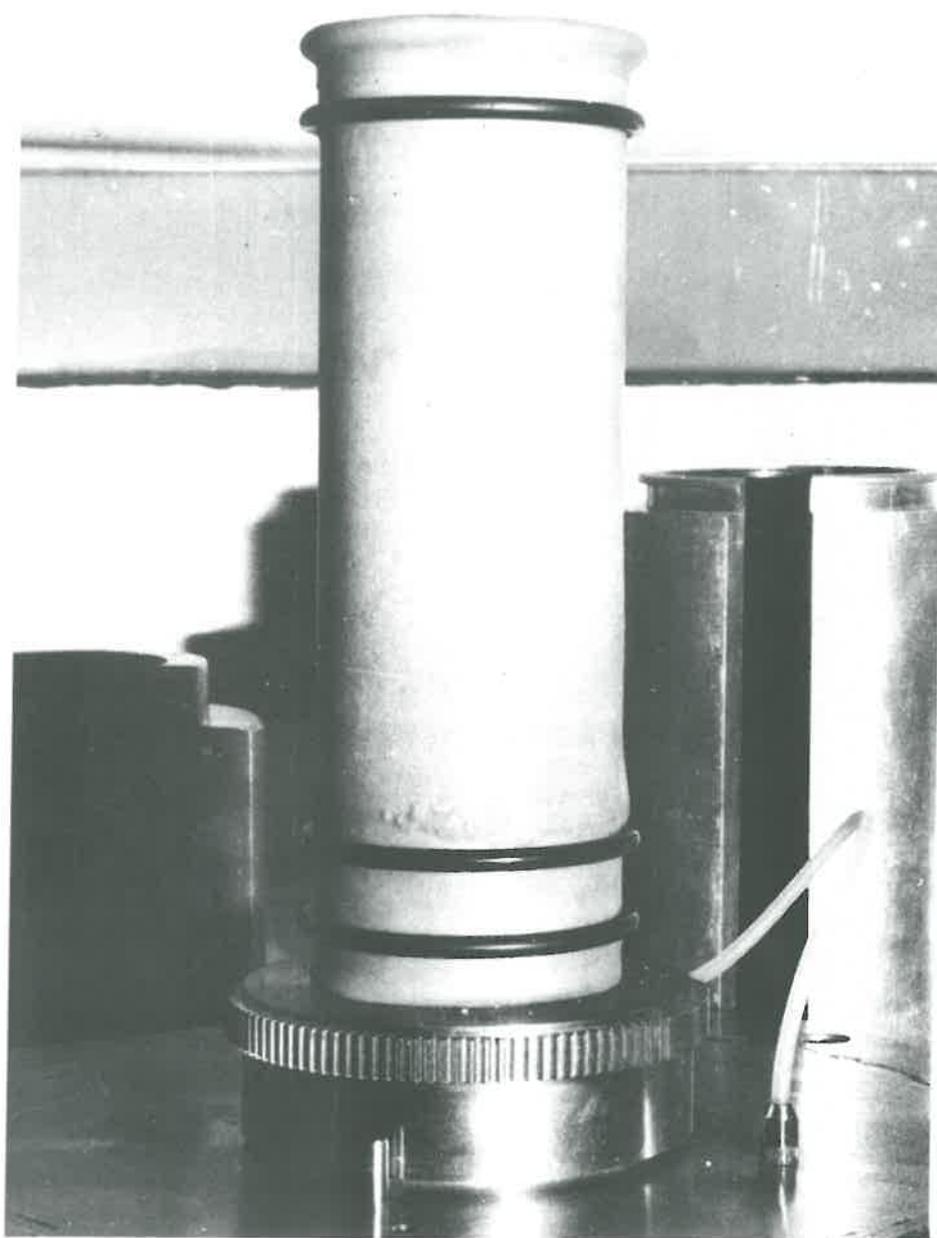


- Figure 8 -
Système d'antifrettage



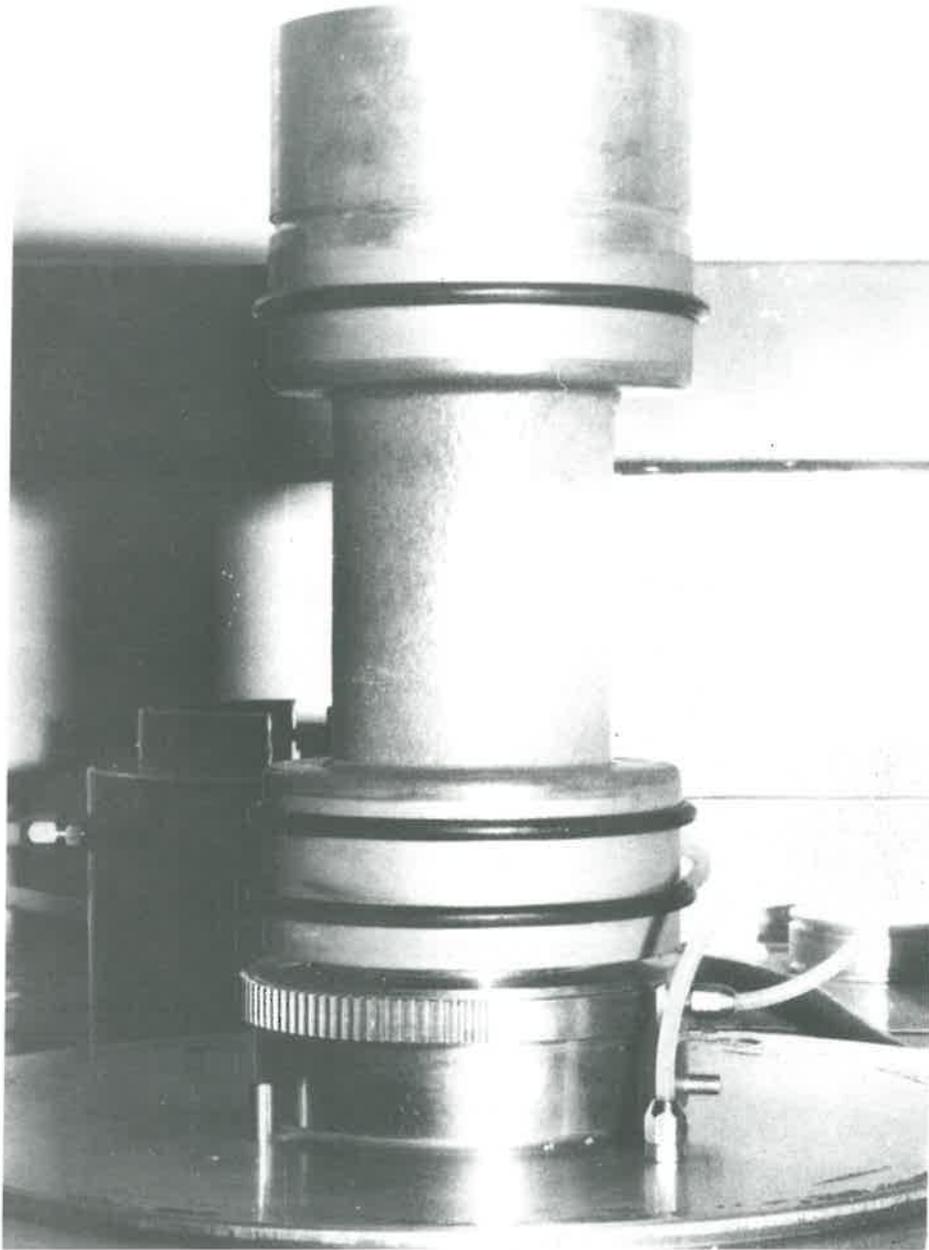
- Photo 7 -

Moule permettant la confection des échantillons



- Photo 8 -

Echantillon classique à l'état initial



- Photo 9 -

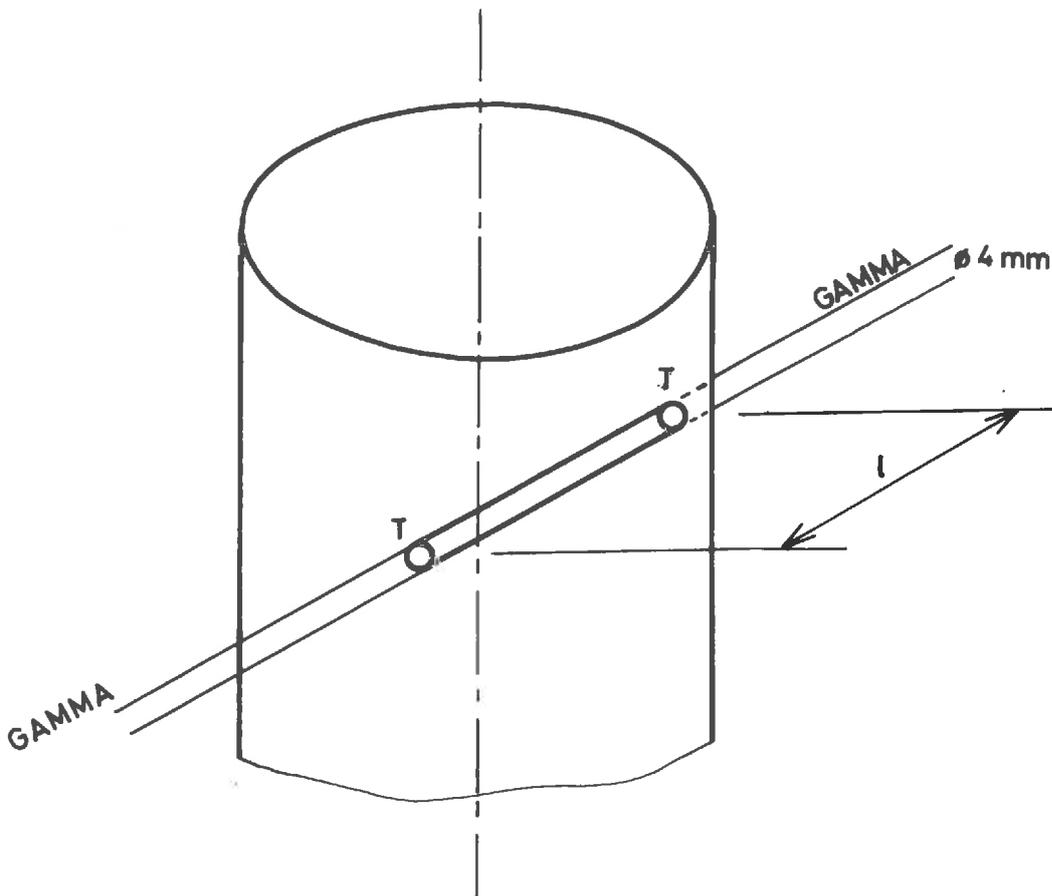
Echantillon antifretté à l'état initial

CHAPITRE C

RESULTATS EXPERIMENTAUX :
Détermination des paramètres de la loi

C.I - DENSITE LOCALE AU SEIN DE L'ECHANTILLON

La plateforme de mesure présentée au chapitre B fournit une valeur de la masse surfacique associée à la masse totale de matériau provoquant l'atténuation du faisceau des rayons GAMMA (cf B.III.1).



- Figure 1 -

Volume de matériau pris en compte par les rayons GAMMA

Nous obtenons ainsi, après mesure de la longueur l , la densité moyenne du matériau le long de la corde TT (cf figure 1).

Les expériences de WACK (cf (15)) ont montré que les surfaces isodensité sont régulières (allure de parabolôïde).

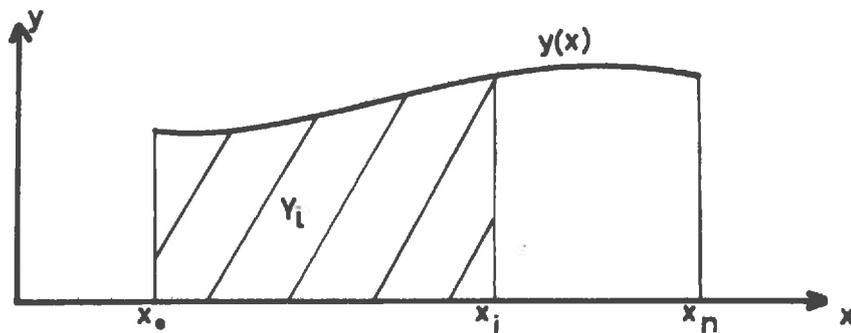
Nous supposons ici que ces surfaces sont de révolution et possèdent même axe que l'échantillon cylindrique du matériau.

Dans ces conditions, il est possible d'obtenir une bonne estimation d'une série discrète de valeurs de la densité locale, à partir d'une série discrète de valeurs expérimentales portant sur des intégrales de cette densité.

Nous utilisons un opérateur analogue à la matrice de dérivation qui nous permet d'obtenir une série discrète de valeurs des dérivées y_i d'une fonction $y(x)$ aux points x_i , y_i (cf A.II.2) sous la forme matricielle :

$$\dot{Y} = DY$$

De la même façon, nous pouvons introduire un opérateur qui fournit les intégrales Y_i d'une fonction $y(x)$ entre l'origine de la base discrète de définition (cf A.II.2) et le point x_i , y_i .



En écriture matricielle, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} Y_1 = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx \\ Y_i = \int_{x_0}^{x_i} y(x) dx \\ Y_n = \int_{x_0}^{x_n} y(x) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int T \\ T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 = y(x_1) \\ y_2 = y(x_2) \\ y_i = y(x_i) \\ y_n = y(x_n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

où la matrice T est définie par la relation A.II (7) et où la matrice $\int T$

se constitue, comme T, en mettant en oeuvre des formules de récurrence. La relation (1) est équivalente à :

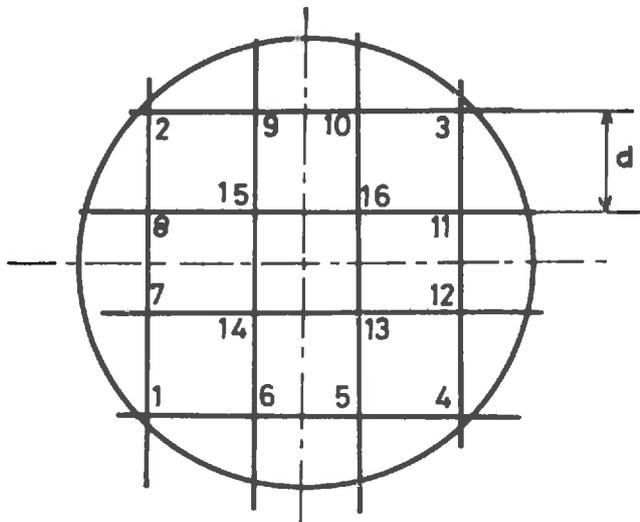
$$I = \bar{D} Y \quad (2)$$

Dans le cas de la mesure non destructive de la densité décrite au chapitre B, la plateforme fournit l'intégrale de la densité le long de la corde, c'est-à-dire, en se référant aux notations utilisées dans (1), la quantité Y_n .

La relation (2) nous permet d'écrire :

$$Y_n = \bar{D}_{n1} y_1 + \dots + \bar{D}_{ni} y_i + \dots + \bar{D}_{nn} y_n \quad (3)$$

Considérons le damier à mailles carrées, de pas d, schématisé ci-dessous (cf figure 2).



- Figure 2 -

Maillage d'une section droite de l'échantillon

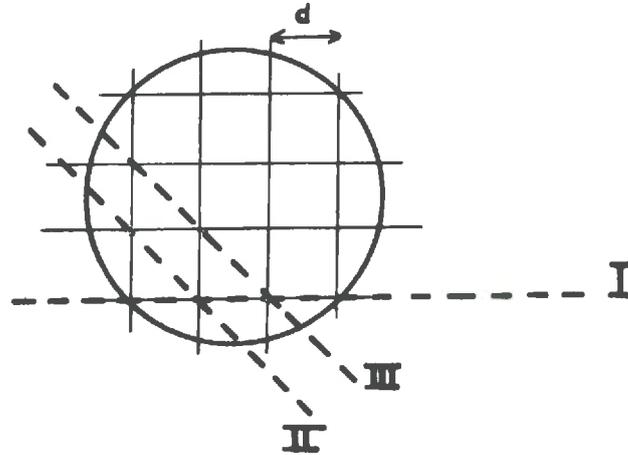
Aux points 1, 2, 3, 4, les densités sont égales (d'après l'hypothèse de symétrie de révolution des surfaces iso-densité) :

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \rho_1$$

Il en est de même aux points 5, 6, ..., 12 (ρ_2) et aux points 13, ..., 16 (ρ_3). D'une manière générale si le nombre de visée dans une direction est

égal à n , il faudra déterminer $n-1$ inconnues.

Effectuons trois mesures de densité moyenne ($I_j = m_j \rho_j$; $j = 1, 2, 3$) dans les trois directions I, II, III indiquées à la figure 3. Ces trois directions sont à des distances de l'axe de l'échantillon respectivement égales à $\frac{3}{2}d$, $\sqrt{2}d$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}d$.



- Figure 3 -
Directions de mesure

D'après (3), nous obtenons :

$$I_1 = \bar{D}_{4,1}^4 \rho_1 + \bar{D}_{4,2}^4 \rho_2 + \bar{D}_{4,3}^4 \rho_2 + \bar{D}_{4,4}^4 \rho_1$$

$$I_2 = \bar{D}_{2,1}^2 \rho_2 + \bar{D}_{2,2}^2 \rho_2 \quad (4)$$

$$I_3 = \bar{D}_{3,1}^3 \rho_2 + \bar{D}_{3,2}^3 \rho_3 + \bar{D}_{3,3}^3 \rho_2$$

où les scalaires $\bar{D}_{i,j}^m$ sont les éléments i, j de la matrice d'intégration \bar{D} construite sur la base discrète de m points ($m = 4$ pour la mesure de direction I, $m = 2$ pour la direction II, $m = 3$ pour la direction III).

Le système (4) s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{4,1}^4 + \bar{D}_{4,4}^4 & \bar{D}_{4,2}^4 + \bar{D}_{4,3}^4 & 0 \\ 0 & \bar{D}_{2,1}^2 + \bar{D}_{2,2}^2 & 0 \\ 0 & \bar{D}_{3,1}^3 + \bar{D}_{3,3}^3 & \bar{D}_{3,2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

d'où nous tirons ρ par inversion.

Nous obtenons ainsi la valeur de la densité locale à trois distances de l'axe de l'échantillon, dans l'hypothèse, justifiée par les résultats expérimentaux obtenus, où le champ de densité est de révolution.

Nous présentons à l'Annexe VI le programme de calcul écrit en FORTRAN.

C.II - ESSAIS TRIAXIAUX : CONDITIONS EXPERIMENTALES ET RESULTATS QUALITATIFS

C.II.1 - Conditions expérimentales

L'ensemble de nos essais a été effectué sur un sable sec calibré à granulométrie comprise entre 0,8 et 1 mm.

Les particules fines qui apparaissent par suite de la cassure des grains sont systématiquement éliminées entre chaque essai.

La cellule de pression utilisée, décrite au chapitre B, nous permet de travailler jusqu'à des pressions de l'ordre de 40 bars. Cependant, diverses contraintes matérielles nous ont interdit d'opérer à une pression supérieure à 15 bars. Nous avons donc réalisé des essais à 2 bars, 5 bars et 10 bars.

Dans ces conditions, les densités initiales moyennes obtenues varient entre 1,55 et 1,70 (densité mesurée après application des pressions latérales).

Des essais classiques ont été effectués sur des échantillons de 15 cm de haut et de 7 cm de diamètre : aucun système n'est en place pour diminuer le frottement aux extrémités et les points significatifs de mesure de densité sont concentrés dans la zone ventrale de l'échantillon.

Le système d'antifrottement décrit au chapitre B a été mis en oeuvre sur des échantillons de 9 cm de hauteur pour 7 cm de diamètre.

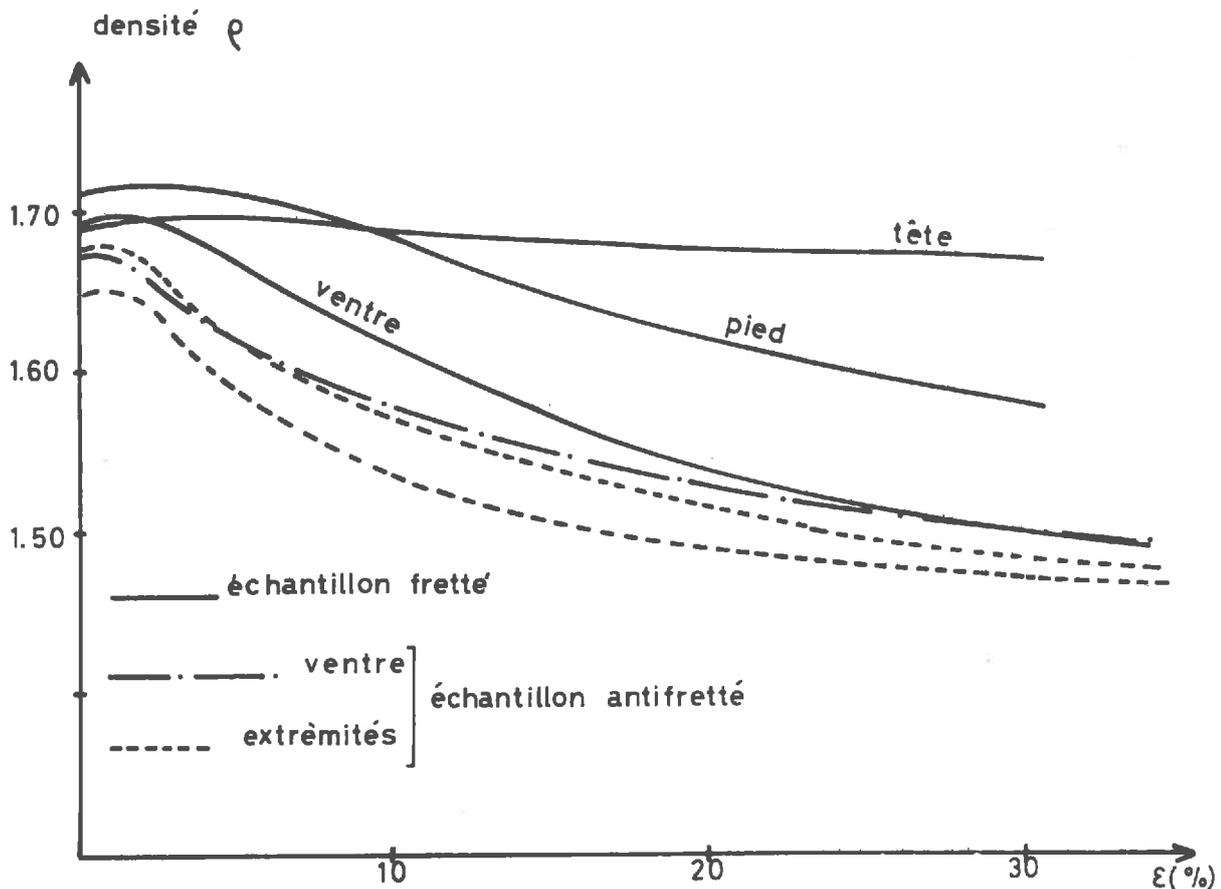
Nous disposons donc de deux séries d'essais : frottés et antifrottés.

C.II.2 - Discussion qualitative sommaire

a) La comparaison des essais effectués sur des échantillons frottés et antifrottés montre que, dans des conditions expérimentales de pression et de densité initiale semblables, les résultats obtenus sont identiques : les courbes effort-déformation et densité-déformation sont superposables. La densité critique, l'angle de frottement critique et la résistance maximale ont sensiblement même valeur pour les deux types d'échantillons : la zone ventrale d'un échantillon frotté de 15 cm de hauteur initiale semble donc avoir un comportement comparable à celui d'un échantillon de 9 cm où la lubrification des extrémités per-

met d'obtenir un champ de déformation homogène.

b) La possibilité qu'offre la plate-forme, de mesurer la densité en un point quelconque de l'échantillon nous permet de mettre en évidence le rôle et l'efficacité du système de lubrification des extrémités : nous comparons pour cela, dans le cadre d'essais frettés et antifrettés, les évolutions de la densité moyenne du pied, de la tête et de la zone ventrale de l'échantillon cylindrique (cf figure 4).

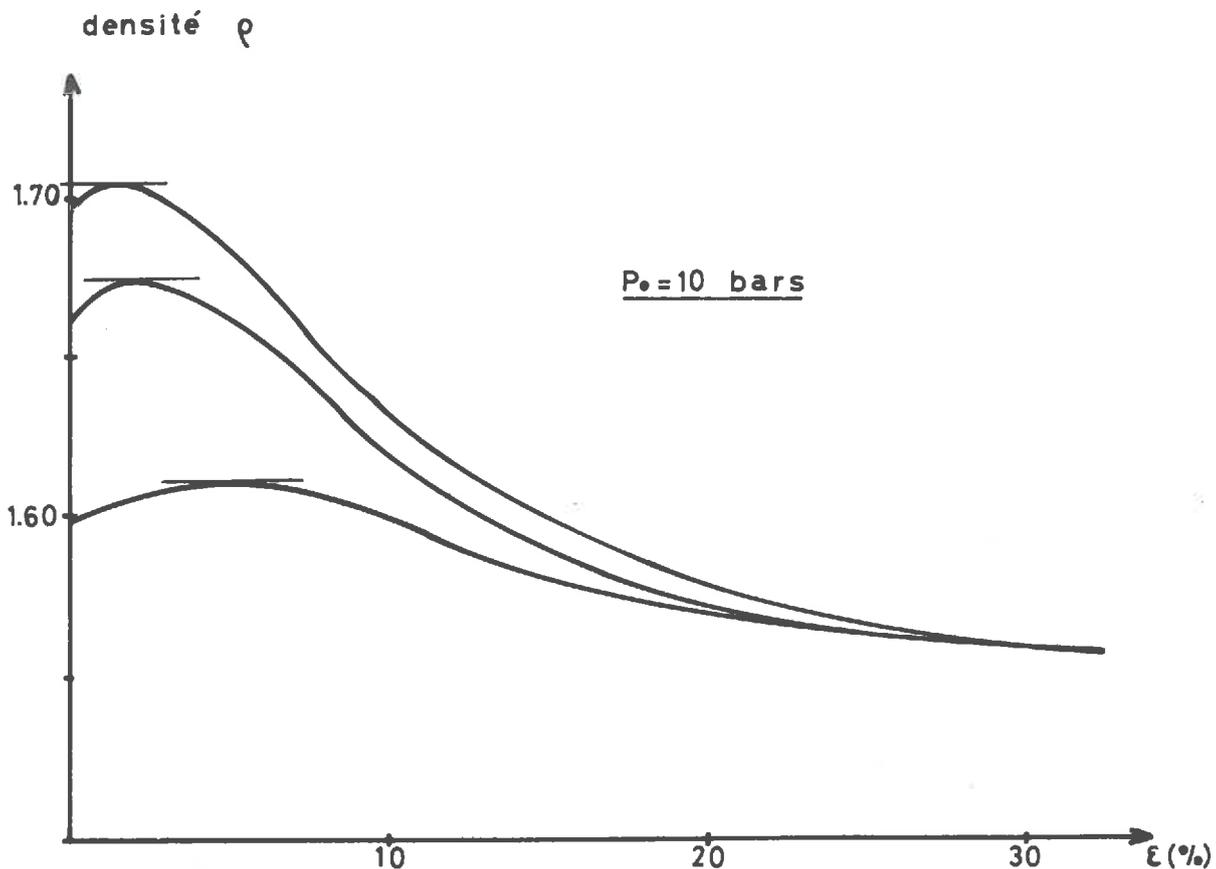


- Figure 4 -

Comparaison de l'évolution de la densité
des zones extrêmes et ventrales
d'échantillons frettés et antifrettés

On constate que, pour les échantillons antifrettés, la densité évolue parallèlement dans toutes les zones de l'échantillon. Pour les essais frettés, nous remarquons que la densité des zones extrêmes ne varie pas, ou peu, et que celle de la zone ventrale subit une évolution comparable à celle obtenue au cours d'essais antifrettés. La densité critique atteinte a bien une valeur sensiblement identique dans les deux cas.

c) La figure 5 représente l'évolution de la densité au cours de la déformation de l'échantillon pour une même pression latérale ($P_0 = 10$ bars) et pour des densités initiales moyennes croissantes.



- Figure 5 -

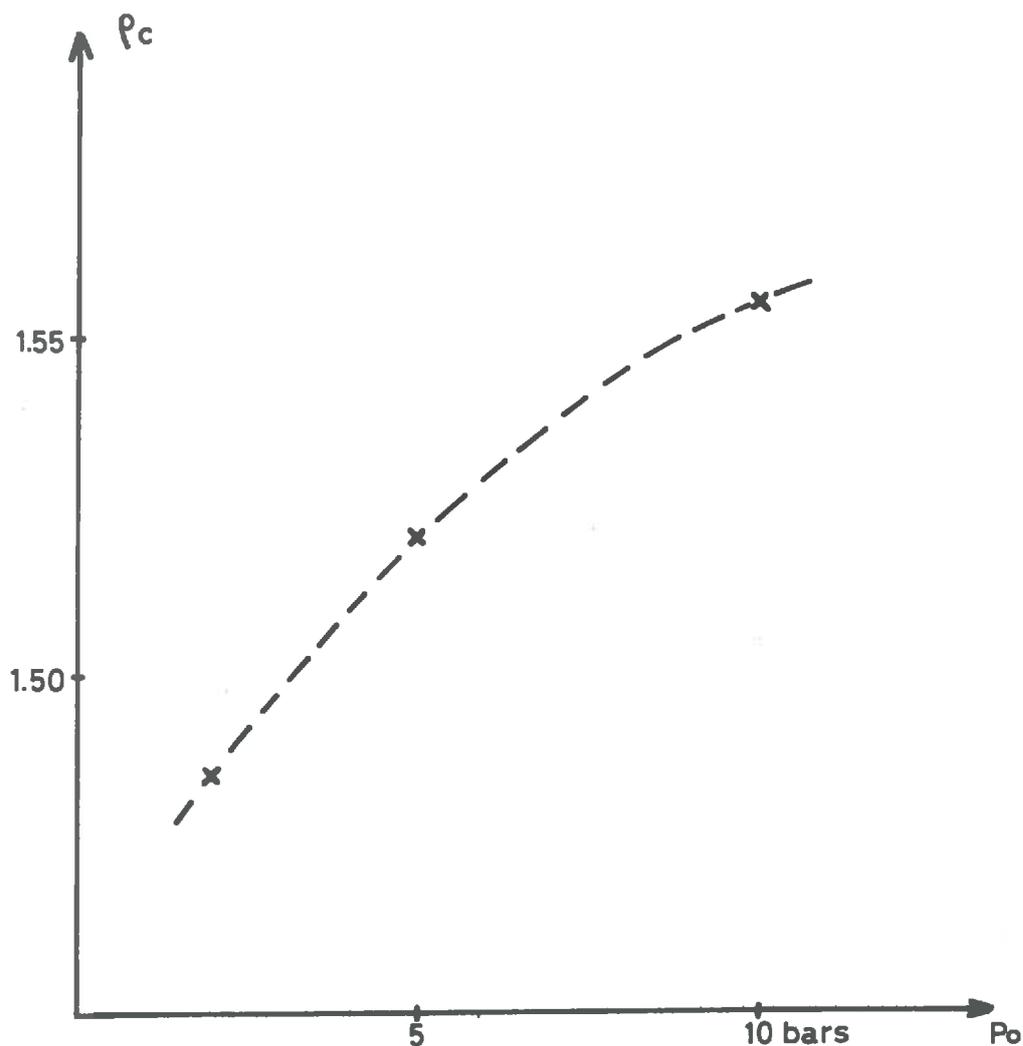
Comparaison de l'évolution de la densité
pour une pression latérale constante

Nous constatons que le maximum de densité est atteint pour des déformations d'autant plus grandes que les densités initiales sont faibles.

La densité limite est bien indépendante de la densité initiale. Nous avons bien sûr constaté également que cette densité critique ρ_c est une fonction de la pression latérale P_o , c'est-à-dire de la pression moyenne S_1 :

$$\rho_c = \rho_c (S_1)$$

La figure ci-dessous représente l'évolution de la densité critique ρ_c avec la pression latérale P_o .



- Figure 6 -

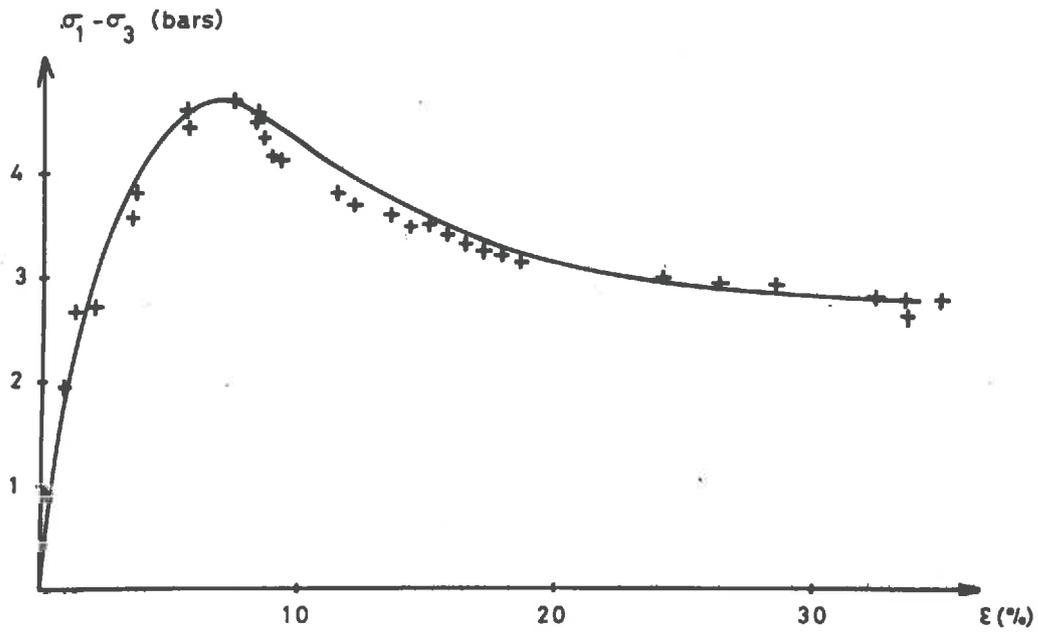
Diagramme critique du matériau

C.III - DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA LOIC.III.1 - Identification et discussion

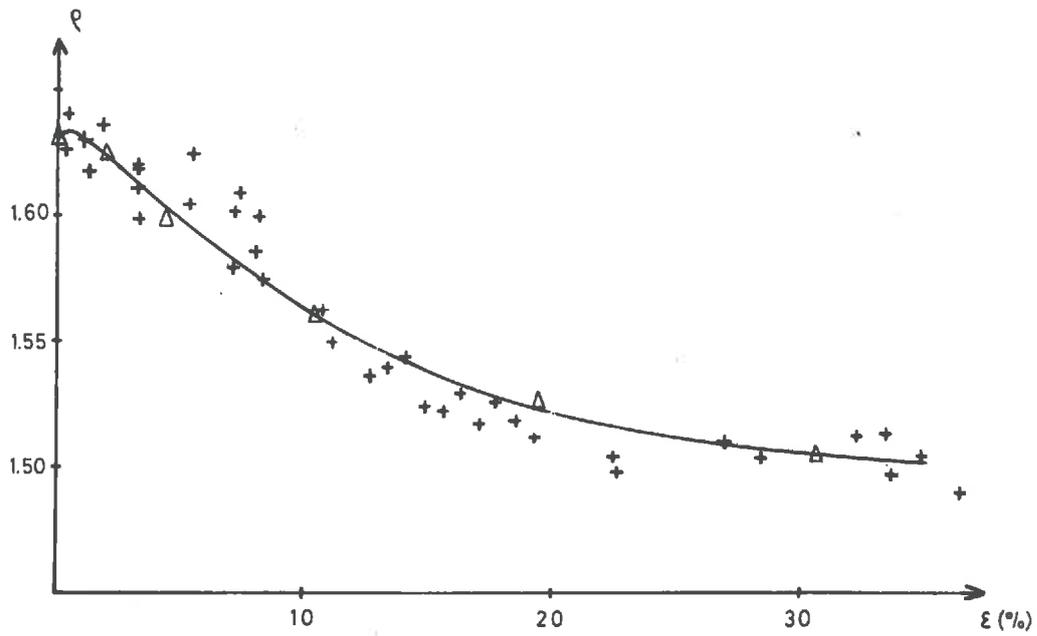
Les figures 7 à 14 fournissent, d'une part les résultats expérimentaux sous la forme de courbes définies par points, d'autre part les résultats théoriques (courbes tracées en traits continus) pour les valeurs des paramètres et fonctions α_0 , α_{1I} , α_2 et k présentées au tableau suivant. Par un triangle (Δ), nous représentons sur les figures les valeurs moyennes de la densité obtenues lors des explorations complètes de l'échantillon (cf B.IV).

Tous ces essais ont été effectués à une vitesse d'écrasement constante égale à 1 mm/mn.

	P_0 (bars)	densité initiale	α_0	α_{1I}	α_2	k
échantillon fretté	2	1,63	200	48	- 25	2,7
	10	1,59	300	42	- 18	1,5
échantillon antifretté	5	1,58	280	41	-17	2,5
	10	1,66	460	52	-27	1,5

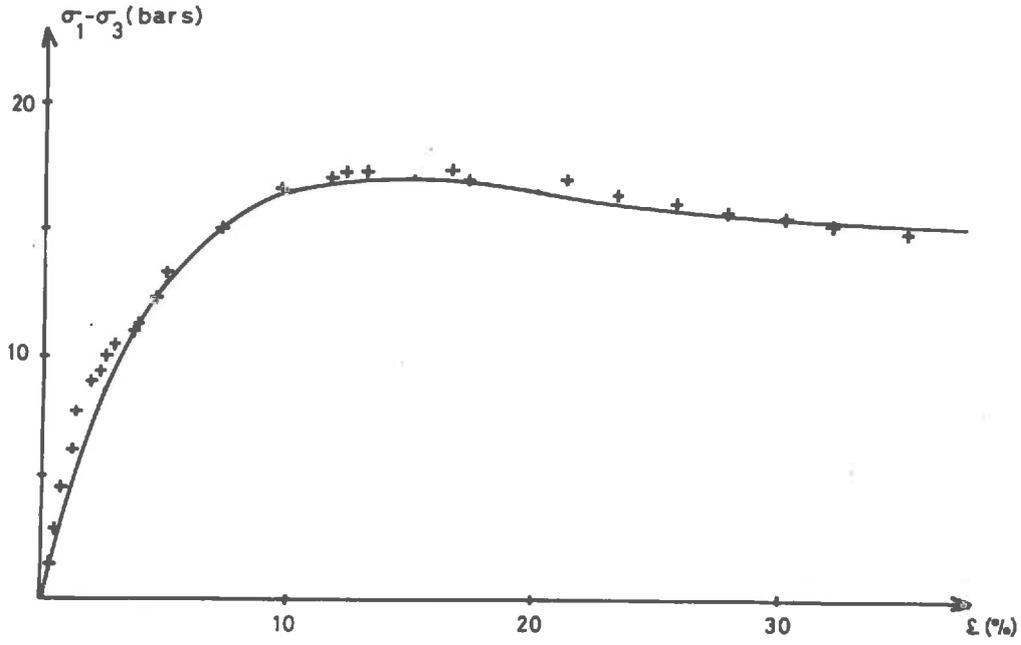


- Figure 7 -
Courbe effort-déformation

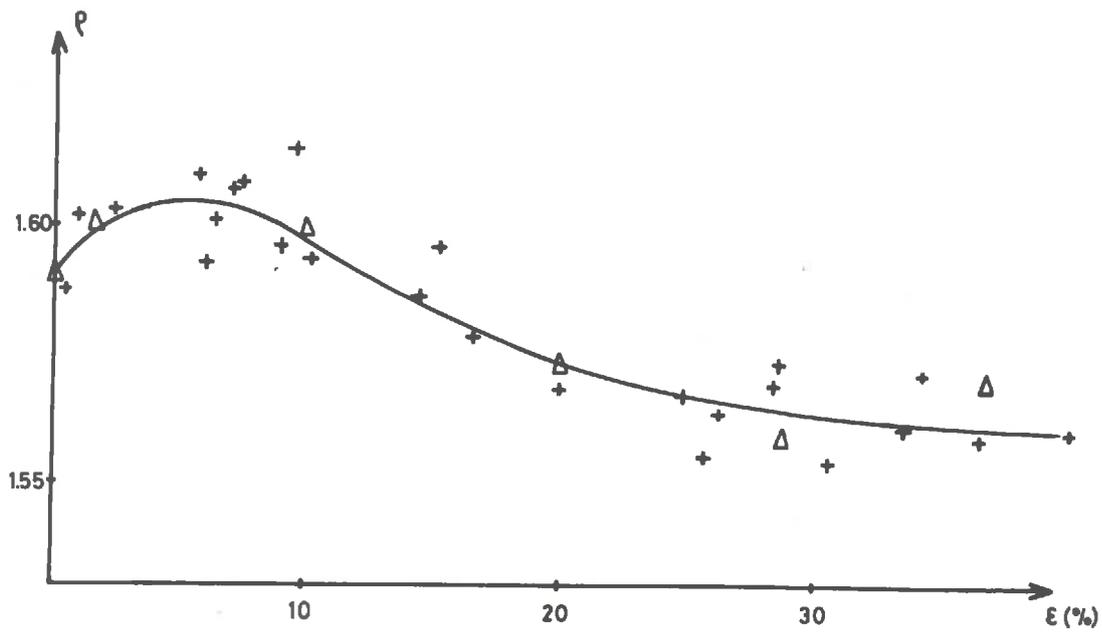


- Figure 8 -
Evolution de la densité

Pression latérale : 2 bars - Densité initiale : 1,63

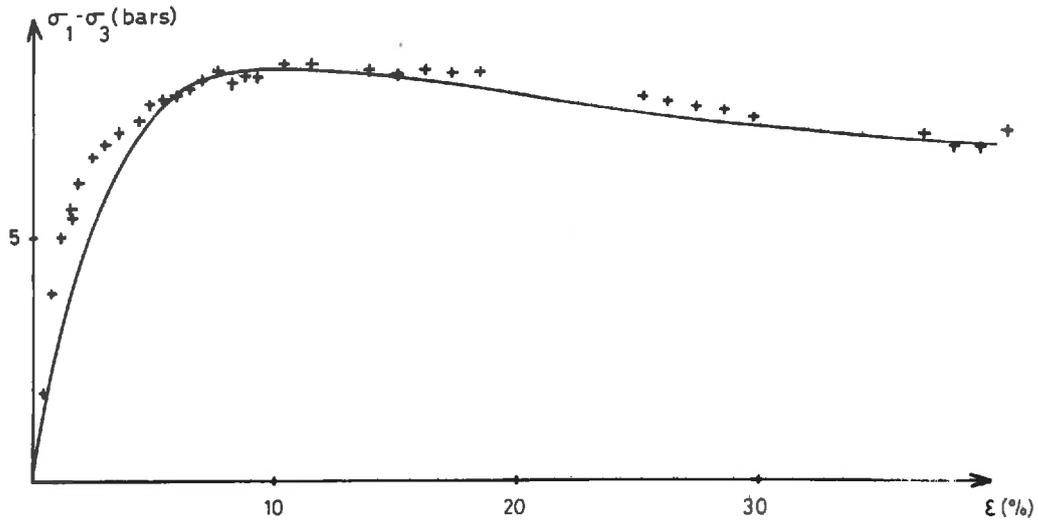


- Figure 9 -
Courbe effort-déformation

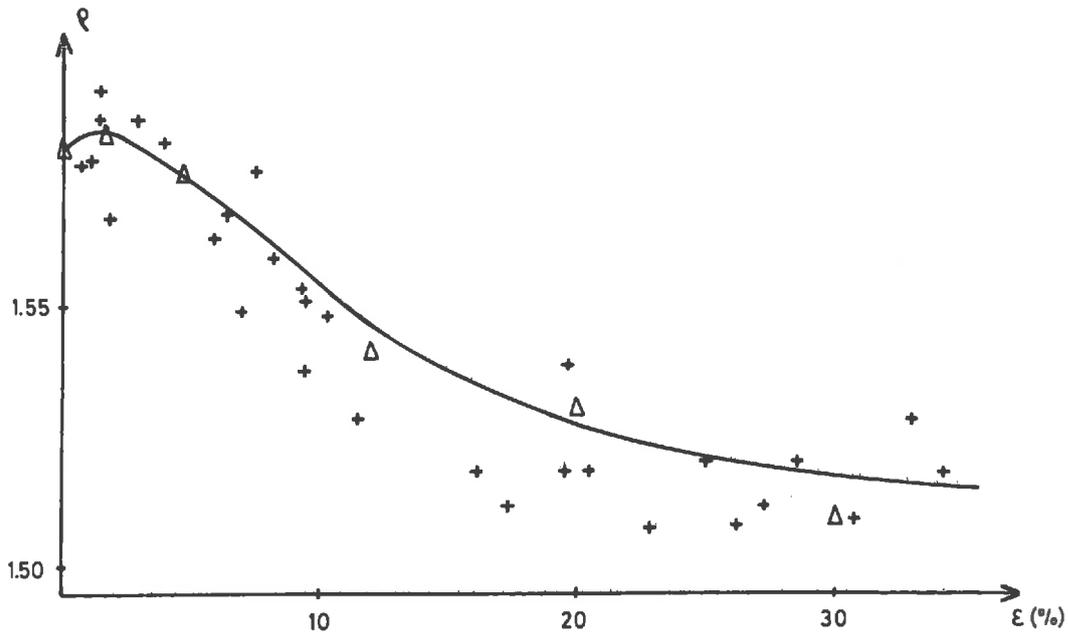


- Figure 10 -
Evolution de la densité

Pression latérale : 10 bars - Densité initiale : 1,59

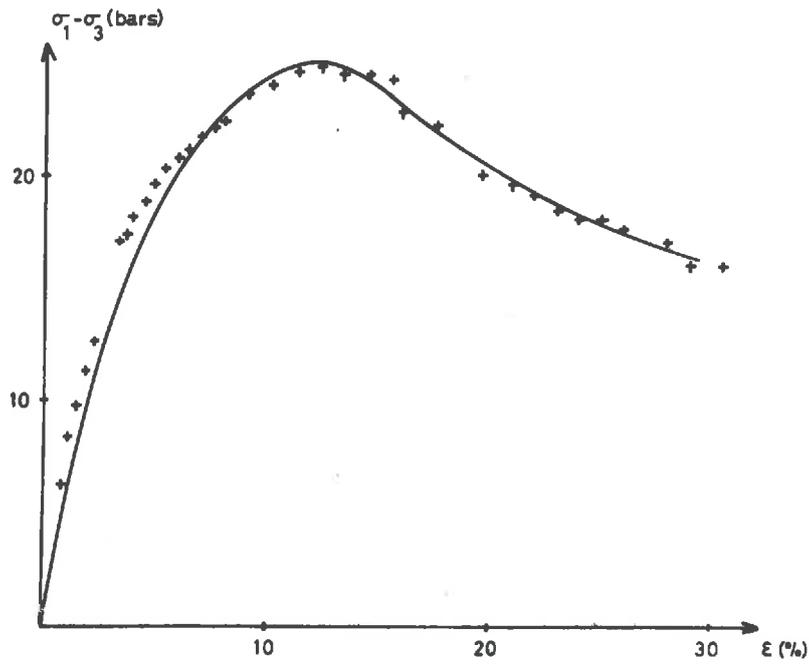


- Figure 11 -
Courbe effort-déformation

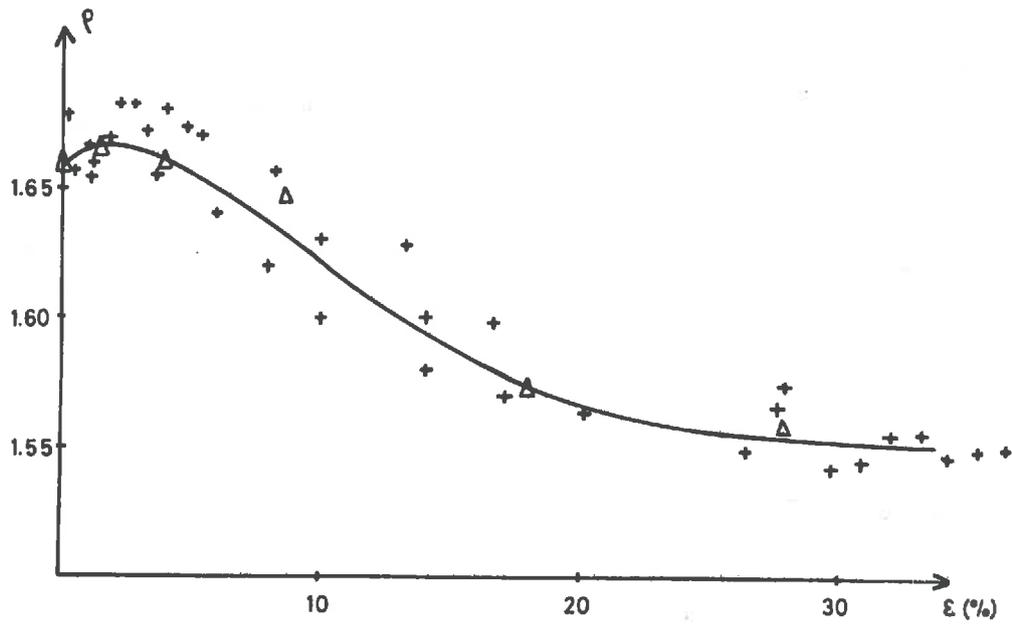


- Figure 12 -
Evolution de la densité

Pression latérale : 5 bars - Densité initiale : 1,58



- Figure 13 -
Courbe effort-déformation

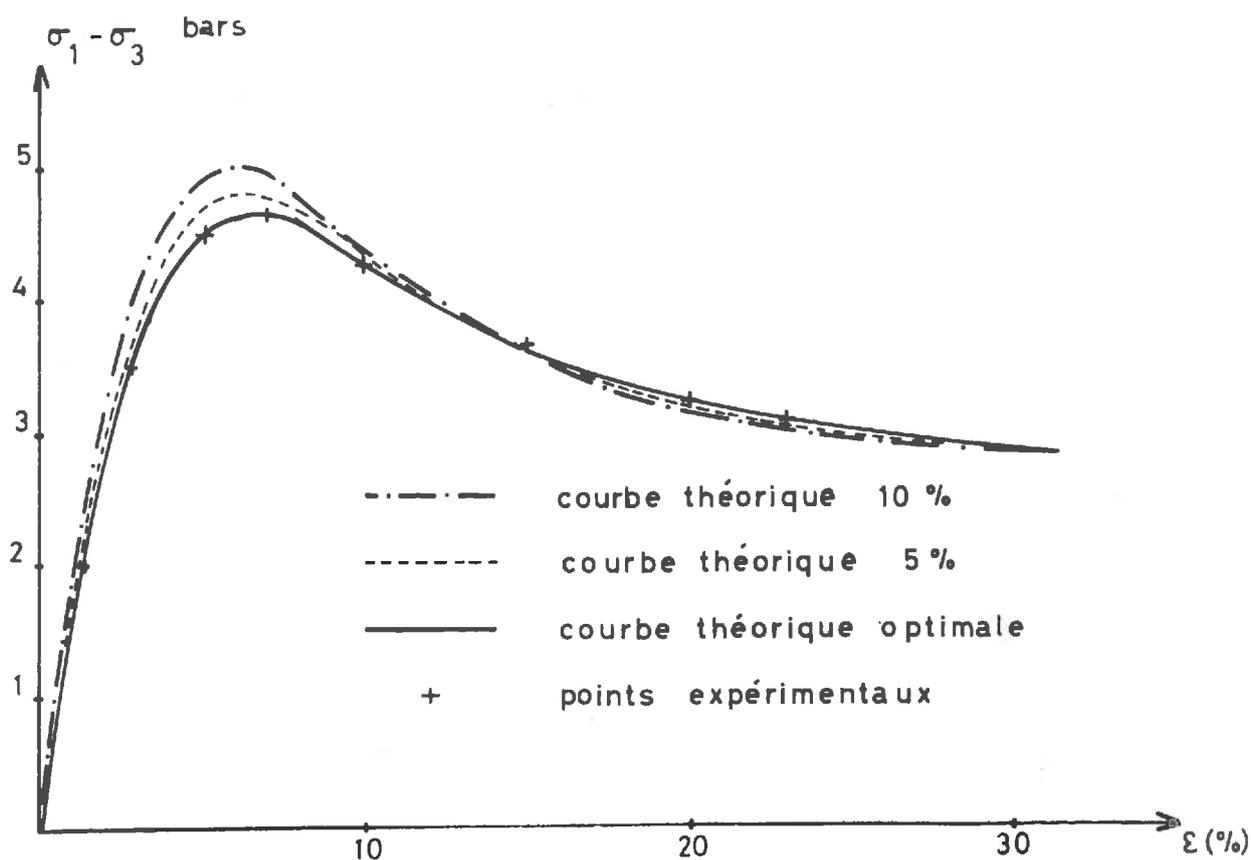


- Figure 14 -
Evolution de la densité

Pression latérale : 10 bars - Densité initiale : 1,66

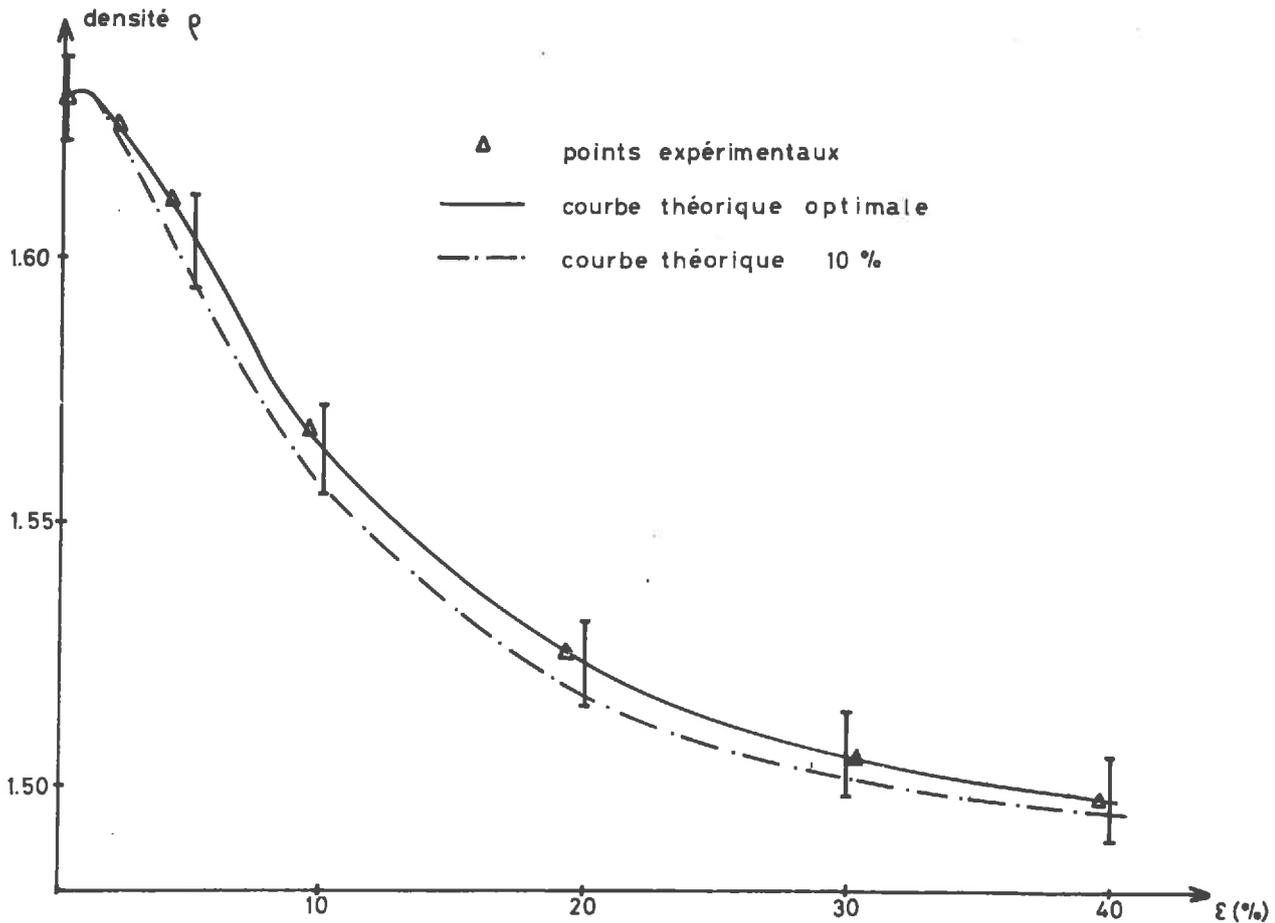
La précision obtenue dans la détermination des valeurs des paramètres de la loi, dépend de la précision d'obtention des courbes expérimentales d'une part, des courbes théoriques d'autre part. L'interdépendance des quatre paramètres rend son estimation délicate.

Nous fournissons sur les figures 15 et 16 l'influence sur l'allure des courbes d'une variation de 10 % et de 5 % de la valeur des paramètres.



- Figure 15 -

La précision obtenue sur la courbe effort-déformation expérimentale ne peut être mise en évidence à l'échelle de cette figure (inférieure à 1 %).



- Figure 16 -

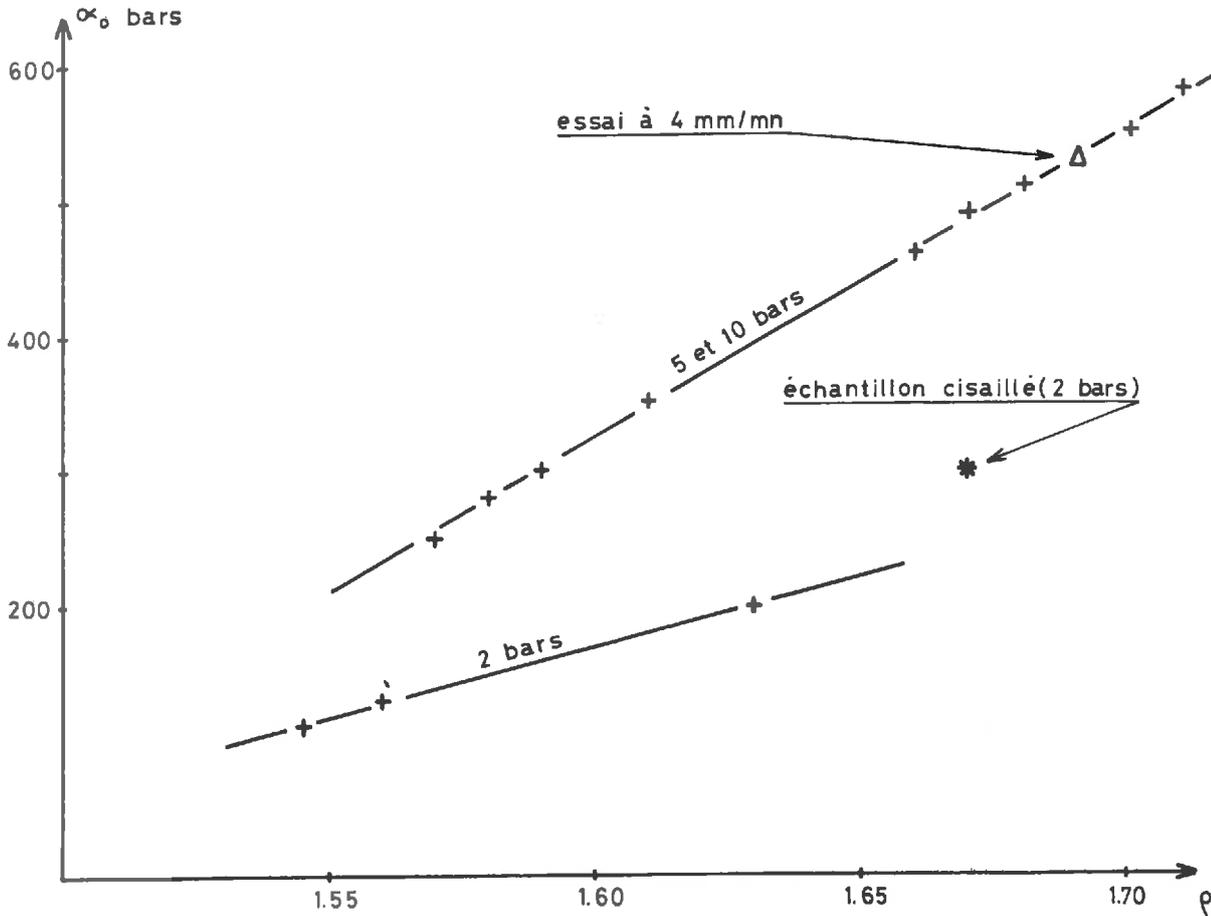
La courbe obtenue pour une variation de 5 % des paramètres optimums se situe entre les deux courbes présentées ci-dessus. Nous constatons que, pour une variation de 10 % des paramètres, la courbe théorique reste encore dans l'intervalle dû à l'erreur expérimentale.

C. III.2 - Evolution des paramètres avec les données expérimentales

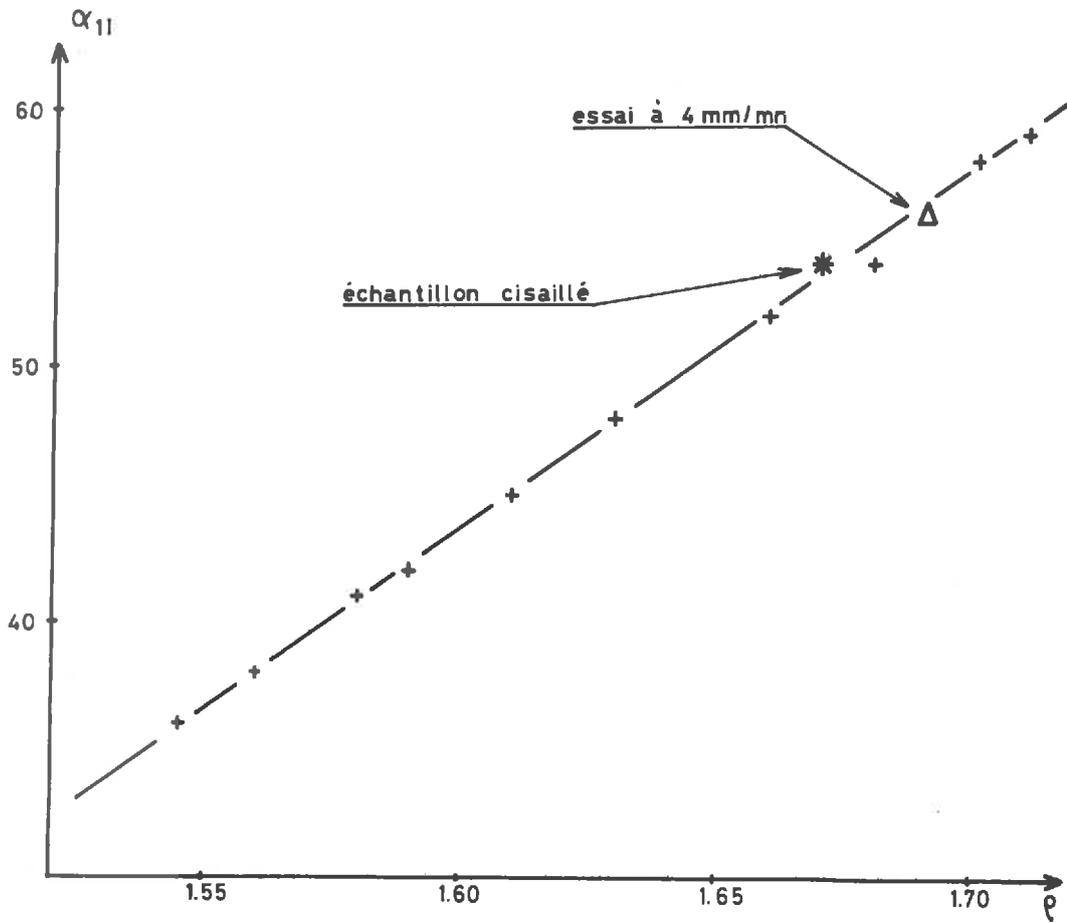
Nous réunissons sur les figures 17, 18, 19, 20, les résultats concernant les fonctions et paramètres a_0 , a_{1I} , a_2 et k .

Les paramètres a_0 , a_{1I} , a_2 varient linéairement avec la densité initiale moyenne du matériau. La fonction a_0 dépend en outre de la pression

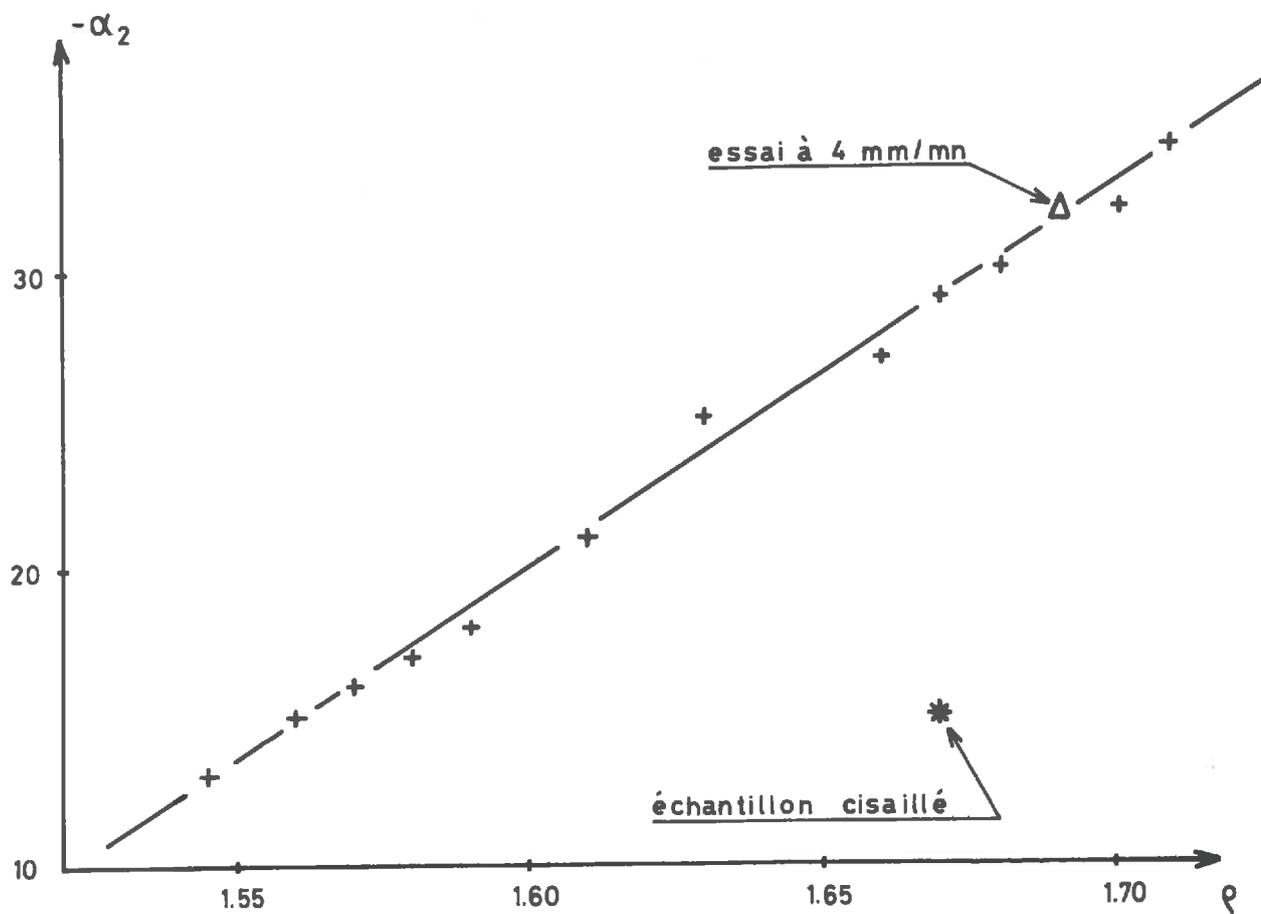
latérale P_0 , c'est-à-dire de S_1 , pression moyenne. Il semble difficile de préciser l'évolution du paramètre k qui peut cependant être considéré comme constant, mais dépendant également de S_1 .



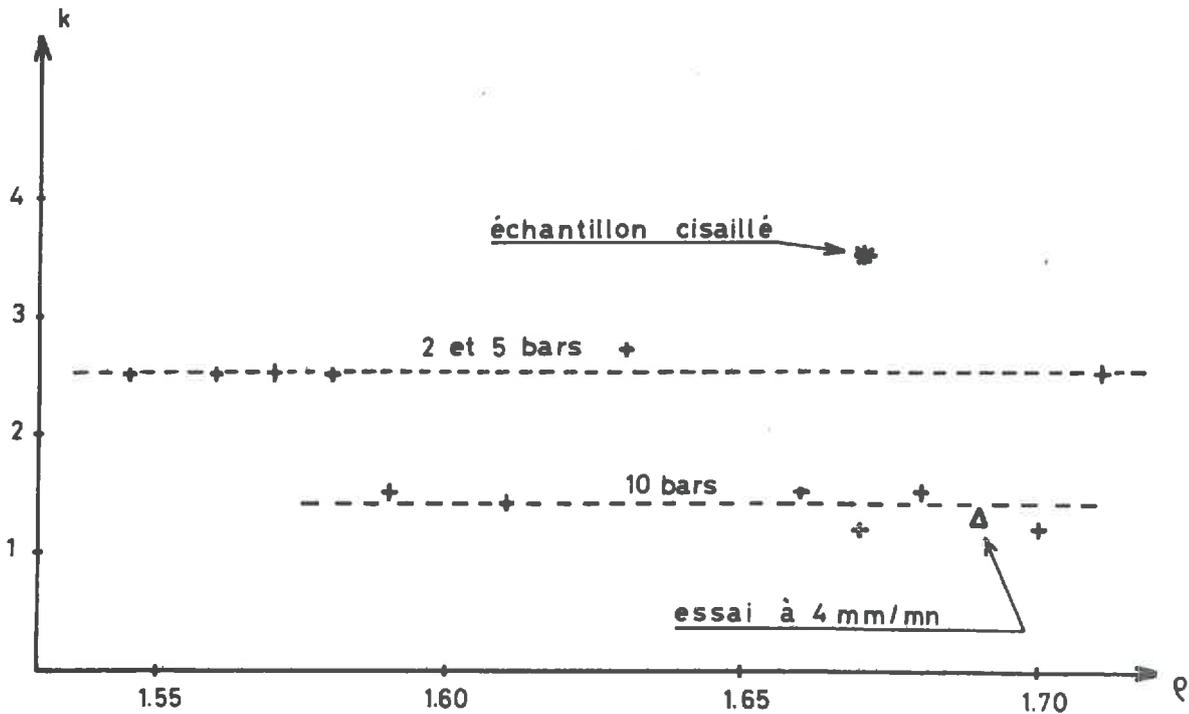
- Figure 17 -
Variation du paramètre α_0



- Figure 18 -
Variation de α_{11}



- Figure 19 -
Variation de α_2

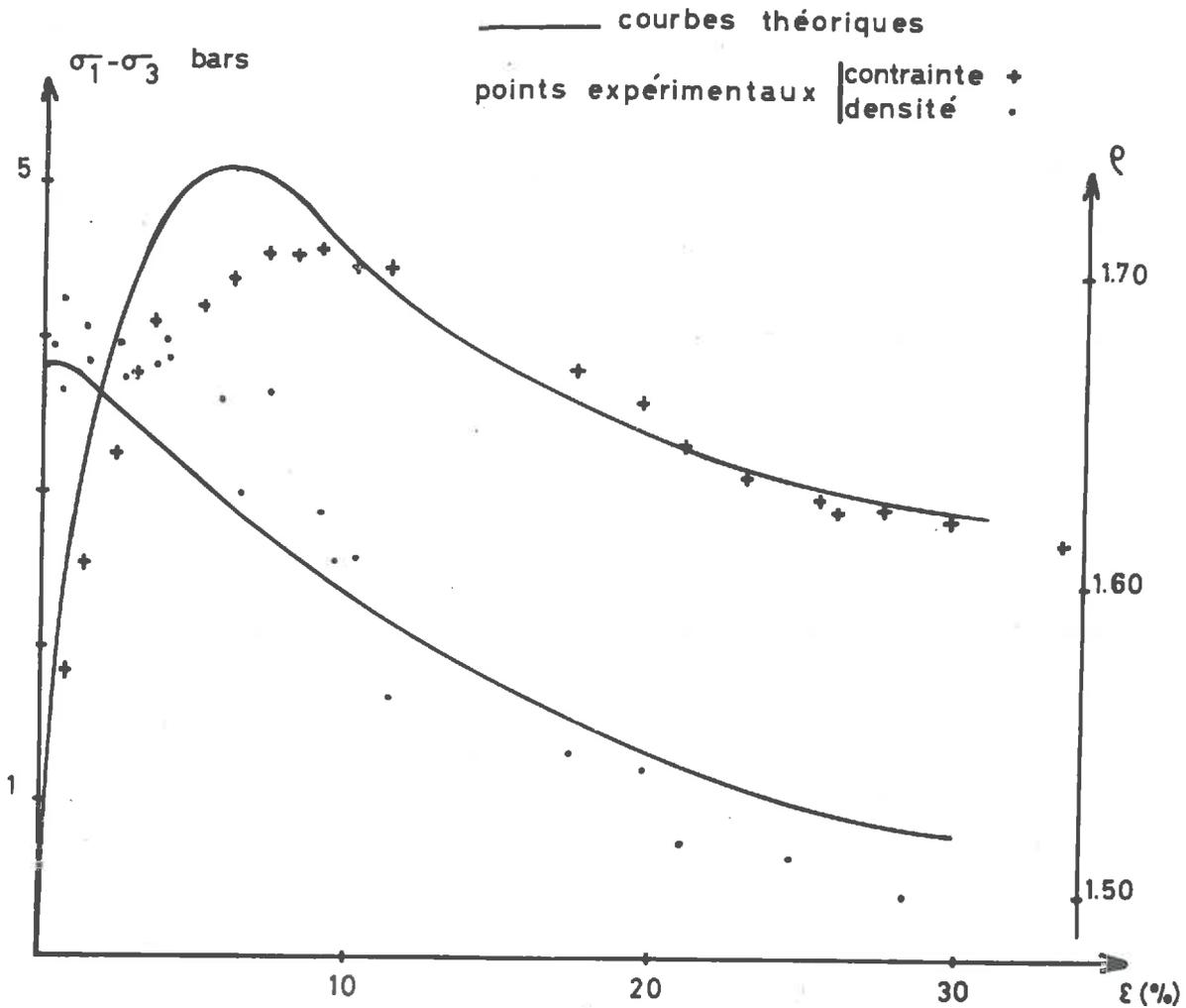


- Figure 20 -
Variation de k

Au cours de cette campagne d'essais, nous avons vérifié que la vitesse d'écrasement de l'échantillon n'influe pas sur les courbes effort-déformation et densité-déformation.

L'identification d'un essai effectué sous 10 bars de pression latérale, sur un échantillon de densité initiale moyenne égale à 1,69 pour une vitesse d'écrasement égale à 4 mm/mn, conduit, pour les fonctions de la loi de comportement, aux valeurs représentées sur les figures 17, 18, 19 et 20 par un triangle (Δ). Nous constatons qu'elles ne diffèrent pas des valeurs que nous pourrions déduire d'un essai identique réalisé à la vitesse de 1 mm/mn.

Nous avons également constaté que les échantillons cisailés fournissent des courbes expérimentales que la loi de comportement ne permet pas de décrire correctement : nous présentons les résultats expérimentaux et théoriques obtenus à la suite du cisaillement d'un échantillon soumis à 2 bars de pression latérale (figure 21).



- Figure 21 -
Echantillon cisailé

Les courbes théoriques sont les plus proches des courbes expérimentales que nous ayons pu obtenir. Les valeurs des paramètres de la loi sont portées sur les figures 17, 18, 19 et 20 (sous la forme d'étoiles *). Elles s'éloignent notablement (sauf en ce qui concerne la fonction α_{II}) de celles que nous aurions obtenues, dans des conditions expérimentales identiques, pour un échantillon n'ayant pas subi de cisaillement au cours de son écrasement. Notons que si, dans certains cas, la loi de comportement nous permet de décrire convenablement l'évolution de la densité, alors la courbe effort-déformation est très éloignée de la courbe réelle expérimentale.

C O N C L U S I O N

Les résultats présentés montrent que la loi permet de décrire convenablement le comportement d'un matériau pulvérulent soumis à l'essai biaxial.

Nous soulignons à nouveau que l'identification n'est pas ambiguë :

- . Le comportement d'un échantillon qui se cisaille en cours d'écrasement ne peut être décrit, quelles que soient les valeurs données aux quatre fonctions phénoménologiques.
- . Un ensemble de valeurs, différentes des valeurs optimales retenues pour l'identification, fournit deux courbes théoriques dont l'une au moins s'éloigne sensiblement des résultats expérimentaux.

Notons que cette précision de l'identification est obtenue moyennant l'introduction d'hypothèses complémentaires simples dans la définition complète de la loi (la densité critique ne dépend que de la pression moyenne, la fonction α_p varie linéairement avec la densité, etc ...).

L'expérience acquise lors de la mise au point de l'appareillage pourrait nous permettre d'examiner l'intérêt de la loi pour d'autres matériaux comme les matériaux pulvérulents à granulométrie étendue ou les matériaux non pulvérulents tels que certaines mousses expansées très rigides. L'appareillage pourrait également soutenir les efforts de recherche concernant la théorie générale de l'écrasement. En tout état de cause, les résultats obtenus montrent qu'il s'avère dès à présent intéressant de reprendre l'étude de cette loi dans le cadre de sollicitations moins particulières grâce à l'appareil triaxial tridimensionnel.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 ANGLES D'AURIAC P.
 "Définitions et principes en rhéologie tensorielle"
 Symposium IUTAM - Grenoble (1964)

- 2 ANGLES D'AURIAC P.
 "Les principes en mécanique des milieux continus"
 La Houille Blanche - 5 - 427-432 (1970)

- 3 BOISSERIE J.M.
 "Generation of two and three dimensional finite elements"
 International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3,
 327-347 (1971)

- 4 GOLING - GOLDER
 "Portable apparatus for compression test of clay soil"
 Engineering 147 (1940)

- 5 GUELIN P.
 "Sur une méthode de formulation et de résolution de problèmes de
 mécanique des milieux continus"
 Thèse de doctorat ès Sciences - Université Scientifique et Médicale
 de Grenoble (1970)

- 6 GUELIN - STUTZ
 Communication au colloque franco-polonais - 1974 - à paraître

- 7 ROSCOE
 "An apparatus for the application of simple shear to soil samples"
 Proceedings 3rd International Conf. on Soil Mechanics and Foundations
 Vol. 1 - Zurich (1953)

- 8 ROWE - BARDEN
"Importance of free ends in triaxial testings"
Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Jan. 1964 - SM 1
- 9 STUTZ P.
"Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents"
Thèse de doctorat ès Sciences - Université Scientifique et Médicale
de Grenoble (1972)
- 10 STUTZ P.
"Comportement élastoplastique des milieux pulvérulents"
Sciences et Techniques de l'Armement - Mémorial de l'Artillerie
Française - 2ème fascicule - (1973)
- 11 TAYLOR
"Seventh progress report on shear research to U.S. engineers"
M.I.T. Publication (1941)
- 12 WACK B.
Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences , 260, p.4436 - avril 1965
- 13 WACK B.
Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 261, p.2439 - Sept. 1965
- 14 WACK B.
Compte-Rendus de l'Académie des Sciences, 165, p.437 - Oct. 1967
- 15 WACK B.
"Mesure par radioactivité en mécanique des sols"
Thèse de doctorat ès sciences - Faculté des Sciences de l'Université
de Grenoble (1968)
- 16 WACK B.
Bulletin de la direction des Etudes et Recherches E.D.F. n°2 - 1969 A.

A N N E X E S

ANNEXE IMéthode matricielle d'intégration du système différentiel : programme FORTRAN

Le programme principal utilise le sous-programme utilitaire d'inversion de matrice en double précision (M I N V G).

Construction de la base discrète de calcul

```

FUNCTION XRED(I,IRA)
DATA PI/3.14159265/
IF((I-1)*(IRA-1)) 1,1,2
2 CONTINUE
AGPI=0.5*PI/FLOAT(IRA)
API=AGPI+PI*FLOAT(I-1)/FLOAT(IRA)
XGGG=COS(API)
XRED=0.5*(1.-XGGG)
RETURN
1 XRED=FLOAT(I-1)/FLOAT(IRA-1)
RETURN
END

```

Recherche de maximums et minimums

```

SUBROUTINE TRA(AMAX,AMIN,A,N)
REAL K1
DIMENSION A(25),ANIT(2),SIG(10),DEN(10),XDEF(10)
COMMON PO,PHIC,ROC,R,K1,ALF0,ALF,ALF2,ANIT,SIG,DEN,XDEF,ICC
ICC=1
AMAX=A(1)
AMIN=A(1)
DO 100 I=2,N
IF(A(I)-AMAX)1,3,3
3 AMAX=A(I)
1 IF(A(I)-AMIN)4,4,100
4 ICC=I
AMIN=A(I)
100 CONTINUE
RETURN
END

```

Construction de la matrice de dérivation

```

SUBROUTINE DTCH4(RI,RE,X,DER,V1,V2,IRA,T,T1,IVER)
DIMENSION T(4,4),T1(4,4),X(4),DER(4,4),V1(4),V2(4)
IRA1=IRA+1
DO 1 I=1,IRA
T(I,1)=1.
T(I,2)=2.*X(I)-1.
IF(IRA-2)100,100,111
111 DO 2 J=3,IRA1
T(I,J)=2.*(2.*X(I)-1.)*T(I,J-1)-T(I,J-2)
2 CONTINUE
100 CONTINUE
1 CONTINUE
DO 5 I=1,IRA
T1(I,1)=X(I)
T1(I,2)=T1(I,1)*(T1(I,1)-1.)
IF(IRA-2)102,102,113
113 DO 6 L=3,IRA
H1=0.25/FLOAT(L)
H2=0.25/FLOAT(L-2)
6 T1(I,L)=H1*(T(I,L+1)-T(1,L+1))+H2*(T(1,L-1)-T(I,L-1))
102 CONTINUE
5 CONTINUE
H=RE-RI
CALL MINVG(T,IRA,DER,V1,V2)
DO 7 I=1,IRA
DO 7 J=1,IRA
DER(I,J)=0.
DO 7 K=1,IRA
DER(I,J)=DER(I,J)+T1(I,K)*T(K,J)*H
7 CONTINUE
RETURN
END

```

Programme principal de calcul

```

REAL K1,K2
DIMENSION X(9),D(9,9),V1(9),V2(9),T(9,9),T1(9,9)
DIMENSION P(18,18),A1(18),A2(18)
DIMENSION ZZ(18),C1(9),C3(9),C4(9),C5(9),DDD(9)
DIMENSION V(18),Q(18),EQ(18),VAE(18)
DIMENSION ALFRO(9),S1(9),W(9),ALF1(9),A(9)
DIMENSION R(9),S(9),U(9),C(9),F(9),Z(9),DD(9)
DIMENSION AB4(9),DD1(9)
DIMENSION O(9)
IRA=9
IRAD=IRA*2
IRA1=IRA+1
IRA2=IRA+2
DO 31 I=1,IRA
31 X(I)=XRED(I,IRA)
XI=0.
XE=0.4

```

```

CALL DTCH5(XI,XE,X,D,V1,V2,IRA,T,T1,1)
ALFC=(2.*SIN(PHIC)/(3.-SIN(PHIC)))*SQRT(2./3.)
E=3.*SQRT(3./2.)
K1=ALFC*K2
DO 22 I=1,IRA
X(I)=XE*X(I)
V(I)=X(I)
22 CONTINUE
WRITE(3,150)
WRITE(3,300) (X(I),I=1,IRA)
14 DO 4 I=1,IRA
DO 20 K=1,IRAD
DO 20 J=1,IRAD
20 P(K,J)=0.
P(1,1)=1.
P(IRA1,IRA1)=1.
L=I+IRA
ALFRO(I)=ALFC+K1*(V(L)-ROC)
S1(I)=(3*PO)+(3*(V(I)/2))
W(I)=S1(I)**R
ALF1(I)=W(I)*ALF
A(I)=3.*ALFO+ALF1(I)
B(I)=A(I)+3*(ALF2*PO)
S(I)=2.*B(I)
U(I)=S(I)*SQRT(3./2.)
C(I)=ALF1(I)*U(I)
F(I)=(1/ALFC)-(1/ALFRO(I))
Z(I)=((3*PO)+((3/2)*V(I)))*ALFRO(I)
DD(I)=U(I)+E*ALF2*V(I)-ALF1(I)*F(I)
AB4(I)=1./ALFC-((3.*PO)/Z(I))
DD1(I)=U(I)+SQRT(3./2.)*ALF1(I)-ALF1(I)*AB4(I)
DDD(I)=DD1(I)/ALF1(I)
C1(I)=E*ALF2-3.*ALF2/ALFC-3.*A(I)/Z(I)
C3(I)=2.*E*ALF2*PO+2.*SQRT(3./2.)*A(I)
C4(I)=(-1.)*F*V(L)
C5(I)=(-1)*3.*ALF1(I)*F(I)
ZZ(I)=C3(I)
ZZ(L)=0.
4 CONTINUE
ZZ(1)=TO
ZZ(IRA1)=YO
DO 7 I=IRA2,IPAD
M=I-IRA
DO 7 J=IPA1,IRAD
K=J-IRA
7 P(I,J)=DD(M)*D(M,K)
DO 3 I=IRA2,IRAD
L=I-IRA
DO 3 J=1,IRA
3 P(I,J)=D(L,J)*C4(L)
DO 5 I=2,IRA
DO 5 J=1,IRA
5 P(I,J)=DDD(I)*D(I,J)
DO 6 I=2,IRA
6 P(I,I)=DDD(I)*D(I,I)-C1(I)
DO 23 I=IRA2,IPAD
K=I-IRA
23 P(I,I)=DD(K)*D(K,K)-C5(K)

```

```
CALL MINVG(P,18,DER,A1,A2)
DO 8 I=1,IRAD
  Q(I)=0.
  DO 8 J=1,IRAD
    8 Q(I)=Q(I)+P(I,J)*ZZ(J)
  DO 30 I=1,IRA
    30 O(I)=(3.*Q(I)/(2.*PO))+1.
    WRITE(3,200)
    WRITE(3,300) (O(I),I=1,IRA)
    WRITE(3,400)
    WRITE(3,300) (Q(I),I=IRA1,IRAD)
    DO 9 I=1,IRAD
      EQ(I)=Q(I)-V(I)
      VAE(I)=ABS(EQ(I))
    9 CONTINUE
    CALL TRA(AMAX,AMIN,VAE,18)
    IF(AMAX=FR) 11,11,12
    12 DO 13 I=1,IRAD
      13 V(I)=Q(I)
    GO TO 14
    11 CONTINUE
    150 FORMAT(1H0//10X,'DEFORMATIONS= ')
    200 FORMAT(1H0//10X,'CONTRAINTE=' )
    300 FORMAT(1X,9E11.4)
    400 FORMAT(10X,'DENSITES=' )
    CALL EXIT
  END
```

ANNEXE IIMéthode de Runge-Kutta : programme FORTRAN

Nous utilisons le programme utilitaire d'intégration d'un système différentiel par la méthode de Runge-Kutta en double précision (R K G T).

Les données sont introduites par l'intermédiaire du sous-programme F C T. Nous choisissons la forme de sortie des résultats (sous-programme O U T P).

```

SUBROUTINE FCT(X,Y,D)
REAL K1
DIMENSION Y(2),D(2),ANIT(2)
COMMON PO,PHIC,ROC,R,K1,ALFO,ALF,ALF2,ANIT
1 ALFC=(2*SIN(PHIC)/(3-SIN(PHIC)))*SQRT(2./3.)
ALFRO=ALFC*(1+(K1*(Y(2)-ROC)))
S1=(3*PO)+(3*(Y(1)/2))
W=S1**R
ALF1=W*ALF
A=3.*ALFO+ALF1
B=A+3*(ALF2*PC)
V=2*R
U=V*SQRT(3./2)
C=ALF1*U
E=3*SQRT(3./2)
F=(1/ALFC)-(1/ALFRO)
Z=S1*ALFRO
C1=Y(1)*ALF1
C2=E*ALF2-3.*A/Z-3.*ALF2/ALFC
D(1)=(C+C1*C2)/(U+SQRT(3./2.)*ALF1-ALF1*(1./ALFC-3.*PO/Z))
D(2)=(Y(2)*((E*D(1))-(3*ALF1*F)))/(U+(E*
XALF2*Y(1))-(ALF1*F))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE OUTP(E,SCRT,BA,RE,BI,BO)
INTEGER RE,BI
REAL K1
DIMENSION SORT(2),BA(2),RO(5),ANIT(2)
COMMON PO,PHIC,ROC,R,K1,ALF0,ALF,ALF2,ANIT
100 DEF=E*100.
    SIGMA=1.+(3.*SORT(1)/(2.*PO))
    SIGA=3.*SORT(1)/2.
    WRITE(3,1) DEF,SIGA,SIGMA,SORT(2),BE
1  FORMAT(1X,F10.4,3X,'T=',F10.4,3X,'SIGMA=',F10.4
X,3X,'RO=',F10.4,3X,I2)
90 RETURN
END

```

Programme principal

```

*NAME INTRK
REAL K
EXTERNAL FCT,OUTP
DIMENSION P(5),ANIT(2),G(2),AUX(8,2)
COMMON PO,PHIF,ROF,ABC,K,A0,A1I,A2,ANIT
READ(2,1) P(1),P(2),P(3),P(4)
READ(2,2) ANIT(1),ANIT(2)
READ(2,3) PHIF,ROF,PO
READ(2,2) ABC,K
READ(2,3) A0,A1I,A2
READ(2,2) G(1),G(2)
WRITE(3,4) A0,A1I,A2,K
CALL RKGT(P,ANIT,G,2,10,FCT,OUTP,AUX)
1  FORMAT(4F10.4)
2  FORMAT(2F10.4)
3  FORMAT(3F10.4)
4  FORMAT(5X,'ALPHA 0',F10.2,2X,'ALPHA 1I',F10.2,2X,
1'ALPHA 2',F10.2,2X,'K ',F10.2///)
CALL EXIT
END

```

ANNEXE IIIOptimisation : programme FORTRAN

Comme le précédent, ce programme de calcul utilise le sous-programme utilitaire d'intégration d'un système différentiel par la méthode de Runge-Kutta (R K G T) et ses sous-programmes d'entrée et de sortie (FCT1 et O U T P 1).

```
*NAME OPTIV
  REAL K
  EXTERNAL FCT1,OUTP1
  DIMENSION P(5),ANIT(2),G(2),AUX(8,2)
  DIMENSION XDEF(10),YSIG(10),ZDEN(10)
  DIMENSION AL2(3),ALO(5),FCPIC(15),ECPAL(15),ECDEN(15)
  DIMENSION ECQ1(10),ECQ2(10),SIG(10),DEN(10)
  COMMON PO,PHIF,ROF,ABC,K,A0,A1I,A2,ANIT,SIG,DEN,XDEF,ICC
  READ(2,1) P(1),P(2),P(3),P(4)
  READ(2,2) ABC
  READ(2,3) DENSO,PHIF,ROF,PO
  READ(2,4) XDEF
  READ(2,4) YSIG
  READ(2,4) ZDEN
  READ(2,54) NI1,NI2
  READ(2,53) K,PA,KMAX
  READ(2,55) AL1I
  READ(2,51) ALO
  READ(2,52) AL2
  NII=NI1*NI2
  A1I=AL1I
  WRITE(3,28)
  WRITE(3,27)
  WRITE(3,26)
  WRITE(3,16) PO
  WRITE(3,17) DENSO,ROF
  WRITE(3,22)
  WRITE(3,23)
  DO 25 N=1,10
  WRITE(3,24) XDEF(N),YSIG(N),ZDEN(N)
25 CONTINUE
30 IC=0
  DO 8 I=1,NI1
  DO 8 J=1,NI2
  A2=AL2(I)
  A0=ALO(J)
```

```

C   VALEURS INITIALES DE LA CONTRAINTE ET DE LA DENSITE
    ANIT(1)=0.
    ANIT(2)=DENSO
    G(1)=0.5
    G(2)=0.5
    NN=10
    DO 50 LL=1,10
    ECQ1(LL)=0.
    ECQ2(LL)=0.
50  CONTINUE
    IC=IC+1
    WRITE(3,11) IC,A0,A1I,A2,K
    WRITE(3,14)
    WRITE(3,5)
    WRITE(3,10)
    CALL RKGT(P,ANIT,G,2,NN,FCT1,OUTP1,AUX)
    DO 9 M=1,10
    ECQ1(M)=ABS(SIG(M)-YSIG(M))/YSIG(M)
    ECQ2(M)=ABS(DEN(M)-ZDEN(M))/ZDEN(M)
 9  CONTINUE
    WRITE(3,21)
    WRITE(3,6)
    WRITE(3,7)
    DO 19 II=1,10
    WRITE(3,18) ECQ1(II),ECQ2(II)
19  CONTINUE
    ECPIC(IC)=(ECQ1(2)+ECQ1(3)+ECQ1(4))/3.
    ECPAL(IC)=(ECQ1(6)+ECQ1(7)+ECQ1(8)+ECQ1(9)+ECQ1(10))/5.
    CALL TRA(EMAX2,EMIN2,ECQ2,10)
    ECDEN(IC)=EMAX2
    WRITE(3,13) ECPIC(IC),ECPAL(IC),ECDEN(IC)
 8  CONTINUE
    CALL TRA(ECMAX,ECMIN,ECPIC,NII)
    WRITE(3,12) ECMIN,ICC
    CALL TRA(ECMAX,ECMIN,ECPAL,NII)
    WRITE(3,15) ECMIN,ICC
    CALL TRA(ECMAX,ECMIN,ECDEN,NII)
    WRITE(3,56) ECMIN,ICC
    K=K+PA
    IF(K-KMAX) 30,30,31
31  CONTINUE
 1  FORMAT(4F10.4)
 2  FORMAT(1F10.4)
 3  FORMAT(4F10.4)
 4  FORMAT(10F8.5)
 5  FORMAT(1X,'COURBE THEORIQUE OBTENUE'//)
 6  FORMAT(1X,'ECART QUADRATIQUE AVEC LA COURBE EXPER.'//)
 7  FORMAT(10X,'CONTRAINTE',10X,'DENSITE'//)
10  FORMAT(1X,'DEFORMATION',4X,'T=',11X,'SIGMA',7X,'DENSITE')
11  FORMAT(1H1,'INTEGRATION',I3,1X,'A0=',F10.4,1X,
1  'A1I=',F10.4,1X,'A2=',F10.4,1X,'K=',F10.4)
12  FORMAT(5X,'MINIMUM AU PIC',E12.5,5X,'INTEGRATION',I3)
13  FORMAT(5X,'ECART MOYEN AU PIC',E12.5,/5X,'ECART MOYEN AU
1  PALIER',E12.5,/5X,'ECART MAXI AVEC LA DENSITE',E12.5)
14  FORMAT(1X,'*****',//)
15  FORMAT(5X,'MINIMUM AU PALIER',E12.5,5X,'INTEGRATION',I3)
16  FORMAT(1X,'PRESSION LATERALE AU TRIAXIAL',5X,F10.4,1X,'BARS')

```

```
17 FORMAT(1X,'DENSITE INITIALE',18X,F10.4,2X,'DENSITE CRITIQUE',
1F10.4)
18 FORMAT(10X,E10.3,10X,E10.3)
21 FORMAT(1H0,///)
22 FORMAT(1H0,////////,20X,'COURBE EXPERIMENTALE',///)
23 FORMAT(1X,'DEFORMATION',11X,'SIGMA 1-SIGMA 3',13X,'DENSITE',//)
24 FORMAT(1X,F9.5,14X,F9.3,16X,F9.3)
26 FORMAT(20X,'*****',////////)
27 FORMAT(1X,'*****')
28 FORMAT(1H1,'OPTIMISATION')
51 FORMAT(5F10.2)
52 FORMAT(3F10.2)
53 FORMAT(3F6.2)
54 FORMAT(2I2)
55 FORMAT(F10.2)
56 FORMAT(5X,'MINIMUM POUR LA DENSITE',E12.5,5X,'INTEGRATION',I3)
CALL EXIT
END
```

ANNEXE IVDéroulement d'un essai : Check-list

1. Vérification du libre passage des rayons GAMMA et comptage des témoins (deux comptages pendant 1000 secondes).
2. Confection de l'échantillon - mise en place au sein de la cellule de pression - mise en pression.
3. Choix de la vitesse d'écrasement.
4. Mise en place de l'anneau dynamométrique - Alimentation des potentiomètres (10 V).
5. Mise en position de mesure de l'échantillon (amener le stylet de commande automatique sur le point 0 - centrale bloquée - de la plaquette de commande n°1).
6. Vérification de l'état de marche du système de télémétrie optique.
7. Branchement de la perforatrice.
8. Lancer la prospection de la densité de l'échantillon dans une première direction (prospection automatique).
9. Faire effectuer à l'échantillon une rotation de 60° (intervention manuelle).
10. Effectuer une deuxième prospection de la densité.
11. Faire effectuer à l'échantillon une nouvelle rotation de 60°.
12. Effectuer la troisième prospection à l'état initial.

13. Ecraser l'échantillon pendant le temps correspondant au passage de l'état initial à 2% de déformation environ.

14. Lancer la première prospection en densité pour cet état de déformation.

15. Effectuer une rotation de 60°

.... et ainsi de suite, jusqu'à 40 % de déformation, en alternant écrasement et prospection de la densité suivant trois directions à 2 , 5 , 10 , 20 , 30 % de déformation axiale.

Signalons qu'un essai complet dure environ huit heures.

ANNEXE VDépouillement : programme FORTRANProgramme de lecture de bande perforée

```

DIMENSION N(18),R(18),K(10),N1(18),R1(18)
DATA N1/3,4,7,11,21,22,30,31,32,33,34,40,41,42,66,67,68,69/
DATA N,R,K/18*0,18*0.,10*0/
READ(2,106) JOUR,DATE,ESSAI
CALL CYCLE(N,R,K)
WRITE(3,102) JOUR,DATE
WRITE(3,103) FSSAI
WRITE(3,104)
WRITE(3,105)
M=1
WRITE(3,101) M,(R(I),I=5,16)
10 CALL CYCLE(N,R,K)
M=M+1
IF(K(1)-1)3,2,7
7 IF(K(1)-5)4,3,4
4 WRITE(3,100) M,K(1)
GO TO 10
2 CALL EXIT
3 IF (N(18)-69)5,6,5
5 I=1
DO 13 J=1,18
IF (N(I)-N1(J))12,11,12
11 R1(J)=R(I)
I=I+1
13 CONTINUE
GO TO 19
12 R1(J)=888888888888.
GO TO 13
19 WRITE (3,101) M,(R1(I),I=5,16)
GO TO 10
6 WRITE(3,101) M,(R(I),I=5,16)
GO TO 10
100 FORMAT(I4,38X,'C Y C L E   E R R O N E',10X,'K(1)=' ,I2)
101 FORMAT(I4,1X,F7.1,1X,F7.1,4X,F5.0,2X,F5.0,4X,F7.0,3X,F7.1,
21X,F7.1,4X,F5.0,2X,F5.0,3X,F7.1,4X,F5.0,4X,F8.0)
102 FORMAT(1H1,38X,'ESSAI TRIAXIAL',10X,I2,1X,F5.2)
103 FORMAT(///,32X,'LISTE DE L ESSAI NO ',F8.5,///)
104 FORMAT(6X,'POTENTIOMETRES',6X,'CELLULES 1',15X,'POTENTIOMETRES',
25X,'CELLULES 2')
105 FORMAT(2X,'NO',2X,'VERTI.',2X,'HORIZ.',4X,'NO 1 ',2X,'NO 2 '
2,6X,'TEMPS',4X,'ANNEAU',2X,'DEFOR.',4X,'NO 1 ',2X,'NO 2 ',
35X,'ALIM.',4X,'DUREE',4X,'COMPTAGE')
106 FORMAT(I2,F5.2,F7.5)
END

```

Le traitement des résultats expérimentaux perforés sur bandes est effectué par l'intermédiaire des programmes et sous-programmes suivants :

T R I A 1 : programme de traitement
 I N T E R : sous-programme d'interpolation linéaire (exploitation de courbes d'étalonnage définies par points)
 T R I A 2 : programme de traçage des courbes effort-déformation et densité-déformation
 M I P A G : sous-programme de mise en page
 G R A P H : sous-programme de traçage des axes de référence
 T R I A 3 : programme de traçage des cartographies de densité

```

SUBROUTINE INTER(XI,YI,I,X,Y)
DIMENSION XI(1),YI(1)
10 IF(X-XI(I))13,12,11
13 I=I-1
GO TO 10
11 IF(X-XI(I+1))12,12,14
14 I=I+1
GO TO 10
12 DYXI=(YI(I+1)-YI(I))/(XI(I+1)-XI(I))
Y=YI(I)+(X-XI(I))*DYXI
RETURN
END

```

*NAME TRIA1 ESSAI TRIAXIAL TABLEAU

```

REAL NO,LME
DIMENSION N(18),R(18),K(10),T(14),VA(12)
DIMENSION FA(12),XX(153),ANG(3),YY(153)
COMMON X(100),Y(100),Z(100),ID,ICC,R5
DATA M/0/,ANG/0.,60.,120./,MI/0/
DATA U,V,W,WW/7300.,8000.,500.,2000./
DEFINE FILE 1(10,307,U,KX)
DEFINE FILE 2(10,307,U,KY)
READ(2,108) NO,AMU,ECA,ANT
READ(2,111)(VA(I),I=1,12)
READ(2,112)(FA(I),I=1,12)
READ(2,110) LME
READ(2,110) CD1
READ(2,100) ANPT,PR,DATE
JA=1
CH1=6963.75
CH2=40./3357.1
CV1=7265.67
CV2=0.0198
CD2=-36./3000.
KX=1
KY=1
ID=0
IC=0
ICC=1
DO 7 I=1,18
 7 N(I)=0
45 CALL CYCLE(N,R,K)
  R5=R(4)
  IF(K(1)-1)40,4,42
42 IF(K(1)-5)43,44,43
44 IF(N(18)-69)43,40,43
43 WRITE(3,105) M,K(1)
  GO TO 45
40 WRITE(3,101) DATE,R(4),PR
  WRITE(3,102)
  WRITE(3,103)
  VFO=R(10)*10000./R(14)
  VDO=R(11)*10000./R(14)
  TO=R(9)
  I=1
  CALL INTER(VA,FA,I,VFO,FO)
  ALO=CD1+CD2*VDO
  KK=K(2)
  1 M=M+1
  IF (K(1)-1) 56,4,55
  4 IF(KK-1)28,29,28
29 IM=IC
  WRITE(1,KX)IM,XX
  WRITE(2,KY) IM,YY
28 CALL LINK(TRIA2)
55 IF(K(1)-5)2,3,2
  3 IF(N(18)-69)2,56,2
  2 IF(MI-M)9,5,8
  9 READ(2,104)MI
  GO TO 2
  8 WRITE(3,105) M,K(1)
  GO TO 26
  5 READ(2,113) (R(I),I=6,17)
  READ(2,114)K(2),K(3),K(4)
56 VK=10000./R(14)

```

```

      I=1
16  R(I+4)=R(I+4)*VK          116
   GO TO (15,17,17,17,17,15,18),I
15  I=I+1
   GO TO 16
17  I=I+4
   GO TO 16
18  RPT=ANT/ANPT
   T(3)=R(9)-T0
   IF(R(7)-U) 31,30,30
30  IF(R(12)-V) 34,32,32
32  WRITE(3,109) M
   GO TO 26
34  COT1=R(12)
   IF(R(13)-V) 35,32,32
35  COT2=R(13)
   GO TO 36
31  COT1=R(7)
   IF(R(8)-U) 33,32,32
33  COT2=R(8)
36  IF(COT1-W) 32,37,37
37  IF(COT2-W) 32,38,38
38  DIST=ABS(COT2-COT1)
   IF(DIST-WW) 32,39,39
39  T(8)=DIST*0.01717
   T(9)=T(8)-2.*ECA
   T(4)=R(16)/R(15)
   T(4)=T(4)*RPT
   RPN=NO/T(4)
   T(12)=ALOG(RPN)*10./AMU/T(9)
   IF(T(12)-1.) 26,26,61
61  IF(T(12)-2.) 62,62,26
62  IF(R(10)-LME) 8,63,63
63  CALL INTER(VA,FA,JA,R(10),F)
   T(5)=F-F0
   T(6)=CH2*(R(6)-CH1)
   RC=SQRT(T(9)*T(9)/4.+T(6)*T(6))
   T(7)=100.*T(6)/RC
   T(14)=T(5)*10./(RC*RC*3.14159)
   AL=CD1+CD2*R(11)
   T(13)=100.*(ALO-AL)/ALO
   IZ=K(4)
   T(10)=CV2*(CV1-R(5))
   T(11)=100.*(AL-T(10))/AL
   M1=M
73  IF(M1-51) 70,71,72
71  WRITE(3,101) DATE,R(4),PR
   WRITE(3,102)
   WRITE(3,103)
72  M1=M1-50
   GO TO 73
70  IF(KK-K(2)) 20,21,20
20  WRITE(3,116)
   KK=K(2)
   IF(K(2)-1) 22,23,22
22  IM=IC
   WRITE(1,KX) IM,XX
   WRITE(2,KY) IM,YY
   GO TO 25
21  IF(K(2)-1) 25,24,25
25  ID=ID+1
   X(ID)=T(13)

```

```

Y(ID)=T(12)
Z(ID)=T(14)
WRITE(3,107)M,(T(I),I=3,8),ANG(IZ),(T(I),I=10,14)
GO TO 26
23 IC=0
   ICC=ICC+1
24 WRITE(3,106)M,(T(I),I=3,8),ANG(IZ),(T(I),I=10,14)
   IC=IC+1
   XX(IC)=T(12)
   YY(IC)=T(11)
   IC=IC+1
   XX(IC)=T(14)
   YY(IC)=T(6)
   IC=IC+1
   XX(IC)=T(13)
   YY(IC)=ANG(IZ)
26 CALL CYCLE (N,R,K)
   GO TO 1
100 FORMAT(F9.3,F3.0,F5.2)
101 FORMAT(1H1,25X,'DATE',2X,F5.2,8X,'ESSAI NO',F8.5,10X,
1'PRESSION LATERALE',F3.0,1X,'BARS'/)
102 FORMAT(' NO TYP.   TEMPS   COMPTAGE   FORCE   EXCENTRICITE
1CORDE  ANGLE   COTE   DENSITE   DEFOR.   CONTR. ')
103 FORMAT('
1 MM   DEGRE   MM   P.C.   N   P.C.   MM   P.C.
104 FORMAT(I3)
105 FORMAT(14,5X,'K(1)=' ,I2,4(10X,'CYCLE ERRONE'))
106 FORMAT(1X,I3,1X,'CAR.',1X,F7.0,2X,F9.3,2X,F8.2,1X,F6.2,1X,F7.2,
11X,F8.3,3X,F4.0,4X,F7.2,1X,F7.2,2X,F5.3,2X,F8.2,1X,F8.2)
107 FORMAT(1X,I3,1X,'DEF.',1X,F7.0,2X,F9.3,2X,F8.2,1X,F6.2,1X,F7.2,
11X,F8.3,3X,F4.0,4X,F7.2,1X,F7.2,2X,F5.3,2X,F8.2,1X,F8.2)
108 FORMAT(F9.3,F8.5,F6.3,F9.3)
109 FORMAT(14,50X,'MESURES OPTIQUES INEXPLOITABLES OU ERRONEES')
110 FORMAT(F10.3)
111 FORVAT(12F6.1)
112 FORMAT(12F6.0)
113 FORMAT( 3F8.3,2F8.1,F8.0,4F8.3,F9.0)
114 FORMAT(3I3)
116 FORMAT(1H   )
END

```

```

*NAME TRIA2 ESSAI TRIAXIAL COURBES DEN.-DEF. ET CON.-DEF.
  DIMENSION AN(4)
  COMMON X(100),Y(100),Z(100),ID,ICC,R5
  DATA AN,ALX,ALY,A,B/1.,3.,5.,10.,23.,17.,0.,0./
  WRITE(1,100)
  WRITE(1,101)
  WRITE(1,102)
  WRITE(1,106)
  PAUSE
  CALL DATSW(1,L1)
  IF(L1-1)1,2,1
2 CALL GRAPH(ID,X,Y,AN,ALX,ALY,A,B)
  WRITE(1,108)
  PAUSE
  CALL SCALF(1.,1.,0.,0.)
  CALL FCHAR(0.,0.,0.1,0.1,0.)
  WRITE(7,110) R5
1 WRITE(1,103)
  WRITE(1,101)
  WRITE(1,104)
  WRITE(1,107)
  PAUSE
  CALL DATSW(2,L2)
  IF(L2-1)3,4,3
4 CALL GRAPH(ID,X,Z,AN,ALX,ALY,A,B)
  WRITE(1,108)
  PAUSE
  CALL SCALF(1.,1.,0.,0.)
  CALL FCHAR(0.,0.,0.1,0.1,0.)
  WRITE(7,109) R5
3 CALL LINK(TRIA3)
100 FORMAT(//,'POUR TRACER LA COURBE DENSITE DEFORMATION')
101 FORMAT('      1-PREPARER LE GRAPHIQUE')
102 FORMAT('      2-LEVER LA CLEF NO. 1 ET APPUYER SUR DEPART')
103 FORMAT(//,'POUR TRACER LA COURBE CONTRAINTE DEFORMATION')
104 FORMAT('      2-LEVER LA CLEF NO. 2 ET APPUYER SUR DEPART')
106 FORMAT('SINON ABAISSER LA CLEF NO. 1 ET APPUYER SUR DEPART')
107 FORMAT('SINON ABAISSER LA CLEF NO. 2 ET APPUYER SUR DEPART')
108 FORMAT('PLACEZ LE STYLET POUR LE TITRE')
109 FORMAT('ESSAI ',F8.5,5X,'COURBE EFFORT-DEFORMATION')
110 FORMAT('ESSAI ',F8.5,5X,'COURBE DENSITE-DEFORMATION')
  END

```

```

*NAME TRIA3 ESSAI TRIAXIAL PROFILS DE DENSITE
  DIMENSION XX(153),YY(153),DEN(51),COT(51),
  1DEF(51),CON(51),EXC(51),ORI(51)
  COMMON X(100),Y(100),Z(100),ID,ICC,R5
  DEFINE FILE 1(10,307,U,KX)
  DEFINE FILE 2(10,307,U,KY)
  KX=1
  KY=1
  PI=-1.570796
  DO 1 I=1,ICC
  READ(1,KX) IM,XX
  READ(2,KY) IM,YY
  IN=IM/3
  DEFOR=0.
  CONTR=0.
  DO 2 J=1,IN
  DEN(J)=XX(3*J-2)
  CON(J)=XX(3*J-1)
  DEF(J)=XX(3*J)
  COT(J)=YY(3*J-2)
  EXC(J)=YY(3*J-1)
  ORI(J)=YY(3*J)
2 CONTINUE
  WRITE(3,100)
  DO 3 J=1,IN
  WRITE(3,101) DEN(J),COT(J),DEF(J),CON(J),EXC(J),ORI(J)
3 CONTINUE
  DO 7 J=1,IN
  DEFOR=DEF(J)+DEFOR
7 CONTINUE
  DO 8 J=1,IN
  CONTR=CON(J)+CONTR
8 CONTINUE
  TETA=ORI(1)
  DEFOR=DEFOR/IN
  CONTR=CONTR/IN
  WRITE(1,104)
  PAUSE
  CALL SCALF(1.,1.,0.,0.)
  CALL FCHAR(0.,0.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1005) R5,DEFOR
  WRITE(3,105) DEFOR,CONTR
  WRITE(1,102)
  PAUSE
C GRAPHIQUE
  CALL SCALF(0.1/2.54,0.1/2.54,0.,0.)
  CALL FGRID(1,0.,0.,10.,4)
  CALL FGRID(2,0.,40.,10.,10)
  CALL FGRID(3,-100.,40.,40.,2)
  CALL FGRID(0,-100.,-40.,50.,2)
  CALL FGRID(1,0.,-40.,10.,4)
  CALL FCHAR(0.,0.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1006)
  CALL FCHAR(1.,46.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1004)
  CALL FCHAR(-50.,50.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1000)
  CALL FCHAR(-100.,50.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1001)
  CALL FCHAR(-110.,30.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1002) TETA
  CALL FPLOT(1,0.,0.)

```

```

DO 4 J=1,IN
  IF (TETA-ORI(J)) 5,6,5
5 TETA=ORI(J)
  WRITE(1,102)
  PAUSE
C GRAPHIQUE
  CALL SCALF(0.1/2.54,0.1/2.54,0.,0.)
  CALL FGRID(1,0.,0.,10.,4)
  CALL FGRID(2,0.,40.,10.,10)
  CALL FGRID(3,-100.,40.,40.,2)
  CALL FGRID(0,-100.,-40.,50.,2)
  CALL FGRID(1,0.,-40.,10.,4)
  CALL FCHAR(0.,0.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1006)
  CALL FCHAR(1.,46.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1004)
  CALL FCHAR(-50.,50.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1000)
  CALL FCHAR(-100.,50.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1001)
  CALL FCHAR(-110.,30.,0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,1002) TETA
  CALL FPLOT(1,0.,0.)
6 CALL FPLOT(-2,-1.*COT(J),EXC(J))
  CALL POINT(0)
  CALL FCHAR(-1*COT(J)-7,EXC(J),0.1,0.1,PI)
  WRITE(7,103) DEN(J)
4 CONTINUE
1 CONTINUE
100 FORMAT(1H1,2X,'DENSITE',2X,'COTE(P.C.)',2X,'DEFORMATION(P.C.)',
  12X,'CONTRAINTE(BAR)',2X,'EXCENTRICITE(MM)',2X,'ORIENTATION(DEG)')
101 FORMAT(2X,F7.3,2X,F10.2,11X,F8.3,7X,F10.3,6X,F12.2,5X,F11.1)
102 FORMAT('PREPARER LE GRAPH. PLACER LA PLUME APPUYER DEPART')
103 FORMAT(F4.2)
104 FORMAT(' PLACER LE STYLET POUR LE TITRE')
105 FORMAT('//,10X,'DEFORMATION',F8.5,5X,'CONTRAINTE',F8.2)
1000 FORMAT('50')
1001 FORMAT('100 ')
1002 FORMAT('DIR.',2X,F10.3)
1004 FORMAT('4 CM')
1005 FORMAT('ESSAI NO',F8.5,5X,'DEFOR.',F8.3)
1006 FORMAT('0')
  CALL EXIT
END

```

```

SUBROUTINE MIPAG(N,X,BN,PLX,EX,UX,XO,NUX)
DIMENSION X(100),AN(4),BN(4)
XMI=X(1)
XMA=X(1)
DO 3 I=1,N
  IF(X(I)-XMI)1,2,2
2 IF(X(I)-XMA)3,3,4
1 XMI=X(I)
  GO TO 3
4 XMA=X(I)
3 CONTINUE
  DX=XMA-XMI
  DO 30 I=1,4
30 AN(I)=BN(I)/2.540
  ALX=PLX/2.540
  J=1
10 EX=AN(1)*10.**J
  IF(ALX-EX*DX)5,7,7
  5 J=J-1
  GO TO 10
  7 EX=AN(1)*10.**(J+1)
  IF(ALX-EX*DX)8,8,9
  9 J=J+1
  GO TO 10
  8 I=1
  6 EX=AN(I)*10.**J
  IF(ALX-EX*DX)12,11,11
11 I=I+1
  GO TO 6
12 I=I-1
  EX=AN(I)*10.**J
  M=1
20 IF(DX-10.**M)21,21,22
21 M=M-1
  GO TO 20
22 IF(DX-10.**(M+1))23,23,24
24 M=M+1
  GO TO 20
23 ANUX=DX/10.**M
  IF(ANUX-3.)25,26,26
25 UX=0.5*10.**M
  GO TO 27
26 UX=10.**M
27 NUX=IFIX(DX/UX)+1
  XO=FLOAT(IFIX(XMI/UX))*UX
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GRAPH(N,XI,YI,BN,ALX,ALY,A,B)
DIMENSION XI(100),YI(100),BN(4),XA(100),YA(100),XB(100)
CALL MIPAG(N,XI,BN,ALX,EX,DX,XO,NGX)
CALL MIPAG(N,YI,BN,ALY,EY,DY,YO,NGY)
CALL SCALF(EX,EY,XO,YO)
CALL FGRID(0,XO,YO,DX,NGX)
CALL FGRID(1,XO,YO,DY,NGY)
NVX=NGX+1
E1=0.3
IF(DX*EX-1.)11,11,12
12 E2=0.3
GO TO 13
11 E2=0.4
13 IX=1
DO 30 I=1,NVX
IF(IX-1)5,5,6
5 Y1=YO-E1/EY
IX=2
GO TO 7
6 Y1=YO-E2/EY
IX=1
7 XA(I)=XO+(I-1)*DX-0.47/EX
CALL FCHAR(XA(I),Y1,0.1,0.1,0.)
XB(I)=XO+(I-1)*DX+XO/1000.
30 WRITE (7,123) XB(I)
NVY=NGY+1
DO 31 I=1,NVY
YA(I)=YO+(I-1)*DY+YO/1000.
X1=XO-1.1/EX
CALL FCHAR(X1,YA(I),0.1,0.1,0.)
31 WRITE (7,123) YA(I)
DO 32 I=1,N
CALL FPLOT (-2,XI(I),YI(I))
CALL POINT(0)
32 CALL FPLOT (-1,XI(I),YI(I))
IF(A=0.)1,2,1
2 IF(B=0.)1,3,1
1 YD=A*XO+B
XF=XO+NGX*DX
YF=A*XF+B
CALL FPLOT(-2,XO,YD)
CALL FPLOT(-2,XF,YF)
3 CALL FPLOT(+1,XO,YO)
123 FORMAT (E10.3)
RETURN
END

```

ANNEXE VI

Calcul de la densité locale : programme FORTRAN

Ce programme utilise le sous-programme M I N V G et D T C H présentés en annexe I.

```

DIMENSION SY(3),Y(3),DEN(16),RO(3),COR(3)
DIMENSION R1(4),B2(3),B3(2)
DIMENSION D1(4,4),D2(3,3),D3(2,2)
DIMENSION V11(4),V21(4),V12(3),V22(3)
DIMENSION V13(2),V23(2)
DIMENSION T1(4,4),T11(4,4),T2(3,3),T12(3,3)
DIMENSION T3(2,2),T13(2,2)
DIMENSION F(3,3),V1(3),V2(3)
DATA F/9*0./
X=1./3.
H=1./2.
DO 2 I=1,4
2 B1(I)=X*FLOAT(I-1)
DO 3 I=1,3
3 B2(I)=H*FLOAT(I-1)
DO 4 I=1,2
4 B3(I)=H*FLOAT(I-1)*2.
ND1=4
ND2=3
ND3=2
CALL DTCH4(0.,1.,B1,D1,V11,V21,ND1,T1,T11,2)
CALL DTCH3(0.,1.,B2,D2,V12,V22,ND2,T2,T12,2)
CALL DTCH2(0.,1.,B3,D3,V13,V23,ND3,T3,T13,2)
F(1,1)=D1(4,1)+D1(4,4)
F(1,2)=D1(4,2)+D1(4,3)
F(2,2)=D3(2,1)+D3(2,2)
F(3,2)=D2(3,1)+D2(3,3)
F(3,3)=D2(3,2)
CALL MINVG(F,3,DER,V1,V2)
DO 7 I=1,3
Y(I)=0.
DO 7 J=1,3
7 Y(I)=Y(I)+F(I,J)*SY(J)
DO 8 I=1,4
8 DEN(I)=Y(1)
DO 9 I=5,12
9 DEN(I)=Y(2)
DO 10 I=13,16
10 DEN(I)=Y(3)
WRITE(3,200)
DO 11 I=1,16
11 WRITE(3,300) I,DEN(I)
200 FORMAT(5X,'POINT',5X,'DENSITE')
300 FORMAT(6X,I2,8X,F5.3)
CALL EXIT
END

```