

# THÈSE

présentée à la

## FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

6CH

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPECIALITÉ

(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Pierre VERNAY

Ingénieur E.C.L.

## ANALYSE LIMITÉE D'UN TUBE CREUX SOUMIS À DES EFFORTS DE TORSION, DE CHARGE AXIALE ET DE PRESSIONS RADIALES POUR LES MATERIAUX DE TRESCA ET DE COULOMB

Soutenue le 2 Avril 1971, devant la Commission d'Examen

M. J. KRAVTCHEKO Président

M. L. SANTON  
M. P. ANGLES D'AURIAC } Examinateurs  
M. R. NEGRE

M. P. STUTZ Invité

GRENOBLE

12 DEC. 1971

## AVANT-PROPOS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été poursuivis dans le laboratoire de Mécanique des Sols de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Je remercie tout d'abord les professeurs du Troisième Cycle de Mécanique des Sols , qui m'ont initié aux divers aspects de cette branche de la Mécanique, et en particulier Messieurs les Professeurs KRAVTCHENKO , SANTON , ANGLES d'AURIAC et NEGRE qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur KRAVTCHENKO pour son enseignement théorique dont j'ai largement bénéficié et pour son accueil chaleureux dans le laboratoire qu'il anime. Il m'a accordé de nombreux entretiens , prenant ainsi sur son temps que je lui sais précieux.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur ANGLES d'AURIAC pour les discussions fructueuses que nous avons eues. Ses suggestions m'ont permis de mettre au point de nombreux passages de ma rédaction.

Je tiens à remercier tout spécialement Monsieur le Professeur SAWCZUK qui a dirigé mes travaux lors de son séjour à Grenoble. Il n'a ménagé ni son temps ni sa peine, et ses conseils et ses encouragements m'ont permis de vaincre plus d'une difficulté. Depuis son départ de Grenoble, il a suivi mon travail de près grâce à de nombreux échanges, et je lui exprime toute ma reconnaissance pour la sympathie qu'il m'a témoignée.

Je ne saurais oublier tout ce que je dois aux conseils amicaux de mes camarades de laboratoire et en particulier de Monsieur STUTZ dont les suggestions et les critiques m'ont été fort précieuses.

Je voudrais également remercier tous ceux qui m'ont apporté une aide matérielle, Monsieur CHOISY, Madame MAILLOT qui a assuré la frappe de mon manuscrit, et Monsieur ELBERG qui, avec tout son soin habituel, en a effectué la reproduction.

## SOMMAIRE

### I INTRODUCTION

1°) Position d'un problème de plasticité .....	1
2°) Matériaux de MISES et de COULOMB .....	3
3°) Matériaux de TRESCA et de COULOMB généralisé .....	6
4°) Les problèmes à symétrie axiale .....	9
5°) Objet de notre étude .....	10

### II LES EQUATIONS DE LA PLASTICITE EN SYMETRIE AXIALE

1°) Système de coordonnées .....	12
2°) Equations de l'équilibre en coordonnées cylindriques .....	13
3°) Relations entre les $\epsilon_{ij}$ et les $u_i$ .....	14
4°) Simplifications dues à la symétrie axiale .....	16
5°) Transformations aux lignes principales .....	17

### III DONNEES ET HYPOTHESES

1°) Données géométriques .....	20
2°) Sollicitations exercées .....	20
3°) Hypothèses .....	20
4°) Conséquences .....	21

### IV ANALYSE CINEMATIQUE POUR UN MATERIAU INCOMPRESSIBLE 22

### V ETUDE D'UN MATERIAU DE TRESCA

A - Cas où  $P_a \neq P_b$

1°) Choix du régime plastique .....	25
a) régimes de face .....	25
b) régimes d'arête .....	27

2°) Etude des cas particuliers .....	32
a) Cas où $T = 0$ .....	32
b) Cas où $Q = T = 0$ .....	33
3°) Développement de la solution S .....	36
4°) Cas particulier des tubes à parois minces .....	39
Surface d'interaction .....	40

<u>B - Cas où <math>P_a = P_b = P</math></u> .....	44
1°) Solution S .....	44
2°) Cas particuliers .....	45
3°) Surface d'interaction .....	47

## VI ETUDE D'UN MATERIAU DE COULOMB GENERALISE

### A - Matériau compressible

1°) Analyse cinématique .....	48
2°) Choix du régime plastique .....	49
a) régime de face .....	49
b) régime d'arête .....	53

### B - Matériau incompressible, $P_a = P_b = P$

1°) Solution S .....	60
2°) Régimes de face - $k_1 = k_3 = 0$ .....	62
3°) Surface d'interaction .....	63
Cas particulier des milieux non cohérents .....	63
Comparaison avec les résultats pratiques .....	64

## VII CONCLUSION

66

## BIBLIOGRAPHIE

69

## I. INTRODUCTION

### 1°) Position d'un problème de Plasticité.

#### Les hypothèses.

Soit un corps de forme donnée (généralement de forme géométrique simple : cylindre, parallélépipède rectangle, massifs à surface plane, etc ...) et réalisé dans un matériau donné. Le problème à résoudre est le suivant :

Le corps étudié est soumis à des contraintes ou des déplacements exercés sur sa surface extérieure. Calculer les contraintes et les déformations qui en résultent en chaque point du corps, connaissant :

- les conditions aux limites (contraintes imposées, déplacements des points de la surface extérieure, etc ...)
- la loi de comportement plastique du matériau (élastique-plastique avec écrouissage, élastique parfaitement plastique, rigide-plastique avec écrouissage, rigide parfaitement plastique).

Notons que nous nous intéresserons seulement à l'écoulement initial (petites déformations), pour un matériau homogène et isotrope. Nous négligerons les forces d'inertie (déformations suffisamment lentes, à vitesse constante).

#### Bilan des inconnues.

Il convient de choisir un repère dans lequel un point quelconque sera désigné par ses coordonnées spatiales. Le choix du repère (orthonormé direct) se fera en tenant compte des symétries du corps (système de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, suivant les cas). Les inconnues du problème sont :

- Les composantes du tenseur contrainte en un point. Ce tenseur du 3ème ordre étant symétrique, le nombre des composantes à déterminer est de 6 (nous les noterons  $\sigma_{ij}$  avec  $i, j : x, y, z$  par exemple pour un système de coordonnées cartésiennes). Notons que l'on peut aussi prendre pour inconnues les 3 contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_i : i : 1, 2, 3$ ) et 3 angles repérant les directions principales.

- Les composantes d'un vecteur caractérisant la déformation. On choisit en général le vecteur déplacement d'un élément. Ce vecteur a trois composantes  $u, v, w$  ( $u_i : i : x, y, z$  par exemple). En réalité on ne peut pas

déterminer directement les  $u_i$ . On calcule d'abord les composantes du tenseur vitesse de déformation, que nous noterons  $\epsilon_{ij}$  ( $i, j : x, y, z$  par exemple). Ces composantes sont en relation directe avec les  $u_i$  (par exemple, pour des coordonnées cartésiennes,  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ ).

Notons que l'hypothèse de l'isotropie du matériau nous amène à écrire que les directions principales des tenseurs contrainte et vitesse de déformation coïncident. Au total, le nombre des inconnues est de 9. En réalité, nous verrons qu'une inconnue supplémentaire s'introduit, ce qui porte leur nombre à 10.

#### Bilan des équations.

Pour que le problème ait une solution unique, il faut que nous disposions de 10 équations. Ces équations sont de trois types :

##### • Equations de l'équilibre :

On écrit qu'un élément est en équilibre sous l'effet des contraintes qui lui sont imposées et des forces de volume qui peuvent être appliquées (par exemple le poids de l'élément considéré). Notons que cet équilibre est un état limite, car, en réalité, comme nous le verrons ci-après, les contraintes ne sont pas quelconques, mais vérifient l'équation de la surface limite du matériau. L'équation vectorielle de l'équilibre se projette sur le repère orthonormé choisi et fournit 3 équations.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, ces équations s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = u_i \quad (i, j : x, y, z)$$

Les  $u_i$  sont les composantes des forces de volume. Notons que ces 3 équations ne font intervenir que les contraintes.

##### • Le critère d'écoulement plastique :

C'est une équation de la forme  $F(\sigma_{ij}) = 0$ . Elle fixe l'ensemble des états de contrainte à partir duquel l'équilibre d'un élément est rompu. Ce critère est caractéristique du matériau. Dans un espace à 3 dimensions,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (nous l'appellerons espace  $E_3$ ), l'équation  $F(\sigma_{ij}) = 0$  représente une surface dont tous les points correspondent à un état limite. C'est pourquoi, on l'appelle surface limite. Tout point intérieur à cette surface représente un état de contrainte tel que l'équilibre limite n'est pas atteint. Aucun état de contrainte admissible ne peut être représenté par un point extérieur à la surface limite. Notons que

le critère d'écoulement ne fait intervenir que les contraintes.

• La loi d'écoulement plastique :

Elle traduit la manière dont s'effectue la déformation plastique. Elle s'exprime par des relations entre les composantes du tenseur vitesse de déformation et les composantes du tenseur contrainte. En général, on utilise une loi à potentiel, en postulant l'existence d'une fonction  $G(\sigma_{ij})$  telle que

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

$\lambda$  est un coefficient de proportionnalité arbitraire et constitue la 10ème inconnue de notre problème.

Notons que l'emploi d'un écoulement à potentiel requiert l'identité des directions principales des tenseurs contrainte et vitesse de déformation. Il est donc légitime de l'utiliser pour un matériau isotrope.

Finalement, nous disposons bien de 10 équations pour 10 inconnues.

Remarque.

Nous avons vu que 4 équations ne faisaient intervenir que les contraintes. Les 6 autres font intervenir les composantes des deux tenseurs. Il n'est donc pas possible de résoudre le problème statique (en contraintes), séparément du problème cinématique (en vitesses de déformations). Les deux champs se déterminent donc simultanément en résolvant les problèmes aux limites posés relativement au système des 10 équations. La solution sera unique si toutes les données sont analytiques. On est ainsi conduit à des problèmes d'analyse parfois difficiles. C'est pourquoi, on se borne souvent à des cas particuliers (cas plans pour les contraintes ou les déformations) ou à des cas de symétrie (symétrie axiale par exemple).

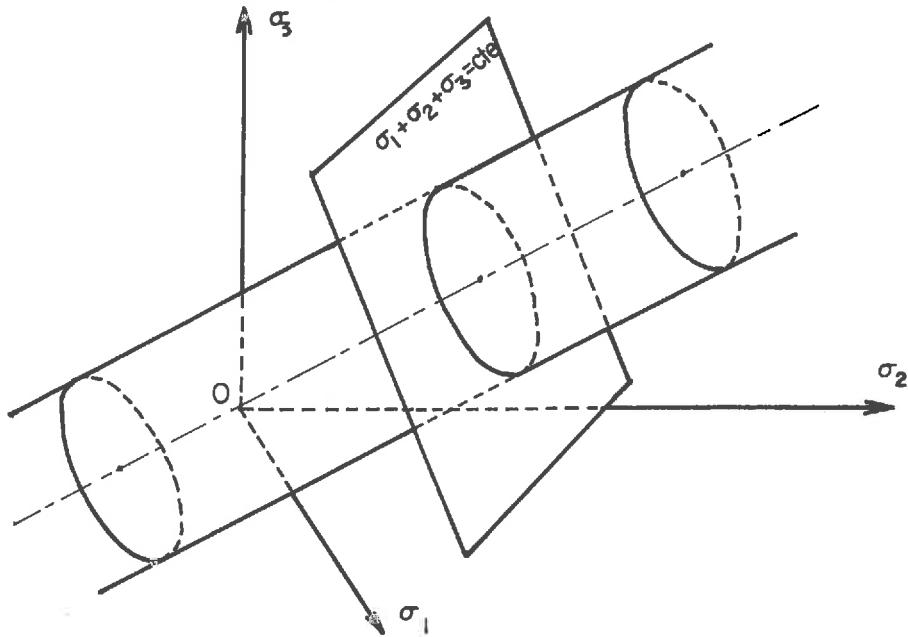
2°) Matériaux de MISES et de COULOMB.

Le critère d'écoulement du matériau de MISES, [16] s'exprime par l'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6K^2 = 0$$

$K$  est une constante caractéristique du matériau (limite d'écoulement en cisaillement pur).

Dans l'espace  $E_3$  des contraintes principales, c'est l'équation d'un cylindre de révolution autour de la trissectrice, de rayon  $K\sqrt{2}$ .

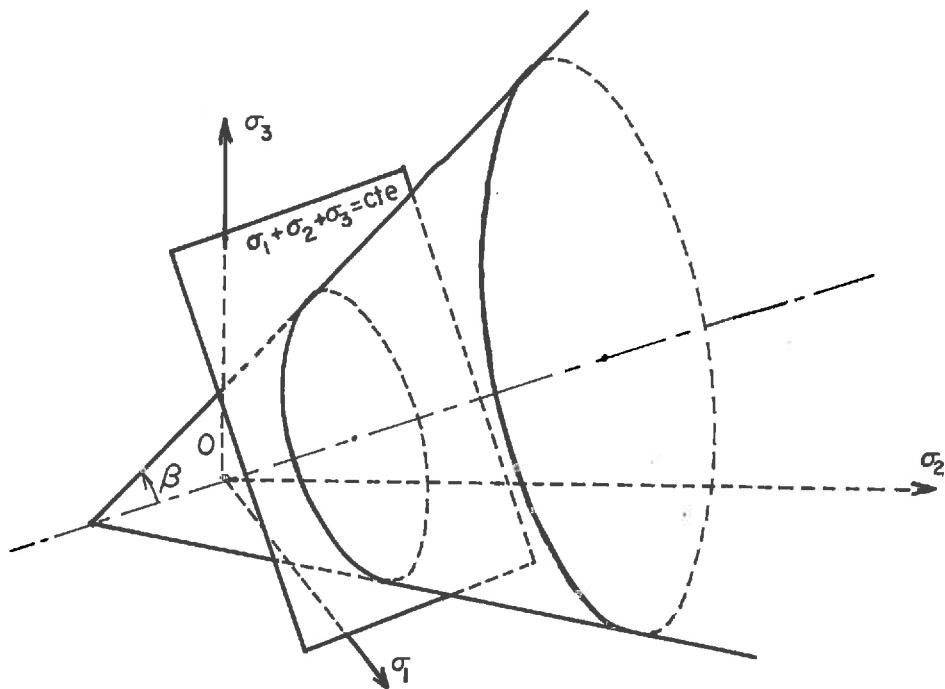


Pour le matériau de COULOMB, le critère d'écoulement s'écrit :

$$F(\sigma_{ij}) = \left\{ \frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}^{1/2} - \alpha (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - K = 0$$

$K$  est une constante (limite d'écoulement en cisaillement pur).  $\alpha$  est aussi une constante.

La surface limite, dans l'espace  $E_3$  est un cône de révolution autour de la trissectrice, de demi-angle au sommet  $\beta$  tel que  $\operatorname{tg} \beta = \alpha \sqrt{6}$



#### Influence de la pression isotrope.

Pour le matériau de MISES, la section de la surface limite par un plan perpendiculaire à la trisectrice ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{cte}$ ) est toujours un cercle de même grandeur. Cela signifie que l'état de contrainte limite n'est pas sensible à la pression isotrope (ou au premier invariant du tenseur contrainte).

Pour le matériau de COULOMB, par contre, la section à pression isotrope constante est un cercle dont le rayon croît avec la valeur de la pression isotrope. Le matériau de COULOMB est donc sensible à la pression isotrope.

#### Matériau "standard" et matériau "non standard".

Quand  $F(\sigma_{ij}) = G(\sigma_{ij})$ , le matériau est dit standard. C'est l'écoulement à potentiel classique. Si  $F(\sigma_{ij}) \neq G(\sigma_{ij})$ , le matériau est dit non standard par RADENKOVIC [22].

Dans l'espace  $E_3$ , l'équation  $G(\sigma_{ij}) = 0$  est celle d'une surface qui coïncide avec la surface limite dans le cas du matériau standard. Pour un matériau non standard, on choisit souvent pour  $G(\sigma_{ij})$  une surface de même forme que la surface limite et intérieure à celle-ci.

L'écoulement à potentiel et l'incompressibilité.

Le vecteur  $\vec{\epsilon}$ , de composantes  $\dot{\epsilon}_i$  vitesses de déformation principales, peut être représenté dans l'espace  $E_3$ , avec une métrique appropriée. L'hypothèse (H1) de l'écoulement à potentiel impose au vecteur  $\vec{\epsilon}$  d'être perpendiculaire à la surface  $G(\sigma_{ij})$ , du moins en un point ordinaire de celle-ci.

Si la déformation s'effectue sans changement de volume, si le matériau est incompressible, on utilise l'hypothèse de l'incompressibilité. Celle-ci se traduit par l'équation :

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$$

ce qui signifie que dans l'espace  $E_3$ , le vecteur  $\vec{\epsilon}$  doit être perpendiculaire à la trissectrice.

Nous voyons que l'hypothèse de l'écoulement à potentiel et l'hypothèse de l'incompressibilité risquent d'être contradictoires.

Pour le matériau de MISES, la surface limite étant à génératrices parallèles à la trissectrice, une hypothèse entraîne l'autre.  $H_1 \Rightarrow H_2 \text{ mais } H_2 \Rightarrow H_1$

Pour le matériau de COULOMB, par contre, il y a incompatibilité, à moins de choisir un matériau non standard tel que la surface  $G(\sigma_{ij})$  soit parallèle à la trissectrice (cas particulier où  $\beta = 0$ ).

3°) Matériaux de TRESCA et de COULOMB généralisé.

Pour le matériau de TRESCA, [28] la surface limite a pour équation :

$$F(\sigma_{ij}) = (\sigma_i - \sigma_j)^2 - 4K^2 = 0 \quad \begin{array}{l} \sigma_i > \sigma_k > \sigma_j \\ (i, j, k : 1, 2, 3) \end{array}$$

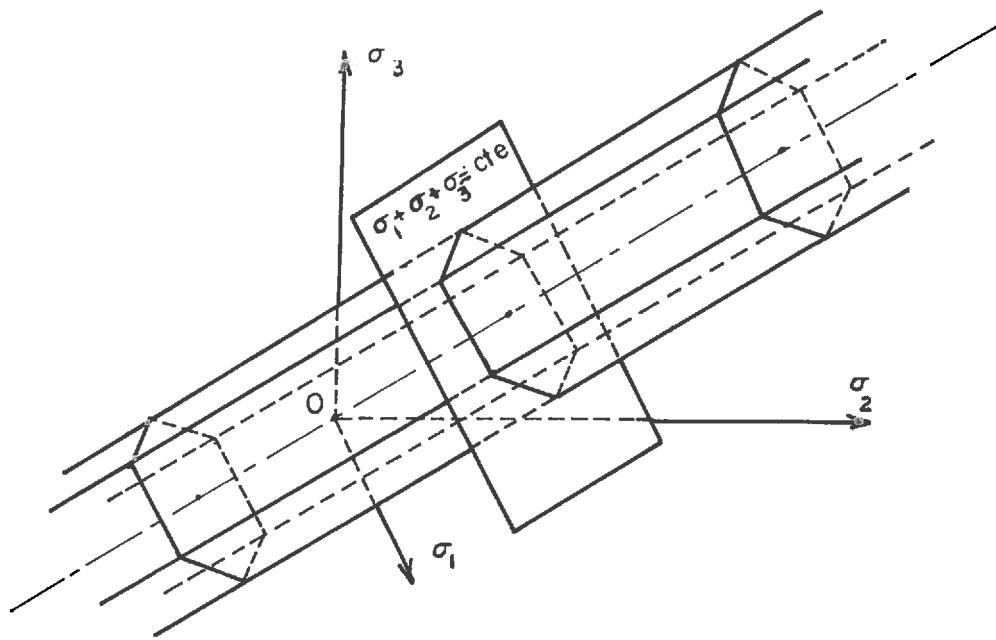
$K$  est la limite d'écoulement au cisaillement pur.

Elle représente un prisme droit à base un hexagone régulier, axé sur la trissectrice.

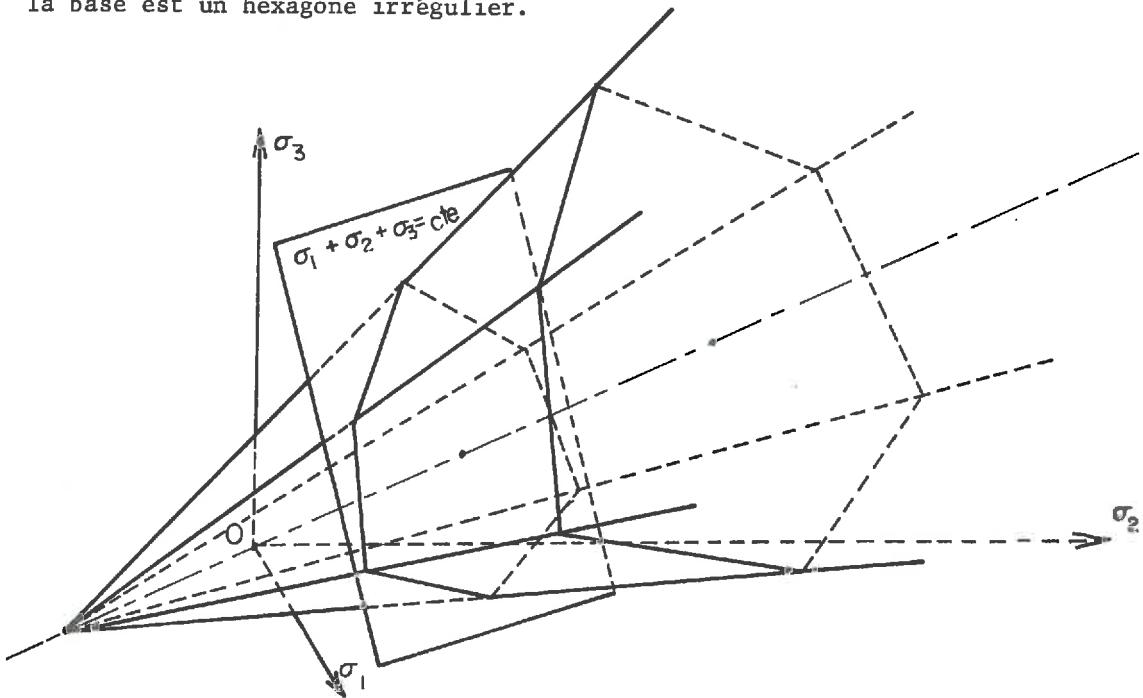
Pour le matériau de COULOMB généralisé [3], nous avons :

$$F(\sigma_{ij}) = |\sigma_i - \sigma_j| - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \Phi - 2c \cos \Phi = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_i > \sigma_k > \sigma_j \quad (i, j, k : 1, 2, 3)$$

où  $\Phi$  et  $c$  sont des constantes caractéristiques du matériau. Notons que l'on a



$K = c \cos \Phi$ . La surface limite est une pyramide axée sur la trissectrice, dont la base est un hexagone irrégulier.



Le matériau de TRESCA est insensible à la pression isotrope au contraire du matériau de COULOMB généralisé.

Non analyticité de la surface limite.

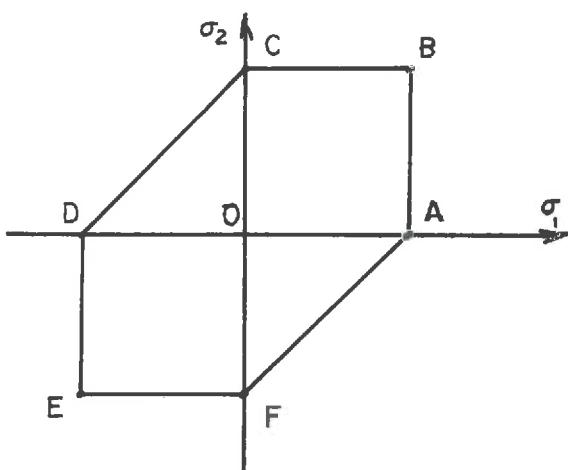
Les matériaux de MISES et de COULOMB ont des surfaces limites régulières (à part le cône qui compte un point singulier en son sommet. Ce point est représentatif d'un état de contrainte bien particulier, dont l'étude ne présente pas de difficulté).

Par contre, les matériaux de TRESCA et de COULOMB généralisé présentent des lignes singulières sur leur surface limite. Ce sont les arêtes. Les états représentés par chacun des points de ces lignes risquent de ne pas être déterminés de manière unique.

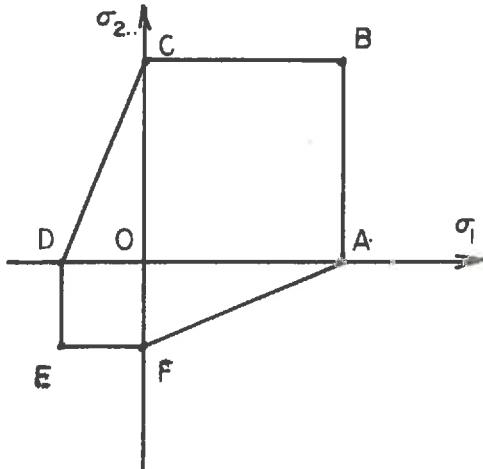
Les différents régimes plastiques.

Les surfaces limites du matériau de TRESCA et de COULOMB généralisé étant polyédrales, l'étude des différents états possibles se fera par "régimes", chaque régime correspondant à une face ou à une arête.

Ces différents régimes plastiques sont repérés par leur image sur l'intersection de la surface limite (ou la surface  $G(\sigma_{ij})$  pour les matériaux non standards) avec le plan  $\sigma_3 = 0$ .



Matériau de TRESCA



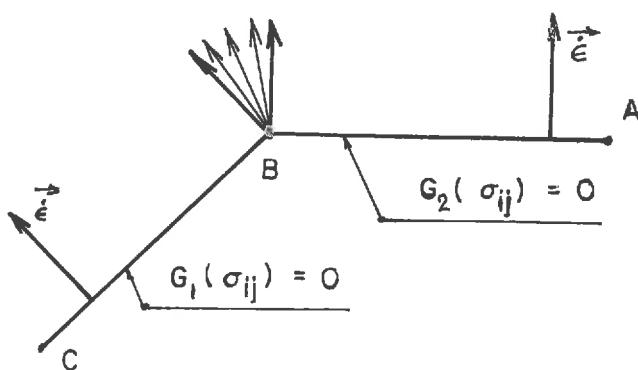
Matériau de COULOMB  
généralisé

Ils sont classés en 4 groupes :

- Groupe 1 Régimes B et E  
" 2 " AB, EF, BC, DE  
" 3 " A, F, C, D  
" 4 " AF et CD

Problèmes de passage d'une face à l'autre.

Quand le point figuratif de l'état de contrainte se déplace sur une face de la surface limite, le vecteur  $\vec{\epsilon}$  a une direction bien déterminée. Par contre, le long d'une arête, il y a indétermination, la direction du vecteur  $\vec{\epsilon}$  pouvant varier entre deux limites correspondant aux deux faces adjacentes.



Si la première face a pour équation  $G_1(\sigma_{ij}) = 0$  et la face adjacente  $G_2(\sigma_{ij}) = 0$  nous pouvons considérer que l'arête commune aura pour équations

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 & \text{(par exemple)} \\ \mu G_1(\sigma_{ij}) + (1-\mu) G_2(\sigma_{ij}) = 0 \end{cases}$$

$\mu$  étant une inconnue supplémentaire pouvant varier entre 0 et 1, ces valeurs extrêmes correspondant respectivement à l'une et à l'autre des deux faces.

Les régimes d'arête (ou de HAAR-KARMAN) [7] font intervenir une inconnue supplémentaire, mais nous disposons aussi d'une équation supplémentaire (ici  $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

4°) Les problèmes à symétrie axiale.

Outre la simplicité qu'elle introduit dans les calculs, l'hypothèse de la symétrie axiale présente un intérêt certain pour les problèmes présentant cette symétrie dans la géométrie du corps étudié (tous les corps à symétrie de révolution) ou les corps semi-infinis sollicités par une fondation (par exemple) présentant cette symétrie.

Quelques études en symétrie axiale.

Nombreux sont les auteurs qui ont étudié des milieux à symétrie axiale

en déformation plastique.

Examinons quelques ouvrages étudiant un corps de révolution soumis à des contraintes présentant aussi cette symétrie :

H. LIPPmann [14] utilise un matériau de Tresca incompressible. Il étudie des corps cylindriques soumis à une pression radiale, et à une traction (ou une compression) axiale. Il résoud le problème cinématique et montre que les réseaux de lignes caractéristiques du champ statique et du champ cinématique coïncident. Il intègre les équations de l'équilibre statique, pour un régime de face, en suivant les trajectoires.

R.T. SHIELD [23] étudie l'écoulement d'un milieu de Tresca soumis à des contraintes radiales et axiales. Il donne une discussion générale des équations de base et montre l'intérêt des régimes d'arête. Les différents régimes plastiques sont abordés.

A.D. COX, G. EASON et H.G. HOPKINS [4] font des études semblables pour un matériau de Coulomb généralisé.

Notons que ces auteurs ne font pas intervenir la torsion dans leurs ouvrages. La direction  $\theta$  est toujours direction principale et le problème se ramène à une étude dans un plan méridien.

Quelques auteurs font intervenir la torsion. La plupart limitent leurs études aux coques (parois minces). Citons par exemple J.E. PANARELLI et P.G. HODGE Jr [11, 12]. Ces derniers auteurs ont en outre consacré un ouvrage [20] à l'étude d'un cylindre creux à parois épaisses, réalisé dans un matériau de Mises, soumis à des pressions radiales, à une charge axiale et à un couple. Ils comparent leurs résultats avec ceux qu'ils avaient obtenus pour les coques, en faisant tendre l'épaisseur du tube vers zéro.

#### 5°) Objet de notre étude.

Il nous a paru intéressant de traiter le problème de déformation plastique d'un cylindre creux, à parois épaisses, sous l'effet combiné de pressions radiales, interne et externe, d'une action axiale (traction ou compression) et d'un couple de torsion. En effet, les mesures expérimentales que l'on peut faire à ce sujet permettent seulement une interprétation globale des phénomènes (en particulier de la rupture d'équilibre). Le but de notre étude est donc d'essayer d'approfondir la

connaissance de ces phénomènes en tout point intérieur du corps étudié. Ceci, pour connaître la répartition des contraintes et des déformations en tout point. Nous avons étudié ainsi un matériau de TRESCA, puis un matériau de COULOMB généralisé.

Pour le matériau de TRESCA, nous montrons que l'hypothèse de la déformation plastique homogène n'est acceptable qu'en régime d'arête. Nous étudions les différents régimes plastiques possibles et donnons une solution dans chaque cas pour les champs statique et cinématique.

Le matériau de COULOMB généralisé est traité de la même façon (nous avons essayé de retrouver les résultats obtenus pour le matériau de TRESCA comme cas particulier). Nous sommes arrivés aux mêmes conclusions que pour le matériau de TRESCA. Enfin, nous avons étudié le cas particulier d'un matériau de COULOMB généralisé incompressible.

II. LES EQUATIONS DE LA PLASTICITE  
EN SYMETRIE AXIALE

1°) Système de coordonnées.

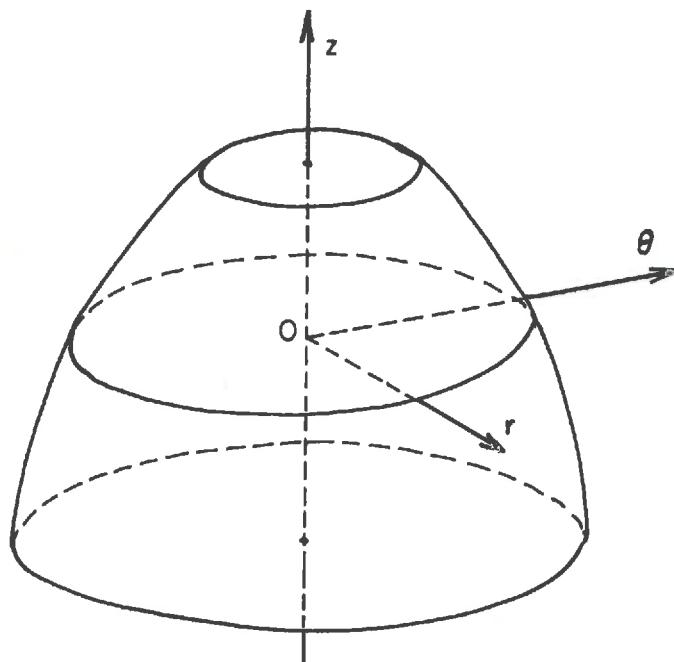
Le système de coordonnées utilisé en symétrie axiale est le système de coordonnées cylindriques dont les 3 variables sont  $r$  (distance à l'axe de symétrie),  $\theta$  (angle polaire dans une section perpendiculaire à l'axe),  $z$  (cote sur l'axe).

L'origine du repère sera prise sur l'axe de révolution.

L'axe  $\overrightarrow{Oz}$  porté par l'axe de révolution.

L'axe  $\overrightarrow{Or}$  porté par un rayon.

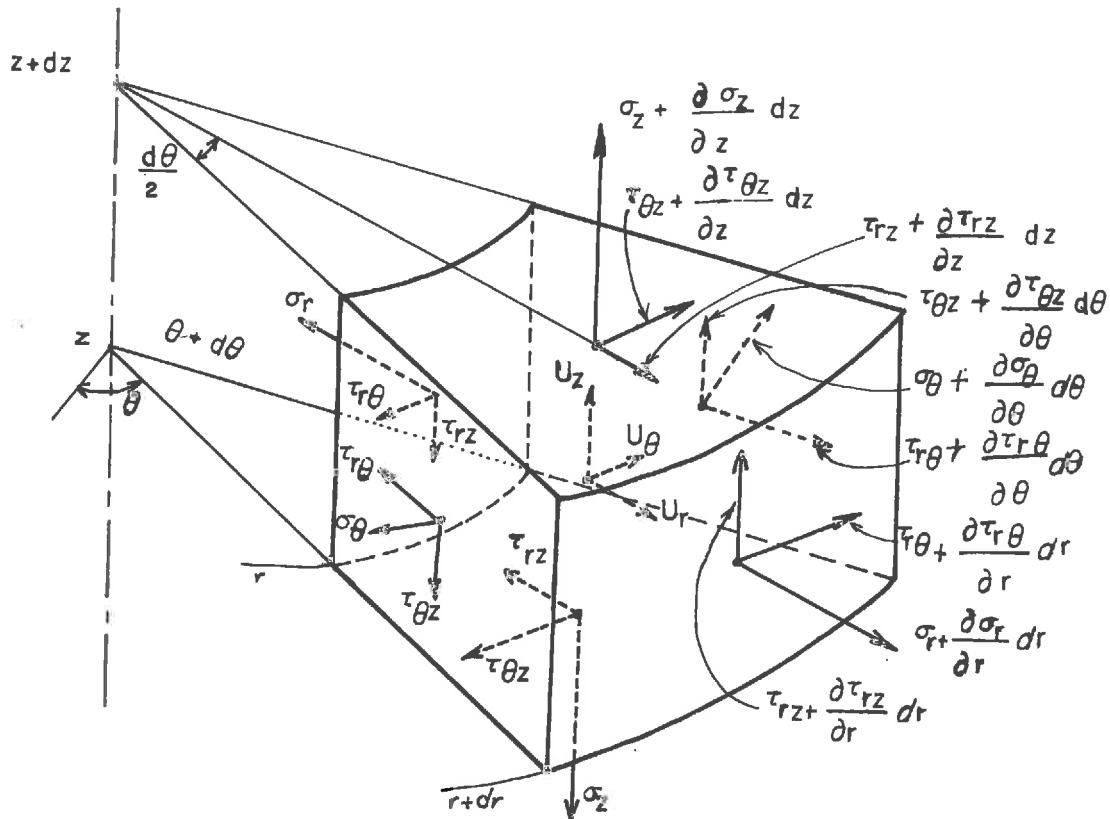
L'axe  $\overrightarrow{O\theta}$  perpendiculaire directe aux deux axes précédents.



L'origine  $O$  sera précisée dans chaque problème. On la choisit en général dans la section médiane, ou à une extrémité de la structure étudiée.

2°) Equations de l'équilibre en coordonnées cylindriques .

Soit un élément de matière limité par les plans  $z$  et  $z + dz$ ,  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  et les cylindres de rayon  $r$  et  $r + dr$ . Ecrivons qu'il est en équilibre sous l'action de toutes les forces en présence : Contraintes et forces de volume.



Projetons sur l'axe des  $r$ , repéré par l'angle  $\theta + \frac{d\theta}{2}$

$$(\sigma_r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r})(r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - (\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} \\ - \tau_{r\theta} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + (\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + U_r r dr dz d\theta = 0$$

$dr$ ,  $d\theta$  et  $dz$  sont des infiniment petits. Nous négligerons les termes du 4ème ordre devant ceux du 3ème ordre. De plus, nous ferons  $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$  et  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$   
En divisant par  $r dr d\theta dz$ , il vient :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + U_r = 0 \quad (1.1)$$

Projetons sur l'axe des  $\theta$  défini par l'angle polaire  $\theta + \frac{d\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} & (\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr)(r+dr)d\theta dz - \tau_{r\theta} r d\theta dz + (\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} \\ & - \sigma_\theta dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + (\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr dz \sin \frac{d\theta}{2} \\ & + (\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} dz) r dr d\theta - \tau_{\theta z} r dr d\theta + U_\theta r dr d\theta dz = 0 \end{aligned}$$

Avec les mêmes démarches que précédemment, il vient :

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + U_\theta = 0 \quad (1.2)$$

Sur l'axe des  $z$  :

$$\begin{aligned} & (\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr)(r+dr)d\theta dz - \tau_{rz} r d\theta dz + (\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta) dr dz - \tau_{\theta z} dr dz \\ & + (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) r dr d\theta - \sigma_z r dr d\theta + U_z r dr d\theta dz = 0 \end{aligned}$$

Soit en réduisant :

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + U_z = 0 \quad (1.3)$$

3°) Relations entre les  $\epsilon_{ij}$  et les  $u_i$  :

Nous avons vu que les composantes physiques du tenseur vitesse de déformation étaient en relation avec les composantes du vecteur déplacement. Etablissons ces relations pour des coordonnées cylindriques [5].

Composantes du tenseur métrique Euclidien.

Soit le système de coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2, x_3$  et le système de coordonnées cylindriques  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ( $\theta_1 = r, \theta_2 = \theta, \theta_3 = z$ ). La longueur d'un élément de courbe est donné par son carré :

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j : 1, 2, 3) \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

$$ds^2 = g_{km} d\theta^k d\theta^m \quad (k, m : 1, 2, 3) \text{ en coordonnées cylindriques}$$

avec 
$$g_{km} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \theta^k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta^m} = g_{mk}$$

Les  $g_{km}$  sont les composantes du tenseur métrique Euclidien du système de coordonnées  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Nous voyons que ce tenseur est symétrique. Or, en coordonnées

cylindriques, nous avons :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

Par identification, il vient :

$$g_{rr} = 1 \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{zz} = 1 \quad g_{r\theta} = g_{rz} = g_{\theta z} = 0$$

Le tenseur métrique associé a pour composantes  $g^{km} = \frac{1}{g_{km}}$  si  $g_{km} \neq 0$  et  $g^{km} = 0$  si  $g_{km} = 0$ , soit :

$$g^{rr} = 1 \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad g^{zz} = 1 \quad g^{r\theta} = g^{rz} = g^{\theta z} = 0$$

#### Symboles de Christoffel.

Ils sont définis par les relations :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial \theta_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \theta_\sigma} \right) \quad (i, \alpha, \beta, \sigma : 1, 2, 3)$$

En coordonnées cylindriques  $g_{ij} = g^{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Les relations précédentes deviennent :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \left( \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial \theta_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \theta_i} \right) \quad (i, \alpha, \beta : 1, 2, 3)$$

Si  $\alpha = \beta$  le seul terme  $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \theta_i}$  non nul est obtenu pour  $\alpha = \beta = \theta$ ,  
 $i = r$   $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r$   $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta_i}$  ( $g_{rr}$  et  $g_{zz}$  sont des constantes). Si  $\alpha \neq \beta$   
 $g_{\alpha\beta} = 0$ . si  $\begin{cases} \alpha = i \\ \beta \neq i \end{cases}$   $\frac{\partial g_{ii}}{\partial \theta_\beta} = 0$  sauf pour  $i = \theta$ ,  $\beta = r$   $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r$ .  
 $\begin{cases} \alpha \neq i \\ \beta \neq i \end{cases}$   $g_{i\beta} = g_{\beta i} = 0$

Nous voyons donc qu'il reste 3  $\Gamma_{\alpha\beta}^i$  non nuls :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial r} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -r$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial r} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{r}$$

#### Composantes physiques du tenseur vitesse de déformation.

Le vecteur déplacement a pour composantes  $u_i$  dans le repère  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  ( $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ ). Les composantes tensorielles correspondantes sont :

$$\xi_i = \sqrt{g_{ij}} u_i \quad \text{soit : } \xi_r = \sqrt{g_{rr}} u = u; \xi_\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}} v = rv; \xi_z = \sqrt{g_{zz}} w = w$$

Le tenseur vitesse de déformation a pour composantes tensorielles :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_i/j + u_j/i) \quad \text{où } u_i/j \text{ est la dérivée covariante} \\ \text{définie par } u_i/\alpha = \frac{\partial u_i}{\partial \theta^k} - \Gamma_{ik}^\sigma u_\sigma .$$

Les composantes physiques  $\dot{\epsilon}_{ij}$  du tenseur vitesse de déformation sont reliées à ses composantes tensorielles par les relations :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \dot{\epsilon}_{ij} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Finalement, les relations entre  $\dot{\epsilon}_{ij}$  et  $\dot{\epsilon}_{ij}$  s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sqrt{g^{ii} g^{jj}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial \theta_i} \right) - \Gamma_{ij}^\sigma \xi_\sigma \right] \quad (i, j, \sigma: 1, 2, 3)$$

$$\text{Soit : } \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial rv}{\partial \theta} + \frac{\partial rv}{\partial \theta} \right) + ru \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta} = \dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial rv}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} rv \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta z} = \dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial rv}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

#### 4°) Simplifications dues à la symétrie axiale.

L'hypothèse de la symétrie axiale conduit à postuler que le problème se présente de façon identique dans tout plan passant par l'axe de symétrie. Ceci se traduira dans les équations par le fait que l'angle polaire  $\theta$  repérant un plan méridien, ne doit pas intervenir. Les dérivées partielles par rapport à  $\theta$  seront prises égales à 0.

Les équations de l'équilibre deviennent :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + U_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + U_\theta = 0$$

équations 1

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + U_z = 0$$

Les composantes physiques du tenseur vitesse de déformation sont :

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2-1) ; \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2-3) ; \quad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2-5)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{u}{r} \quad (2-2) ; \quad \dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (2-4) ; \quad \dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2-6)$$

5°) Transformation aux lignes principales.

Nous avons vu que les critères d'écoulement des différents matériaux envisagés s'écrivaient de façon simple en fonction des contraintes principales. Cette écriture devient plus compliquée quand on utilise les composantes dans un repère non principal. Il paraît donc plus simple de choisir comme inconnues les valeurs principales des tenseurs contrainte et vitesse de déformation et les angles repérant les directions principales de ces tenseurs.

Pour transformer les équations que nous venons d'établir, en fonction des valeurs principales, il suffit de trouver les relations existant entre les  $\sigma_{ij}$  et les  $\sigma_K$ , les  $\dot{\epsilon}_i$  et les  $\dot{\epsilon}_K$  ( $i, j : r, \theta, z$  et  $k : 1, 2, 3$ ). Les tenseurs contrainte et vitesse de déformation ayant mêmes directions principales (matériau isotrope), il suffit de faire la transformation pour les contraintes et de la reproduire pour les vitesses de déformation.

Le tenseur contrainte a pour composantes physiques, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

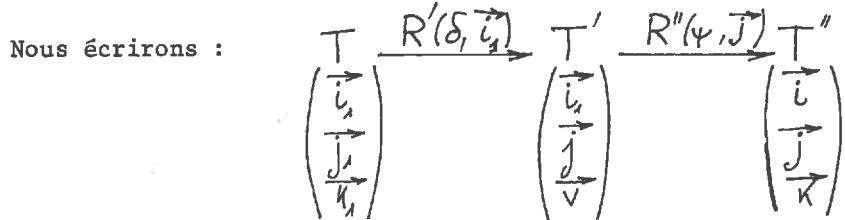
Notons  $T$  le repère cylindrique

en coordonnées principales, il s'écrira :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Notons  $T''$  le repère principal

Le repère  $T''$  est repéré dans le repère  $T$  par ses angles d'Euler. Remarquons qu'une rotation autour de l'axe  $\vec{Oz}$  ne modifie pas les tenseurs contrainte et vitesse de déformation (symétrie axiale), par conséquent le repère  $T''$  se déduit du repère  $T$  par deux rotations seulement.



Nous avons noté en dessous de chaque repère les vecteurs de base qui le composent. La notation  $R(\alpha, \vec{u})$  signifie rotation d'angle  $\alpha$  autour du vecteur  $\vec{u}$ .

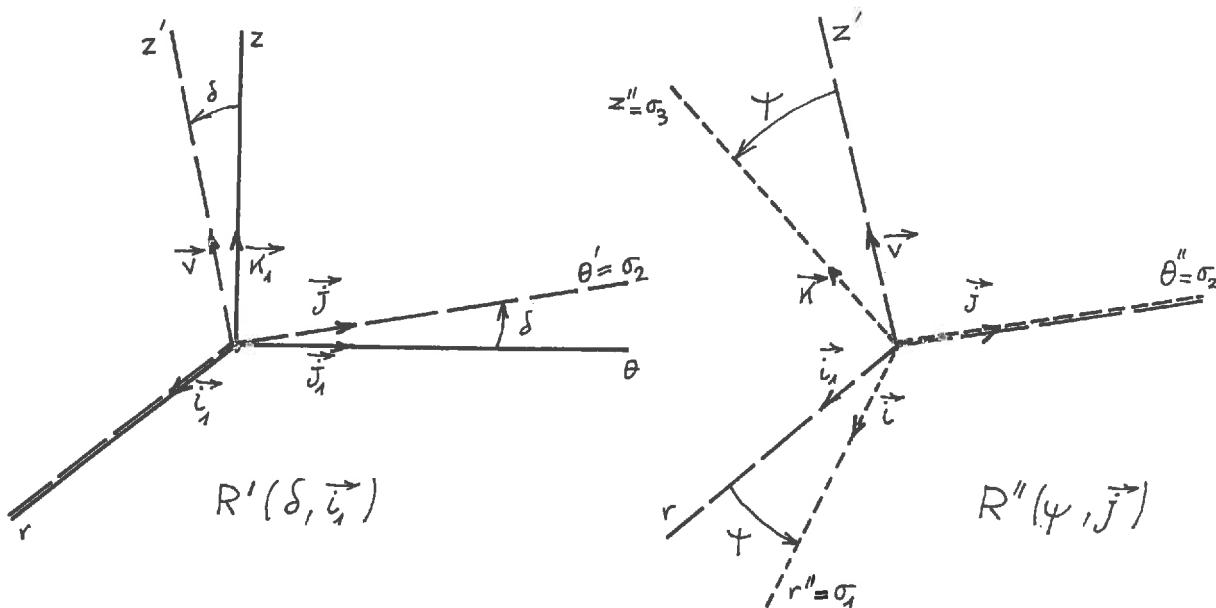
Soit  $[a_{ij}]$ , de coefficients  $a_{ij}$ ; la matrice de la transformation faisant passer de  $T$  à  $T''$ . Le tenseur contrainte se transforme de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma''_{kl} \quad \text{avec} \quad \sigma''_{kl} = 0 \quad \text{si } k \neq l$$

et  $(i, j : r, \theta, z) \quad (k, l : 1, 2, 3)$ .

Calculons les  $a_{ij}$  en effectuant le changement de base de  $T$  à  $T''$ . Sur les figures ci-après, nous pouvons établir :

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \vec{i} \cos \psi & + \vec{k} \sin \psi \\ \vec{j}_1 &= \vec{i} \sin \psi \sin \delta + \vec{j} \cos \delta & - \vec{k} \cos \psi \sin \delta \\ \vec{k}_1 &= -\vec{i} \sin \psi \cos \delta + \vec{j} \sin \delta & + \vec{k} \cos \psi \cos \delta \end{aligned}$$



d'où :

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ \sin \psi \sin \delta & \cos \delta & -\cos \psi \sin \delta \\ -\sin \psi \cos \delta & \sin \delta & \cos \psi \cos \delta \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- } r \\ \text{--- } \theta \\ \text{--- } z \end{array}$$

Finalement :

$$\sigma_r = a_{rk} a_{rl} \sigma''_{kl} = \cos^2 \psi \sigma_1 + \sin^2 \psi \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = a_{\theta k} a_{\theta l} \sigma''_{kl} = \sin^2 \psi \sin^2 \delta \sigma_1 + \cos^2 \delta \sigma_2 + \cos^2 \psi \sin^2 \delta \sigma_3$$

$$\sigma_z = a_{zk} a_{zl} \sigma''_{kl} = \sin^2 \psi \cos^2 \delta \sigma_1 + \sin^2 \delta \sigma_2 + \cos^2 \psi \cos^2 \delta \sigma_3 \quad \text{équations 3}$$

$$\tau_{r\theta} = a_{rk} a_{\theta l} \sigma''_{kl} = \sin \psi \cos \psi \sin \delta \sigma_1 - \sin \psi \cos \psi \sin \delta \sigma_3$$

$$\tau_{rz} = a_{rk} a_{zl} \sigma''_{kl} = -\sin \psi \cos \psi \cos \delta \sigma_1 + \sin \psi \cos \psi \cos \delta \sigma_3$$

$$\tau_{\theta z} = a_{\theta k} a_{zl} \sigma''_{kl} = -\sin^2 \psi \sin \delta \cos \delta \sigma_1 + \sin \delta \cos \delta \sigma_2 - \cos^2 \psi \sin \delta \cos \delta \sigma_3$$

Pour les vitesses de déformation :

$$\dot{\epsilon}_r = \cos^2 \psi \dot{\epsilon}_1 + \sin^2 \psi \dot{\epsilon}_3$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \sin^2 \psi \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_1 + \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 + \cos^2 \psi \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_3$$

$$\dot{\epsilon}_z = \sin^2 \psi \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_1 + \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 + \cos^2 \psi \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_3$$

équations 4

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \sin \psi \cos \psi \sin \delta (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = -\sin \psi \cos \psi \cos \delta (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\sin \delta \cos \delta (\sin^2 \psi \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 + \cos^2 \psi \dot{\epsilon}_3)$$

### III. DONNEES ET HYPOTHESES

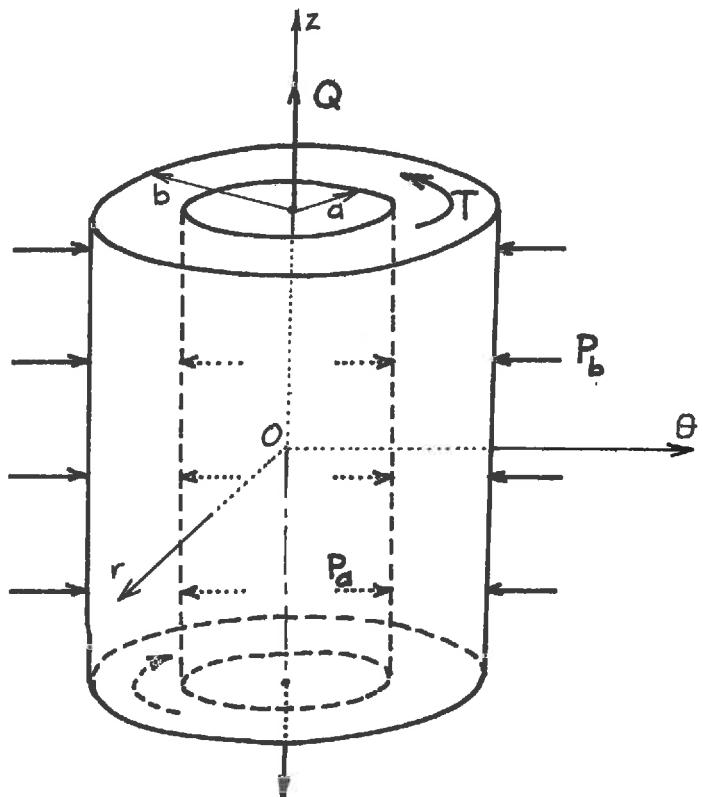
#### 1°) Données géométriques.

Nous étudierons un cylindre creux. Nous noterons :

$a$  = rayon intérieur

$b$  = rayon extérieur

Le repère de référence aura son origine dans le plan médian.



#### 2°) Sollicitations exercées.

Le cylindre précédent est soumis :

- à une pression radiale intérieure  $P_a$
- à " " " extérieure  $P_b$
- à une traction (ou compression) axiale  $Q$
- à un couple de moment  $T$  et d'axe  $Oz$

#### 3°) Hypothèses.

Nous supposons :

- le matériau . isotrope et homogène
  - . rigide parfaitement plastique
  - . poids négligeable devant les autres forces
- la déformation homogène vis-à-vis de la variable  $z$ .

Ceci signifie que l'influence des extrémités est négligeable, ce qui est réalisé quand le tube est suffisamment long ( pour les tubes à parois minces , PANARELLI et HODGE ont montré , [12] , qu'il faut  $L > 2(b^2 - a^2)^{1/2}$  ,  $L$  étant la longueur du tube ).

#### 4°) Conséquences.

L'hypothèse de la déformation homogène impose que cette déformation soit identique dans toute section du tube, perpendiculaire à l'axe. Il devra y avoir indépendance des contraintes et des vitesses de déformation vis-à-vis de la variable  $z$  . Le cylindre se déforme suivant un cylindre. Par suite, les contraintes et les vitesses de déformation étant indépendantes de  $\theta$  (symétrie axiale) et de  $z$  (sollicitation et déformation homogène), ne dépendent que de la variable  $r$  . Les équations (1) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{array} \right. \quad \text{équations 5}$$

Les relations (2) restent inchangées, car les composantes du vecteur déplacement dépendent de  $z$  et de  $r$  .

IV. ANALYSE CINEMATIQUE POUR UN  
MATERIAU INCOMPRESSIBLE

Les vitesses de déformation étant indépendantes de  $\theta$  et de  $z$ , les  $\dot{\epsilon}_{ij}$  sont fonction de  $r$  seulement. Ainsi l'équation (2.2) montre que  $u$  est fonction de  $r$  seulement. Par suite, l'équation (2.5) devient :

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.7)$$

L'équation (2.3) s'écrit :  $\frac{\partial w}{\partial z} = f(r)$  soit, en intégrant par rapport à  $z$  :  $w = z f(r) + g(r)$  ( $f(r)$  et  $g(r)$  sont des fonctions de  $r$  seulement). Dérivons par rapport à  $r$  :  $\frac{\partial w}{\partial r} = z f'(r) + g'(r)$ . Or, d'après (2.7)  $\frac{\partial w}{\partial r}$  est une fonction de  $r$  seulement. Ceci impose  $f'(r) = 0$ , soit  $f(r) = K_1$  ( $K_1$  est une constante). Par suite :

$$w = K_1 z + g(r) \quad (6-1)$$

( $g(r)$  est une fonction de  $r$  seul). De la même manière, l'équation (2.6) s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = h(r) \quad \text{d'où} \quad v = z h(r) + l(r) \quad \text{et} \quad \frac{v}{r} = z \frac{h(r)}{r} + \frac{l(r)}{r}$$

Or (2.4) montre que  $\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$  doit être indépendant de  $z$  et

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = r \left[ z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h(r)}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l(r)}{r} \right) \right]$$

On doit donc avoir  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h(r)}{r} \right) = 0$  soit  $\frac{h(r)}{r} = K_2$  ( $K_2$  est une constante)  $h(r) = K_2 r$ . Finalement  $v = K_2 r z + l(r)$  ( $l(r)$  est une fonction de  $r$  seulement). Pour calculer  $u$ , utilisons l'hypothèse de l'incompressibilité.

Additionnons les relations (2.1), (2.2) et (2.3) (qui compte tenu de (6-1) s'écrit  $\dot{\epsilon}_z = K_1$ ).

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + K_1 = 0$$

soit  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) = -K_1$

$$\frac{\partial}{\partial r} (ur) = -K_1 r \quad ur = -K_1 \frac{r^2}{2} + K_3 \quad (K_3 \text{ est une constante})$$

$$u = -\frac{K_1}{2} r^2 + \frac{K_3}{r} \quad (6-3)$$

En résumé, nous avons trouvé :

$$u = -\frac{k_1}{2}r + \frac{k_3}{r} \quad (6-3)$$

$$v = k_2 r z + l(r) \quad (6-2)$$

$$w = k_1 z + g(r) \quad (6-1)$$

Or pour  $z = 0$ ,  $v = 0$  et  $w = 0 \quad \forall r$ . Donc  $l(r) \equiv 0$  et  $g(r) \equiv 0$ . Les équations (6) deviennent :

$$\begin{cases} u = -\frac{k_1}{2}r + \frac{k_3}{r} \\ v = k_2 r z \\ w = k_1 z \end{cases} \quad \text{relations (7)}$$

Nous voyons que  $k_1$  est la vitesse de déformation axiale et que  $k_2$  est le taux de torsion par unité de longueur. Les relations (2) deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= -\frac{k_1}{2} - \frac{k_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= -\frac{k_1}{2} + \frac{k_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_z &= k_1 \\ \dot{\gamma}_{r\theta} &= \frac{1}{2}(k_2 z - k_2 z) = 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{1}{2}(0) = 0 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= \frac{1}{2}k_2 r \end{aligned} \quad \text{relations (8)}$$

Le fait que  $\dot{\gamma}_{r\theta}$  soit nul signifie qu'une section droite du cylindre se déforme en restant circulaire. Le fait que  $\dot{\gamma}_{rz}$  soit nul signifie qu'une section méridienne du cylindre reste rectangulaire. Ceci est en accord avec l'hypothèse de la déformation homogène.

Remarque sur les sollicitations:

Les constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  sont liées à des sollicitations simples :

$k_1$  est liée à la déformation due à l'application d'une charge axiale  $Q$ .

$k_2$  à celle due à l'application d'un couple de torsion  $T$

$k_3$  à celle due à l'application d'une différence de pressions radiales  $P_a - P_b$

Donc :  $k_1 = 0 \quad Q = 0$

$k_2 = 0 \quad T = 0$

$k_3 = 0 \quad P_a = P_b$

Nous étudierons séparément le cas où  $P_a = P_b$  de celui où  $P_a \neq P_b$ . Le cas où  $P_a = P_b$  est très important en mécanique des sols puisqu'il correspond aux conditions habituelles d'expérimentation.

Le cas  $P_a \neq P_b$  est surtout intéressant pour les matériaux obéissant au critère de TRESCA, en particulier pour les métaux. Pour de tels matériaux, le critère d'écoulement étant insensible à la pression isotrope, nous pouvons nous limiter à  $P_b = 0$ . Cela revient à retrancher  $P_b \pi(b^2 - a^2)$  à  $Q$ .

V. ETUDE D'UN MATERIAU DE TRESCA

A- Cas où  $P_a \neq P_b$  :

Nous avons vu que dans ce cas  $k_3 \neq 0$ . Les solutions qui exigeaient la nullité de  $k_3$  seront écartées.

Nous nous limiterons au cas  $P_b = 0$ .

1°) Choix du régime plastique.

Si nous confrontons les relations (4) et les relations (8), nous voyons que nous devons avoir :

$$\begin{cases} \sin \psi \cos \psi \sin \delta (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) = 0 \\ -\sin \psi \cos \psi \cos \delta (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) = 0 \end{cases}$$

Nous devrons donc, tout au long de cet exposé, envisager les 3 cas :  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  ;  $\psi = 0$  ;  $\psi = \frac{\pi}{2}$ . Examinons les différents régimes plastiques possibles.

a) Régimes de face.

- Régime BC (le régime EF se traite de manière identique en changeant K en  $-K$ )

La contrainte  $\sigma_1$  est contrainte intermédiaire. Le critère d'écoulement s'écrit :

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_2 - \sigma_3 - 2K = 0$$

La loi d'écoulement se traduit par :

$$\dot{\epsilon}_1 = 0 \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda$$

. Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$   $\lambda = 0$  impossible (pas de déformation)

. Si  $\psi = 0$ , les relations (4) jointes aux relations (8) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \dot{\epsilon}_1 &= -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 + \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_3 &= -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_z &= \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 + \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_3 &= \kappa_1 \end{aligned} \quad \text{relations (9)}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = \sin \delta \cos \delta (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3) = \frac{1}{2} \kappa_2 r$$

$\dot{\epsilon}_1 = 0$  impose  $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ . Cette solution est donc à écartier.

• Si  $\psi = \frac{\pi}{2}$  les relations (4) jointes aux relations (8) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_3 = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_1 + \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_z = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_1 + \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = \kappa_1 \quad \text{relations (10)}$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\sin \delta \cos \delta (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) = \frac{\kappa_2}{2} r$$

$$\text{or } \dot{\epsilon}_1 = 0 \quad \dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z \equiv \dot{\gamma}_{\theta z}^2 \quad \text{soit } \kappa_1 \left( -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} \right) \equiv \frac{\kappa_2^2 r^2}{4}$$

Cette dernière identité ne peut être vraie que pour  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ . Nous envisagerons ce cas particulier après l'étude des différents régimes.

- Régime AB (le régime DE se traite de la même manière).

La contrainte  $\sigma_2$  est contrainte intermédiaire. Le critère d'écoulement s'écrit :

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K = 0$$

Soit :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda \quad \dot{\epsilon}_2 = 0 \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda$$

• Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$   $\lambda$  ne peut être que nul, ce qui n'est pas acceptable (pas de déformation).

• Si  $\psi = 0$  . Compte tenu de  $\dot{\epsilon}_2 = 0$  les relations (9) montrent que

$$\dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z \equiv \dot{\gamma}_{\theta z}^2 \quad \text{soit } \kappa_1 \left( -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} \right) \equiv \frac{\kappa_2^2 r^2}{4}$$

ce qui implique  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  ( cf. régime BC ,  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ).

• Si  $\psi = \frac{\pi}{2}$  les relations (10) conduisent à la même condition

$$\dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z \equiv \dot{\gamma}_{\theta z}^2$$

- Régime AF (le régime CD se traite de la même façon).

$\sigma_3$  est contrainte intermédiaire. Le critère d'écoulement s'écrit :

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_2 - 2K = 0$$

Soit :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda \quad \dot{\epsilon}_2 = -\lambda \quad \dot{\epsilon}_3 = 0$$

- Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$   $\lambda = 0$ , solution inacceptable.
- Si  $\psi = 0$  les relations (9) imposent l'identité

$$\dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z \equiv \dot{\gamma}_{\theta z}^2 \text{ soit } k_1 = k_2 = 0 \text{ (cf. régime BC, } \psi = \frac{\pi}{2} \text{).}$$

- Si  $\psi = \pi/2$   $\dot{\epsilon}_3 = 0$  conduit à  $k_1 = k_3 = 0$ . Solution inacceptable (cf. régime BC,  $\psi = 0$ ).

Les régimes de face sont donc susceptibles de ne permettre que le cas particulier :  $P_a = P \neq 0$   $Q = T = 0$ .

b) Régimes d'arête.

- Régime F (et régime C).

Pour ce régime,  $\sigma_1 = \sigma_3$ . Le critère d'écoulement s'écrit :

$$\mu F(\sigma_1, \sigma_2) + (1-\mu) F(\sigma_3, \sigma_2) = 0$$

avec  $F(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - 2K = 0$  et  $F(\sigma_3, \sigma_2) = \sigma_3 - \sigma_2 - 2K = 0$

soit :  $\mu \sigma_1 - \sigma_2 + (1-\mu) \sigma_3 - 2K = 0$

$$\text{D'où } \dot{\epsilon}_1 = \lambda \mu \quad \dot{\epsilon} = -\lambda \quad \dot{\epsilon}_3 = \lambda (1-\mu)$$

$$\cdot \text{ Si } \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 \quad \lambda \mu = \lambda (1-\mu) \text{ soit } \lambda (1-2\mu) = 0$$

La solution  $\lambda \neq 0$  et  $\mu = \frac{1}{2}$  est acceptable ( $0 \leq \mu \leq 1$ ). Compte tenu de  $\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 \\ \dot{\epsilon}_2 = -2\dot{\epsilon}_1 \end{cases}$  les relations (4) jointes aux relations (8) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_1 = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} \quad (11.1)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_1 (\sin^2 \delta - 2 \cos^2 \delta) = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} \quad (11.2)$$

relations (11)

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 (\cos^2 \delta - 2 \sin^2 \delta) = \kappa_1 \quad (11.3)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = 3\dot{\epsilon}_1 \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2}{2} r \quad (11.4)$$

On doit avoir (11.4)  $\sin 2\delta \dot{\epsilon}_1 = \kappa_2 r$

en retranchant (11.2) de (11.3)  $3 \cos 2\delta \dot{\epsilon}_1 = \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2}$

$$\text{Soit } \dot{\epsilon}_1^2 = \frac{1}{3} \kappa_2^2 r^2 + \left( \frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{3r^2} \right)^2 \equiv \left( -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} \right)^2$$

Cette identité n'est vraie que pour  $k_2 = k_3 = 0$ . Ceci est inacceptable

. Si  $\psi = 0$  en tenant compte de la loi d'écoulement, les équations (9) deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda \mu = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} \quad (12.1)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\lambda \cos^2 \delta + \lambda(1-\mu) \sin^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} \quad (12.2)$$

$$\dot{\epsilon}_z = -\lambda \sin^2 \delta + \lambda(1-\mu) \cos^2 \delta = \kappa_1 \quad (12.3)$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda(2-\mu) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2}{2} r \quad (12.4)$$

$$(12.2) \text{ s'écrit : } -\lambda + \lambda(2-\mu) \sin^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} \quad (12.5)$$

$$(12.3) \text{ s'écrit : } -\lambda + \lambda(2-\mu) \cos^2 \delta = \kappa_1 \quad (12.6)$$

équations (12)

Retranchons (12.5) de (12.6) :

$$\lambda(2-\mu) \cos 2\delta = \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \quad (12.7)$$

$$\text{Or (12.4) s'écrit : } \lambda(2-\mu) \sin 2\delta = -\kappa_2 r$$

$$\text{Soit : } \operatorname{tg} 2\delta = \frac{-\kappa_2 r}{\frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2}} \quad \text{ou}$$

$$\kappa_2 r \operatorname{tg}^2 \delta - 2 \left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \right) \operatorname{tg} \delta - \kappa_2 r = 0 \quad (13)$$

équation du second degré en  $\operatorname{tg} \delta$ , dont le produit des racines est - 1.  
Soient  $\delta'$  et  $\delta''$  les racines correspondantes :

$$\delta' = \alpha \pmod{\pi} \quad \delta'' = \alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} + \sqrt{\left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \right)^2 + \kappa_2^2 r^2}}{\kappa_2 r}$$

Posons, pour alléger l'écriture :

$$D = \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \quad \Delta = D^2 + \kappa_2^2 r^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{\kappa_2 r} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{D^2 + 2D\sqrt{\Delta} + \Delta}{\kappa_2^2 r^2}} = \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{\Delta} + D}{2\sqrt{\Delta}} \quad \sin \alpha \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha = \frac{\Delta - D^2}{2\kappa_2 r \sqrt{\Delta}} = \frac{\kappa_2 r}{2\sqrt{\Delta}}$$

Pour les contraintes, les relations (3) s'écrivent (en tenant compte de  $\sigma_1 = \sigma_3$ ),  
 $\sigma_1 - \sigma_2 = 2K = \sigma_3 - \sigma_2$  ,  $\Psi = 0$  :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2 \cos^2 \delta + \sigma_3 \sin^2 \delta = \sigma_1 - 2K \cos^2 \delta$$

$$\sigma_z = \sigma_2 \sin^2 \delta + \sigma_3 \cos^2 \delta = \sigma_1 - 2K \sin^2 \delta \quad \text{relations (14)}$$

$$\tau_{\theta z} = (\sigma_2 - \sigma_3) \sin \delta \cos \delta = -2K \sin \delta \cos \delta$$

Les relations (9) et (14) montrent que si on change  $\delta$  en  $\delta + \pi$ , les vitesses de déformation et les contraintes restent inchangées. Nous nous bornerons donc à prendre  $\delta' = \alpha$  ;  $\delta'' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ . Pour calculer les contraintes, il faut remplacer  $\delta$  par  $\delta'$  ou  $\delta''$ . Soit :

$$\begin{aligned} \tan \delta' &= \frac{D + \sqrt{\Delta}}{k_2 r} & \cos^2 \delta' &= \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}} & \sin^2 \delta' &= \frac{\sqrt{\Delta} + D}{2\sqrt{\Delta}} & \sin \delta' \cos \delta' &= \frac{k_2 r}{2\sqrt{\Delta}} \\ \tan \delta'' &= \frac{-k_2 r}{D + \sqrt{\Delta}} = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{k_2 r} & \cos^2 \delta'' &= \frac{\sqrt{\Delta} + D}{2\sqrt{\Delta}} & \sin^2 \delta'' &= \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}} & \sin \delta'' \cos \delta'' &= \frac{-k_2 r}{2\sqrt{\Delta}} \end{aligned}$$

Nous voyons que nous passons de la solution correspondant à  $\delta'$  à celle correspondant à  $\delta''$  en changeant le signe des 3 constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Nous nous bornerons donc à étudier la solution correspondant à  $\delta'$ . Nous ferons cette étude après avoir envisagé les autres cas de solution possible.

Si  $\Psi = \pi/2$ . En tenant compte de la loi d'écoulement, les relations (10) deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \lambda(1 - \mu) &= -\frac{k_1}{2} - \frac{k_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda \mu \sin^2 \delta - \lambda \cos^2 \delta = -\frac{k_1}{2} + \frac{k_3}{r^2} & \text{relations (15)} \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda \mu \cos^2 \delta - \lambda \sin^2 \delta = \frac{k_1}{r} \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= \lambda(1 + \mu) &= \frac{k_2}{2} r \end{aligned}$$

Les relations (15) s'obtiennent à partir des relations (12) en y intervertissant  $\mu$  et  $1 - \mu$  (échange de  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_3$ ) et en y changeant  $k_2$  de signe. Les valeurs de  $\delta$  ne sont pas sensibles à l'interversion de  $\mu$  et  $1 - \mu$ . Les deux solutions possibles pour ce cas se ramènent à changer le signe de  $k_2$  dans les solutions  $\delta'$  et  $\delta''$  pour  $\Psi = 0$  (les relations (14) ne changent pas).

- Régime B (et régime E).

Pour ce régime,  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Le critère d'écoulement s'écrit :

$$\mu F(\sigma_1, \sigma_3) + (1-\mu) F(\sigma_2, \sigma_3) = 0$$

avec  $F(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K = 0$  et  $F(\sigma_2, \sigma_3) = \sigma_2 - \sigma_3 - 2K = 0$

$$\text{soit } \mu \sigma_1 + (1-\mu) \sigma_2 - \sigma_3 - 2K = 0$$

La loi d'écoulement donne :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda \mu \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda (1-\mu) \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda$$

. Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  :

$$\lambda \mu = -\lambda \quad \text{soit} \quad \lambda (1+\mu) = 0$$

La solution  $\lambda \neq 0$  et  $\mu = -1$  est inacceptable car  $0 \leq \mu \leq 1$  (nous avons vu que  $\lambda$  devait être non nul). Ce cas est donc à rejeter.

. Si  $\psi = 0$  :

En tenant compte de la loi d'écoulement, les relations (9) deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \lambda \mu &= -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda (1-\mu) \cos^2 \delta - \lambda \sin^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} & \text{relations (16)} \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda (1-\mu) \sin^2 \delta - \lambda \cos^2 \delta = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= \lambda (2-\mu) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2} \end{aligned}$$

Les relations (16) s'obtiennent à partir des relations (12) en y échangeant  $\sin^2 \delta$  et  $\cos^2 \delta$  et en y changeant  $\sin \delta \cos \delta$  de signe. Nous aurons donc deux solutions  $\delta'$  et  $\delta''$  avec la même valeur de  $\tan \delta$  que pour le régime F avec  $\psi = 0$ .

Pour les contraintes, les relations (3) s'écrivent (en tenant compte de  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2K = \sigma_2 - \sigma_3$ ,  $\psi = 0$ ) :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \cos^2 \delta \sigma_2 + \sin^2 \delta \sigma_3 = \sigma_1 - 2K \sin^2 \delta \quad \text{relations (17)}$$

$$\sigma_z = \sin^2 \delta \sigma_2 + \cos^2 \delta \sigma_3 = \sigma_1 - 2K \cos^2 \delta$$

$$\tau_{\theta z} = \sin \delta \cos \delta (\sigma_2 - \sigma_3) = 2K \sin \delta \cos \delta$$

ce qui revient à échanger  $\sin^2 \delta$  et  $\cos^2 \delta$  dans les relations (14) et à y changer  $\sin \delta \cos \delta$  de signe. Les solutions  $\delta'$  et  $\delta''$  de ce cas seront obtenues à partir

des solutions  $\delta'$  et  $\delta''$  du cas  $\psi=0$ , régime F en y changeant le signe des 3 constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Ceci revient à dire que la solution  $\delta'$  de ce cas est identique à la solution  $\delta''$  du cas  $\psi=0$ , régime F et que la solution  $\delta''$  de ce cas est identique à la solution  $\delta'$  du cas  $\psi=0$ , régime F.

. Si  $\psi=\pi/2$ . En tenant compte de  $\sigma_1=\sigma_2$ ,  $\sigma_1-\sigma_3=2K=\sigma_2-\sigma_3$ , et  $\psi=\pi/2$ , les relations (3) s'écrivent :

$$\sigma_r = \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\sigma_z = \sigma_1$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Nous voyons que le couple de torsion  $T = \int_a^b \tau_{\theta z} 2\pi r^2 dz$  sera nul.

Nous examinerons ce cas particulier après l'étude des différents régimes.

- Régime D (et régime A).

Pour ce régime,  $\sigma_2=\sigma_3$ . Le critère d'écoulement s'écrit :

$$\mu F(\sigma_2, \sigma_1) + (1-\mu) F(\sigma_3, \sigma_1) = 0$$

avec  $F(\sigma_2, \sigma_1) = \sigma_2 - \sigma_1 - 2K = 0$  et  $F(\sigma_3, \sigma_1) = \sigma_3 - \sigma_1 - 2K = 0$

Soit :  $-\sigma_1 + \mu \sigma_2 + (1-\mu) \sigma_3 - 2K = 0$

La loi d'écoulement nous donne :

$$\dot{\epsilon}_1 = -\lambda \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda \mu \quad \dot{\epsilon}_3 = \lambda(1-\mu)$$

. Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$ .

$$-\lambda = \lambda(1-\mu) \quad \text{ou} \quad \lambda(2-\mu) = 0$$

La solution  $\lambda = 0$  est inacceptable, de même que la solution  $\mu = 2$ . Ce cas est donc à rejeter.

. Si  $\psi = 0$ .

Les relations (3) deviennent ( $\psi=0$ ,  $\sigma_2=\sigma_3$ ,  $\sigma_1-\sigma_2=-2K=\sigma_1-\sigma_3$ ).

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2$$

$$\sigma_z = \sigma_2$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Ceci n'est possible que si  $T = 0$ . Ce cas se ramène à celui du régime B, avec  $\psi = \pi/2$ .

• Si  $\psi = \pi/2$ .

En tenant compte de la loi d'écoulement, les relations (10) deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \lambda(1-\mu) &= -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= -\lambda \sin^2\delta + \lambda\mu \cos^2\delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} & \text{relations (18)} \\ \dot{\epsilon}_z &= -\lambda \cos^2\delta + \lambda\mu \sin^2\delta = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= -\lambda(1+\mu) \sin\delta \cos\delta = \frac{\kappa_2}{2} r\end{aligned}$$

Les relations (18) s'obtiennent à partir des relations (15) en y intervertissant  $-\lambda$  et  $\lambda\mu$  (échange de  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_2$ ) et en changeant le signe de  $\kappa_2$ . Pour les contraintes, les relations (3), compte tenu de  $\psi = \pi/2$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_2 - \sigma_1 = 2K = \sigma_3 - \sigma_1$ , deviennent :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_3 \\ \sigma_\theta &= \sigma_1 \sin^2\delta + \sigma_3 \cos^2\delta = \sigma_3 - 2K \sin^2\delta & \text{relations (19)} \\ \sigma_z &= \sigma_1 \cos^2\delta + \sigma_3 \sin^2\delta = \sigma_3 - 2K \cos^2\delta \\ \tau_{\theta z} &= 2K \sin\delta \cos\delta\end{aligned}$$

Les relations (19) s'obtiennent à partir des relations (14) (où  $\sigma_1 = \sigma_3$ ) en y changeant le signe de  $\sin\delta \cos\delta$ , ce qui revient à changer le signe de  $\kappa_2$ . Nous voyons que les solutions de ce cas correspondront aux solutions du cas  $\psi = \pi/2$ , régime F en changeant le signe de  $\kappa_2$ , ou aux solutions  $\delta'$  et  $\delta''$  du cas  $\psi = 0$ , régime F.

## 2°) Etude des cas particuliers :

Reprendons l'étude des cas particuliers où l'une des sollicitations est nulle.

a)  $T = 0$  ( $\kappa_2 = 0$ )

C'est la solution possible avec les régimes B et E,  $\psi = \pi/2$  et les régimes D et A,  $\psi = 0$ .

Dans ces cas,  $\sigma_\theta = \sigma_z$      $\sigma_r - \sigma_\theta = \mp 2K$  (le signe - correspondant aux régimes B et D).

L'équation de l'équilibre nous permet d'écrire :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2K}{r} = 0$$

soit  $\sigma_r = \pm 2K \log r + \kappa$

Or nous devons avoir :  $\sigma_r = 0$  si  $r = b$

$$0 = \pm 2K \log b + \kappa \quad \kappa = \mp 2K \log b$$

$$\sigma_r = \pm 2K \log \frac{r}{b}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_z = \pm 2K \log \frac{r}{b} \pm 2K$$

D'où les valeurs de P et Q :

$$P = \sigma_r(a) = \pm 2K \log \frac{a}{b}$$

$$Q = 2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = \pm 2K \pi \int_a^b \left( \log \frac{r}{b} + 1 \right) r dr$$

$$Q = \pm \frac{K\pi}{2} \left( a^2 \log \frac{b^2}{a^2} + b^2 - a^2 \right)$$

b)  $T = Q = 0$  ( $k_2 = k_1 = 0$ )

Ce sont les solutions possibles avec les régimes BC et EF,  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ; AB et DE,  $\psi = 0$  ou  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ; AF et CD,  $\psi = 0$ .

Régimes BC et EF,  $\psi = \pi/2$  :

Les relations (10), compte tenu de  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $\dot{\epsilon}_1 = 0$  deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_3 = -\kappa_3/r^2$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = \kappa_3/r^2$$

$$\dot{\epsilon}_z = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = 0$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = \sin \delta \cos \delta \dot{\epsilon}_2 = 0$$

système qui admet pour solution :  $\sin \delta = 0$  soit  $\delta = 0 \pmod{\pi}$

Reportons ces valeurs de  $\psi$  et  $\delta$  dans les relations (3). Celles-ci deviennent :

$$\sigma_r = \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2$$

$$\sigma_z = \sigma_1$$

avec  $\sigma_2 - \sigma_3 = \pm 2K$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Le fait que  $k_1$  soit nul nous amène à choisir  $\sigma_1 = 0$ .

L'équation de l'équilibre s'écrit :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} \mp \frac{2K}{r} = 0$$

soit, comme nous l'avons vu précédemment :

$$\sigma_r = \pm 2K \log \frac{r}{b} \quad \text{et} \quad P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$$

. Régimes AB et DE,  $\psi = 0$

Les relations (9), compte tenu de  $k_1 = k_2 = 0$  et  $\dot{\epsilon}_2 = 0$  deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_1 = -\frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_3 = \frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_z = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_3 = 0$$

la solution de ce système est  $\cos \delta = 0$   
soit  $\delta = \frac{\pi}{2}$  (mod  $\pi$ )

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\sin \delta \cos \delta \dot{\epsilon}_3 = 0$$

reportons ces valeurs de  $\psi$  et de  $\delta$  dans les relations (3) :

$$\sigma_r = \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\text{avec } \sigma_1 - \sigma_3 = \pm 2K$$

$$\sigma_z = \sigma_2$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Nous sommes conduits à la même solution que pour les régimes BC et EF,  $\psi = \frac{\pi}{2}$ .

. Régimes AB et DE,  $\psi = \pi/2$ :

Les relations (10), compte tenu de  $k_1 = k_2 = 0$  et  $\dot{\epsilon}_2 = 0$  deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_3 = -\frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_1 = \frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_z = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_1 = 0$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\sin \delta \cos \delta \dot{\epsilon}_1 = 0$$

soit  $\cos \delta = 0$  ou  $\delta = \frac{\pi}{2}$  (mod  $\pi$ ). Les relations (3) s'écrivent alors :

$$\sigma_r = \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\sigma_z = \sigma_2$$

$$\tau_{\theta z} = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \pm 2K$$

C'est la même solution que pour  $\psi = 0$ .

Régimes AF et CD,  $\psi = 0$  :

Compte tenu de  $k_1 = k_2 = 0$  et  $\dot{\epsilon}_3 = 0$ , les relations (9) deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon} = -\frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = \frac{\kappa_3}{r^2}$$

$$\dot{\epsilon}_z = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = 0$$

$$\tau_{\theta z} = \sin \delta \cos \delta \dot{\epsilon}_2 = 0$$

soit  $\sin \delta = 0$  ou  $\delta = 0 \pmod{\pi}$

Les relations (3) deviennent alors :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2 \quad \text{avec} \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm K$$

$$\sigma_z = \sigma_3$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Ce qui nous donne la même solution.

Résumons les différentes solutions possibles que nous avons trouvées, suivant le régime où l'on se trouve.

Pour cela, nous avons regroupé nos résultats dans le tableau suivant :

Régimes	Cas Type de solution	$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$	$\psi = 0$	$\psi = \frac{\pi}{2}$
		$\delta'$	$S$	$S_1$ $S \rightarrow S_1$ si $K_1 \rightarrow K_1$ $K_2 \rightarrow -K_2$ $K_3 \rightarrow K_3$
$\sigma_1 = \sigma_3$ F et C	$\delta''$		$S_3$	$S_2$ $S \rightarrow S_2$ si $K_1 \rightarrow -K_1$ $K_2 \rightarrow K_2$ $K_3 \rightarrow -K_3$
				$P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$ $Q = \pm \frac{K\pi}{2} [a^2 \log \frac{b^2}{a^2} + b^2 - a^2]$
$\sigma_1 = \sigma_2$ B et E	$\delta'$		$S_3$	$T = 0$
	$\delta''$		$S$	
$\sigma_2 = \sigma_3$ D et A	$\delta'$	$P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$	$S$	
	$\delta''$	$Q = \pm \frac{K\pi}{2} [a^2 \log \frac{b^2}{a^2} + b^2 - a^2]$ $T = 0$	$S_3$ $S \rightarrow S_3$ si $K_1 \rightarrow -K_1$ $K_2 \rightarrow -K_2$ $K_3 \rightarrow -K_3$	
$\dot{\epsilon}_1 = 0$ BC et EF				$P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$ $Q = 0$ $T = 0$
$\dot{\epsilon}_2 = 0$ AB et DE		$P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$ $Q = 0$ $T = 0$	$P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$ $Q = 0$ $T = 0$	
$\dot{\epsilon}_3 = 0$ AF et CD		$P = \pm 2K \log \frac{a}{b}$ $Q = 0$ $T = 0$		

3°) Développement de la solution S .

Rappelons les résultats que nous avons obtenus :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{\kappa_2 r}$$

$$\sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2\sqrt{\Delta}}$$

$$\sin^2 \delta = \frac{\sqrt{\Delta} + D}{2\sqrt{\Delta}}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}}$$

avec  $D = \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2}$

$$\Delta = D^2 + \kappa_2^2 r^2$$

Reportons ces expressions dans les relations (14) :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1 - 2K \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}}$$

relations (20)

$$\sigma_z = \sigma_1 - 2K \frac{\sqrt{\Delta} + D}{2\sqrt{\Delta}}$$

$$\tau_{\theta z} = -2K \frac{k_2 r}{2\sqrt{\Delta}}$$

Nous voyons qu'il ne reste que  $\sigma_1$  à calculer. Les équations de l'équilibre (5) se réduisent à une seule car  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{rz}$  sont nuls ( $\psi = 0$  ou  $\psi = \pi/2$ ) :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\text{Soit ici : } \frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{2K}{r} \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}} = 0$$

$$\text{ou } \sigma_1 = -2K \int \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2r\sqrt{\Delta}} dr + \text{cte}$$

Or, les conditions aux limites étant fixées (cf. chapitre III), nous devrons avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r(a) = P \\ \sigma_r(b) = 0 \\ \int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = Q \\ \int_a^b \tau_{\theta z} 2\pi r^2 dr = T \end{array} \right. \quad \text{relations (21)}$$

Nous voyons que nous devrons prendre :

$$\sigma_r = \sigma_1 = -K \int_r^b \frac{\sqrt{\Delta} - D}{r\sqrt{\Delta}} dr$$

Les trois constantes  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  seront déterminées par les relations (21). Ces dernières s'écrivent :

$$P = -K \int_a^b \frac{dr}{r} + K \int_a^b \frac{D dr}{r \sqrt{\Delta}}$$

$$Q = 2\pi \int_a^b \left[ -K \int_r^b \frac{\sqrt{\Delta} - D}{r \sqrt{\Delta}} dr - K \frac{\sqrt{\Delta} + D}{\sqrt{\Delta}} \right] r dr$$

$$T = -2\pi K \kappa_2 \int_a^b \frac{r^3 dr}{\sqrt{\Delta}}$$

Soit :

$$P = -K \left[ \log \frac{b}{a} - \int_a^b \frac{\frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2}}{r \left[ \left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \right)^2 + \kappa_2^2 r^2 \right]^{1/2}} dr \right] \quad (22-1)$$

$$Q = -\pi \frac{K}{2} \left[ 3(b^2 - a^2) - a^2 \log \frac{b^2}{a^2} \right] +$$

$$+ 2\pi K \int_a^b \left[ \int_r^b \frac{\frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{x^2}}{x \left[ \left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{x^2} \right)^2 + \kappa_2^2 x^2 \right]^{1/2}} dx - \frac{\frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2}}{\left[ \left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \right)^2 + \kappa_2^2 r^2 \right]^{1/2}} \right] r dr \quad (22-2)$$

$$T = -2\pi K \kappa_2 \int_a^b \frac{r^3 dr}{\left[ \left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \right)^2 + \kappa_2^2 r^2 \right]^{1/2}} \quad (22-3)$$

Nous voyons que les intégrales (22) sont toutes homogènes en  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$ . Par conséquent, elles ne dépendent que de deux de leurs rapports. Par exemple, choisissons comme rapports :

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\kappa_1}{\kappa_3} b^2 \quad \beta = \frac{\kappa_2}{\kappa_3} b^3$$

$$D = \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \quad \text{devient} \quad D = \frac{\kappa_3}{r^2} \left[ \alpha \frac{r^2}{b^2} - 1 \right]$$

$$\sqrt{\Delta} = \left[ \left( \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} \right)^2 + \kappa_2^2 r^2 \right]^{1/2} \quad \text{devient} \quad \sqrt{\Delta} = \frac{|\kappa_3|}{r^2} \left[ \left( \alpha \frac{r^2}{b^2} - 1 \right)^2 + \beta^2 \frac{r^6}{b^6} \right]^{1/2}$$

en posant  $R = \frac{r^2}{b^2}$ , les intégrales (22) se transforment en :

$$P = -K \left[ \log \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \int_{\frac{a^2}{b^2}}^1 \frac{\alpha R - 1}{R \left[ (\alpha R - 1)^2 + \beta^2 R^3 \right]^{1/2}} dR \right] \quad (23.1)$$

$$Q = -\frac{\pi K}{2} \left[ 3(b^2 - a^2) + a^2 \log \frac{b^2}{a^2} \right] + \\ + \frac{\pi K b^2 \nu}{2} \int_{a^2/b^2}^1 \left[ \int_R^1 \frac{\alpha X - 1}{X \left[ (\alpha X - 1)^2 + \beta^2 X^3 \right]^{1/2}} dX \right] - 2 \frac{\alpha R - 1}{\left[ (\alpha R - 1)^2 + \beta^2 R^3 \right]^{1/2}} \quad (23-2)$$

$$T = -\pi K \beta b^2 \nu \int_{a^2/b^2}^1 \frac{R^2 dR}{\left[ (\alpha R - 1)^2 + \beta^2 R^3 \right]^{1/2}} \quad (23.3)$$

Le coefficient  $\nu$  est égal à  $\pm 1$  et a le signe de  $k_3$ . Nous voyons que les intégrales (23) font intervenir des calculs d'intégrales elliptiques. Nous devrons donc, soit procéder par intégration numérique, soit traiter des cas particuliers permettant de linéariser ces intégrales.

#### 4°) Cas particulier des tubes à parois minces.

Dans le cas où  $a$  et  $b$  ne sont pas trop différents, les intégrales (23) peuvent se linéariser. Pour cela, posons :

$$R = 1 + \rho \quad X = 1 + y \quad \frac{a}{b} = 1 - \varepsilon$$

$\varepsilon$  étant petit, nous pouvons, en première approximation, faire un développement limité des expressions à intégrer en nous limitant aux termes du premier degré. De plus, les bornes des intégrales étant assez rapprochées, nous pouvons confondre l'intégrale avec le produit de la fonction à intégrer calculée pour une borne, par la différence des deux bornes. Les relations (23) se transforment de la manière suivante :

$$P = -K\varepsilon + \nu K\varepsilon \frac{\alpha - 1}{\left[ (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \right]^{1/2}}$$

$$Q = -\pi K b^2 2\varepsilon - \pi K b^2 \nu 2\varepsilon \frac{\alpha - 1}{\left[ (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \right]^{1/2}}$$

$$T = -\pi K b^3 \nu 2\varepsilon \frac{\beta}{\left[ (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \right]^{1/2}}$$

Posons :  $P(\alpha, \beta) = P/K$      $q(\alpha, \beta) = Q/\pi K b^2$      $t(\alpha, \beta) = T/\pi K b^3$

$$P(\alpha, \beta) = -\varepsilon \left( 1 - \nu \frac{(\alpha - 1)}{\left[ (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \right]^{1/2}} \right) \quad (24-1)$$

$$q(\alpha, \beta) = -2\varepsilon (1 + \nu \frac{\alpha - 1}{[(\alpha - 1)^2 + \beta^2]^{1/2}}) \quad (24-2)$$

$$t(\alpha, \beta) = -\nu \frac{2\varepsilon \beta}{[(\alpha - 1)^2 + \beta^2]^{1/2}} \quad (24-3)$$

Surface d'interaction :

Si nous représentons les états combinés de pression radiale  $P$ , charge axiale  $Q$  et couple de torsion  $T$  qui amènent le cylindre à l'état limite, par un point de coordonnées  $P, Q, T$  (ou  $p, q, t$ ), dans un espace à trois dimensions, nous obtenons une surface, dite surface d'interaction. Elle correspond à la surface limite de l'espace  $E_3$ . La surface d'interaction est convexe [6], [20].

Si nous éliminons  $\alpha$  et  $\beta$  entre les relations (24), nous remarquons qu'il existe deux relations reliant  $p, q, t$  indépendantes de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Ceci signifie qu'aux arêtes de la surface limite correspondent des courbes de la surface d'interaction.

Les relations (24) montrent que si on change le signe de  $k_1$  et  $k_3$  (passage de la solution  $S$  à  $S_2$ ),  $\alpha$  ne change pas de signe au contraire de  $\beta$ . La courbe correspondant à  $S_2$  est symétrique de celle correspondant à  $S$  par rapport à l'axe  $p + \varepsilon = 0$ ,  $q + 2\varepsilon = 0$ .

Si nous changeons le signe de  $k_2$  seulement, (passage de  $S$  à  $S_1$ ) seul  $\beta$  change de signe. La courbe correspondant à  $S_1$  est symétrique de celle correspondant à  $S$  par rapport au plan  $t = 0$ .

Enfin, si nous changeons le signe de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (passage de  $S$  à  $S_3$ ) nous voyons que la courbe correspondant à  $S_3$  est symétrique de celle correspondant à  $S$  par rapport au point  $p = -\varepsilon$ ,  $q = -2\varepsilon$ ,  $t = 0$ .

La courbe d'interaction correspondant à  $S$  a pour équations :

$$-2(p + \varepsilon) = q + 2\varepsilon \quad (q + 2\varepsilon)^2 + t^2 = 4\varepsilon^2$$

C'est une ellipse tracée dans le plan  $-2p = q + 4\varepsilon$  et dont la projection sur le plan  $p = 0$  est l'ellipse d'équation :

$$(q + 2\varepsilon)^2 + t^2 = 4\varepsilon^2$$

Cette courbe présente toutes les symétries indiquées précédemment. Les solutions  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  donnent donc toutes la même ellipse comme courbe d'interaction.

Pour avoir l'image de toutes les arêtes de la surface limite, il faut encore changer  $K$  en  $-K$ , ce qui correspond à une symétrie par rapport à l'origine du repère  $p, q, t$ .

Nous avons donc trouvé deux ellipses tracées sur la surface d'interaction, et il faut y ajouter les points particuliers :

$$\begin{aligned} P &= \pm 2K \log \frac{a}{b} & Q &= \pm \frac{\pi K}{2} \left[ a^2 \log \frac{b^2}{a^2} + b^2 - a^2 \right] & T &= 0 \\ \text{soit} \quad p &= \pm 2\epsilon & q &= \pm 2\epsilon & t &= 0 \\ \text{et} \quad P &= \pm 2K \log \frac{a}{b} & Q &= T = 0 \\ \text{soit} \quad P &= \pm 2\epsilon & q = t &= 0. & \text{Ces deux derniers points sont} \end{aligned}$$

d'ailleurs placés sur les ellipses trouvées plus haut.

Nous ne pouvons donc pas donner l'équation de la surface d'interaction totale à l'aide de ces seuls résultats.

Mais la théorie des tubes minces en élasticité [10] nous enseigne que la surface d'interaction est un ellipsoïde qui admet l'axe des  $t$  comme axe de symétrie. Les résultats de PANARELLI et HODGE [20] montrent qu'il en est de même avec les tubes minces en plasticité et que les deux surfaces sont voisines.

Supposons que la surface d'interaction soit un ellipsoïde centré à l'origine et admettant l'axe des  $t$  comme axe de symétrie. Cet ellipsoïde doit passer par les deux ellipses que nous avons trouvées et par les points particuliers mentionnés précédemment.

Son équation sera de la forme :

$$ap^2 + bpq + cq^2 + dt^2 = 4\epsilon^2$$

les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sont déterminés en écrivant par exemple :

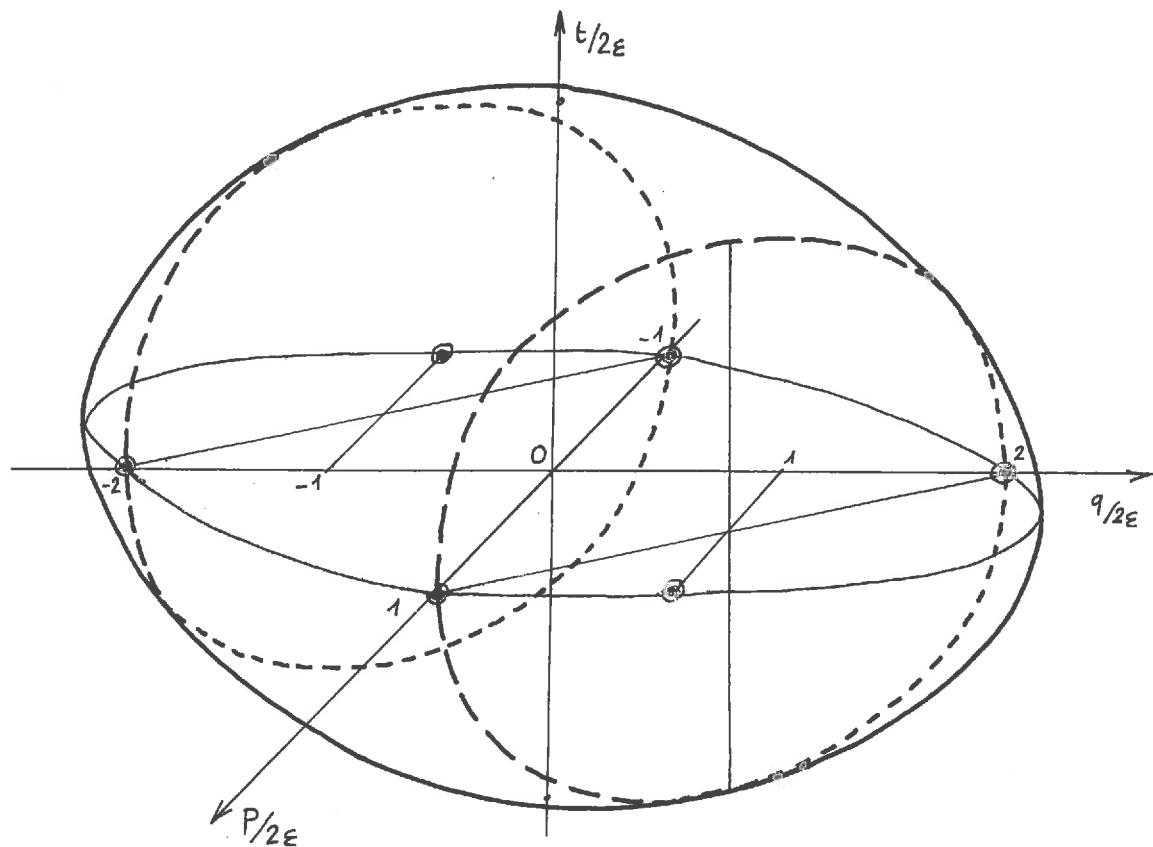
$$\begin{aligned} p &= 2\epsilon & q &= 2\epsilon & t &= 0 \\ p &= 2\epsilon & q &= 0 & t &= 0 \\ p &= 0 & q &= 4\epsilon & t &= 0 \\ p &= \epsilon & q &= 2\epsilon & t &= 2\epsilon \end{aligned}$$

Nous trouvons finalement :

$$P^2 - \frac{1}{4}Pq + \frac{1}{4}q^2 + \frac{5}{8}t^2 = 4\epsilon^2$$

La surface d'interaction est la suivante :

(en pointillés les deux courbes d'interaction correspondant aux solutions relatives aux régimes d'arête, et entourés d'un cercle les points particuliers représentant les solutions particulières).

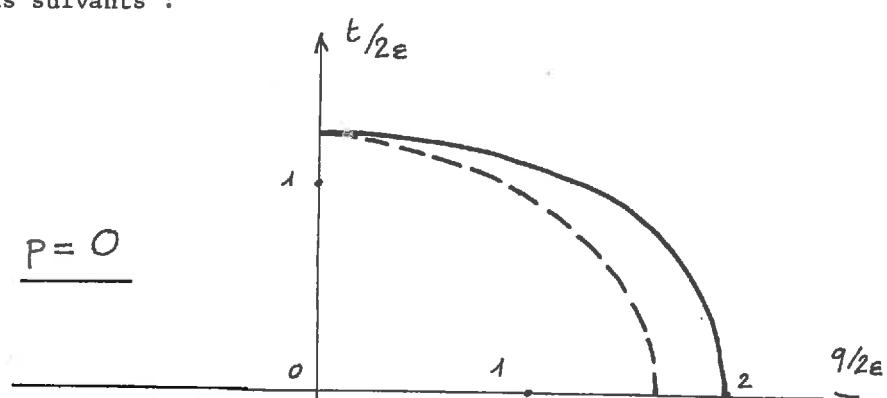


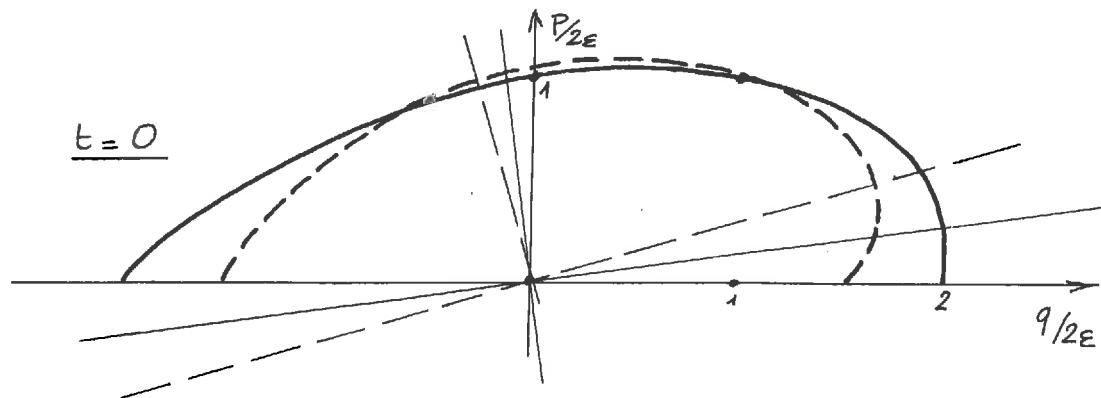
Surface d'interaction pour un matériau de TRESCA

Cas où  $P_b = 0$

Comparons avec les résultats de PANARELLI et HODGE pour  $\varepsilon = 0,1$   
( nous avons limité nos développements au premier ordre par rapport à  $\varepsilon$  , nos résultats sont donc valables seulement si  $\varepsilon$  est petit ).

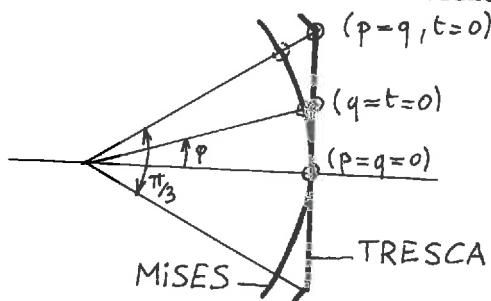
Si nous faisons coïncider les critères pour le cisaillement pur, nous obtenons les résultats suivants :





en traits pointillés, les résultats de PANARELLI et HODGE

Les différences qui apparaissent sont dues à la différence de forme des surfaces limites.



En effet si nous comparons la position de quelques points particuliers sur la coupe déviatoire des deux surfaces limite, nous constatons que les différences entre les deux études s'expliquent assez bien.

B - Cas où  $P_a = P_b = P$

Dans ces conditions,  $k_3 = 0$

L'étude cinématique reste valable, mais l'étude que nous avions faite pour  $P_b = 0$   $P_a = P$  ne l'est plus. En effet,  $\alpha$  et  $\beta$  tendent vers l'infini.

Il nous faut reprendre l'étude de la solution S avec  $k_3 = 0$  et examiner les cas particuliers que nous avions écartés puisqu'ils exigeaient la nullité de  $k_3$ . Notons que les cas où  $k_1 = k_2 = 0$  ne pourront plus exister car si  $k_3$  est aussi nul, il n'y a plus de déformation.

1°) Solution S (correspondant au régime F,  $\psi = 0$ )

$$D = \frac{3}{2} k_1 \quad \Delta = D^2 + k_2^2 r^2$$

Nous avons trouvé

$$\sigma_r = -K \int_r^b \frac{\sqrt{\Delta} - D}{r \sqrt{\Delta}} dr + \kappa$$

si  $r = b \quad \sigma_r = P$

$$\sigma_r = -K \int_r^b \frac{\sqrt{\Delta} - D}{r \sqrt{\Delta}} dr + P$$

si  $r = a \quad \sigma_r = P \quad$  soit

$$P = -K \int_a^b \frac{\sqrt{\Delta} - D}{r \sqrt{\Delta}} dr + P$$

Nous voyons que ceci n'est possible que si  $\sqrt{\Delta} = D$ , soit seulement si  $k_2 = 0$ .

Les relations (12) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda \mu = -\frac{k_1}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\lambda \cos^2 \delta + \lambda (1-\mu) \sin^2 \delta = -\frac{k_1}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_z = -\lambda \sin^2 \delta + \lambda (1-\mu) \cos^2 \delta = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda (2-\mu) \sin \delta \cos \delta = 0$$

$\lambda$  étant non nul et  $0 \leq \mu \leq 1$ , la seule solution de ce système est  $\sin 2\delta = 0$  soit  $\delta = 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ .

Compte tenu de  $\psi = 0$ ,  $\delta = 0 \pmod{\pi}$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3$ , les relations (14) s'écrivent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1 - 2K$$

$$\sigma_z = \sigma_1$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Soit, en reportant dans l'équation de l'équilibre :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2K}{r} = 0 \quad \sigma_r = \sigma_1 = -2K \log r + \kappa$$

$$\text{Si } r = b \quad \sigma_r = P \quad P = -2K \log b + \kappa \quad \sigma_r = P - 2K \log \frac{r}{b}$$

si  $r = a$        $\sigma_r = P$        $P = P - 2K \log \frac{b}{a}$       ce qui est impossible  
 la solution  $\delta = 0$  est donc à écarter.

Si  $\delta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  les relations (14) deviennent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\sigma_z = \sigma_1 - 2K$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

L'équation de l'équilibre donne :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad \sigma_r = \sigma_1 = P$$

$$\sigma_z = P - 2K$$

$$\text{soit} \quad Q = \int_a^b 2\pi \sigma_z r dr = (P - 2K) \pi (b^2 - a^2)$$

Le régime C s'obtient en changeant K en -K.

Les différents régimes d'arête se ramènent à la même solution :

$$Q = \pi (b^2 - a^2) (P - 2K) \quad T = 0$$

## 2°) Cas particuliers

• Pour les régimes F et C : le cas  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  présente une solution  $k_2 = k_3 = 0$   
 Les relations (11) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_1 = -\frac{k_1}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_1 (\sin^2 \delta - 2 \cos^2 \delta) = -\frac{k_1}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 (\cos^2 \delta - 2 \sin^2 \delta) = k_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = 3 \dot{\epsilon}_1 \sin \delta \cos \delta = 0$$

La solution  $\dot{\epsilon}_1 = 0$  n'est pas à retenir (pas de déformation)

Donc  $\sin 2\delta = 0 \quad \delta = 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$

$\delta = 0 \pmod{\pi}$  conduit à :  $\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_1 = -\frac{k_1}{2} \quad \dot{\epsilon}_\theta = -2\dot{\epsilon}_1 = -\frac{k_1}{2} \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 = k_1$   
 ce qui est impossible. Cette solution est donc à écarter. Il reste  $\delta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$   
 Les relations (3) compte tenu de  $\sigma_1 = \sigma_3$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  deviennent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\sigma_z = \sigma_1 - 2K$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

Nous retrouvons la même solution que pour le régime F,  $\Psi = 0$ .

- Pour les régimes BC et EF,  $\Psi = 0$  ; AF et CD,  $\Psi = \frac{\pi}{2}$  il y a une solution si  $k_1 = k_3 = 0$ .

- Régimes BC et EF Les relations (9) deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = 0$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 + \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_3 = 0$$

$$\dot{\epsilon}_z = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 + \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_3 = 0$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3) \sin \delta \cos \delta = \frac{k_2 r}{2}$$

Soit  $\dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_3$  (incompressibilité) et  $\dot{\epsilon}_2 \neq 0$

$$\cos 2\delta = 0 \text{ ou } \delta = \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$$

Les relations (3) compte tenu de  $\sigma_2 - \sigma_3 = 2K$ ,  $\Psi = 0$ ,  $\delta = \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$  s'écrivent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = K + \sigma_3$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = K + \sigma_3$$

relations (31)

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm K$$

L'équation de l'équilibre s'écrit :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - K}{r} = 0$$

Or les conditions aux limites ( $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = P$ ) imposent  $\sigma_r = P$

$$\text{soit } \sigma_3 = P - K$$

$$\sigma_z = P \quad Q = \int_a^b P 2\pi r dr \quad T = \pm \int_a^b K 2\pi r^2 dr$$

$$\text{ou } Q = P\pi(b^2 - a^2) \quad T = \pm \frac{2\pi}{3} (b^3 - a^3) K$$

Le régime EF (obtenu à partir de BC en changeant K en -K) donne la même solution

- Régimes AF et CD,  $\Psi = \frac{\pi}{2}$ .

Les relations (10) deviennent :

$$\dot{\epsilon}_r = 0$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_1 + \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = 0$$

$$\dot{\epsilon}_z = \cos^2 \delta \dot{\epsilon}_1 + \sin^2 \delta \dot{\epsilon}_2 = 0$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}$$

C'est la solution précédente en permuttant les indices 1 et 3.  
Nous sommes conduits à la même solution.

En résumé, nous avons trouvé deux types de solutions :

$$\begin{array}{ll} \text{en régime d'arête :} & Q = \pi (b^2 - a^2) / (P \mp 2K) \quad T = 0 \\ \text{en régime de face :} & Q = \pi (b^2 - a^2) P \quad T = \pm \frac{2}{3} \pi (b^3 - a^3) K \end{array}$$

### 3°) Surface d'interaction :

Ici encore nous n'obtenons que des droites tracées sur la surface d'interaction. Ces droites sont parallèles, dans l'espace  $p, q, t$ , à la direction

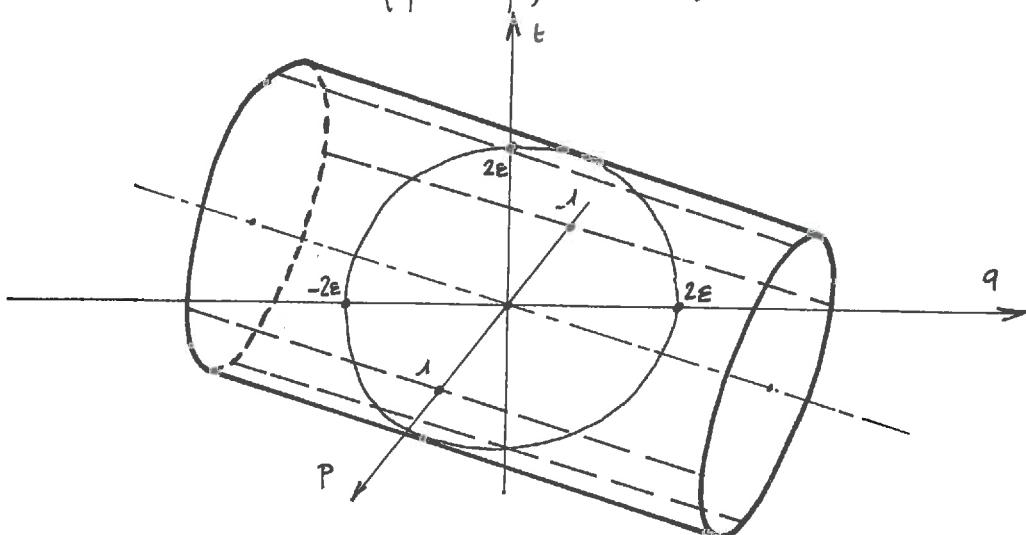
$$q = P \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)$$

Nous ne pouvons donner l'équation de la surface d'interaction totale. Mais, en nous référant à la théorie des tubes minces, nous pouvons supposer que c'est un cylindre à base elliptique.

Cette supposition faite, nous pouvons donner l'équation de cylindre car nous en connaissons quatre génératrices :

$$q = 2\epsilon(p \pm 1) \quad t = 0 \quad \text{et} \quad q = 2\epsilon p \quad t = \pm 2\epsilon$$

$$\text{L'équation du cylindre est :} \quad (q - 2\epsilon p)^2 + t^2 = 4\epsilon^2$$



Surface d'interaction pour un tube mince. Matériau de TRESCA . Cas où  $P_a = P_b = P$

## VI. ETUDE D'UN MATERIAU DE COULOMB GENERALISE

### A - Matériaux compressibles.

#### 1°) Analyse cinématique.

L'étude que nous avons faite pour un matériau incompressible sur les vitesses de déformation reste valable pour les calculs de  $v$  et  $w$ . En effet, la forme de la surface limite n'intervient pas dans ce calcul.

Par contre, le calcul de  $u$  n'est plus valable car nous avons utilisé l'hypothèse de l'incompressibilité. Pour le matériau de COULOMB généralisé standard, la variation de volume n'est pas nulle.

Faisons le calcul pour un matériau non standard en introduisant, comme le font NEGRE et STUTZ [18], une constante  $\phi^*$  dont on pourra fixer, suivant le problème, la valeur entre 0 et  $\phi$  (angle de frottement interne du matériau). Le matériau standard sera traité en prenant  $\phi^* = \phi$ . Le matériau incompressible sera traité en faisant  $\phi^* = 0$ .

#### a) Variation de volume.

Le critère d'écoulement s'écrit :

$$F(\sigma_i, \sigma_j) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \phi - 2c \cos \phi \quad \sigma_i > \sigma_k > \sigma_j$$

Donc

$$G(\sigma_i, \sigma_j) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \phi^* - 2c \cos \phi^*$$

avec  $i \neq j \neq k$  ( $i, j, k : 1, 2, 3$ ). La loi d'écoulement à potentiel donne trois relations :

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda (1 - \sin \phi^*)$$

$$\dot{\epsilon}_j = -\lambda (1 + \sin \phi^*)$$

$$\dot{\epsilon}_k = 0$$

La variation de volume est donnée par la valeur du premier invariant du tenseur vitesse de déformation :

$$\dot{\epsilon}_i + \dot{\epsilon}_j + \dot{\epsilon}_k = -2\lambda \sin \phi^*$$

b) Calcul de  $u$  .

Les relations (2) nous permettent d'écrire :

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \kappa_1 = -2\lambda \sin \phi^*$$

en tenant compte de  $w = k_1 z$  et du fait que les vitesses de déformations ne dépendent que de  $r$  (cf. chapitre IV). Nous avons donc :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) = -\kappa_1 - 2\lambda \sin \phi^*$$

Notons que  $\lambda$  est un coefficient de proportionnalité qui ne dépendra aussi que de  $r$  .

$$\frac{d}{dr} (ur) = -\kappa_1 r - 2\lambda r \sin \phi^*$$

$$ur = -\frac{\kappa_1}{2} r^2 - 2 \sin \phi^* \int \lambda r dr + \kappa_3 \quad (k_3 \text{ est une constante}).$$

L'intégrale généralisée portant sur  $\lambda r$  fait intervenir une constante et nous n'avions pas besoin d'introduire  $k_3$  . Nous l'avons fait pour essayer de retrouver nos résultats de l'étude du matériau de TRESCA comme cas particulier où  $\phi^* = 0$  .

$$u = -\frac{\kappa_1}{2} r + \frac{\kappa_3}{r} - 2 \frac{\sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr$$

Les relations (2) s'écrivent donc :

$$\dot{\epsilon}_r = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} + \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr - 2\lambda \sin \phi^*$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

relations (25)

$$\dot{\epsilon}_z = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{\kappa_2}{2} r$$

Nous avons toujours  $\dot{\gamma}_{rz} = \dot{\gamma}_{\theta r} = 0$

2°) Choix du régime plastique.

Le fait que  $\dot{\gamma}_{rz}$  et  $\dot{\gamma}_{\theta z}$  soient nuls impose toujours d'examiner les trois cas  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  ,  $\psi = 0$  ou  $\psi = \frac{\pi}{2}$  . Etudions successivement les différents régimes plastiques .

Notons que nous n'examinerons pas les cas particuliers où  $P$  ,  $Q$  ou  $T = 0$  .

a) Régimes de face.

- Régime BC (et régime EF).

$\sigma_1$  est contrainte intermédiaire. Le critère d'écoulement s'écrit :

$$F(\sigma_i, \sigma_j) = \sigma_2 - \sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi$$

La loi d'écoulement se traduit par :  $G(\sigma_i, \sigma_j) = \sigma_2 - \sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi^* - 2c \cos \phi^*$

soit :  $\dot{\epsilon}_1 = 0 \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda (1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda (1 + \sin \phi^*)$

. Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$   $0 = -\lambda (1 + \sin \phi^*)$ . La solution  $\lambda = 0$  est inacceptable (pas de déformation). Ce cas est à rejeter.

. Si  $\psi = 0$  les relations (4) jointes aux relations (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = 0 \quad = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \lambda (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -2 \lambda \sin \delta \cos \delta \quad = \frac{\kappa_2}{2} r$$

De la première relation, nous tirons :  $(\dot{\epsilon}_r = \frac{du}{dr})$

$$u = k_4 \text{ (constante)}$$

$$\text{et } -2 \lambda \sin \phi^* = \kappa_1 + \frac{k_4}{r} \quad (\text{d'après 1°) b})$$

Les trois dernières relations s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda \cos 2\delta - \lambda \sin \phi^* = \frac{k_4}{r} \\ \dot{\epsilon}_z &= -\lambda \cos 2\delta - \lambda \sin \phi^* = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= -2 \lambda \sin 2\delta = \kappa_2 r \end{aligned} \right\} \text{d'où : } \dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z = 2 \lambda \cos 2\delta = \frac{k_4}{r} - \kappa_1$$

Comparons les deux valeurs de  $\lambda$  en écrivant :

$$(\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + \dot{\gamma}_{\theta z}^2 = 4 \lambda^2 = \left( \frac{k_4}{r} - \kappa_1 \right)^2 + \kappa_2^2 r^2$$

$$\text{Or, nous avons trouvé } -2 \lambda \sin \phi^* = \kappa_1 + \frac{k_4}{r}$$

$$\text{ou } 4 \lambda^2 \sin^2 \phi^* = \left( \kappa_1 + \frac{k_4}{r} \right)^2$$

On devrait avoir :

$$\left( \kappa_1 + \frac{k_4}{r} \right)^2 = \left[ \left( \frac{k_4}{r} - \kappa_1 \right)^2 + \kappa_2^2 r^2 \right] \sin^2 \phi^*$$

$$\left( \kappa_1^2 + \frac{k_4^2}{r^2} \right) \cos^2 \phi^* + 2 \frac{\kappa_1 k_4}{r} (1 + \sin^2 \phi^*) - \kappa_2^2 r^2 \sin^2 \phi^* = 0 \quad \forall r$$

Ceci ne peut être vrai que si  $\kappa_1 = k_4 = \kappa_2 = 0$ . Cette solution est inacceptable car  $\lambda = 0$  et il n'y aurait pas de déformation.

• Si  $\psi = \frac{\pi}{2}$  les relations (4) jointes aux relations (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = -\lambda(1 + \sin \phi^*) = -\frac{k_1}{2} - \frac{k_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \lambda(1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta = -\frac{k_1}{2} + \frac{k_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda(1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta = k_4$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda(1 - \sin \phi^*) \sin \delta \cos \delta = \frac{k_2 r}{2}$$

Nous voyons que  $\dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{\theta z}^2$ . Soit

$$-\frac{k_1}{2} + \frac{k_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr = \frac{k_2^2 r^2}{4 k_1}$$

$$2 \sin \phi^* \int \lambda r dr = -\frac{k_1}{2} r^2 + k_3 - \frac{k_2^2 r^4}{4 k_1}$$

$$2 \lambda r \sin \phi^* = -k_1 r - \frac{k_2^2 r^3}{k_1}$$

$$\text{et } 2 \lambda \sin \phi^* = -k_1 - \frac{k_2^2 r^2}{k_1}$$

reportons cette expression dans la première relation :

$$\left( k_1 + \frac{k_2^2 r^2}{k_1} \right) \frac{1 + \sin \phi^*}{2 \sin \phi^*} = \frac{3 k_2^2 r^2}{4 k_1}$$

$$k_1^2 \frac{1 + \sin \phi^*}{2 \sin \phi^*} + k_2^2 r^2 \frac{2 - \sin \phi^*}{4 \sin \phi^*} = 0$$

Ceci n'est vrai que si  $k_1 = 0$  et  $k_2 = 0$ , ce qui est inacceptable. Ce cas est donc à rejeter.

- Régime AB (et régime DE).

$\sigma_2$  est contrainte intermédiaire. La fonction  $G(\sigma_{ij})$  est :

$$G(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi^* - 2 c \cos \phi^* = 0$$

La loi d'écoulement permet d'écrire :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda(1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_2 = 0 \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda(1 + \sin \phi^*)$$

$$\cdot \text{ Si } \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 : \quad \lambda(1 - \sin \phi^*) = -\lambda(1 + \sin \phi^*)$$

ou  $2 \lambda = 0$ . Cette solution est à rejeter.

•  $\psi = 0$  : les relations (4) jointes aux relations (25) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \lambda(1 - \sin \phi^*) = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right) \\ \dot{\epsilon}_\theta &= -\lambda(1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr \\ \dot{\epsilon}_z &= -\lambda(1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= \lambda(1 + \sin \phi^*) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}\end{aligned}$$

Nous voyons que  $\dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{\theta z}^2$ . Nous avons vu précédemment que l'on était conduit à :

$$-2\lambda \sin \phi^* = \kappa_1 + \frac{\kappa_2^2 r^2}{\kappa_1}$$

en reportant dans la première relation, il vient :

$$\begin{aligned}-\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2^2 r^2}{\kappa_1}\right) \frac{1 - \sin \phi^*}{2 \sin \phi^*} &= \frac{3}{4} \frac{\kappa_2^2 r^2}{\kappa_1} \\ \text{ou} \quad -\kappa_1 \frac{1 - \sin \phi^*}{2 \sin \phi^*} - \kappa_2^2 r^2 \frac{2 - 3 \sin \phi^*}{4 \sin \phi^*} &= 0\end{aligned}$$

ce qui requiert  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ . Cette solution est à rejeter.

. Si  $\psi = \pi/2$  : les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= -\lambda(1 + \sin \phi^*) = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right) \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda(1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda(1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= -\lambda(1 - \sin \phi^*) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}\end{aligned}$$

Ces relations sont absolument identiques à celles obtenues pour  $\psi = \pi/2$ , régime BC. La solution est à rejeter.

- Régime AF (et régime CD).

$\sigma_3$  est contrainte intermédiaire. La fonction  $G(\sigma_{ij})$  est donnée par :

$$G(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi^* - 2c \cos \phi^*$$

La loi d'écoulement nous permet d'écrire :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda(1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_2 = -\lambda(1 + \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_3 = 0$$

• Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  :  $\lambda(1 - \sin \phi^*) = 0$ . La solution  $\phi^* = \frac{\pi}{2}$  est trop particulière pour être retenue. Ce cas est à rejeter.

• Si  $\psi = 0$  : les relations (4) et (23) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda(1 - \sin \phi^*) = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\lambda(1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$\dot{\epsilon}_z = -\lambda(1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda(1 + \sin \phi^*) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}$$

Nous avons  $\dot{\epsilon}_\theta \dot{\epsilon}_z = \dot{\gamma}_{\theta z}^2$ , ce qui nous conduit à :

$$-2\lambda \sin \phi^* = \kappa_1 + \frac{\kappa_2^2 r^2}{\kappa_1} \quad \text{comme dans le cas } \psi = 0, \text{ régime AB.}$$

La première relation étant identique, nous voyons que ce cas est à rejeter.

• Si  $\psi = \pi/2$  : les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = 0 \quad = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \lambda(1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta - \lambda(1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda(1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta - \lambda(1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -2\lambda \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}$$

Nous avons vu que la première relation entraîne  $u = k_4$  et

$$-2\lambda \sin \phi^* = \kappa_1 + \frac{\kappa_4}{r}$$

Or, ces relations sont identiques à celles obtenues dans le cas  $\psi = 0$ , régime BC, à la condition d'y intervertir  $\kappa_1$  et  $\kappa_4$  ( $\dot{\epsilon}_\theta$  et  $\dot{\epsilon}_z$ ). Cette interversion ne modifiant pas la valeur de  $\lambda$ , nous voyons que ce cas est à rejeter.

Nous constatons qu'aucun des régimes de face ne conduit à une solution acceptable.

Envisageons maintenant les différents régimes d'arête.

b) Régimes d'arête.

- Régime F (et régime C).

Pour ce régime  $\sigma_1 = \sigma_3$ . Le critère d'écoulement s'écrit :

$$\mu F(\sigma_1, \sigma_2) + (1-\mu) F(\sigma_3, \sigma_2) = 0$$

avec  $F(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$   
 $F(\sigma_3, \sigma_2) = \sigma_3 - \sigma_2 - (\sigma_3 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$

Soit

$$G(\sigma_{ij}) = \mu(1 - \sin \phi^*)\sigma_1 - (1 + \sin \phi^*)\sigma_2 + (1 - \mu)(1 - \sin \phi^*)\sigma_3 - 2c \cos \phi^* = 0$$

La loi d'écoulement nous donne :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_2 = -\lambda (1 + \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_3 = \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*)$$

• si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  :  $\lambda \mu (1 - \sin \phi^*) = \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*)$

Soit  $\lambda (1 - 2\mu) (1 - \sin \phi^*) = 0$

$\mu = \frac{1}{2}$  est la seule solution acceptable. Dans ce cas :

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 = \frac{\lambda}{2} (1 - \sin \phi^*)$$

Les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\lambda}{2} (1 - \sin \phi^*) = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\lambda}{2} (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\lambda}{2} (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\frac{\lambda}{2} (3 + \sin \phi^*) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta = \frac{\lambda}{2} (3 + \sin \phi^*) \cos 2\delta = \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} + \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$4\dot{\gamma}_{\theta z}^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta)^2 = \frac{\lambda^2}{4} (3 + \sin \phi^*)^2 = \kappa_2^2 r^2 + \left[ \frac{3}{2} \kappa_1 - \frac{\kappa_3}{r^2} + \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr \right]^2$$

équation différentielle en  $\lambda$ .

Or  $\dot{\epsilon}_r = \frac{\lambda}{2} (1 - \sin \phi^*) = -\frac{\kappa_1}{r} - \frac{\kappa_3}{r^2} + \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr - 2\lambda \sin \phi^*$

Soit

$$0 = -\frac{\kappa_1}{r} - \frac{\kappa_3}{r^2} + \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr - \frac{\lambda}{2} (1 + 3 \sin \phi^*)$$

$$0 = -\frac{\kappa_1 r^2}{2} - \kappa_3 + 2 \sin \phi^* \int \lambda r dr - \frac{\lambda}{2} r^2 (1 + 3 \sin \phi^*)$$

Dérivons par rapport à  $r$  :

$$0 = -\kappa_1 r + 2 \lambda r \sin \phi^* - \lambda r (1 + 3 \sin \phi^*) - \frac{\lambda'}{2} r^2 (1 + 3 \sin \phi^*)$$

$$\frac{\lambda'}{2} r (1 + 3 \sin \phi^*) + \lambda (1 + \sin \phi^*) = -\kappa_1$$

Une solution particulière est  $\lambda = -\frac{\kappa_1}{1 + \sin \phi^*}$

Cherchons une solution de l'équation sans second membre :

$$\frac{\lambda'}{2} r (1 + 3 \sin \phi^*) + \lambda (1 + \sin \phi^*) = 0$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2 \frac{1 + \sin \phi^*}{1 + 3 \sin \phi^*} \quad \text{soit} \quad \lambda = C r^{-2 \frac{1 + \sin \phi^*}{1 + 3 \sin \phi^*}} \quad (C = \text{cte})$$

La solution générale est donc :

$$\lambda = C r^{-2 \frac{1 + \sin \phi^*}{1 + 3 \sin \phi^*}} - \frac{\kappa_1}{1 + \sin \phi^*}$$

$$\lambda r = C r^{-\frac{1 - \sin \phi^*}{1 + 3 \sin \phi^*}} - \frac{\kappa_1 r}{1 + \sin \phi^*}$$

$$\int \lambda r dr = \frac{1 + 3 \sin \phi^*}{4 \sin \phi^*} C r^{\frac{4 \sin \phi^*}{1 + 3 \sin \phi^*}} - \frac{\kappa_1 r^2}{2(1 + \sin \phi^*)} + \kappa_4 \quad (\kappa_4 = \text{cte})$$

$$\frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr = \frac{1 + 3 \sin \phi^*}{2} C r^{-2 \frac{1 + \sin \phi^*}{1 + 3 \sin \phi^*}} - \frac{\kappa_1 \sin \phi^*}{1 + \sin \phi^*} + \frac{2 \kappa_4 \sin \phi^*}{r^2}$$

Reportons dans l'expression donnant  $4 \dot{\gamma}_{\theta 2}^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_{\theta})^2$ . Nous voyons que les seuls termes en  $r^2$  proviennent du terme  $\kappa_2^2 r^2$ . Nous devrons donc avoir  $\kappa_2 = 0$ .

Le terme constant est

$$\frac{\kappa_1^2}{(1 + \sin \phi^*)^2} \left[ \frac{1}{4} + (3 + \sin \phi^*)^2 \right]$$

qui ne peut être nul que si  $\kappa_1 = 0$ .

Ce cas est donc à rejeter.

. Si  $\psi = 0$  : les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\lambda (1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta + \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$

$$\dot{\epsilon}_z = -\lambda (1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta + \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta = \kappa_1$$

$$2 \dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}$$

Posons  $A = -\frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{2 \sin \phi^*}{r} \int \lambda r dr \right)$  (26)

$$B = -\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\kappa_3}{r^2} - \frac{2 \sin \phi^*}{r^2} \int \lambda r dr$$
 (27)

$$A = -B - \kappa_1 - 2\lambda \sin \phi^*$$

$$\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta = \lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] \cos 2\delta = \kappa_1 - B$$

$$2 \dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] \sin 2\delta = \kappa_2 r$$

Or  $\lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] = 2\lambda - A = 2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1$  (d'après  $\dot{\epsilon}_r$ )

$$(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + 4 \dot{\gamma}_{\theta z}^2 = [2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1]^2 = \kappa_2^2 r^2 + (\kappa_1 - B)^2$$

$$4\lambda^2 (1 + \sin \phi^*)^2 + B^2 + \kappa_1^2 + 2B[2\lambda (1 + \sin \phi^*) + \kappa_1] + 4\lambda \kappa_1 = \kappa_2^2 r^2 + \kappa_1^2 - 2B\kappa_1 + B^2$$

$$4B[\lambda (1 + \sin \phi^*) + \kappa_1] + 4\lambda (1 + \sin \phi^*) [\lambda (1 + \sin \phi^*) + \kappa_1] - \kappa_2^2 r^2 = 0$$

Posons  $y = \lambda (1 + \sin \phi^*) + \kappa_1$

$$4By + 4(y - \kappa_1)y - \kappa_2^2 r^2 = 0 \quad \text{en supposant } y \neq 0,$$

$$Br^2 = \frac{\kappa_2^2 r^4}{4y} - (y - \kappa_1) r^2$$

$$\frac{d}{dr} (Br^2) = \frac{\kappa_2^2 r^3}{y} - \frac{\kappa_2^2 r^4}{4y^2} y' - 2r(y - \kappa_1) - r^2 y' \quad y' = \frac{dy}{dr}$$

or  $Br^2 = -\frac{\kappa_1 r^2}{2} + \kappa_3 - 2 \sin \phi^* \int \lambda r dr$

$$\frac{d}{dr} (Br^2) = -\kappa_1 r - 2\lambda r \sin \phi^* = -2y r \frac{\sin \phi^*}{1 + \sin \phi^*} - \kappa_1 r \frac{1 - \sin \phi^*}{1 + \sin \phi^*}$$

d'où :

$$\begin{aligned} y' \left[ r^2 + \frac{\kappa_2^2 r^4}{4y^2} \right] - \frac{\kappa_2^2 r^3}{y} + \frac{2y r}{1 + \sin \phi^*} - \kappa_1 r \frac{3 + \sin \phi^*}{1 + \sin \phi^*} = 0 \\ ry' (4y^2 + \kappa_2^2 r^2) - 4\kappa_2^2 r^2 y + \\ + 8 \frac{y^3}{1 + \sin \phi^*} - 4\kappa_1 \frac{3 + \sin \phi^*}{1 + \sin \phi^*} y^2 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

équation différentielle permettant de calculer  $\lambda$ .

• Si  $\Psi = \pi/2$  : les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) = A$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = B$$

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = \kappa_1$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = -\lambda [1 + \sin \phi^* + \mu (1 - \sin \phi^*)] \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta = \lambda [1 + \sin \phi^* + \mu (1 - \sin \phi^*)] \cos 2\delta = \kappa_1 - B$$

$$\text{Or } \lambda [1 + \sin \phi^* + \mu (1 - \sin \phi^*)] = 2\lambda - A = 2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1 \quad (\text{d'après } \dot{\epsilon}_r)$$

$$(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + 4\dot{\gamma}_{\theta z}^2 = [2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1]^2 = \kappa_2^2 r^2 + (\kappa_1 - B)^2$$

Nous retrouvons la même équation que dans le cas  $\Psi = 0$ . Nous serons donc conduits à la même équation différentielle (29) que précédemment.

- Régime B (et régime E).

Pour ce régime,  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Le critère d'écoulement s'écrit :

$$\mu F(\sigma_1, \sigma_3) + (1 - \mu) F(\sigma_2, \sigma_3) = 0$$

avec  $F(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$

$$F(\sigma_2, \sigma_3) = \sigma_2 - \sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$$

Soit

$$G(\sigma_1) = \mu (1 - \sin \phi^*) \sigma_1 + (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \sigma_2 - (1 + \sin \phi^*) \sigma_3 - 2c \cos \phi^* = 0$$

La loi d'écoulement nous permet d'écrire :

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda (1 + \sin \phi^*)$$

• Si  $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3$  :  $\lambda \mu (1 - \sin \phi^*) = -\lambda (1 + \sin \phi^*)$

soit  $\lambda [1 + \sin \phi^* + \mu (1 - \sin \phi^*)] = 0$   
 $1 + \sin \phi^* > 0 \quad 1 - \sin \phi^* \geq 0 \quad 0 \leq \mu \leq 1$

La seule solution est  $\lambda = 0$ , ce qui est inacceptable.

. Si  $\psi = 0$  : les relations (4) et (25) deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) = A \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \sin^2 \delta = B \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta - \lambda (1 + \sin \phi^*) \cos^2 \delta = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= -\lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}\end{aligned}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z = \lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] \cos 2 \delta = B - \kappa_1$$

or  $\lambda [2 - \mu (1 - \sin \phi^*)] = 2\lambda - A = 2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1$   
 $(\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + 4 \dot{\gamma}_{\theta z}^2 = [2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1]^2 = (B - \kappa_1)^2 + \kappa_2^2 r^2$

Nous retrouvons les mêmes équations que précédemment et  $\lambda$  sera encore solution de l'équation différentielle (29).

. Si  $\psi = \pi/2$  : les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= -\lambda (1 + \sin \phi^*) = A \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta + \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta = B \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda \mu (1 - \sin \phi^*) \cos^2 \delta + \lambda (1 - \mu) (1 - \sin \phi^*) \sin^2 \delta = \kappa_1 \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= \lambda (1 - 2\mu) (1 - \sin \phi^*) \sin \delta \cos \delta = \frac{\kappa_2 r}{2}\end{aligned}$$

Les relations (3) s'écrivent :

$$\sigma_r = \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\sigma_z = \sigma_1$$

$\tau_{\theta z} = 0$  ce qui est inacceptable (le couple de torsion serait nul). Ce cas est donc à écarter.

- Régime D (et régime A).

Pour ce régime,  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Le critère d'écoulement s'écrit :

$$\mu F(\sigma_2, \sigma_1) + (1-\mu) F(\sigma_3, \sigma_1) = 0$$

avec

$$F(\sigma_2, \sigma_1) = \sigma_2 - \sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi$$

$$F(\sigma_3, \sigma_1) = \sigma_3 - \sigma_1 - (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi$$

Soit  $G(\sigma_{ij})$  donnée par :

$$G(\sigma_{ij}) = -(1 + \sin \phi^*) \sigma_1 + \mu (1 - \sin \phi^*) \sigma_2 + (1-\mu)(1-\sin \phi^*) \sigma_3 - 2c \cos \phi^* = 0$$

La loi d'écoulement nous permet d'écrire :

$$\dot{\epsilon}_1 = -\lambda(1 + \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda\mu(1 - \sin \phi^*) \quad \dot{\epsilon}_3 = \lambda(1-\mu)(1-\sin \phi^*)$$

$$\cdot \text{ Si } \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_3 : -\lambda(1 + \sin \phi^*) = \lambda(1-\mu)(1-\sin \phi^*)$$

$$\text{soit } \lambda[2 - \mu(1 - \sin \phi^*)] = 0$$

La solution  $\mu = \frac{2}{1 - \sin \phi^*}$  est à rejeter car  $\phi^*$  prenant ses valeurs sur le segment  $[0, \phi]$  avec  $\phi < \pi/2$ ,  $\mu$  prendrait des valeurs sur le segment  $[2, +\infty]$ , ce qui est impossible ( $0 \leq \mu \leq 1$ ).

• Si  $\psi = 0$  : les relations (3) s'écrivent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_3$$

$$\sigma_z = \sigma_3$$

$\dot{\epsilon}_{\theta z} = 0$  ce qui est impossible ( $\dot{\epsilon} \neq 0$  par hypothèse). Ce cas est donc à écartier.

• Si  $\psi = \pi/2$  : les relations (4) et (25) s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_r = \lambda(1-\mu)(1-\sin \phi^*) = A$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \lambda\mu(1-\sin \phi^*) \cos^2 \delta - \lambda(1+\sin \phi^*) \sin^2 \delta = B$$

$$\dot{\epsilon}_z = \lambda\mu(1-\sin \phi^*) \sin^2 \delta - \lambda(1+\sin \phi^*) \cos^2 \delta = C$$

$$\dot{\gamma}_{\theta z} = \lambda[1 + \sin \phi^* + \mu(1 - \sin \phi^*)] \sin \delta \cos \delta = \frac{K_2 r}{2}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z = \lambda [1 + \sin \phi^* + \mu (1 - \sin \phi^*)] \cos 2\delta = B - \kappa_1$$

$$\text{Or } \lambda [1 + \sin \phi^* + \mu (1 - \sin \phi^*)] = 2\lambda - A = 2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1$$

$$(\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + 4\dot{\gamma}_{\theta z}^2 = [2\lambda (1 + \sin \phi^*) + B + \kappa_1]^2 = (B - \kappa_1)^2 + \kappa_2^2 r^2$$

Nous sommes conduits à la même équation différentielle (29) que précédemment.

En résumé, si nous trouvons la solution de l'équation (29), nous connaîtrons alors l'expression de  $\lambda$  en fonction de  $r$ . En reportant cette dernière dans :

$$\tan 2\delta = \frac{\pm 2 \dot{\gamma}_{\theta z}}{\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z} = \frac{\pm \kappa_2 r}{B - \kappa_1} \quad (\pm \text{ suivant les différents cas})$$

nous connaîtrons l'expression de  $\delta$  en fonction de  $r$ .

Comme pour le matériau de TRESCA nous avons une équation du second degré en  $\delta$  dont les racines sont réelles et inverses l'une de l'autre, d'où deux solutions  $\delta'$  et  $\delta''$ .

En reportant cette valeur de  $\delta$  dans les relations (3), nous aurons les expressions des contraintes en fonction de  $r$ .

Les conclusions sont les mêmes que pour le matériau de TRESCA : Les régimes de face n'autorisent que des cas particuliers. Seuls les régimes d'arête permettent une déformation homogène dans un champ de sollicitations composées  $P, Q, T$ .

B - Matériau incompressible.  $P_a = P_b = P$

L'analyse que nous avons faite pour le matériau de TRESCA reste valable jusqu'à l'instant où nous avons utilisé le critère d'écoulement. Il nous faut reprendre l'étude avec le critère de COULOMB généralisé.

Nous nous limitons au cas où  $P_a = P_b = P$ , car les expériences sont habituellement conduites avec cette hypothèse pour les sols.

Reprendons la solution S correspondant aux régimes d'arête, puis les cas particuliers

### 1°) Solution S

Le critère d'écoulement pour le régime F est :

$$\sigma_1 = \sigma_3 \quad \sigma_1 - \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$$

soit

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

Notons que le régime C s'obtient à partir du régime F en changeant les signes de

$\sin \phi$  et  $\cos \phi$ .

Les relations (3) s'écrivent, compte tenu de  $\psi = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3$  et du critère d'écoulement :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_2 \cos^2 \delta + \sigma_1 \sin^2 \delta = \sigma_1 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \cos^2 \delta - 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} \cos^2 \delta + \sigma_1 \sin^2 \delta \quad (30)$$

$$\sigma_z = \sigma_2 \sin^2 \delta + \sigma_1 \cos^2 \delta = \sigma_1 \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sin^2 \delta - 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} \sin^2 \delta + \sigma_1 \cos^2 \delta$$

$$\tau_{\theta z} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \delta \cos \delta = -2 \sin \delta \cos \delta \left( \sigma_1 \frac{\sin \phi}{1 + \sin \phi} + c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} \right)$$

$$\text{avec } \sin^2 \delta = \frac{\sqrt{\Delta} + D}{2\sqrt{\Delta}} \quad \cos^2 \delta = \frac{\sqrt{\Delta} - D}{2\sqrt{\Delta}} \quad \sin \delta \cos \delta = \frac{k_2 r}{2\sqrt{\Delta}}$$

$$D = \frac{3}{2} k_1 - \frac{k_3}{r^2} \quad \Delta = D^2 + k_2^2 r^2$$

$$\text{Posons } F = \frac{\sin \phi}{1 + \sin \phi}$$

Les relations (30) deviennent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1 - F \frac{\sqrt{\Delta} - D}{\sqrt{\Delta}} (\sigma_1 + c \cot \phi)$$

$$\sigma_z = \sigma_1 - F \frac{\sqrt{\Delta} + D}{\sqrt{\Delta}} (\sigma_1 + c \cot \phi)$$

$$\tau_{\theta z} = -F \frac{k_2 r}{\sqrt{\Delta}} (\sigma_1 + c \cot \phi)$$

L'équation de l'équilibre nous permet d'écrire :

$$\frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{F}{r} \frac{\sqrt{\Delta} - D}{\sqrt{\Delta}} (\sigma_1 + c \cot \phi) = 0$$

Or nous devons avoir  $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = P$  soit  $\sigma_r = c r = P$

$$\text{soit } \sqrt{\Delta} - D = 0 \quad \text{ou } k_2 = 0$$

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\text{avec } \sigma_1 = P$$

$$\sigma_z = \sigma_1 - 2F (\sigma_1 + c \cot \phi)$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

$$Q = \int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = \frac{P(1 - \sin \phi) - 2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \pi (b^2 - a^2)$$

Pour le régime C :

$$Q = \frac{P(1 + \sin \phi) + 2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \pi (b^2 - a^2)$$

Comme nous l'avons vu pour le matériau de TRESCA, tous les régimes d'arête conduisent à la même solution.

2°) Régimes de face :  $k_1 = k_3 = 0$

Les relations (31), compte tenu du critère d'écoulement, s'écrivent :

$$\sigma_2 - \sigma_3 = (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi + 2c \cos \phi$$

ou  $\sigma_2 = \frac{\sigma_3(1 + \sin \phi) + 2c \cos \phi}{1 - \sin \phi}$

s'écrivent :

$$\sigma_r = \sigma_1$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{\theta z} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

L'équation de l'équilibre s'écrit :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_1}{r} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2r} = 0$$

or  $\sigma_r = \text{cte} = P$

donc

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = P = \sigma_2$$

$$\tau_{\theta z} = \pm (P \sin \phi + c \cos \phi)$$

Soit  $Q = P \pi (b^2 - a^2) \quad T = \pm (P \sin \phi + c \cos \phi) \frac{2\pi}{3} (b^3 - a^3)$

Les régimes EF,  $\psi = 0$ ; AF et CD,  $\psi = \pi/2$  conduisent à la même solution.

En résumé, nous avons deux types de solution possibles :

en régimes d'arête :  $Q = \frac{P(1 \pm \sin \phi) \pm 2c \cos \phi}{1 \mp \sin \phi} \pi (b^2 - a^2) \quad T = 0$

en régimes de face :  $Q = P \pi (b^2 - a^2) \quad T = \pm (P \sin \phi + c \cos \phi) \frac{2\pi}{3} (b^3 - a^3)$

3°) Surface d'interaction

Comme pour le matériau de TRESCA, nous ne pouvons donner l'équation de la surface d'interaction totale car nous n'en connaissons que des droites particulières. Ces droites, au nombre de quatre, sont concourantes au point:

$$P = -c \cot \phi \quad q = -c \cot \phi \pi (b^2 - a^2) \quad t = 0$$

en notant :  $P = P$   $q = Q/\pi b^2$   $t = T/\pi b^3$

L'expérience montre que cette surface doit être un cône de section elliptique. Si nous faisons cette hypothèse, nous pourrons effectivement donner l'équation de ce cône.

Cas particulier des milieux non cohérents :

Si  $c = 0$  la surface d'interaction est centrée à l'origine. Les génératrices situées dans le plan  $t = 0$  ont pour équations :

$$q = P \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} 2\epsilon \quad t = 0$$

et

$$q = P \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} 2\epsilon \quad t = 0$$

Les génératrices situées dans le plan  $q = 2\epsilon p$  ont pour équations :

$$q = 2\epsilon p \quad t = \pm p \sin \phi 2\epsilon$$

La section par un plan  $p = \text{cte}$  est une ellipse dont les axes ont pour valeur :

$$q = p 2\epsilon \frac{2 \sin \phi}{\cos^2 \phi} \quad \text{et} \quad t = p 2\epsilon \sin \phi$$

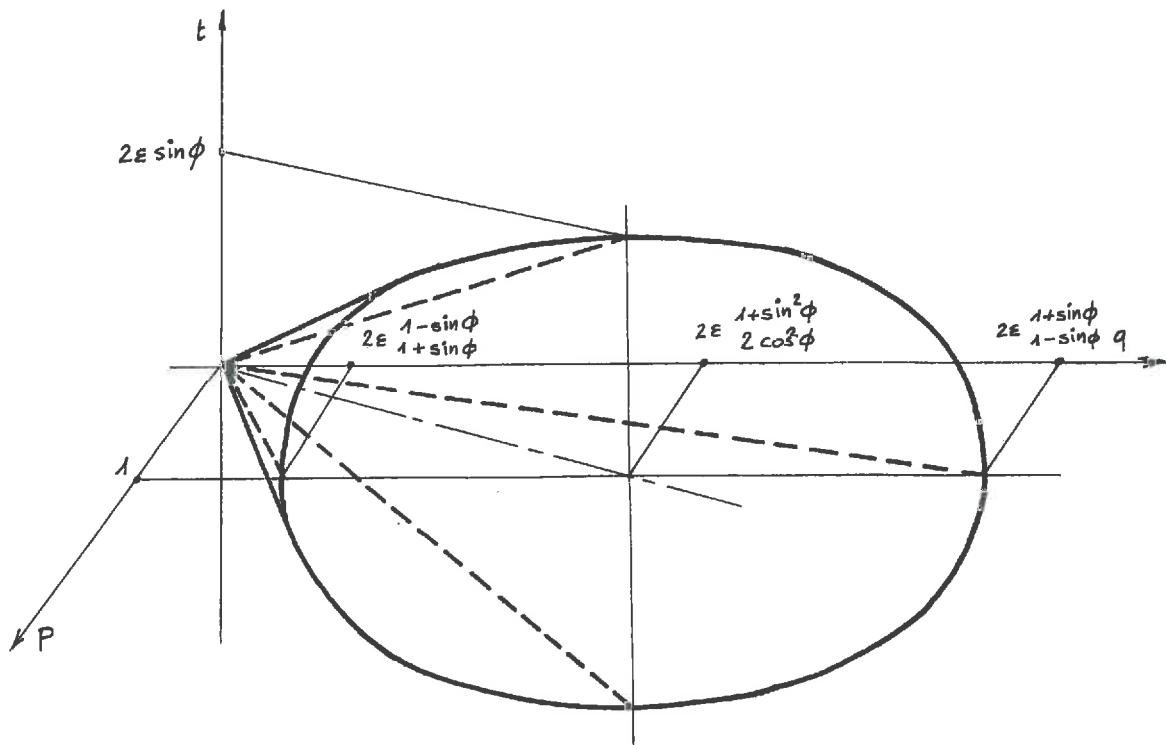
Cette ellipse est centrée au point :

$$q = 2\epsilon p \frac{1 + \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \quad t = 0$$

D'où l'équation du cône :

$$\left( q - 2\epsilon p \frac{1 + \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right)^2 + \frac{4 t^2}{\cos^4 \phi} = 4\epsilon^2 p^2 \frac{4 \sin^2 \phi}{\cos^4 \phi}$$

Sur la figure suivante nous avons représenté l'allure de la surface d'interaction ainsi présumée. Nous avons porté en traits pointillés les génératrices représentant les solutions trouvées précédemment.



Comparaison avec les résultats pratiques :

Des essais ont été effectués au laboratoire sur un sable dont l'angle de frottement interne est  $\phi = 35^\circ$

Les dimensions du tube creux sont  $2a = 7 \text{ cm}$   $2b = 10 \text{ cm}$

Une pression isotrope  $P = 5 \text{ kg/cm}^2$  est appliquée sur l'échantillon.

L'effort  $Q'$  mesuré sur le piston de compression axiale vaut :

$$Q' = Q - P \pi (b^2 - a^2)$$

L'équation du cône dans l'espace  $P, Q, T$  est :

$$\left( \frac{Q}{\pi(b^2 - a^2)} - P \frac{1 + \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right)^2 + \left( \frac{3T}{\pi(b^2 - a^2) \cos^2 \phi} \right)^2 = 4P^2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos^4 \phi}$$

Soit :

$$\left( Q' \frac{\cos^2 \phi}{\pi(b^2 - a^2)} - 2P \sin^2 \phi \right)^2 + \left( \frac{3T}{\pi(b^2 - a^2)} \right)^2 = 4P^2 \sin^2 \phi$$

La section par le plan  $P = 5 \text{ kg/cm}^2$  a pour équation : (compte tenu de

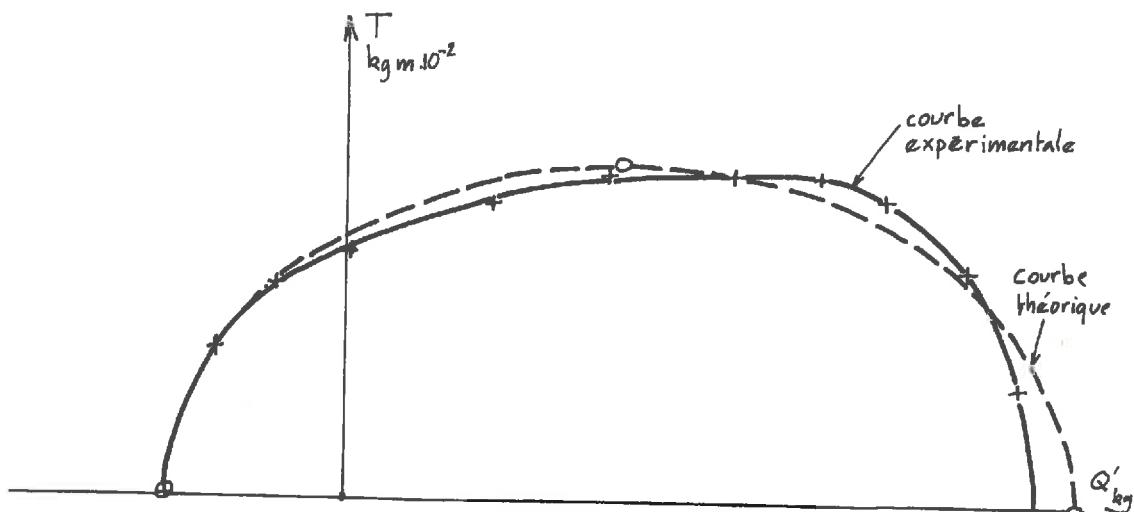
$$\cos \phi = 0,819 \quad \text{et} \quad \sin \phi = 0,574 \quad )$$

$$\left( \frac{Q' - 197}{343} \right)^2 + \left( \frac{T}{490} \right)^2 = 1$$

Les résultats expérimentaux ont été les suivants :

$Q'$ kg	-140	-50	0	98	187	270	344	393	452	491
$T$ $\text{kgm } 10^{-2}$	0	321	386	437	488	488	488	449	336	175

Comparons ces résultats avec le calcul que nous avons fait précédemment, en tracant sur le même schéma les deux courbes correspondantes :



Interaction sur un tube creux ; Sable  $\phi = 35^\circ$   $a = 3,5 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$   
 $P = 5 \text{ kg/cm}^2$

Nous constatons que la coïncidence des deux courbes est assez bonne.

## VII. CONCLUSION

Pour le matériau de TRESCA comme pour le matériau de COULOMB, nous avons montré que les régimes de face ne peuvent prendre place que pour des cas particuliers. Seuls les régimes d'arête permettent un jeu complet de sollicitations mais, là encore, nous ne pouvons pas explorer tout le problème puisque dans ce cas une relation doit exister entre  $P$  et  $Q$ .

Pourtant, la théorie des tubes minces et l'expérience montrent que le point représentatif de l'état de sollicitation décrit une surface. Ceci signifie que les sollicitations peuvent être quelconques (tout en restant inférieures à une certaine limite pour les matériaux de TRESCA).

Or, si nous revenons sur la discussion des différents régimes plastiques possibles, nous constatons que les incompatibilités proviennent toujours du champ cinématique. En effet, nous avons écrit d'une part que la déformation était homogène (ce qui est légitime pour un tube suffisamment long) et nous avons été conduits à une première expression de ce champ cinématique. Puis nous avons employé l'hypothèse du potentiel plastique non standard associé au critère d'écoulement, ce qui nous a conduit à une autre expression du champ cinématique, d'où les incompatibilités rencontrées.

Nous pouvons donc penser que l'hypothèse du potentiel plastique associé au critère d'écoulement est trop restrictive pour les matériaux de TRESCA et de COULOMB généralisé.

Nous pouvions d'ailleurs nous attendre à des incompatibilités. En effet, le potentiel plastique associé impose au vecteur  $\dot{\epsilon}$  de rester normal à la surface limite, ou à son intersection avec le plan déviatoire dans le cas du matériau de COULOMB généralisé.

Or les  $\dot{\epsilon}_{ij}$  sont des fonctions de  $r$ , donc elles varient en grandeur et en direction dans toute l'épaisseur du tube. Les seuls régimes permettant cette variation en direction sont les régimes d'arête (voir figure 1 ci-après).

Dans les cas particuliers où  $k_1 = k_3 = 0$  ou  $k_1 = k_2 = 0$ , la direction

du vecteur  $\vec{\epsilon}$  est indépendante de  $r$  et reste donc constante dans toute l'épaisseur du tube. D'où une solution possible pour les régimes correspondant à ces cas particuliers (voir figure 2 ci-après)

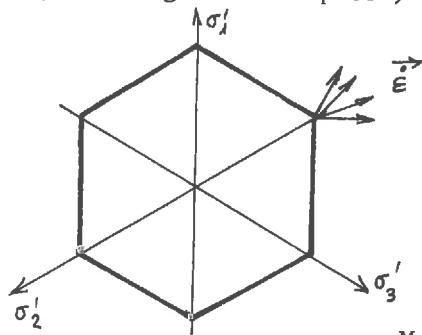


Fig. 1

Matériau de TRESCA

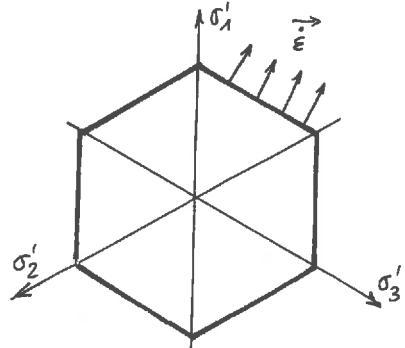
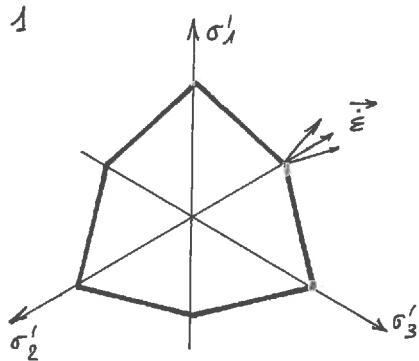


Fig. 2



Matériau de COULOMB généralisé

Il faudrait donc employer une autre loi d'écoulement. Il semble, d'après les résultats expérimentaux de HAYTHORNTHWAITE [8], qu'une loi d'écoulement demandant la proportionnalité des déviateurs des tenseurs contrainte et vitesse de déformation serait mieux adaptée (voir figure 3 ci-après)

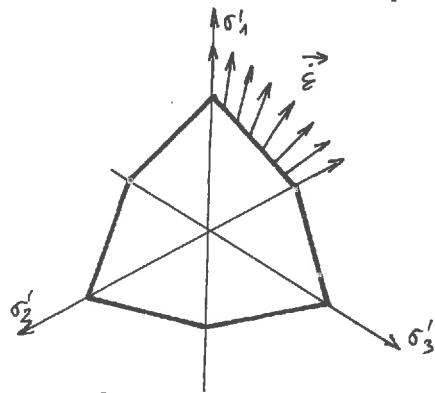


figure 3

Quand le point figuratif de l'état de contrainte décrit une face de la surface limite, la direction du vecteur  $\vec{\epsilon}$  varie. Il semble que les régimes de face pourraient alors conduire à une solution acceptable dans les cas de sollicitation les plus arbitraires.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 ALLEN D.N. de G. et SOPWITH D.G., "The stresses and strains in a partly plastic tube under internal pressure and end load", Proc. 7th Int. Cong. Appl. Mech., ( Cambridge, 1948 ), 403.
- 2 ANGLES d'AURIAC P., " Cours de mécanique des milieux continus ", Labo. Mec. Sols, Fac. Sciences, ( Grenoble, 1967 ).
- 3 COULOMB C.A., Mém. Math. et Phys., 7, 343, ( 1773 ).
- 4 COX A.D., EASON G. et HOPKINS H.G., " Axially symmetric plastic deformations in soils ", Phil. Trans. Roy. Soc., A- Math. Phys. Sciences, 1036, vol. 254, ( Londres, 1961 ).
- 5 FUNG Y.C. , " Foundations of solid mechanics ", Prentice Hall Inc., ( Englewood Cliffs, New - Jersey ).
- 6 GREEN A.E. et SHIELD R.T. , " Finite extension and torsion of cylinders" , Phil. Trans. Roy. Soc., A 244, ( Londres, 1951 ), 47-86.
- 7 HAAR A. et Von KARMAN TH., " Nachr. Ges. Wiss. ", ( Göttingen, 1909 ), 204.
- 8 HAYTHORNTHWAITE R.M., " Stress and strain in soils ", Proc. 2nd Symp. Nav. Struct. Mech., Pergamon Press, ( New York, 1960 ), 185-193.
- 9 HILL R. , " The mathematical theorie of plasticity ", Clarendon Press, ( Oxford, 1960 ).
- 10 HILL R. , LEE E.H. et TUPPER S.J., " The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure ", Proc. Roy. Soc., A 191, ( Londres, 1947 ), 278-303.

- 11 HODGE Jr P.G., " Rigid plastic analysis of symmetrically loaded shells " Trans. ASME, Jour. Appl. Mech., 76, ( 1954 ), 336-342.
- 12 HODGE Jr P.G. et PANARELLI J.E., " Plastic analysis of cylindrical shells under pressure, axial load and torque ", DOMIIT, Rep. 1 17, Illinois Institute pf Technologie, ( 1962 ).
- 13 KRAVTCHEKO J., " Cours de mécanique des solides ", Labo. Mec. Sols, Fac. Sciences, ( Grenoble, 1967 ).
- 14 LIPPmann H. , " Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow " , Jour. Mech. Phys. Solids, 13 , Pergamon Press, (1965),29-39.
- 15 LIPPmann H. , " Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation ", Jour. Mech. Phys. Solids, 10, Pergamon Press, ( 1962 ), 111-122.
- 16 MISES R. ( Von ), " Mechanik der plastischen formänderung von kristallen ", ZAMM, 8, ( 1928 ), 161-185.
- 17 NEGRE R. , " Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols et des matériaux pulvérulents et cohérents ", Thèse de Doctorat ès-Sciences, ( Grenoble, 1968 ).
- 18 NEGRE R. et STUTZ P., " Contribution à l'étude des fondations de révolution dans l'hypothèse de la plasticité parfaite ", Int. Jour. Solids Struct., 6, Pergamon Press, ( 1970 ), 53-68.
- 19 OLSZAK W.,PERZYNA P. et SAWCZUK A., " Théorie de la plasticité ", Edition d'Etat Scientifique, ( Varsovie, 1965 ).
- 20 PANARELLI J.E. et HODGE Jr P.G., " Interaction of pressure, end load and twisting moment for a rigid-plastic circular tube ", Trans ASME, Jour. Appl. Mech., pap. n° 63, ( 1962 ).
- 21 PRAGER W. et HODGE Jr P.G., " Theory of perfectly plastic solid ", John Wiley and Sons Inc., ( New York, 1951 ).
- 22 RADENKOVIC D., " Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée ", CRAS, 252, ( Paris, 1961 ), 4103.

- 23 SHIELD R.T., " On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry " , Proc. Roy. Soc., A 233 , ( Londres, 1965 ), 267.
- 24 SHIELD R.T., " On Coulomb's law of failure in soils " , Jour. Mech. Phys. Solids, 4 , ( 1965 ), 10-16.
- 25 SIRYES P.M., " Cours de Plasticité " , Labo. Mec. Sols, Fac. Sciences, ( Grenoble, 1967 ).
- 26 STUTZ P., " Contribution à l'étude de la loi de déformation plastique des Sols " , Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, ( Grenoble , 1963 ).
- 27 SUKŁJE L. et DRNOVŠEK J., " Investigation of the tensile deformability of soils using hollow cylinders " , Proc. 6th Conf. Soil Mech. , ( Canada, 1965 ).
- 28 TRESCA H. , " Mémoire présenté à l'Académie des Sciences " , 18 , ( Paris, 1868 ), 733.